

# 12

## *Valení, moment síly a moment hybnosti*

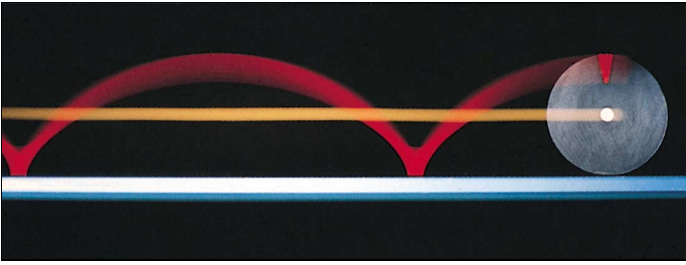


---

*K nejobtížnějším varietním číslům patří bezesporu vícenásobná salta. Trojité salto se poprvé povedlo již v roce 1897 jednomu z tehdy populárních vzdušných akrobatů při skoku z visuté hrazdy, na čtyřnásobné si však milovníci těchto atrakcí museli počkat ještě dalších 85 let, do roku 1982.*

*Migueli Vazquesovi se tehdy podařilo provést během letu celé čtyři otáčky, než ho zachytil jeho bratr Juan. Oba artisté byli v té chvíli svým výkonem téměř zaskočení. Proč je vícenásobné salto tak obtížné? Může k jeho zvládnutí nějak napomoci znalost fyzikálních zákonů?*

---



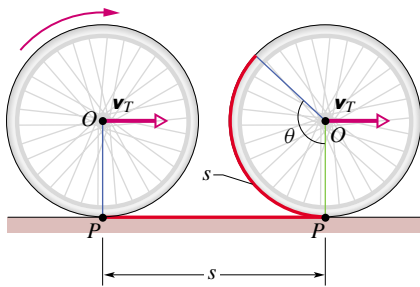
**Obr. 12.1** Fotografie valícího se kotouče získaná při dlouhé expoziční době. Na kotouči jsou připevněny dva bodové zdroje světla, jeden v jeho středu a jeden na obvodu. Světélko umístěné na obvodu opisuje křivku zvanou *cykloida*.

## 12.1 VALENÍ

Všimněme si pohybu jednotlivých částí kola při jízdě cyklisty po přímé silnici. Středů obou kol se pohybují vpřed, jejich pohyb je posuvný. Trajektorie bodů na obvodu kol jsou však mnohem složitější (obr. 12.1). Ukážeme si, že pohyb valícího se kola lze chápat buď jako složení posuvného a otáčivého pohybu, nebo jako čistě otáčivý pohyb kolem vhodně zvolené osy.

### Valení jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu

Pozorujme bicyklové kolo, které se odvaluje stálou rychlostí po přímé dráze a neprokluzuje. Předpokládejme, že hmotnost kola je rozložena symetricky, takže jeho těžiště splývá s jeho geometrickým středem  $O$ . Bod  $O$  se pohybuje vpřed stálou rychlostí  $\mathbf{v}_T$  podle obr. 12.2. Bod  $P$ , v němž se kolo dotýká silnice, je v každém okamžiku přesně pod bodem  $O$ . Pohybuje se tedy po silnici stejnou rychlostí  $\mathbf{v}_T$  jako těžiště kola.



**Obr. 12.2** Těžiště  $O$  valícího se kola se pohybuje rychlostí  $\mathbf{v}_T$  a za dobu  $t$  urazí dráhu  $s$ . Kolo se přitom pootočí o úhel  $\theta$ . Bod dotyku  $P$  kola se zemí urazí za tuto dobu rovněž dráhu  $s$ .

Za dobu  $t$  urazí body  $O$  a  $P$  dráhu  $s$ . Z pohledu cyklisty se při tom kolo otočí kolem svého středu o úhel  $\theta$ . Také délka oblouku části pneumatiky, která během doby  $t$  přišla

do styku se silnicí, je  $s$ . Tuto dráhu urazil z pohledu cyklisty bod na pneumatice, který se dotýkal silnice na počátku měření. Vztah mezi délkou oblouku  $s$  a otočením  $\theta$  je velmi jednoduchý. Platí totiž rov. (11.15):

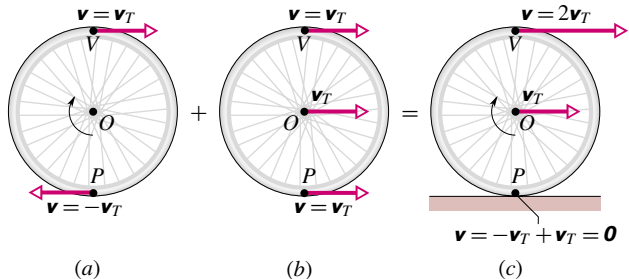
$$s = R\theta, \quad (12.1)$$

kde  $R$  je poloměr kola. Rychlost středu kola  $\mathbf{v}_T$  má velikost  $ds/dt$ , úhlová rychlost kola  $\omega$  vzhledem k ose vedené jeho středem je  $d\theta/dt$ . Derivováním rov. (12.1) podle času dostaneme

$$v_T = \omega R. \quad (12.2)$$

Uvědomme si, že rov. (12.2) platí pouze v případě, že se kolo valí *bez prokluzování*.

Obr. 12.3 nás přesvědčí, že valení kola můžeme chápat jako složení posuvného a otáčivého pohybu. Obr. 12.3a znázorňuje pouze otáčení kola, tj. jeho pohyb z pohledu cyklisty, který vidí osu otáčení jako nepohyblivou. (Otáčivý pohyb kolem pevné osy jsme podrobně probrali v kap. 11.) Každý bod kola rotuje kolem této osy úhlovou rychlostí  $\omega$ . Libovolný bod na jeho vnějším obvodu má obvodovou rychlost  $v_T$ , danou vztahem (12.2). Obr. 12.3b zachycuje pouze posuvný pohyb kola, který bychom pozorovali, kdyby se kolo vůbec neotáčelo. Každý jeho bod by se v takovém případě pohyboval doprava rychlostí  $\mathbf{v}_T$ .



**Obr. 12.3** Valení kola jako kombinace posuvného a otáčivého pohybu. (a) Otáčení kola: všechny body kola obíhají se stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ . Body na jeho vnějším obvodu mají stejnou obvodovou rychlost  $v = v_T$ . V obrázku jsou vyznačeny vektory rychlosti  $\mathbf{v}$  nejvýše a nejnižše položeného bodu kola  $V$ , resp.  $P$ . (b) Posuv kola: všechny body se pohybují doprava se stejnou rychlostí  $\mathbf{v}_T$ , shodnou s rychlostí středu  $O$ . (c) Valivý pohyb kola je složením pohybů (a) a (b).

Složením pohybů na obr. 12.3a, b vznikne výsledný valivý pohyb, který vidíme na obr. 12.3c. Všimněme si, že body v bezprostřední blízkosti bodu  $P$  jsou téměř v klidu, zatímco body u vrcholu  $V$  se pohybují rychleji než kterákoli jiná část kola, rychlostí blízkou  $2v_T$ . Fotografie



**Obr. 12.4** Fotografie valícího se bicyklového kola. Obraz kovových paprsků v dolní části fotografie je podstatně ostřejší než nahoře. Pohyb paprsků v horní části kola je tedy rychlejší, ve shodě s obr. 12.3c.

valícího se bicyklového kola na obr. 12.4 to dokumentuje velmi přesvědčivě. Obraz drátů u vrcholu kola je zcela rozmazán, zatímco dráty ve spodní části jsou zachyceny poměrně ostře.

Valení libovolného tělesa kruhového průřezu lze tedy rozložit na „čisté“ otáčení a „čistý“ posuv, přesně podle obr. 12.3a, b.

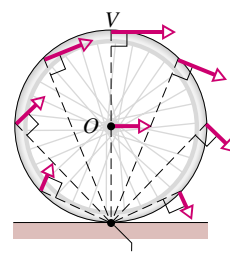
### Valení jako otáčivý pohyb

Jiný způsob pohledu na valivý pohyb nabízí obr. 12.5. Můžeme jej totiž interpretovat také jako „čisté“ otáčení kolem *okamžité* osy, která je kolmá k rovině kola a právě prochází bodem jeho dotyku se silnicí (bod  $P$  na obr. 12.5). Okamžité rychlosti jednotlivých bodů valícího se kola jsou v obr. 12.5 vyznačeny šipkami.

**Otázka:** Jakou úhlovou rychlost přisoudí kolu pozorovatel v klidu, posuzuje-li jeho pohyb jako otáčení kolem této nové osy?

**Odpověď:** Úhlová rychlost otáčivého pohybu kola vzhledem ke klidnému pozorovateli je stejná jako vzhledem k cyklistovi, který pozoruje „čistou“ rotaci kola kolem osy vedené jeho středem.

Abychom se o správnosti odpovědi na předchozí otázku přesvědčili, vypočítáme rychlost bodu  $V$  na vrcholu kola ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Vzdálenost vrcholu  $V$  od osy vedené bodem  $P$  na obr. 12.5 je rovna průměru kola  $2R$ . Bod  $V$  se tedy podle rov. (12.2)



osa otáčení vedená bodem  $P$

**Obr. 12.5** Valivý pohyb může být chápán jako otáčení s úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy, která v každém okamžiku prochází bodem  $P$ . Šipky znázorňují vektory okamžité rychlosti vybraných bodů na obvodu kola. Lze je získat sečtením odpovídajících rychlostí posuvného a otáčivého pohybu podle obr. 12.3.

pohybuje rychlostí o velikosti

$$v_{\text{vrchol}} = (\omega)(2R) = 2(\omega R) = 2v_T,$$

přesně v soulasu s obr. 12.3c. Podobně můžeme určit rychlosti bodů  $O$  a  $P$  a ověřit tak správnost obr. 12.3c.

**KONTROLA 1:** Zadní kolo klaunova jízdního kola má dvakrát větší poloměr než kolo přední. (a) Rozhodněte, zda je rychlost bodu na vrcholu zadního kola větší, menší, nebo stejná jako rychlost odpovídajícího bodu předního kola. (b) Rozhodněte, zda je úhlová rychlost zadního kola větší, menší, nebo stejná jako úhlová rychlost předního kola.

Obruč na obrázku se valí bez prokluzování. Kdo jde rychleji? Pes nebo poník?



## Kinetická energie

Pokusme se nyní vypočítat kinetickou energii valícího se kola vzhledem k vztažné soustavě spojené s pozorovatelem v klidu. Chápeme-li valení jako otáčení kolem osy vedené bodem  $P$  na obr. 12.5, dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (12.3)$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost kola a  $I_P$  jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené bodem  $P$ . Podle Steinerovy věty (11.27) je

$$I_P = I_T + mR^2, \quad (12.4)$$

kde  $m$  je hmotnost kola a  $I_T$  jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Dosazením z rovnice (12.4) do (12.3) dostáváme

$$E_k = \frac{1}{2} I_T \omega^2 + \frac{1}{2} m R^2 \omega^2.$$

Pomocí vztahu  $v_T = \omega R$  (rov. (12.2)) získáme nakonec výsledný vztah pro  $E_k$  ve tvaru

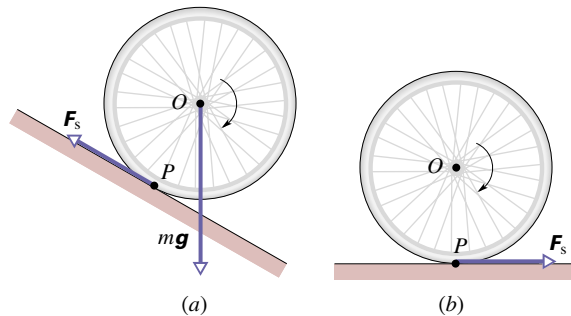
$$E_k = \frac{1}{2} I_T \omega^2 + \frac{1}{2} m v_T^2. \quad (12.5)$$

První z členů na pravé straně této rovnice představuje kinetickou energii otáčivého pohybu kola kolem osy vedené jeho těžištěm (obr. 12.3a), druhý člen odpovídá pohybu posuvnému (obr. 12.3b).

## Valení a třecí síly

Jakou roli vlastně hrají při valivém pohybu třecí síly? Představme si, že se kolo valí po vodorovné podložce stálou rychlostí, právě tak, jak ukazuje obr. 12.2. Mohli bychom je do takového pohybu vůbec uvést, kdyby byla podložka dokonale hladká? Pokud bychom je roztočili kolem jeho osy na úhlovou rychlost  $\omega$  a udělili mu ještě vodorovnou rychlost o velikosti  $v_T = \omega R$ , mohlo by se to podařit. Vzhledem k přesně „nastavenému“ vztahu mezi úhlovou rychlostí kola a rychlostí jeho posuvného pohybu by kolo v bodě  $P$  samozřejmě neprokluzovalo, nesmýkalo by se po podložce. Popsaným způsobem však můžeme uvést kolo do valivého pohybu bez klouzání i v případě, že podložka *nebude* dokonale hladká. Kolo se po ní nebude smýkat ani v tomto případě. Zanedbáme-li tzv. valivý odpor podložky proti jeho pohybu, způsobený mírnými deformacemi obou objektů, snadno si uvědomíme, že jedinou silou, kterou by podložka *mohla* na kolo působit, je vodorovná síla statického tření. Posuvný pohyb kola je však podle předpokladu rovnoměrný a žádnou další vodorovnou silou na kolo nepůsobíme. Statická třecí síla je proto nulová. Jiná situace

nastane, pokusíme-li se změnit postupnou ( $v_T$ ) nebo úhlovou ( $\omega$ ) rychlost kola. V takovém případě musíme na kolo působit určitou vodorovnou silou a připustit, že se kolo může v bodě  $P$  smýknout po podložce. Podložka bude na kolo působit v bodě  $P$  třecí silou. Pokud ke smyku kola ještě nedojde, bude tato síla  $\mathbf{F}_s$  mít povahu *statického* tření a bude směřovat „proti snaze“ kola podklouznout. V případě smyku již půjde o tření *dynamické* a třecí síla  $\mathbf{F}_d$  bude namířena proti směru *skutečného* skluzu.



**Obr. 12.6** (a) Kolo se valí bez klouzání po nakloněné rovině. V bodě  $P$  na ně působí síla statického tření  $\mathbf{F}_s$  proti „snaze“ kola sklouznout, tj. proti směru, ve kterém by kolo v bodě  $P$  uklouzlo, kdyby byla podložka dokonale hladká. (b) Kolo se valí vodorovně s narůstající úhlovou rychlostí. Bod  $P$  má v tomto případě snahu uklouznout směrem dozadu (představte si automobil, který se prudce rozjíždí na zledovatěném parkovišti). Síla statického tření  $\mathbf{F}_s$  působí na kolo v bodě  $P$  opět *proti* jeho možnému skluzu. Pokud by se již kolo na obrázcích (a) a (b) smýkalo, působila by na ně podložka v bodě  $P$  silou dynamického tření  $\mathbf{F}_d$ .

Na obr. 12.6a se kolo valí po nakloněné rovině. V jeho těžišti na ně působí tíhová síla  $m\mathbf{g}$ , jejíž rameno vzhledem k ose otáčení vedené těžištěm je nulové. Je tedy nulový i odpovídající silový moment. Tíhová síla nepřispívá k roztáčení kola, pouze se snaží kolo smýkat dolů po nakloněné rovině. V bodě  $P$  působí na kolo ještě třecí síla směřující proti jeho „tendenci ke skluzu“, tj. vzhůru podél nakloněné roviny. Její rameno vzhledem k ose otáčení kola je *nenulové* a má velikost poloměru kola. Moment třecí síly roztáčí kolo vzhledem k ose vedené jeho středem.

Na obr. 12.6b se kolo valí po vodorovné rovině s narůstající úhlovou rychlostí  $\omega$ . Při tom se jeho spodní část snaží podklouznout doleva. (Abychom si tuto skutečnost lépe uvědomili, můžeme si představit automobil, jehož řidič se snaží o prudký rozjezd na zledovatěném parkovišti.) Třecí síla, jíž působí podložka na kolo v bodě  $P$ , směřuje opět proti očekávanému směru skluzu. Z hlediska soustavy cyklista + jízdní kolo je silou vnější a určuje zrychlení jejího těžiště.

**PŘÍKLAD 12.1**

Tuhý homogenní válcový kotouč o hmotnosti  $m = 1,4 \text{ kg}$  a poloměru  $R = 8,5 \text{ cm}$  se valí po vodorovném stole rychlostí  $v = 15 \text{ cm/s}$ .

(a) Vypočítejte rychlost bodu na jeho vrcholu.

**ŘEŠENÍ:** „Rychlostí valícího se tělesa“, v našem příkladu kotouče, rozumíme vždy rychlost jeho těžiště. Z obr. 12.3c je zřejmé, že rychlost bodu na vrcholu kotouče je v porovnání s rychlostí jeho těžiště dvojnásobná, tj.

$$v_{\text{vrchol}} = 2v_T = 2(15 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}) = 30 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Určete úhlovou rychlost kotouče  $\omega$ .

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (12.2) dostaneme

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_T}{R} = \frac{(15 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1})}{(8,5 \text{ cm})} = \\ &= 1,8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0,28 \text{ ot/s}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Výsledek je nezávislý na volbě polohy osy otáčení: můžeme ji vést bodem  $P$  podle obr. 12.5 stejně dobře jako těžištěm kotouče.

(c) Vypočítejte kinetickou energii kotouče.

**ŘEŠENÍ:** Užitím vztahů  $I_T = \frac{1}{2}mR^2$ ,  $v_T = \omega R$  a rovnice (12.5) dostaneme

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}I_T\omega^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)(v_T/R)^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{3}{4}mv_T^2 = \\ &= \frac{3}{4}(1,4 \text{ kg})(0,15 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = \\ &= 0,024 \text{ J} = 24 \text{ mJ}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(d) Jaká část celkové kinetické energie kotouče souvisí s jeho posuvným pohybem a jaká část přísluší otáčivému pohybu kolem osy vedené jeho těžištěm?

**ŘEŠENÍ:** Kinetická energie posuvného pohybu odpovídá druhému členu v rov. (12.5), tj.  $\frac{1}{2}mv_T^2$ , a podle výsledku části (c) tedy představuje

$$\frac{\frac{1}{2}mv_T^2}{\frac{3}{4}mv_T^2} = \frac{2}{3} \doteq 67\% \quad (\text{Odpověď})$$

celkové kinetické energie. Zbývajících 33 % odpovídá pohybu otáčivému.

Příspěvek posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa závisí na jeho momentu setrvačnosti. V tab. 12.1 jsou shrnuty momenty setrvačnosti tří těles, prstence, válcového kotouče a koule, vzhledem k ose největší symetrie. Prstavec má svou hmotnost rozloženou ze všech těles nejdále od této osy. Poměrně velká část kinetické energie valícího se prstence proto připadá na otáčivý pohyb.

Koule, jejíž hmotnost je rozložena blízko osy otáčení, má moment setrvačnosti nejmenší. Příspěvek její rotace k celkové kinetické energii valivého pohybu je tedy malý.

Moment setrvačnosti obecného rotačně symetrického tělesa je možné zapsat jako  $\beta$ -násobek momentu setrvačnosti prstence stejné hmotnosti, jehož poloměr  $R$  je shodným s poloměrem největšího řezu tělesa rovinou kolmou k ose symetrie. Je-li těleso homogenní, lze pomocí parametru  $\beta$  vyjádřit zvlášť příspěvky posuvného a otáčivého pohybu k celkové kinetické energii valícího se tělesa. Odpovídající vztahy pro prstavec, válec a kouli jsou uvedeny v posledním řádku tab. 12.1. Pro prstavec, válec a kouli nabývá parametr  $\beta$  hodnot  $1$ ,  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{2}{5}$ .

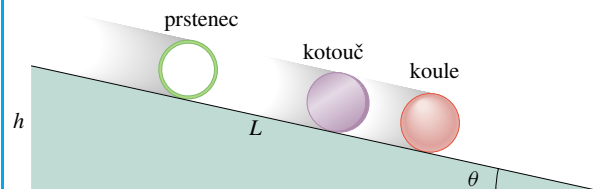
**Tabulka 12.1 Podíl kinetické energie translačního a rotačního pohybu na celkové kinetické energii valivého pohybu těles**

TĚLESO	MOMENT SETRVAČNOSTI	PŘÍSP. K CELK. ENERGIÍ	
	$I_T$	TRANSLACE	ROTACE
Prstavec	$1mR^2$	50 %	50 %
Válec, válc. kotouč	$\frac{1}{2}mR^2$	67 %	33 %
Koule	$\frac{2}{5}mR^2$	71 %	29 %
Obecné těleso <sup>a</sup>	$\beta mR^2$	$100 \frac{1}{1+\beta} \%$	$100 \frac{\beta}{1+\beta} \%$

<sup>a</sup> Hodnotu  $\beta$  určíme jako  $\beta = I_T / (mR^2)$ .

**PŘÍKLAD 12.2**

Homogenní kuželková koule o poloměru  $R = 11 \text{ cm}$  a hmotnosti  $m = 7,2 \text{ kg}$  se valí dolů po nakloněné rovině o délce  $L = 2,1 \text{ m}$  a úhlu sklonu  $\theta = 34^\circ$  (obr. 12.7). Jakou rychlostí se bude koule pohybovat na konci nakloněné roviny?



**Obr. 12.7** Příklady 12.2 a 12.3. Prstavec, kotouč a koule se valí dolů po nakloněné rovině o úhlu sklonu  $\theta$ . Přestože tělesa uvolníme ve stejném místě a stejném okamžiku, dorazí na konec nakloněné roviny v různém pořadí.

**ŘEŠENÍ:** Uvažujme pohyb koule od okamžiku jejího uvolnění v nejvyšším bodě nakloněné roviny až do chvíle, kdy dorazí k jejímu konci. Těžiště koule pokleslo během tohoto pohybu o svislou vzdálenost  $h = L \sin \theta$ . Tíhová potenciální energie soustavy koule + Země se tak snížila o hodnotu  $mgL \sin \theta$ . O stejnou hodnotu však vzrostla kinetická energie

koule. Podle rov. (12.5) platí

$$mgL \sin \theta = \frac{1}{2}I_T \omega^2 + \frac{1}{2}mv_T^2. \quad (12.6)$$

Podle vztahu (g) v tab. 11.2 platí pro plnou kouli  $I_T = \frac{2}{5}mR^2$ . Úhlovou rychlost  $\omega$  můžeme nahradit výrazem  $v_T/R$ . Dosažením do rov. (12.6) dostáváme

$$mgL \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}(mR^2) \left(\frac{v_T}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Z této rovnice vyjádříme  $v_T$ :

$$\begin{aligned} v_T &= \sqrt{\frac{10}{7}gL \sin \theta} = \\ &= \sqrt{\frac{10}{7}(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2,1 \text{ m}) \sin 34^\circ} = \\ &= 4,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na hmotnosti, ani na poloměru koule.

### PŘÍKLAD 12.3

Úvahy v př. 12.2 nyní zobecníme. Homogenní prstenec, kotouč a koule o stejné hmotnosti  $m$  a stejném poloměru  $R$  jsou současně uvolněny v nejvyšším bodě nakloněné roviny o délce  $L = 2,5 \text{ m}$  a úhlu sklonu  $\theta = 12^\circ$  (obr. 12.7).

(a) Které z těles dorazí na konec nakloněné roviny nejdříve?

**ŘEŠENÍ:** Odpověď snadno najdeme v tab. 12.1. U koule je poměrný příspěvek posuvného pohybu k celkové kinetické energii ze všech tří těles největší (71 %). Koule tedy závod vyhraje. Jako druhý skončí kotouč a poslední bude prstenec.

(b) Určete rychlost každého z těles na konci nakloněné roviny.

**ŘEŠENÍ:** Těžiště každého z těles poklesne během „závodu“ o tutéž svislou vzdálenost  $h$ . Stejně jako při volném pádu klesne potenciální energie soustavy těleso + Země o hodnotu  $mgh$ . O stejnou hodnotu vzroste kinetická energie tělesa. Na konci nakloněné roviny mají tedy všechna tělesa stejnou kinetickou energii. Pouze část této energie, závislá na rozložení hmotnosti tělesa, však připadá na posuvný pohyb.

V rov. (12.5) položíme  $\omega = v_T/R$  a dostaneme

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}I_T \omega^2 + \frac{1}{2}mv_T^2 = \\ &= \frac{1}{2}I_T (v_T^2/R^2) + \frac{1}{2}mv_T^2 = \\ &= \frac{1}{2}(I_T/R^2)v_T^2 + \frac{1}{2}mv_T^2. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Po dosažení  $h = L \sin \theta$  vyřešíme získanou rovnici vzhledem k neznámé  $v_T$ :

$$v_T = \sqrt{\frac{2gL \sin \theta}{1 + I_T/mR^2}}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (12.8)$$

Řešení je vyjádřeno pomocí momentu setrvačnosti tělesa  $I_T$ .

Všimněme si, že rychlost tělesa nezávisí ani na jeho hmotnosti ani na poloměru, ale pouze na rozložení hmoty kolem osy jeho rotační symetrie. Tato skutečnost je z výsledku (12.8) patrná na první pohled. Moment setrvačnosti tělesa  $I_T$  v něm totiž vystupuje pouze v podílu  $I_T/mR^2$ . Dětská hrací kulička i kuželková koule budou mít na konci nakloněné roviny stejnou rychlost. Z nakloněné roviny se tedy skutálí za stejnou dobu. Koule v tomto závodě porazí kotouč libovolné hmotnosti a poloměru. Prstenec o libovolné hmotnosti i poloměru je naopak za všech okolností odsouzen k porážce.

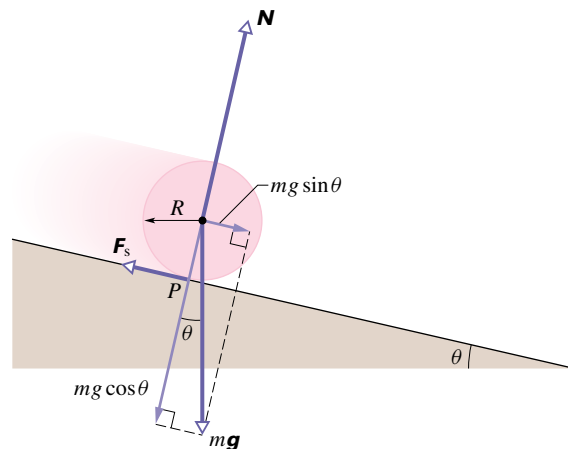
Pro prstenec (viz tab. 12.1) je  $I_T/mR^2 = 1$ . Jeho rychlost na konci „závodní dráhy“ je podle rov. (12.8)

$$\begin{aligned} v_T &= \sqrt{\frac{2gL \sin \theta}{1 + I_T/mR^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2(9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})(2,5 \text{ m}) \sin 12^\circ}{1 + 1}} = \\ &= 2,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Podobně získáme  $v_T = 2,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pro kotouč ( $I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$ ) a  $2,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pro kouli ( $I_T/mR^2 = \frac{2}{5}$ ). Tyto výsledky potvrzují náš odhad pořadí těles v části (a).

### PŘÍKLAD 12.4

Uvažujme opět těleso o hmotnosti  $m$  a kruhovém průřezu o poloměru  $R$ , které se valí po nakloněné rovině o úhlu sklonu  $\theta$  (obr. 12.8). Při rozboru jeho pohybu se však nyní opřeme pouze o věty o hybnosti a o momentu hybnosti soustavy. Výsledek pak porovnáme s řešením př. 12.3, kde jsme použili zákon zachování mechanické energie.



**Obr. 12.8** Příklad 12.4. Homogenní těleso kruhového průřezu o poloměru  $R$  se valí dolů po nakloněné rovině. Země na ně působí tíhovou silou  $mg$ , podložka pak normálovou silou  $N$  a třecí silou  $F_s$ . Třecí síla směřuje vzhůru podél nakloněné roviny. Působíště síly  $N$  jsme pro přehlednost přesunuli podél její vektorové přímky do středu tělesa.

(a) Vypočítejte zrychlení valčícího se tělesa.

**ŘEŠENÍ:** Na obr. 12.8 jsou znázorněny síly, kterými na těleso působí okolní objekty: tíhová síla  $m\mathbf{g}$ , normálová síla  $\mathbf{N}$  a statická třecí síla  $\mathbf{F}_s$ . Působišťem tíhové síly je těžiště tělesa. Je-li hmotnost tělesa rozložena symetricky vzhledem k ose  $o$  jeho geometrické rotační symetrie, splývá těžiště se středem geometrickým. Normálová síla a síla tření působí na nepatrnou plošku v okolí bodu  $P$ , kde se těleso dotýká nakloněné roviny. Momenty všech sil vztahujeme k ose  $o$ . Momenty tíhové a normálové síly vzhledem k této ose jsou ovšem nulové, a nepřispívají proto k urychlování otáčivého pohybu. Roztáčení tělesa ve směru chodu hodinových ručiček je způsobeno výhradně silou tření, jejíž moment je záporný. Rameno třecí síly vzhledem k ose  $o$  má délku  $R$ .

Pro posuvný pohyb tělesa platí věta o hybnosti ( $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$ ). V soustavě souřadnic, jejíž osa  $x$  směřuje vzhůru podél nakloněné roviny, má zápis  $x$ -ové složky této vektorové rovnice tvar

$$ma_x = \sum F_x = F_s - mg \sin \theta. \quad (12.9)$$

Rovnice obsahuje dvě neznámé,  $F_s$  a  $a_x$ . Potřebujeme pro ně další rovnici. Získáme ji z věty o momentu hybnosti ( $I\varepsilon = \sum M$ ) vztahené k ose  $o$ , v níž použijeme vztah  $\varepsilon = a_x/R$  (rov. (11.20)):

$$\sum M = -F_s R = I_T \varepsilon = \frac{I_T a_x}{R}. \quad (12.10)$$

Z rov. (12.10) dostaneme výraz pro sílu tření

$$F_s = -\frac{I_T a_x}{R^2}. \quad (12.11)$$

Znaménko minus znamená, že vektor třecí síly  $\mathbf{F}_s$  má opačný směr než vektor zrychlení  $\mathbf{a}$ . Dosazením z rov. (12.11) do (12.9) a řešením vzhledem k neznámé veličině  $a_x$  nakonec dostáváme

$$a_x = -\frac{g \sin \theta}{1 + I_T/mR^2}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (12.12)$$

(Větu o momentu hybnosti  $I\varepsilon = \sum M$  jsme v kap. 11 odvodili pro otáčivý pohyb tělesa kolem osy, která je v klidu vzhledem ke vhodně zvolené inerciální vztahné soustavě. Poměrně elementárním výpočtem však lze ukázat, že její platnost zůstane zachována i pro případ, že osa otáčení je nepohyblivá ve vztahné soustavě spojené s těžištěm tělesa, jejíž pohyb vzhledem k soustavám inerciálním je pouze posuvný. Uvědomme si, že tato speciální *těžišťová* vztahná soustava může být i neinerciální.)

Při řešení úlohy bychom mohli vztáhnout větu o momentu hybnosti i k ose  $o_P$  vedené bodem  $P$ , v němž se těleso *dotýká* nakloněné roviny. Moment třecí síly vzhledem k této ose je nulový. V roli výsledného momentu sil  $\sum M$  vystupuje nyní

moment tíhové síly  $m\mathbf{g}$ , jejíž rameno vzhledem k ose  $o_P$  má hodnotu  $R \sin \theta$ . Dostáváme tedy

$$\sum M = -mg(R \sin \theta) = I_P \varepsilon = \frac{I_P a_x}{R}, \quad (12.13)$$

kde  $I_P$  je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose  $o_P$ , vedené bodem  $P$ . Vypočteme jej pomocí Steinerovy věty

$$I_P = I_T + mR^2. \quad (12.14)$$

Dosadíme za  $I_P$  z rov. (12.14) do (12.13) a vyjádříme neznámou  $a_x$ , dostaneme opět výsledek (12.12).

(b) Vypočítejte velikost třecí síly  $F_s$ .

**ŘEŠENÍ:** Dosazením z rov. (12.12) do (12.11) dostaneme

$$F_s = mg \frac{\sin \theta}{1 + mR^2/I_T}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (12.15)$$

Z tohoto výsledku vyplývá, že síla tření je menší než průmět tíhové síly do směru nakloněné roviny, jehož velikost je  $mg \sin \theta$ . Těleso se proto valí dolů zrychleně.

Například pro plný kotouč je podle tab. 12.1  $I_T/mR^2 = \frac{1}{2}$ . Pro zrychlení a velikost třecí síly pak z rov. (12.12) a (12.15) dostáváme

$$a_x = -\frac{2}{3}g \sin \theta \quad \text{a} \quad F_s = \frac{1}{3}mg \sin \theta.$$

(c) Určete rychlost tělesa na konci nakloněné roviny o délce  $L$ .

**ŘEŠENÍ:** Těleso se pohybuje podél osy  $x$  s konstantním zrychlením. Platí tedy

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (12.16)$$

Položíme-li  $x - x_0 = -L$  a  $v_0 = 0$  a dosadíme-li za  $a_x$  výsledek (12.12), získáme rov. (12.8), přesně ve shodě s výpočtem pomocí zákona zachování mechanické energie.

**KONTROLA 2:** Stejně kotouče A a B se valí po vodorovné podlaze stejnou rychlostí. Kotouč A najede na nakloněnou rovinu a valí se po ní bez prokluzu vzhůru až do bodu obratu, který leží nad úrovní podlahy ve výšce  $h$ . Kotouč B stoupá po stejné nakloněné rovině, která je však dokonale hladká. Rozhodněte, zda je výška bodu obratu kotouče B nad úrovní podlahy větší, menší, či stejná jako  $h$ .

## 12.2 JOJO

Oblíbená hračka zvaná **jojo**, to je fyzikální laboratoř, která se vejde do kapsy. Nevěříte? Ukážeme si, co všechno lze pomocí pohybu joja demonstrovat. Představme si, že se jojo odvaluje podél vlákna dolů a urazí vzdálenost  $h$ . Potenciální energie soustavy jojo + Země při tom poklesne o hodnotu  $mgh$ , o kterou naopak vzroste energie kinetická. Tato změna přispěje ke zvýšení kinetické energie posuvného ( $\frac{1}{2}mv_T^2$ ) i otáčivého ( $\frac{1}{2}I_T\omega^2$ ) pohybu joja. Při zpětném pohybu hračky je naopak pokles kinetické energie kompenzován vzrůstem energie potenciální.

V modernějším provedení není vlákno joja pevně přivázáno k osičce, ale vytváří kolem ní volnou smyčku. Jakmile tělísko joja „nrazí“ na dolní konec vlákna, začne vlákno působit na osičku svislou silou směřující vzhůru. Tato síla zastaví pokles tělíska, které pak spočívá ve smyčce vlákna a otáčí se kolem své osy. Jeho celková kinetická energie bude v tuto chvíli dána pouze kinetickou energií otáčivého pohybu. Takové „spící“ jojo můžeme opět „probudit“ zatáhnutím za vlákno. Vlákno se třením zachytí za osičku a jojo po něm začne „šplhat“ nahoru. Kinetickou energii otáčivého pohybu tělíska v nejnižší poloze (tedy ve spícím stavu) lze výrazně zvýšit, nebude-li se jojo roztáčet z klidu, ale udělíme-li mu určitou počáteční rychlost  $v_T$  (směrem dolů) a určitou počáteční úhlovou rychlost  $\omega$ .

Zabývejme se nyní podrobněji pohybem hračky na základě impulzových vět. Na obr. 12.9a vidíme idealizované jojo se zanedbatelnou tloušťkou vlákna. Obr. 12.9b představuje příslušný silový diagram, v němž je vyznačena pouze osička. Odvodíme vztah pro zrychlení  $\mathbf{a}$  tělíska. Pro posuvný pohyb použijeme větu o hybnosti ( $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$ ). V soustavě souřadnic s osou  $x$  namířenou svisle vzhůru dostaneme

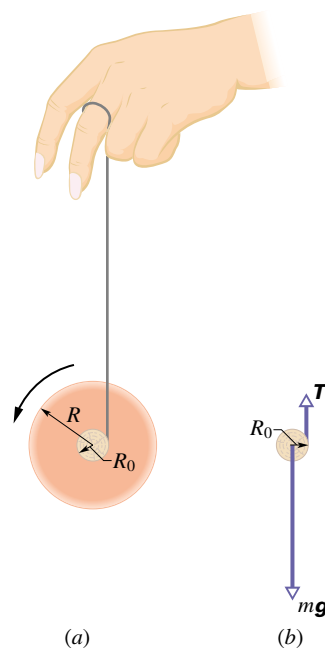
$$ma_x = \sum F_x = T - mg. \quad (12.17)$$

Symbolem  $m$  jsme označili hmotnost tělíska a  $T$  představuje velikost tahové síly vlákna.

Pro rotační pohyb máme k dispozici větu o momentu hybnosti ( $I\varepsilon = \sum M$ ), kterou vztáhneme k ose vedené těžištěm joja:

$$I\varepsilon = \sum M = TR_0, \quad (12.18)$$

kde  $R_0$  je poloměr osičky a  $I$  moment setrvačnosti joja vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Zrychlení  $\mathbf{a}$  směřuje dolů (složka  $a_x$  je tedy *záporná*). Síly působící na jojo jsou, včetně správné orientace, zakresleny v obr. 12.9b. Moment tíhové síly vzhledem k ose vedené těžištěm tělíska je nulový, moment síly tahové je orientován proti směru otáčení hodinových ručiček. Úhlové zrychlení  $\varepsilon$  směřuje tedy rovněž proti směru otáčení hodinových ručiček (je *kladné*).



**Obr. 12.9** (a) Jojo. Vlákno zanedbatelného průměru je navinuto na osičce o poloměru  $R_0$ . (b) Silový diagram tělíska při pádu. Ve skutečnosti nelze průměr vlákna zcela zanedbat, a tak je třeba počítat s efektivní změnou poloměru osičky, v závislosti na okamžité délce navinutého vlákna.

Veličiny  $a$  a  $\varepsilon$  jsou proto spjaty vztahem  $a_x = -\varepsilon R_0$ . Dosazením  $\varepsilon = -a_x/R_0$  do rov. (12.18) dostáváme

$$TR_0 = -\frac{Ia_x}{R_0}.$$

Z tohoto vztahu vyjádříme  $T$  a dosadíme do rov. (12.17). Nakonec získáme zrychlení tělíska ve tvaru

$$a_x = -g \frac{1}{1 + I/mR_0^2}. \quad (12.19)$$

Ideální jojo se tedy odvaluje podél vlákna dolů s konstantním zrychlením. Požadujeme-li, aby zrychlení bylo malé, potřebujeme lehké tělísko s velkým momentem setrvačnosti a malým poloměrem osičky.

### PŘÍKLAD 12.5

Jojo je vyrobeno ze dvou mosazných kotoučů o tloušťce  $b = 8,5$  mm a poloměru  $R = 3,5$  cm, spojených krátkou osičkou o poloměru  $R_0 = 3,2$  mm.

(a) Vypočítejte moment setrvačnosti joja vzhledem k jeho rotační ose symetrie. Při výpočtu zanedbejte moment setrvačnosti osičky. Hustota mosazi je  $\rho = 8\,400$  kg·m<sup>-3</sup>.

**ŘEŠENÍ:** Moment setrvačnosti kotouče vzhledem k jeho ose symetrie je  $\frac{1}{2}mR^2$ . S dvojicí sousedních kotoučů můžeme



pracovat jako s jediným diskem. Jeho celková hmotnost  $m$ , vypočtená pomocí jeho objemu  $V$  a hustoty  $\rho$  materiálu, je

$$\begin{aligned} m &= V\rho = 2\pi R^2 b\rho = \\ &= 2\pi(0,035\text{ m})^2(0,0085\text{ m})(8400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}) = \\ &= 0,550\text{ kg}. \end{aligned}$$

Jeho moment setrvačnosti je pak

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(0,550\text{ kg})(0,035\text{ m})^2 = \\ &= 3,4\cdot 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Vlákno navinuté na osičce má délku  $l = 1,1\text{ m}$ . Jeho tloušťka je zanedbatelná. Zjistěte, s jakým zrychlením se jojo odvaluje dolů podél vlákna.

**ŘEŠENÍ:** Podle rov. (12.19) je

$$\begin{aligned} a_x &= -g \frac{1}{1 + I/mR_0^2} = \\ &= -\frac{(9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{1 + \frac{(3,4\cdot 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{(0,550\text{ kg})(0,0032\text{ m})^2}} = \\ &= -0,16\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Vektor zrychlení směřuje dolů a je nezávislý na tom, zda jojo právě klesá či stoupá.

Všimněme si, že v rov. (12.19) vystupuje parametr  $\beta = I/mR_0^2$ , definovaný v tab. 12.1. V našem příkladu má tento parametr ( $\beta = 60$ ) hodnotu mnohem větší než pro tělesa uvedená v citované tabulce. Zrychlení joja je proto velmi malé. Odpovídá například valení prstence po nakloněné rovině s úhlem sklonu pouhých  $1,9^\circ$ !

(c) Jak velkou tahovou silou působí na tělísko joja jeho vlákno?

**ŘEŠENÍ:** Tahovou sílu snadno vypočteme z rov. (12.17). Stačí dosadit za  $a_x$  výraz (12.19). Po malé úpravě dostaneme pro  $T$  vztah

$$T = \frac{mg}{1 + mR_0^2/I}. \quad (12.20)$$

Tahová síla vlákna je tedy menší než síla tíhová. Pro číselné údaje uvedené v zadání úlohy dostaneme

$$\begin{aligned} T &= \frac{(0,550\text{ kg})(9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{1 + (0,550\text{ kg})(0,0032\text{ m})^2/(3,4\cdot 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)} = \\ &= 5,3\text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

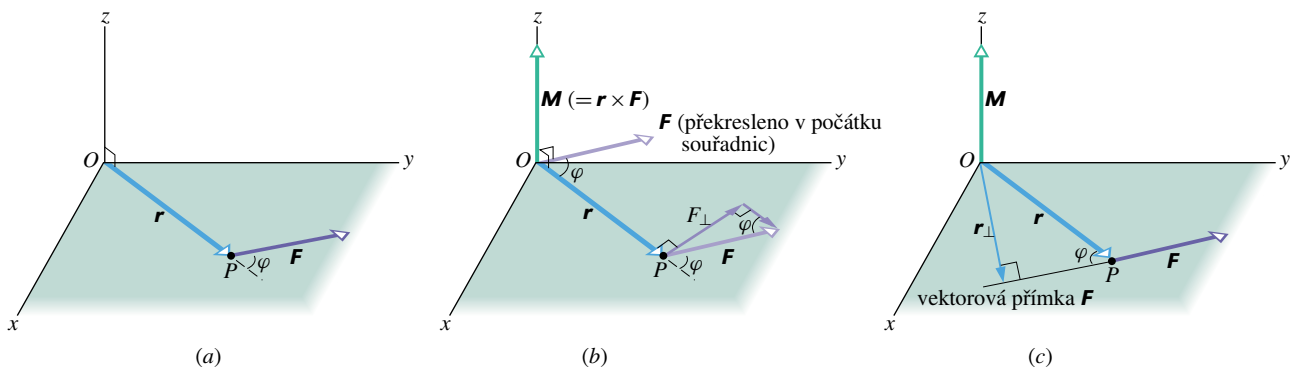
Z výsledku je patrné, že ani tahová síla vlákna nezávisí na okamžitém směru pohybu joja.

### 12.3 JEŠTĚ JEDNOU MOMENT SÍLY

V kap. 11 jsme definovali moment síly vzhledem k ose otáčení tuhého tělesa. Tato definice nebyla zcela obecná. Uvažovali jsme totiž výhradně o otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem pevné osy, kdy se jednotlivé částice tělesa pohybují po kružnicích se středy na ose otáčení, ležících v rovinách k této ose kolmých. Další omezení, které umožňovalo definovat moment síly *vzhledem k ose*, spočívalo v předpokladu, že vektorové přímký sil působících na těleso jsou kolmé k ose otáčení.

Definici momentu síly však dokážeme zobecnit tak, aby byla použitelná i pro takové případy pohybu tělesa, kdy tvar trajektorií jednotlivých částic není takto omezen. Moment síly budeme nyní vztahovat k pevnému *bodu*.

Obr. 12.10a znázorňuje silové působení na částici  $P$  v okamžiku, kdy je v souřadnicové rovině  $xy$ . Polohový vektor částice je  $\mathbf{r}$ . Na částici působí jediná síla  $\mathbf{F}$ , která leží



**Obr. 12.10** Definice momentu síly. (a) Síla  $\mathbf{F}$ , působící na částici v bodě  $P$ , leží v souřadnicové rovině  $xy$ . (b) Moment této síly vzhledem k bodu  $O$  je  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ . Podle pravidel pro vektorový součin je tento vektor kolmý k rovině  $xy$  a má směr kladné osy  $z$ . Jeho velikost lze vyjádřit vztahem  $rF_\perp$  (obr. b) nebo  $r_\perp F$  (obr. c).

v daném okamžiku rovněž v rovině  $xy$ . Momentem této síly  $\mathbf{M}$  vzhledem k pevnému bodu  $O$  rozumíme vektorovou veličinu definovanou vztahem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (12.21)$$

K výpočtu vektorového součinu můžeme samozřejmě použít pravidel shrnutých v odst. 3.7. Abychom určili směr vektoru  $\mathbf{M}$ , posuneme vektor  $\mathbf{F}$  tak, aby jeho počáteční bod splynul s bodem  $O$ . (Velikost ani směr vektoru při tomto posunutí nesmíme pochopitelně měnit.) Počáteční body vektorů  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{r}$  jsou teď totožné (obr. 12.10b). Nyní již použijeme pravidlo pravé ruky pro vektorový součin (obr. 3.20a): Prsty pravé ruky směřují od vektoru  $\mathbf{r}$  (první činitel ve vektorovém součinu) k vektoru  $\mathbf{F}$  (druhý činitel). Natažený palec ukazuje směr vektoru  $\mathbf{M}$ . Vektor  $\mathbf{M}$  na obr. 12.10b je rovnoběžný s kladným směrem osy  $z$ .

Pro velikost vektoru  $\mathbf{M}$  platí obecný vztah (3.20) ( $c = ab \sin \varphi$ ), tj.

$$M = rF \sin \varphi, \quad (12.22)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$ . Z obr. 12.10b, c je zřejmé, že vztah (12.22) je možné zapsat ještě dvěma dalšími ekvivalentními způsoby:

$$M = rF_{\perp}, \quad (12.23)$$

kde  $F_{\perp} = F \sin \varphi$  je složka vektoru  $\mathbf{F}$  do směru kolmého k  $\mathbf{r}$ ,

$$M = r_{\perp}F, \quad (12.24)$$

kde  $r_{\perp} = r \sin \varphi$  je rameno síly  $\mathbf{F}$  vzhledem k bodu  $O$  (vzdálenost bodu  $O$  od vektorové přímky síly  $\mathbf{F}$ ).

### PŘÍKLAD 12.6

Na částici  $P$  na obr. 12.11a působí tři síly o stejné velikosti 2,0 N. Částice je právě v souřadnicové rovině  $xz$  a její polohový vektor  $\mathbf{r}$  je zadán svou velikostí  $r = 3,0$  m a úhlem  $\theta = 30^\circ$ . Síly  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  a  $\mathbf{F}_3$  mají směr souřadnicových os  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Vypočítejte jejich momenty vzhledem k počátku  $O$  soustavy souřadnic.

**ŘEŠENÍ:** Obr. 12.11b, c představují pohled na rovinu  $xz$ . Aby bylo možné snadněji vyznačit úhly, které svírají síly  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$  s polohovým vektorem  $\mathbf{r}$ , jsou síly překresleny tak, aby jejich počáteční body splynuly s bodem  $O$ . Úhel mezi silou  $\mathbf{F}_3$  a vektorem  $\mathbf{r}$  je  $90^\circ$ . Pomocí rov. (12.22) vypočteme velikosti jednotlivých momentů sil:

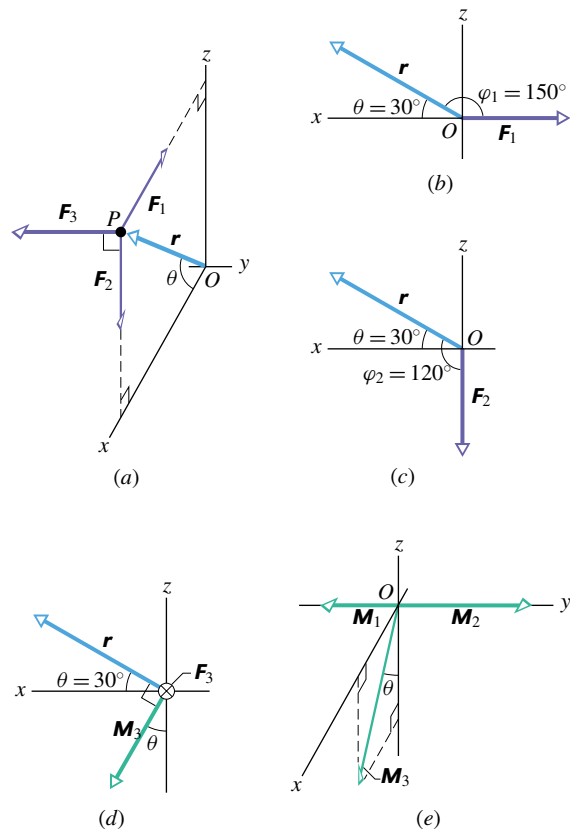
$$M_1 = rF_1 \sin \varphi_1 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N}) \sin 150^\circ = 3,0 \text{ N}\cdot\text{m},$$

$$M_2 = rF_2 \sin \varphi_2 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N}) \sin 120^\circ = 5,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

a

$$M_3 = rF_3 \sin \varphi_3 = (3,0 \text{ m})(2,0 \text{ N}) \sin 90^\circ = 6,0 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad (\text{Odpověď})$$

Jejich směry určíme pomocí pravidla pravé ruky: pravou ruku položíme na obrázek tak, aby její prsty směřovaly od vektoru  $\mathbf{r}$  k vektoru  $\mathbf{F}$  a dlaň obepínala *menší* z obou možných úhlů. Na obr. 12.11d jsme sílu  $\mathbf{F}_3$  znázornili křížkem v kroužku  $\otimes$ . Tento symbol vyjadřuje skutečnost, že síla  $\mathbf{F}_3$  směřuje *do obrázku*. (Symbol  $\otimes$  připomíná pohled na šíp zezadu). Kdyby síla  $\mathbf{F}_3$  směřovala *z obrázku* k pozorovateli, označili bychom ji symbolem  $\odot$  (pohled na šíp zepředu). Pomocí pravidla pravé ruky určíme směr vektoru  $\mathbf{M}_3$ . Všechny momenty sil jsou vyznačeny v obr. 12.11e.



**Obr. 12.11** Příklad 12.6. (a) Na částici  $P$  působí tři síly rovnoběžné se souřadnicovými osami. Úhel  $\varphi_1$  mezi polohovým vektorem částice a silou  $\mathbf{F}_1$  je vyznačen v obrázku (b), úhel  $\varphi_2$ , který svírá s polohovým vektorem částice síla  $\mathbf{F}_2$ , je zadán v obr. (c). (Zadání úhlů je potřebné pro výpočet momentů sil.) (d) Moment třetí síly  $\mathbf{M}_3$  je kolmý k vektorům  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}_3$ . Síla  $\mathbf{F}_3$  je kolmá k rovině nákresu a míří do obrázku. (e) Momenty sil působících na částici  $P$ , vztažené k bodu  $O$ .

**RADY A NÁMĚTY****Bod 12.1:** *Vektorové součiny a momenty sil*

Rov. (12.21) představuje první praktické použití vektorového součinu. Vraťte se k odst. 3.7, kde jsou shrnuta pravidla pro výpočet vektorového součinu, a osvěžte si je. Citovaný odstavec obsahuje i výčet chyb, kterých bychom se při určování směru vektorového součinu mohli dopustit (bod 3.5).

Nezapomeňme, že moment síly je třeba vztahovat k danému bodu, který musí být předem pevně zvolen. V opačném případě nemá výpočet momentu síly smysl. Změníme-li vztahný bod, může se změnit jak velikost, tak i směr momentu síly. V př. 12.6 jsme počítali momenty tří sil vzhledem k počátku  $O$  soustavy souřadnic. Pokud bychom momenty těchto sil vztáhli přímo k bodu  $P$ , byly by nulové.

**KONTROLA 3:** Polohový vektor částice  $\mathbf{r}$  je rovnoběžný s kladným směrem osy  $z$ . Určete směr jediné síly působící na částici, víte-li, že její moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic je (a) nulový, (b) míří proti směru osy  $x$ , (c) míří proti směru osy  $y$ .

**12.4 MOMENT HYBNOSTI**

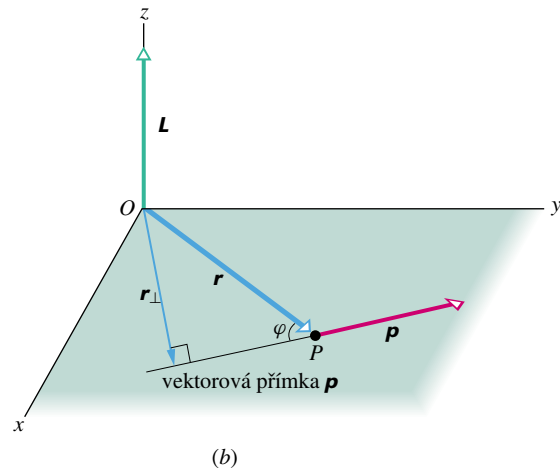
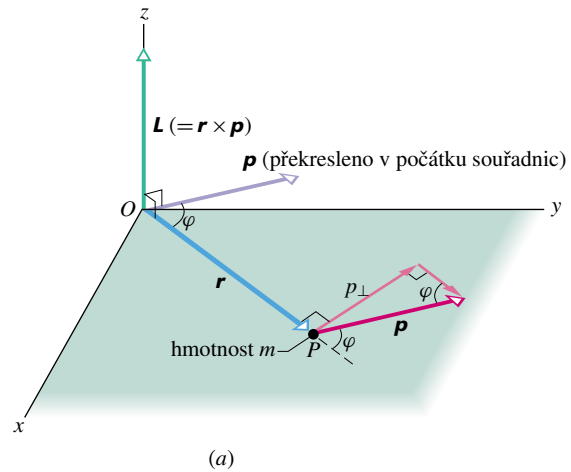
Celá řada veličin popisujících posuvný pohyb tělesa má své „partnerské protějšky“ vztahující se k pohybu otáčivému. Také hybnost má jako svůj protějšek veličinu, která má pro popis otáčivého pohybu analogický význam jako hybnost pro popis pohybu posuvného. Je jí **moment hybnosti**. Na obr. 12.12 je znázorněna částice  $P$  o hybnosti  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Částice je v daném okamžiku v souřadnicové rovině  $xy$  a její hybnost je s touto rovinou rovnoběžná. Její moment hybnosti  $\mathbf{L}$  vzhledem k počátku  $O$  je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (12.25)$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor částice vzhledem k bodu  $O$ .

Porovnáme-li vztahy (12.21) a (12.25), zjistíme, že vztah hybnosti a jejího momentu je stejný jako vztah síly a momentu síly. Jednotkou momentu hybnosti v soustavě SI je  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , tj. J·s.

Směr vektoru momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  určíme podle obrázku 12.12. Vektor  $\mathbf{p}$  posuneme tak, aby jeho počáteční bod splýnul s bodem  $O$ . Použijeme pravidlo pravé ruky: prsty směřují od  $\mathbf{r}$  k  $\mathbf{p}$ , napjatý palec ukazuje směr vektoru  $\mathbf{L}$ , v tomto případě je rovnoběžný s kladnou osou  $z$ . Takto určený směr odpovídá otáčení polohového vektoru  $\mathbf{r}$  kolem osy  $z$  proti směru otáčení hodinových ručiček. Kdyby



**Obr. 12.12** Definice momentu hybnosti. Hybnost  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  částice  $P$  o hmotnosti  $m$  leží v rovině  $xy$ . Moment hybnosti částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic  $O$  je  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Podle pravidla pravé ruky je to vektor rovnoběžný s kladným směrem osy  $z$ . (a) Velikost momentu hybnosti  $L$  lze vyjádřit vztahem  $L = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$ , neboli (b)  $L = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$ .

vektor  $\mathbf{L}$  směřoval proti směru osy  $z$ , otáčel by se polohový vektor  $\mathbf{r}$  kolem ní ve směru chodu hodinových ručiček.

Velikost vektoru  $\mathbf{L}$  určíme pomocí obecného vztahu (3.20). Platí

$$L = rmv \sin \varphi, \quad (12.26)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$ . Situaci lze jednoduše zakreslit a vyznačit i úhel  $\varphi$ , jestliže počáteční body vektorů splývají. Z obr. 12.12a, b je vidět, že pro velikost momentu hybnosti (12.26) lze použít i jiného zápisu:

$$L = rp_{\perp} = rmv_{\perp}, \quad (12.27)$$

kde  $p_{\perp}$  je složka vektoru  $\mathbf{p}$  ve směru kolmém k  $\mathbf{r}$  a  $p_{\perp} = mv_{\perp}$ . Další ekvivalentní vyjádření velikosti momentu

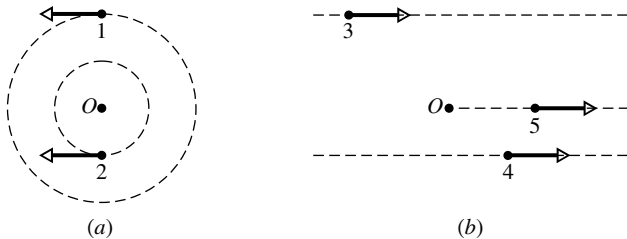
hybnosti má tvar

$$L = r_{\perp} p = r_{\perp} m v, \quad (12.28)$$

kde  $r_{\perp}$  je vzdálenost bodu  $O$  od vektorové přímky vektoru  $\mathbf{p}$ .

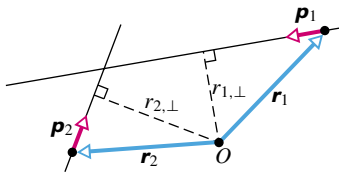
Podobně jako u momentu síly má výpočet momentu hybnosti smysl pouze v případě, že je zadán pevný vztažný bod. Uvědomme si také, že kdyby částice na obr. 12.12 neležela v rovině  $xy$  nebo kdyby vektor její hybnosti nebyl s touto rovinou rovnoběžný, nebyl by moment hybnosti  $\mathbf{L}$  rovnoběžný s osou  $z$ . Vektor momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  je vždy kolmý k rovině určené vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$ .

**KONTROLA 4:** Částice 1 a 2 na obrázku (a) obíhají kolem bodu  $O$  v opačných směrech po kružnicích s poloměry 2 m a 4 m. Částice 3 a 4 na obrázku (b) se pohybují ve stejném směru, po přímkách, jejichž vzdálenosti od bodu  $O$  jsou rovněž 2 m a 4 m. Částice 5 se pohybuje po přímce procházející bodem  $O$ . Všechny částice mají stejnou hmotnost i stejnou velikost rychlosti. Jejich pohyb je ve všech případech rovnoměrný. (a) Seřadte je sestupně podle velikosti jejich momentů hybnosti vzhledem k bodu  $O$ . (b) Rozhodněte, pro které z nich má moment hybnosti vzhledem k bodu  $O$  souhlasný směr se směrem otáčení hodinových ručiček.



#### PŘÍKLAD 12.7

Na obr. 12.13 je pohled shora na dvě částice pohybující se s konstantními hybnostmi po vodorovných přímkových drahách. Částice 1, jejíž hybnost má velikost  $p_1 = 5,0 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , je právě v místě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_1$  a mine bod  $O$  ve vzdálenosti 2,0 m. Velikost hybnosti částice 2 je v daném okamžiku  $p_2 = 2,0 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  a polohový vektor  $\mathbf{r}_2$ . Částice mine bod  $O$  ve vzdálenosti 4,0 m. Vypočítejte výsledný moment hybnosti  $\mathbf{L}$  této dvoučásticové soustavy vzhledem k bodu  $O$ .



Obr. 12.13 Příklad 12.7. Dvě částice míjejí bod  $O$ .

**ŘEŠENÍ:** Nejprve vypočítáme momenty hybnosti  $\mathbf{L}_1$  a  $\mathbf{L}_2$  jednotlivých částic. Pro výpočet velikosti vektoru  $\mathbf{L}_1$  zvolíme rov. (12.28), do níž dosadíme  $r_{1,\perp} = 2,0 \text{ m}$  a  $p_1 = 5,0 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} L_1 &= r_{1,\perp} p_1 = (2,0 \text{ m})(5,0 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Směr vektoru  $\mathbf{L}_1$  je zřejmý z rov. (12.25) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin. Vektorový součin  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1$  je kolmý k rovině obrázku a směřuje k pozorovateli. Tento směr označíme za kladný v souladu se směrem otáčení vektoru  $\mathbf{r}_1$  proti směru chodu hodinových ručiček.

Podobně získáme velikost momentu hybnosti  $\mathbf{L}_2$  částice 2:

$$\begin{aligned} L_2 &= r_{2,\perp} p_2 = (4,0 \text{ m})(2,0 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 8,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Vektorový součin  $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$  je opět kolmý rovině obrázku, tentokrát však směřuje od pozorovatele. Tento směr je záporný, neboť odpovídá otáčení vektoru  $\mathbf{r}_2$  ve směru hodinových ručiček.

Výsledný moment hybnosti soustavy má tedy velikost

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 = \\ &= (+10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}) + (-8,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= +2,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Kladné znaménko získané hodnoty odpovídá skutečnosti, že vektor výsledného momentu hybnosti  $\mathbf{L}$ , kolmý k rovině obrázku, směřuje k pozorovateli.

## 12.5 VĚTA O MOMENTU HYBNOSTI

V předchozích úvahách jsme se podrobně zabývali veličinami popisujícími posuvný a otáčivý pohyb a zjistili jsme, že všechny důležité charakteristiky posuvného pohybu mají své protějšky, které odpovídají popisu pohybu otáčivého. Můžeme proto celkem přirozeně očekávat, že pro časovou změnu momentu hybnosti částice  $\mathbf{L}$  a výsledný moment  $\mathbf{M}$  všech sil, které na ni působí, bude platit nějaká obdoba druhého Newtonova zákona. Druhý Newtonův zákon, zapsaný pro naši částici ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{F}, \quad (12.29)$$

vyjadřuje souvislost časové změny její hybnosti a výslednice těchto sil. Tušíme, že hledaný „protějšek“ druhého Newtonova zákona bude mít obdobný tvar:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}. \quad (12.30)$$

Tento vztah představuje analogii druhého Newtonova zákona v úhlových veličinách. Slovy jej lze vyjádřit takto:

Časová změna momentu hybnosti částice je rovna vektorovému součtu momentů všech sil na ni působících.

Rov. (12.30) má smysl pouze tehdy, jsou-li silové momenty obsažené v součtu  $\mathbf{M}$  a moment hybnosti  $\mathbf{L}$  vztaženy k témuž bodu.

### Odvození věty o momentu hybnosti

Základem výpočtu je definiční vztah (12.25) pro moment hybnosti. Platí

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor částice a  $\mathbf{v}$  je její rychlost. Derivováním\* obou stran rovnice podle času dostáváme

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} \right). \quad (12.31)$$

Ve výrazu  $d\mathbf{v}/dt$  poznáváme zrychlení částice  $\mathbf{a}$ , zatímco  $d\mathbf{r}/dt$  je její rychlost  $\mathbf{v}$ . Rov. (12.31) lze tedy upravit do tvaru

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}).$$

Poněvadž je  $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (vektor  $\mathbf{v}$  svírá sám se sebou nulový úhel), dostáváme

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times m\mathbf{a}.$$

Vzhledem k platnosti druhého Newtonova zákona ( $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$ ) můžeme výraz  $m\mathbf{a}$  nahradit vektorovým součtem sil působících na částici. Nakonec je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \left( \sum \mathbf{F} \right) = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}). \quad (12.32)$$

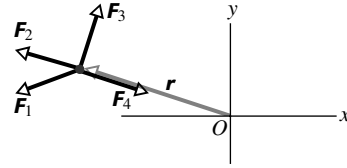
Podle rov. (12.21) představuje výraz  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  moment síly  $\mathbf{F}$  vzhledem k bodu  $O$ . Poslední úpravou rov. (12.32) tak dostáváme požadovanou „úhlovou“ analogii druhého Newtonova zákona

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}.$$

**KONTROLA 5:** Na obrázku je znázorněna částice, jejíž poloha je v daném okamžiku určena vektorem  $\mathbf{r}$ . Na částici působí síla, která může mít některý ze čtyř vyznačených směrů, ležících v rovině  $xy$ . Síla udělí částici zrychlení  $\mathbf{a}$ . (a) Seřadte možné směry podle odpovídající velikosti časové derivace momentu hybnosti částice  $d\mathbf{L}/dt$  vzhledem k bodu  $O$ . (b) Rozhodněte,

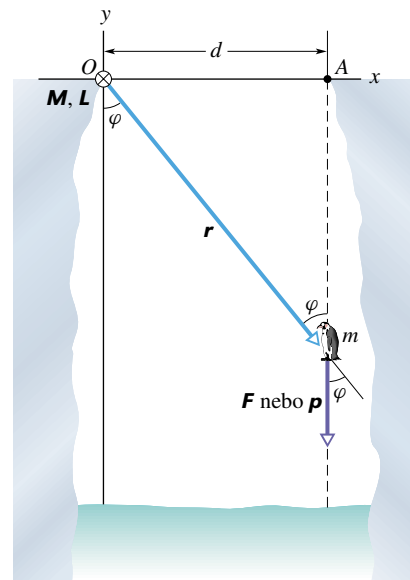
\* Při derivování vektorového součinu nesmíme zaměnit pořadí vektorů v součinu.

pro které z nich je tato derivace (vektorová veličina) nesusouhlasně rovnoběžná s osou  $z$ .



### PŘÍKLAD 12.8

Tučňák o hmotnosti  $m$  stál na okraji jámy v místě  $A$  a spadol dolů. Vodohorvná vzdálenost bodu  $A$  od počátku  $O$  souřadnic je  $d$  (obr. 12.14).



**Obr. 12.14** Příklad 12.8. Tučňák o hmotnosti  $m$  volně padá z bodu  $A$  na okraji jámy. Moment tíhové síly  $\mathbf{M}$  i moment hybnosti tučňáka vztažené k bodu  $O$  jsou kolmé k rovině obrázku a směřují do nánkresny.

(a) Vyjádřete moment hybnosti padajícího tučňáka vzhledem k bodu  $O$  v obecném okamžiku během jeho pádu.

**ŘEŠENÍ:** Moment hybnosti jako vektor vyjádříme pomocí rov. (12.25)) ( $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ). Jeho velikost je dána vztahem (12.26), tj.

$$L = rmv \sin \varphi.$$

Veličiny  $r$  a  $\varphi$  se během pádu tučňáka samozřejmě mění, výraz  $r \sin \varphi$  však má v každém okamžiku stálou hodnotu  $d$ . Pro rychlost pádu platí  $v = gt$ . Pro velikost momentu hybnosti  $L$  tak dostáváme

$$L = mgt d. \quad (\text{Odpověď}) \quad (12.33)$$

Vektor momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  je kolmý k rovině vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$ , vyznačených v obr. 12.14, a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu. Zvolme souřadnicovou osu  $z$  tak, aby byla orientována nesouhlasně s tímto směrem. V obrázku pak vyznačíme vektor  $\mathbf{L}$  křížkem v kroužku  $\otimes$ , umístěným v počátku soustavy souřadnic. S časem se mění pouze velikost vektoru  $\mathbf{L}$ , jeho směr a orientace se zachovávají.

(b) Vypočtete moment tíhové síly  $m\mathbf{g}$ , působící na tučňáka, vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

**ŘEŠENÍ:** Moment síly je dán vztahem (12.21) ( $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ), jeho velikost určíme pomocí rov. (12.22). Platí

$$M = rF \sin \varphi,$$

kde  $F = mg$  a  $r \sin \varphi = d$ . Dostáváme tedy

$$M = mgd = \text{konst.} \quad (\text{Odpověď}) \quad (12.34)$$

Vidíme, že velikost momentu síly je součinem velikosti síly  $mg$  a jejího ramene  $d$  vzhledem k bodu  $O$ . Vektor  $\mathbf{M}$  je kolmý k rovině tvořené vektory  $\mathbf{r}$  a  $m\mathbf{g}$  a podle pravidla pravé ruky směřuje za nákresnu (obr. 12.14). Je tedy souhlasně rovnoběžný s vektorem  $\mathbf{L}$ . Vztah (12.34) lze získat také derivováním vztahu (12.33) podle času a dosazením získaného výsledku do rov. (12.30).

Všimněme si, že vektory  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{L}$  podstatným způsobem závisí na volbě vztázného bodu  $O$ . Kdyby tučňák padal z bodu  $O$ , platilo by  $d = 0$  a moment síly i moment hybnosti by byly nulové.

## 12.6 MOMENT HYBNOSTI SOUSTAVY ČÁSTIC

Při diskusích o otáčivém pohybu jsme se prozatím omezili pouze na pohyb tuhého tělesa. Nyní rozšíříme naše úvahy na případ obecné soustavy částic a jejich pohyb budeme popisovat vzhledem k pevně zvolenému vztáznému bodu, počátku soustavy souřadnic. „Soustava částic“ je již dostatečně obecným modelem fyzikálního objektu a jako zvláštní případ zahrnuje i tuhé těleso. Celkový moment hybnosti  $\mathbf{L}$  soustavy je definován jako vektorový součet momentů hybnosti  $\mathbf{L}_i$  jednotlivých částic:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots + \mathbf{L}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i, \quad (12.35)$$

kde index  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  probíhá jednotlivé částice.

Momenty hybnosti jednotlivých částic se mohou s časem měnit buď vlivem jejich vzájemného působení, nebo

vlivem sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí. Časovou změnu momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  vypočteme jako derivaci výrazu na pravé straně rov. (12.35):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{L}_i}{dt}. \quad (12.36)$$

Podle rov. (12.30) je derivace momentu hybnosti  $i$ -té částice dána vektorovým součtem momentů sil, které na ni působí, tj.  $d\mathbf{L}_i/dt = \sum \mathbf{M}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ . Symbolem  $\mathbf{r}_i$  jsme označili polohový vektor  $i$ -té částice a  $\mathbf{F}_i$  výslednici všech sil, kterými na ni působí její okolí, tvořené jednak ostatními částicemi soustavy, jednak objekty, které náležejí do okolí soustavy jako celku. Pravá strana rov. (12.36) je tedy vektorovým součtem momentů *všech sil*, působících na jednotlivé částice soustavy.

Zaměříme se nyní na výpočet tohoto součtu. Momenty sil působících na částice soustavy můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří momenty sil *vnitřních*, tj. momenty sil vzájemného působení částic. Druhá skupina obsahuje momenty *vnějších* sil. Vnějšími silami působí na částice soustavy její okolí, tj. objekty, které do ní nejsou zahrnuty. Všimněme si nejprve momentů vnitřních sil. Vyberme libovolnou dvojici částic soustavy. Síly, popisující vzájemné působení částic této dvojice, představují akci a reakci. Podle třetího Newtonova zákona jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Jejich celkový příspěvek do *výslednice sil* je tedy samozřejmě nulový. Jak je tomu však s jejich momenty? Působí-li tyto síly ve směru spojnice interagujících částic, tj. jsou-li centrální, pak mají společnou vektorovou přímkou, a tedy i společné rameno vzhledem k vztáznému bodu. Jejich momenty jsou stejně velké, avšak opačně orientované. Mají nulový součet a jejich „společný“ příspěvek k součtu všech momentů na pravé straně rov. (12.36) je proto rovněž nulový. Časová derivace celkového momentu hybnosti soustavy je dána výhradně momenty *vnějších* sil působících na částice soustavy:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}} \quad (\text{pro soustavu částic}). \quad (12.37)$$

Rov. (12.37) je matematickým zápisem **věty o momentu hybnosti** (soustavy částic) neboli **druhé impulzové věty** pro soustavu částic. Slovy ji můžeme vyjádřit velmi jednoduše: Časová změna *momentu hybnosti* soustavy částic je dána vektorovým součtem momentů *vnějších sil* působících na částice této soustavy.

Všimněme si její fyzikální interpretace: rov. (12.30), platná pro jednotlivou částici, vyplývá přímo z druhého Newtonova zákona, a má analogický tvar v úhlových veličinách. Věta o momentu hybnosti, která je důsledkem

druhého a třetího Newtonova zákona a předpokladu vnitřních centrálních sil, je analogií rov. (12.30) pro soustavu částic. Můžeme ji interpretovat jako pohybovou rovnici pro případ rotačního pohybu soustavy, a tedy jako „protějšek“ věty o hybnosti (kap. 11), popisující dynamiku pohybu translačního.

Připomeňme, že rov. (12.37) platí za předpokladu, že jsou momenty sil i moment hybnosti soustavy vztaženy k *témuž bodu*, pevnému v jisté inerciální vztažné soustavě. Jedinou výjimkou z požadavku inerciálnosti je *těžišťová* vztažná soustava, v níž je zápis věty o momentu hybnosti stejný jako v kterékoliv soustavě inerciální. Těžišťová soustava\* je speciálním případem obecně neinerciální vztažné soustavy. Jejím počátkem je těžiště soustavy částic, resp. tělesa a směr jejích os je pevný vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě. (Těžišťová soustava je tedy spjata s *translačním pohybem* tělesa, rotační pohyb však spolu s ním nevykonává.)

## 12.7 MOMENT HYBNOSTI TUHÉHO TĚLESA VZHLEDEM K PEVNÉ OSE

Otáčivý pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy je sice speciálním, avšak v praktických úlohách velmi častým, případem pohybu obecné soustavy částic. Jistě má smysl položit si otázku, zda i věta o momentu hybnosti bude mít v tomto případě speciální tvar. Očekáváme pochopitelně, že se její zápis výrazně zjednoduší, neboť při rotaci tuhého tělesa kolem pevné osy obíhají všechny jeho částice po kružnicích stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ . To nám umožní vyjádřit pomocí veličiny  $\omega$  moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení. Tuhé těleso na obr. 12.15, složené z částic o hmotnostech  $m_i$ , se otáčí kolem osy  $z$  konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$ .

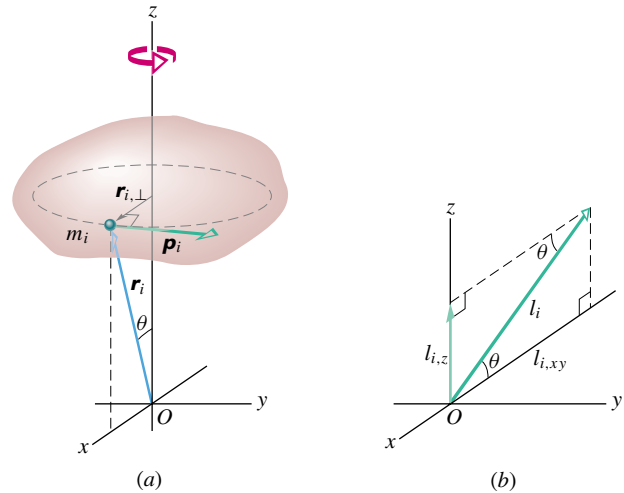
Moment hybnosti tělesa je, jak již víme, součtem momentů hybnosti jeho jednotlivých částic. Na obr. 12.15 je znázorněna jedna z nich, které jsme přisoudili index  $i$  a hmotnost  $m_i$ . Při otáčení tělesa obíhá tato částice po kružnici, jejíž střed leží na ose otáčení (v obrázku osa  $z$ ) a jejíž rovina je k této ose kolmá. Poloha částice je vzhledem k počátku  $O$  soustavy souřadnic určena vektorem  $\mathbf{r}_i$ . Poloměr její kruhové trajektorie  $r_{i,\perp}$  je roven její vzdálenosti od osy  $z$ , která se s časem nemění.

Podle rov. (12.26) má moment hybnosti  $i$ -té částice vzhledem k bodu  $O$  velikost

$$L_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(m_i v_i),$$

kde  $p_i$  a  $v_i$  představují velikost hybnosti a rychlosti částice. Úhel mezi vektory  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{p}_i$  je  $90^\circ$ . Moment hybnosti čás-

\* Setkali jsme se s ní už v př. 9.10.



**Obr. 12.15** (a) Tuhé těleso se otáčí kolem osy  $z$  úhlovou rychlostí  $\omega$ . Jedna z jeho částic hmotnosti  $m_i$  opisuje kolem osy  $z$  kružnici o poloměru  $r_{i,\perp}$ . Její hybnost je  $\mathbf{p}_i$  a polohový vektor vzhledem k počátku soustavy souřadnic  $O$  je označen jako  $\mathbf{r}_i$ . Obrázek zachycuje polohu částice v okamžiku, kdy je vektor  $\mathbf{r}_{i,\perp}$  rovnoběžný s osou  $x$ . (b) Moment hybnosti  $i$ -té částice vzhledem k bodu  $O$  je označen symbolem  $\mathbf{L}_i$ , jeho průmět do osy  $z$  je  $\mathbf{L}_{i,z}$ .

te  $\mathbf{L}_i$  je kolmý k vektorům  $\mathbf{r}_i$  a  $\mathbf{p}_i$ . Podle obr. 12.15b je můžeme vyjádřit jako součet jeho průmětu do osy otáčení (osa  $z$ ) a průmětu do roviny kolmé k ose otáčení (rovina  $xy$ ). Platí  $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i,z} + \mathbf{L}_{i,xy}$ . Stejným způsobem lze rozložit momenty hybnosti všech částic tělesa, a tedy i celkový moment hybnosti soustavy:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_{xy} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_{i,z} + \mathbf{L}_{i,xy}).$$

**Momentem hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení** nazveme průmět celkového momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  do této osy. V našem případě, kdy je osou otáčení osa  $z$ , je tento průmět určen  $z$ -ovou složkou celkového momentu hybnosti soustavy, tj.

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n L_{i,z} = \sum_{i=1}^n L_i \sin \theta_i = \sum_{i=1}^n (r_i \sin \theta_i)(m_i v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n r_{i,\perp} m_i v_i. \end{aligned}$$

Vzhledem k platnosti vztahu  $v_i = \omega r_{i,\perp}$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^n L_{i,z} = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_{i,\perp} = \sum_{i=1}^n m_i (\omega r_{i,\perp}) r_{i,\perp} = \\ &= \omega \left( \sum_{i=1}^n m_i r_{i,\perp}^2 \right). \end{aligned} \quad (12.38)$$

Při úpravě posledního výrazu jsme využili skutečnosti, že úhlová rychlost  $\omega$  všech částic tuhého tělesa je stejná a vytkli jsme ji před součet.

Ve výrazu  $\sum m_i r_{i,\perp}^2$  v rov. (12.38) poznáváme moment setrvačnosti tělesa vzhledem k pevné ose (rov. (11.24)). Rov. (12.38) můžeme tedy upravit do tvaru

$$L_z = I\omega, \quad \text{tj. } \mathbf{L}_z = I\boldsymbol{\omega} \quad \begin{array}{l} \text{(moment hybnosti} \\ \text{tuhého tělesa} \\ \text{vzhledem k pevné ose).} \end{array} \quad (12.39)$$

Moment hybnosti v rov. (12.39) se vztahuje k ose otáčení tuhého tělesa. Budeme-li mít tuto skutečnost stále na paměti, můžeme index  $z$  i vynechat. Symbol  $L$  pak ovšem nesmíme zaměnit s velikostí momentu hybnosti vztáženého k pevnému bodu  $O$ . Moment setrvačnosti  $I$  je samozřejmě rovněž vztážen k ose otáčení.

Promítneme-li do osy otáčení i výsledný moment vnějších sil působících na naše těleso, dostaneme odpovídající průmět rov. (12.37), vyjadřující větu o momentu hybnosti:

$$I\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_z, \quad \text{tj. } I\omega = M_z.$$

Tento vztah se často nazývá **věta o momentu hybnosti (druhá impulzová věta)** pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

Jeho mimořádně jednoduchý tvar nás snad ani příliš nepřekvapuje. Je však možné zapsat tak prostým způsobem i průmět pohybové rovnice do roviny kolmé k ose otáčení? Abychom na tuto otázku odpověděli co nejpřesněji, pokusme se vyjádřit odpovídající průmět momentu hybnosti tělesa. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{i,xy} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_{i,xy} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{L}_i - \mathbf{L}_{i,z}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i,\perp}) \times \mathbf{p}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_{i,z} \times \mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose rotace, tj. vektory  $\mathbf{L}_{i,xy} = m_i \mathbf{r}_{i,z} \times \mathbf{v}_i$ , mají velikosti  $m_i r_i v_i |\cos \theta_i \sin \theta_i| = m_i r_i^2 \omega |\cos \theta_i|$ . Jejich směry jsou však různé. Abychom je mohli sečíst, musíme je ještě rozložit do směrů os  $x$  a  $y$ . Označíme-li symbolem  $\varphi_i$  úhel, který svírá vektor  $\mathbf{r}_{\perp,i}$  se směrem osy  $x$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} L_x &= - \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2 |\cos \theta_i \sin \theta_i| \cos \varphi_i) \omega = I_x \omega, \\ L_y &= - \sum_{i=1}^n (m_i r_i^2 |\cos \theta_i \sin \theta_i| \sin \varphi_i) \omega = I_y \omega. \end{aligned}$$

Všimněme si, že hodnoty  $\sin \varphi_i, \cos \varphi_i, \sin \theta_i, \cos \theta_i$  v předchozích součtech vyjadřujících veličiny  $I_x$  a  $I_y$  mohou být jak kladné, tak záporné. Při vhodném rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose otáčení se tedy může stát, že se veličiny  $I_x$  a  $I_y$  anulují. Veličiny  $I_x$  a  $I_y$ , v nichž je informace o symetrii či nesymetrii rozložení hmotnosti obsažena, se nazývají **deviační momenty** tělesa vzhledem k ose otáčení. Jsou-li nenulové, pak setrvačnick rotující kolem upevněné osy silně namáhá svá ložiska (kolo „hází“ a „vymílá“ ložisko). Vyvažování kol automobilu olůvky má tedy za cíl vynulovat  $I_x$  a  $I_y$ .

Je-li hmotnost tělesa vzhledem k ose otáčení vhodně rozložena, průměty momentů hybnosti jednotlivých částic do roviny kolmé k ose otáčení se vruší. Hovoříme pak o tzv. symetrickém rozložení hmotnosti tělesa vzhledem k ose rotace. (Jednoduchým příkladem je těleso tvořené dvěma stejně hmotnými částicemi umístěnými souměrně vzhledem k ose otáčení, nebo těleso složené ze dvou částic různé hmotnosti, umístěných na protilehlých stranách osy rotace ve vzdálenostech, jejichž poměr je převrácenou hodnotou poměru hmotností částic.) V takovém případě je průmět momentu hybnosti tělesa do roviny kolmé k ose otáčení nulový. Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose otáčení splývá s celkovým momentem hybnosti a platí  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ .

**Tabulka 12.2 Posuvný a otáčivý pohyb, pokračování tab. 11.3**

POSUVNÝ POHYB V DANÉM SMĚRU		OTÁČIVÝ POHYB KOLEM PEVNÉ OSY	
síla	$\mathbf{F}$	moment síly	$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
hybnost	$\mathbf{p}$	moment hybnosti	$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
hybnost <sup>a</sup>	$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i$	moment hybnosti <sup>a</sup>	$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i$
hybnost <sup>a</sup>	$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_T$	moment hybnosti <sup>b</sup>	$L = I\omega$
věta o hybnosti <sup>a</sup>	$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$	věta o momentu hybnosti <sup>a</sup>	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}}$
zákon zachování <sup>c</sup>	$\mathbf{P} = \text{konst.}$	zákon zachování <sup>c</sup>	$\mathbf{L} = \text{konst.}$

<sup>a</sup> Pro soustavu částic i tuhé těleso jako její speciální případ.

<sup>b</sup> Pro tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy.  $L$  je složka momentu hybnosti ve směru této osy.

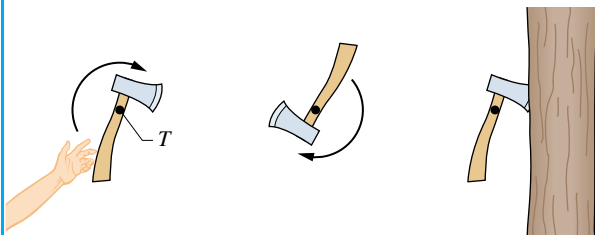
<sup>c</sup> Pro izolovanou soustavu.



Tab. 12.2 je pokračováním soupisu veličin a vztahů, které představují analogii při popisu posuvného a otáčivého pohybu (tab. 11.3).

### PŘÍKLAD 12.9

Správný dřevorubec ví, jak má vyhodit sekeru, aby během letu vykonala celý počet otáček kolem svého těžiště a zasekla se do kmene stromu (obr. 12.16). Předpokládejme, že vodorovná složka počáteční rychlosti sekery má hodnotu  $v_x = 20,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , její dolet je  $d = 5,90 \text{ m}$  a sekera vykonala přesně jednu otáčku. Moment setrvačnosti  $I$  sekery vzhledem k ose vedené jejím těžištěm je  $1,95 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .



**Obr. 12.16** Příklad 12.9. Dřevorubec hodil sekeru tak, aby se během letu otáčela kolem osy vedené jejím těžištěm (parabolický tvar trajektorie těžiště není na obrázku vyznačen).

(a) Vypočítejte velikost momentu hybnosti letící sekery vzhledem k jejímu těžišti.

**ŘEŠENÍ:** Sekera se otáčí stálou úhlovou rychlostí  $\omega$  vzhledem k ose vedené jejím těžištěm. Její moment hybnosti určíme podle rov. (12.39) ( $L = I\omega$ ). Nejprve však vypočteme úhlovou rychlost. Podle rov. (11.5) je úhlová rychlost  $\omega$  určena otočením  $\Delta\theta$  v časovém intervalu  $\Delta t_1$  takto:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1}.$$

Nahradíme-li  $\Delta t_1$  výrazem  $d/v_x$  a dosadíme-li za  $\Delta\theta$  hodnotu  $1,00 \text{ ot} = 2\pi \text{ rad}$ , dostaneme

$$\omega = \frac{v_x \Delta\theta}{d} = \frac{(20,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})(2\pi \text{ rad})}{(5,90 \text{ m})} = 21,3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro získanou hodnotu  $\omega$  a zadaný moment setrvačnosti  $I$  dostaneme z rov. (12.39) výsledek:

$$L = I\omega = (1,95 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(21,3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}) = 4,15 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Uvedení sekery do pohybu trvá dřevorubci  $\Delta t_2 = 0,150 \text{ s}$ . Určete průměrnou velikost momentu síly, jíž působí dřevorubec na sekeru, vzhledem k jejímu těžišti.

**ŘEŠENÍ:** Souvislost změny momentu hybnosti sekery  $\Delta L$  s průměrnou hodnotou  $\overline{M}$  výsledného momentu sil, které jí

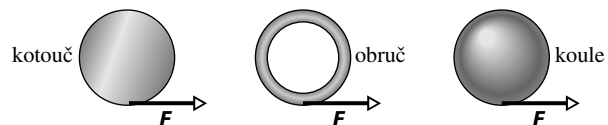
během časového intervalu  $\Delta t_2$  uvedou do pohybu, je dána vztahem (12.37).

$$\overline{M} = \frac{\Delta L}{\Delta t_2} = \frac{L_f - L_i}{\Delta t_2}.$$

Počáteční moment hybnosti sekery je nulový, tj.  $L_i = 0$ , výsledný moment hybnosti je  $L_f = -4,15 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . Výsledná hodnota je záporná. Sekera na obr. 12.16 se totiž otáčí ve směru chodu hodinových ručiček. Dosazením těchto hodnot a zadané doby  $\Delta t_2$  do poslední rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{(-4,15 \cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1})}{(0,150 \text{ s})} = \\ &= -0,277 \text{ N}\cdot\text{m}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

**KONTROLA 6:** Tři tělesa znázorněná na obrázku (kotouč, obruč a plná koule) jsou tažena vlákny navinutými na jejich obvodu. Tažná síla  $F$  je ve všech případech stejná a působí po stejnou dobu  $t$ . Každé z těles se roztáčí z klidu kolem pevné osy vedené jeho středem. Hmotnosti i poloměry těles jsou shodné. Seřadte tělesa (a) podle jejich momentu hybnosti vzhledem k ose otáčení a (b) podle jejich úhlových rychlostí v okamžiku  $t$ .



## 12.8 ZÁKON ZACHOVÁNÍ MOMENTU HYBNOSTI

Prozatím jsme dokázali vyslovit dva důležité zákony zachování platné při pohybu těles: zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti. Nyní se setkáme s dalším podobným zákonem, zákonem zachování momentu hybnosti. Jestliže je studovaná soustava částic izolovaná nebo je-li výsledný moment vnějších sil, které na ni působí, nulový, je podle rov. (12.37) (druhá impulzová věta)  $d\mathbf{L}/dt = 0$ , tj.

$$\mathbf{L} = \text{konst.} \quad (12.40)$$

Tento výsledek, nazývaný **zákon zachování momentu hybnosti**, lze také přepsat ve tvaru

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f, \quad (12.41)$$

kde indexy (i), resp. (f) označují moment hybnosti soustavy  $\mathbf{L}$  v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Rovnice (12.40) a (12.41) lze vyjádřit takto:

Moment hybnosti  $L$  se zachovává bez ohledu na případné změny probíhající uvnitř soustavy, pokud je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový.

Rov. (12.40) a (12.41) jsou vektorové. Každá z nich je tedy ekvivalentní trojici skalárních rovnic, vyjadřujících zachování tří nezávislých kartézských složek momentu hybnosti soustavy. Mohou nastat případy, kdy se některá ze složek momentu hybnosti soustavy zachovává i při nenulovém momentu sil:

Je-li některá ze složek výsledného momentu vnějších sil působících na soustavu nulová, zachovává se odpovídající složka momentu hybnosti soustavy, a to bez ohledu na změny, které uvnitř soustavy probíhají.

Použijme tento zákon pro případ izolovaného tělesa na obr. 12.15, které se otáčí kolem osy  $z$ . Předpokládejme, že těleso bylo zpočátku tuhé, později se však rozložení jeho hmotnosti vzhledem k ose otáčení změnilo. Změnil se tím i jeho moment setrvačnosti vzhledem k této ose. Podle rov. (12.40) a (12.41) se však nezměnil moment hybnosti tělesa. Dosazením z rov. (12.39) pro moment hybnosti tělesa při rotaci kolem pevné osy do rov. (12.41) dostaneme zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f. \quad (12.42)$$

Indexy (i) a (f) jsme označili hodnoty momentu setrvačnosti  $I$  a úhlové rychlosti  $\omega$  na počátku měření a po změně rozložení hmoty.

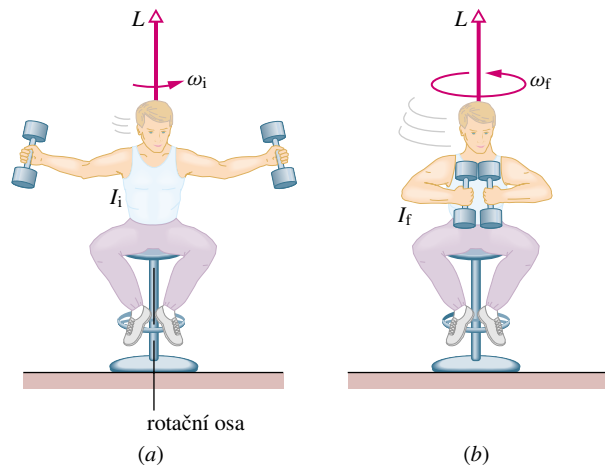
Podobně jako předchozí zákony zachování (energie a hybnosti) jsou rov. (12.40) a (12.41) platné i mimo rámec newtonovské (klasické) mechaniky. Platí totiž i pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla (které se řídí relativistickou mechanikou) a dokonce pro částice subatomární, při jejichž popisu se neobejdeme bez kvantové mechaniky. Až dosud nebyl objeven žádný jev, který by platnost zákona zachování momentu hybnosti narušil.

V dalším textu se budeme věnovat rozboru čtyř typických situací, v nichž lze tento zákon uplatnit.

**1. Experimentátor na otočné stoličce.** Experimentátor na obr. 12.17 sedí na stoličce, která se pomalu otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí  $\omega_i$ . V upažených rukou drží dvě činky. Moment hybnosti  $L$  soustavy stolička + člověk je rovnoběžný s osou otáčení a směřuje vzhůru.

Náhle člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy z hodnoty  $I_i$  na hodnotu  $I_f$ . Hmoty soustavy je nyní rozložena blíže k ose otáčení. Úhlová rychlost otáčení se naopak zvýší z hodnoty  $\omega_i$  na  $\omega_f$ . Upažením docílí experimentátor opětovného zpomalení otáčivého pohybu.

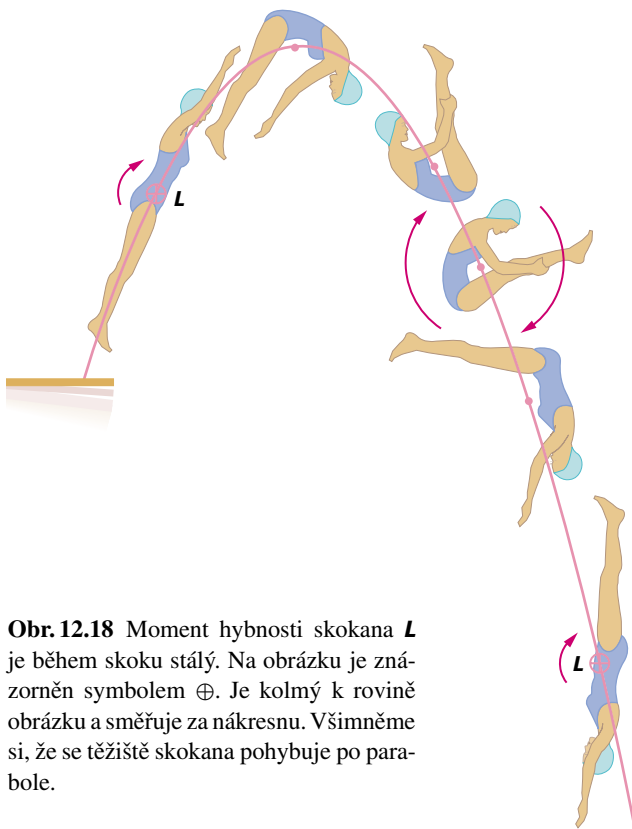
Výsledný moment vnějších sil působících na soustavu člověk s činkami + stolička je nulový (společná vektorová přímka tíhové síly a tlakové síly podložky leží v ose otáčení). Moment hybnosti soustavy vzhledem k ose otáčení se proto zachovává bez ohledu na to, jak člověk činkami pohybuje. Úhlová rychlost soustavy zachycené v situaci na obr. 12.17a je malá a moment setrvačnosti velký. Podle rov. (12.42) je úhlová rychlost soustavy na obr. 12.17b větší. Její zvýšení totiž kompenzuje pokles momentu setrvačnosti soustavy, způsobený změnou rozložení její hmoty.



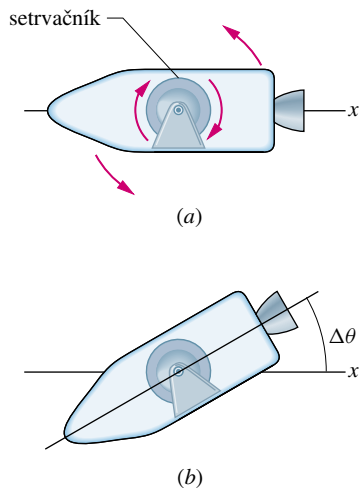
**Obr. 12.17** (a) Soustava člověk + stolička má poměrně velký moment setrvačnosti a malou úhlovou rychlost. (b) Při poklesu momentu setrvačnosti se zvětší úhlová rychlost soustavy. Moment hybnosti  $L$  zůstává zachován.

**2. Skokan.** Obr. 12.18 ukazuje skok do vody s jedním a půl saltem vpřed. Podle očekávání se těžiště skokana pohybuje po parabolě. Skokan opustí odrazový můstek s určitým momentem hybnosti  $L$  vzhledem k ose jdoucí jeho těžištěm. Vektor  $L$  je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Jedinou silou, která na skokana během jeho letu působí, je síla tíhová. Její moment vzhledem k těžišti sportovce je však nulový. Moment hybnosti skokana se tedy zachovává. Pokrčením paží a nohou docílí akrobat poklesu momentu setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. Podle rov. (12.42) tím urychlí rotaci svého těla (zvýší úhlovou rychlost). Natažením paží i nohou ke konci letu opět moment setrvačnosti zvýší a rotaci zpomalí natolik, že voda při doskoku téměř nevystříkne. Moment hybnosti skokana se samozřejmě zachovává co do velikosti i směru i při složitějších skocích se salty a výkruty.

**3. Orientace kosmické lodi.** Na obr. 12.19 je znázorněna kosmická loď s pevně uloženým setrvačnickem. Obrázek zachycuje změnu orientace lodi. Jestliže se loď ani setrvačnickem neotáčí, je celkový moment hybnosti  $L$  soustavy kosmická



**Obr. 12.18** Moment hybnosti skokana  $L$  je během skoku stálý. Na obrázku je znázorněn symbolem  $\oplus$ . Je kolmý k rovině obrázku a směřuje za nákresnu. Všimněme si, že se těžiště skokana pohybuje po parabole.



**Obr. 12.19** (a) Zjednodušený náčrtek kosmické lodi se setrvačnickem. Roztočíme-li setrvačnick např. ve směru otáčení hodinových ručiček, roztočí se loď směrem opačným. Celkový moment hybnosti soustavy musí totiž zůstat nulový. (b) Jestliže setrvačnick uvedeme opět do klidu, zastaví se i loď. Její osa se však vůči své původní orientaci natočila o úhel  $\Delta\theta$ .

loď + setrvačnick nulový a díky její izolovanosti se zachovává.

Roztočíme-li setrvačnick podle obr. 12.19a, roztočí se loď opačným směrem, neboť celkový moment hybnosti sou-

stavy musí zůstat nulový. Zastavíme-li setrvačnick, zastaví se i rotace kosmické lodi. Loď však už zůstane ve změněné poloze (obr. 12.19b).

Nežádoucí účinky zákona zachování momentu hybnosti se projevily při letu kosmické lodi *Voyager 2* kolem planety Uran (v roce 1986). Loď se roztočila pokaždé, když se její magnetofonové záznamové zařízení přepnulo na vyšší rychlost. Řízení letu v Jet Propulsion Laboratory muselo během letu naprogramovat palubní počítač lodi tak, aby při každém zapnutí či vypnutí magnetofonové jednotky došlo k zážehu korekčních motorů.

**4. Neuvěřitelná hroutící se hvězda.** Vyhásíná-li hvězda, tj. dochází-li jí jaderné „palivo“, začne se postupně smršťovat a tlak v jejím nitru roste. Smršťování může pokračovat tak dlouho, až se původní poloměr hvězdy (srovnatelný např. s poloměrem našeho Slunce) zmenší na pouhých několik kilometrů. Hvězda se přemění v *neutronovou hvězdu*, jejíž hmota je stlačena v neuvěřitelně hustý plyn složený z neutronů.

Hvězda je izolovanou soustavou a její moment hybnosti  $L$  se zachovává. Moment setrvačnosti hvězdy se během jejího smršťování podstatně zmenší. Její úhlová rychlost při tom vzroste až na hodnotu zhruba 600 až 800 otáček za sekundu. Pro srovnání uvedme, že naše Slunce, které můžeme považovat za typickou hvězdu, vykoná asi jednu otáčku na měsíc!

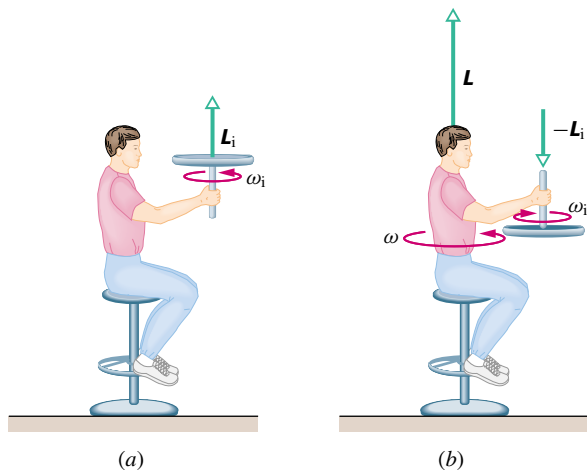
**KONTROLA 7:** Brouk sedící na obvodu kolotoče začne lézt k jeho středu. Rozhodněte, zda následující veličiny, vztažené k ose otáčení kolotoče, vzrostou, klesnou, nebo zůstanou zachovány: (a) moment setrvačnosti soustavy brouk + kolotoč, (b) moment hybnosti soustavy a (c) úhlová rychlost kolotoče s broukem.

#### PŘÍKLAD 12.10

Experimentátor na obr. 12.20 sedí na stoličce, která se může otáčet kolem svislé osy. Drží v ruce bicyklové kolo, podél jehož obvodu je ohnut olověný prut. Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je  $I = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Zpočátku je člověk na stoličce v klidu a kolo se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega_i = 3,9 \text{ ot/s}$  proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). Osa otáčení kola je svislá a jeho počáteční moment hybnosti  $L_i$  směřuje vzhůru. Experimentátor otočí kolo o  $180^\circ$  podle obr. 12.20b a stolička se s ním roztočí. Jakým směrem a jakou úhlovou rychlostí se bude člověk na stoličce otáčet? Moment setrvačnosti  $I_0$  soustavy člověk + stolička + kolo vzhledem k ose otáčení je  $6,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

**ŘEŠENÍ:** Vnější síly působící na soustavu člověk + stolička + kolo (tíhová síla a tlaková síla podlahy) mají vzhledem k libovolnému vztažnému bodu ležícímu na ose otáčení nulové momenty. Další síly na soustavu nepůsobí a její moment

hybnosti se proto zachovává. Počáteční moment hybnosti soustavy  $L_i$  je shodný s momentem hybnosti otáčejícího se kola. I při převrácení osy kola se zachová velikost a směr celkového momentu hybnosti soustavy.



**Obr. 12.20** Příklad 12.10.

(a) Experimentátor drží bicyklové kolo, které se otáčí kolem své svislé osy. (b) Člověk kolo převrátí a začne se otáčet. (c) Celkový moment hybnosti soustavy se zachovává.

$$\begin{array}{c} \uparrow L_i \\ \text{počáteční stav} \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow L \\ \text{výsledný stav} \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow -L_i \\ \text{výsledný stav} \end{array}$$

Moment hybnosti kola po jeho převrácení je  $-L_i$ . Člověk a stolička získají moment hybnosti  $L$ . Podle obr. 12.20c musí platit

$$L_i = L + (-L_i),$$

tedy

$$L = 2L_i = I_0\omega,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost otáčení člověka na stoličce po převrácení osy kola. Dostáváme

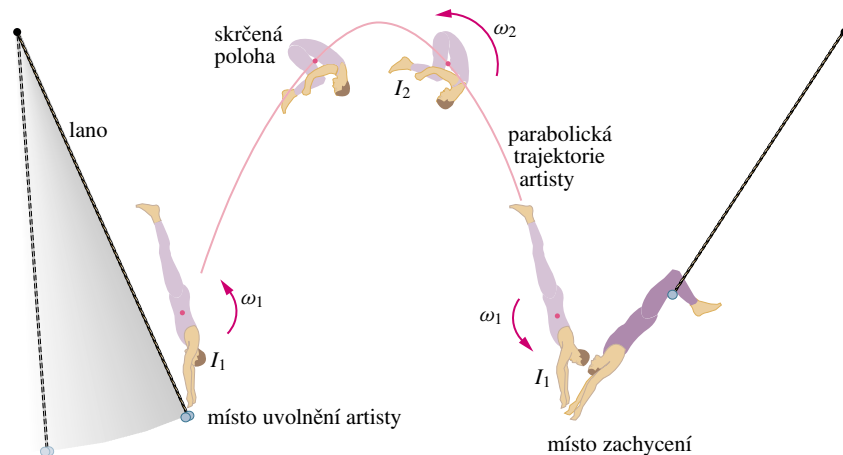
$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2L_i}{I_0} = \frac{2I\omega_i}{I_0} = \\ &= \frac{2(1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(3,9 \text{ ot/s})}{(6,8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)} = \\ &= 1,4 \text{ ot/s.} \end{array} \quad (\text{Odpověď})$$

Kladná hodnota výsledku znamená, že se člověk na stoličce otáčí proti směru chodu hodinových ručiček (viděno z nadhledu). K zastavení rotace stačí otočit kolo do původní polohy.

Při překlápění kola působí člověk na jeho osu určitou silou, jejíž moment je obecně nenulový. Stejně velkou, avšak opačně orientovanou silou působí osa kola na ruku člověka. Tyto síly jsou z hlediska soustavy člověk + stolička + kolo silami vnitřními, a neovlivní tedy její celkový moment hybnosti. K řešení úlohy můžeme zvolit i jiný přístup. Za soustavu můžeme zvolit samotného člověka na stoličce a kolo považovat za součást jejího okolí. Člověk působí na osu kola silou s nenulovým momentem. Osa působí na ruku člověka silou opačnou, která však je z hlediska soustavy člověk + stolička silou vnější. Vlivem jejího momentu se mění moment hybnosti soustavy a stolička s člověkem se roztočí. Vidíme, že třídění sil a jejich momentů na vnitřní a vnější závisí na volbě posuzované soustavy částic a že vhodnou volbou zkoumaného systému lze řešení úlohy zjednodušit.

### PŘÍKLAD 12.11

Akrobat na visuté hrazdě provede během skoku trvajícím  $t = 1,87$  s trojitě salto. Během první a poslední čtvrtiny otáčky se akrobat otáčí v natažené poloze podle obr. 12.21. Jeho moment setrvačnosti vzhledem k ose vedené jeho těžištěm je při tom  $I_1 = 19,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Ve střední části letu se akrobat



**Obr. 12.21** Příklad 12.11. Trojitě salto

skrčí a jeho moment setrvačnosti se sníží na hodnotu  $I_2 = 5,50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ .

(a) Jakou má akrobat počáteční úhlovou rychlost  $\omega_1$ , otáčí-li se kolem osy procházející jeho těžištěm?

**ŘEŠENÍ:** V napjaté poloze absolvuje akrobat dvě čtvrtiny otáčky za dobu  $t_1$ . Odpovídající úhel otočení je tedy  $\theta_1 = 0,500 \text{ ot}$ . Úhel otočení ve skrčené poloze je  $\theta_2 = 2,50 \text{ ot}$ , odpovídající dobu letu označme  $t_2$ . Pro tyto časové intervaly platí

$$t_1 = \frac{\theta_1}{\omega_1} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{\theta_2}{\omega_2}, \quad (12.43)$$

kde  $\omega_2$  je úhlová rychlost akrobata ve skrčené poloze. Protože se moment hybnosti akrobata během skoku zachovává, můžeme úhlovou rychlost určit pomocí rov. (12.42):

$$I_2\omega_2 = I_1\omega_1,$$

tj.

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1. \quad (12.44)$$

Celková doba letu akrobata je

$$t = t_1 + t_2.$$

Po dosazení z rov. (12.43) a (12.44) dostaneme

$$t = \frac{\theta_1}{\omega_1} + \frac{\theta_2 I_2}{\omega_1 I_1} = \frac{1}{\omega_1} \left( \theta_1 + \theta_2 \frac{I_2}{I_1} \right). \quad (12.45)$$

Pro zadané číselné hodnoty je

$$(1,87 \text{ s}) = \frac{1}{\omega_1} \left( 0,500 \text{ ot} + 2,50 \text{ ot} \frac{5,50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}{19,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} \right).$$

Z poslední rovnice pak získáme výsledek

$$\omega_1 = 0,6369 \text{ ot/s} \doteq 0,637 \text{ ot/s}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Podaří-li se akrobatovi ještě více se skrčit, může se pokusit o čtyřnásobné salto při stejných hodnotách  $\omega_1$  a  $t$ . Jaký musí být jeho moment setrvačnosti ve skrčené poloze?

**ŘEŠENÍ:** Úhel otočení ve skrčené poloze je nyní  $\theta_2 = 3,50 \text{ ot}$ . Podle rov. (12.45) je nyní

$$(1,87 \text{ s}) = \frac{1}{(0,6369 \text{ ot/s})} \cdot \left( 0,500 \text{ ot} + 3,50 \text{ ot} \frac{I_2}{19,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} \right),$$

odkud

$$I_2 = 3,929 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \doteq 3,93 \text{ kg}\cdot\text{m}^2. \quad (\text{Odpověď})$$

Menší hodnota  $I_2$  umožní rychlejší otáčení ve skrčené poloze. Nemusí však již být v silách akrobata jí docílit. Pokud by se akrobat chtěl pokusit o čtyřapůlnásobné salto, musel by buď prodloužit dobu letu nebo zvýšit svou počáteční úhlovou rychlost. Pokud by se rozhodl pro druhou možnost, riskoval by, že se jeho kolegové nemusí podařit ho zachytit. (Víte proč?)

(c) Určete periodu otáčení akrobata během čtyřnásobného salta ve skrčené poloze.

**ŘEŠENÍ:** Z rov. (12.44) nejprve vypočteme úhlovou rychlost  $\omega_2$  ve skrčené poloze:

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{(19,9 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{(3,929 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)} (0,6369 \text{ ot/s}) = 3,226 \text{ ot/s}.$$

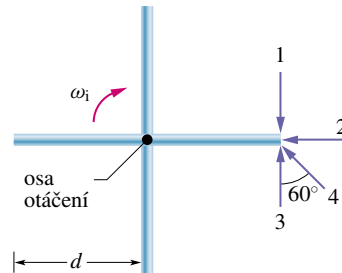
Periodu  $T$  již určíme velmi snadno:

$$T = \frac{1 \text{ ot}}{\omega_2} = \frac{1 \text{ ot}}{3,226 \text{ ot/s}} = 0,310 \text{ s}. \quad (\text{Odpověď})$$

Jednou z příčin mimořádné obtížnosti čtyřnásobného salta je skutečnost, že otáčení je velmi rychlé. Artista při něm nestačí sledovat své okolí a jemně regulovat svou úhlovou rychlost vzájemnou polohou trupu a končetin — tedy změnou svého momentu setrvačnosti.

### PŘÍKLAD 12.12

Čtyři tenké tyče, každá o hmotnosti  $m$  a délce  $d = 1,0 \text{ m}$  jsou pevně spojeny do tvaru rovnoramenného kříže. Soustava se volně otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Počáteční úhlová rychlost je  $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$ , tj. ve směru otáčení hodinových ručiček (obr. 12.22). Koule z bláta o hmotnosti  $m' = m/3$  a počáteční rychlosti  $v_i = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  narazí na konec jedné tyče a přilne k ní. Jaká je výsledná úhlová rychlost soustavy kříž + koule? Uvažujme čtyři různé trajektorie koule podle obr. 12.22: trajektorie 1 — koule dopadá kolmo na tyč, trajektorie 2 — koule dopadá v radiálním směru, trajektorie 3 — koule dopadá kolmo na tyč v opačném směru než v případě 1, trajektorie 4 — koule dopadá na tyč pod úhlem  $60^\circ$  měřeným od kolmice k tyči.



**Obr. 12.22** Příklad 12.12. Čtyři pevně spojené tyče se volně otáčejí kolem svislé osy. Blátivá koule může dopadnout na tyč čtyřmi různými způsoby a po dopadu zůstane k tyči přilepena. Obrázek představuje půdorysný průřez situace.

**ŘEŠENÍ:** Celkový moment hybnosti  $L$  soustavy kříž + koule vzhledem k ose otáčení se během srážky koule s rotujícím křížem zachovává, tj.

$$L_f = L_i. \quad (12.46)$$

Indexy (i) a (f) představují počáteční a výslednou hodnotu. Označme  $I_+$  moment setrvačnosti kříže vzhledem k ose otáčení. Podle vztahu (f) v tab. 11.2 je

$$I_+ = 4\left(\frac{1}{3}md^2\right).$$

Moment setrvačnosti blátivé koule přilepené na jedné z tyčí vzhledem k ose otáčení je  $I_{\text{bk}} = m'd^2$ . Označme jako  $L_i$  moment hybnosti koule vzhledem k ose otáčení před dopadem na tyč a  $\omega_f$  výslednou úhlovou rychlost soustavy. Pomocí známého vztahu  $L = I\omega$  přepíšeme rovnici (12.46) do tvaru

$$I_+\omega_f + I_{\text{bk}}\omega_f = I_+\omega_i + L_i,$$

a tedy

$$\left(\frac{4}{3}md^2\right)\omega_f + (m'd^2)\omega_f = \left(\frac{4}{3}md^2\right)\omega_i + L_i. \quad (12.47)$$

Dosadíme  $m = 3m'$  a  $\omega_i = -2,0 \text{ rad/s}$  a získanou rovnici vyřešíme vzhledem k neznámé  $\omega_f$ :

$$\omega_f = \frac{1}{5m'd^2} (4m'd^2(-2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}) + L_i). \quad (12.48)$$

Velikosti  $L_i$  pro trajektorie 1 a 3 vypočteme pomocí rov. (12.28), kde  $r_{\perp} = d$  a  $v = v_i$ . Pro případ 2 použijeme rov. (12.28) s  $r_{\perp} = 0$ . U trajektorie 4 využijeme rov. (12.27), kde položíme  $r = d$  a  $v_{\perp} = v_i \cos 60^\circ$ . Znaménko veličiny  $L_i$  určíme tak, že sestrojíme polohový vektor dopadající koule a zjistíme, kterým směrem se otáčí při dopadu koule na kříž. Je-li zjištěný směr otáčení souhlasný se směrem otáčení hodinových ručiček, je hodnota  $L_i$  záporná, v opačném případě je kladná. Dostáváme:

dráha 1:  $L_i = -m'dv_i$ ; dráha 2:  $L_i = 0$ ;

dráha 3:  $L_i = m'dv_i$ ; dráha 4:  $L_i = m'dv_i \cos 60^\circ$ .

Dosazením zadaných číselných hodnot vypočteme  $L_i$  pro každý z případů 1 až 4 a výsledek dosadíme do rov. (12.48). Nakonec dostáváme

dráha 1:  $\omega_f = -4,0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ;

dráha 2:  $\omega_f = -1,6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ;

dráha 3:  $\omega_f = 0,80 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ;

dráha 4:  $\omega_f = -0,40 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . (Odpověď)

## 12.9 KVANTOVANÝ MOMENT HYBNOSTI

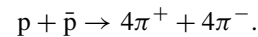
Říkáme, že fyzikální veličina je **kvantovaná**, může-li nabývat jen určitých hodnot, jejichž množina je diskrétní. Všechny ostatní hodnoty jsou zakázány. Prozatím jsme se setkali se dvěma příklady kvantované veličiny z oblasti fyziky mikrosvěta: kvantování hmotnosti (čl. 2.9) a energie (čl. 8.9). Třetím příkladem, spadajícím rovněž do mikrosvěta, je moment hybnosti.

Elementární částice, jakými jsou například elektron nebo proton, mají vždy jistý vnitřní (**spinový**) moment hybnosti, jako by se neustále otáčely okolo své osy jako káča. (Ve skutečnosti se nejedná o žádné otáčení v mechanickém smyslu. Spinový moment hybnosti je veličina daleko abstraktnější než třeba moment hybnosti káči, který postihuje její skutečné otáčení.) Spinový moment hybnosti  $S$  je kvantován, jeho složka v libovolném směru (který označíme  $z$ ) je dána vztahem

$$S_z = m_s \hbar, \quad (12.49)$$

kde  $\hbar = 1,056 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  je redukovaná Planckova konstanta a  $m_s$  je kvantové číslo. V případě elektronů, protonů, pozitronů a antiprotonů nabývá toto číslo pouze dvou hodnot:  $+\frac{1}{2}$  a  $-\frac{1}{2}$ . Je-li  $m_s = +\frac{1}{2}$ , říkáme, že částice má *spin nahoru* a její spinový moment hybnosti je  $S_z = +\frac{1}{2}\hbar$ . Je-li  $m_s = -\frac{1}{2}$ , má *spin dolů* a  $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$ .

Při srážkách a reakcích elementárních částic (zahrnujících i změny jejich identity) na jiné elementární částice se spinový moment hybnosti jejich soustavy zachovává. Například se může stát, že při srážce protonu (p) a antiprotonu ( $\bar{p}$ ) obě částice *anihilují* a vzniknou jiné elementární částice, a to 4 kladné piony ( $\pi^+$ ) a 4 záporné piony ( $\pi^-$ ):



Všechny piony mají  $m_s = 0$ . Po anihilaci  $p + \bar{p}$  podle této reakce je celkový spinový moment hybnosti soustavy nulový. Při anihilaci se však celkový spinový moment hybnosti zachovává. Má-li tedy uvedená reakce proběhnout, musí mít proton a antiproton spiny orientovány opačně (jeden nahoru, druhý dolů), aby jejich součet byl roven nule.

## PŘEHLED & SHRUTÍ

### Valivý pohyb těles

Pro kolo o poloměru  $R$  valící se bez klouzání platí

$$v_T = \omega R, \quad (12.2)$$

kde  $v_T$  je rychlost středu kola a  $\omega$  je úhlová rychlost kola (vzhledem k libovolnému bodu, např. k jeho středu). Valení kola lze také popsat jako otáčení kolem okamžité osy rotace procházející bodem dotyku  $P$  kola s podložkou. Úhlová rychlost otáčení kola kolem tohoto bodu je stejná jako kolem středu kola. Valící se kolo má kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} I_T \omega^2 + \frac{1}{2} m v_T^2, \quad (12.5)$$

kde  $I_T$  je moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem a  $m$  je jeho celková hmotnost.

### Moment síly jako vektor

Moment síly  $\mathbf{M}$  je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (obvykle počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (12.21)$$

kde  $\mathbf{F}$  je síla působící v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  vzhledem k vztažnému bodu (např. počátku soustavy souřadnic). Velikost vektoru  $\mathbf{M}$  je dána vztahem

$$M = r F \sin \varphi = r F_{\perp} = r_{\perp} F, \quad (12.22-12.24)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{r}$ ,  $F_{\perp}$  je složka vektoru  $\mathbf{F}$  v rovině kolmé k vektoru  $\mathbf{r}$  a  $r_{\perp}$  je rameno síly  $\mathbf{F}$ . Směr vektoru  $\mathbf{M}$  je určen pravidlem pravé ruky pro vektorový součin.

### Moment hybnosti částice

Moment hybnosti  $\mathbf{L}$  částice s hybností  $\mathbf{p}$ , hmotností  $m$  a rychlostí  $\mathbf{v}$  je vektorová veličina definovaná vzhledem k pevnému bodu (většinou počátku soustavy souřadnic) vztahem

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}). \quad (12.25)$$

Velikost vektoru  $\mathbf{L}$  je

$$L = r m v \sin \varphi = r p_{\perp} = r m v_{\perp} = r_{\perp} p = r_{\perp} m v, \quad (12.26-12.28)$$

kde  $\varphi$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$ ,  $p_{\perp}$  a  $v_{\perp}$  jsou složky vektorů  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{v}$  v rovině kolmé k  $\mathbf{r}$  a  $r_{\perp}$  je vzdálenost vztažného bodu od vektorové přímky hybnosti  $\mathbf{p}$ . Směr momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  je dán pravidlem pravé ruky.

### Druhý Newtonův zákon pro úhlové veličiny

Druhý Newtonův zákon pro částici lze pomocí úhlových veličin zapsat ve vektorovém tvaru takto:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}, \quad (12.30)$$

kde  $\sum \mathbf{M}$  je výsledný moment všech sil působících na částici a  $\mathbf{L}$  je její moment hybnosti.

### Moment hybnosti soustavy částic

Moment hybnosti  $\mathbf{L}$  soustavy částic je vektorovým součtem momentů hybnosti jednotlivých částic:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \dots + \mathbf{L}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{L}_i. \quad (12.35)$$

Jeho časová změna je dána vektorovým součtem momentů všech vnějších sil působících na částice soustavy (tj. momentů sil popisujících působení objektů, které do soustavy nejsou zahrnuty, na částice soustavy):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_{\text{ext}}. \quad (12.37)$$

### Moment hybnosti tuhého tělesa

Složka momentu hybnosti tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy do směru této osy je

$$L = I \omega. \quad (12.39)$$

### Zákon zachování momentu hybnosti

Moment hybnosti  $\mathbf{L}$  soustavy se zachovává, je-li výsledný moment vnějších sil působících na soustavu nulový (zákon zachování momentu hybnosti):

$$\mathbf{L} = \text{konst.}, \quad (12.40)$$

nebo

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_f. \quad (12.41)$$

Zákon zachování momentu hybnosti je jedním ze základních zákonů zachování. Jeho platnost byla ověřena i pro soustavy, v nichž Newtonovy zákony v klasickém tvaru neplatí (např. částice pohybující se velkými rychlostmi, subatomární částice).

### Kvantovaný moment hybnosti

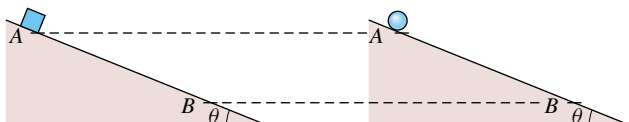
Spinový moment hybnosti  $S$  elementárních částic je kvantován. Jeho složka v libovolném směru má velikost

$$S = m_s \hbar, \quad (12.49)$$

kde  $\hbar = 1,056 \cdot 10^{-34}$  J·s je redukovaná Planckova konstanta a  $m_s$  je kvantové číslo. *Orientace spinu nahoru*, resp. *dolů* odpovídají hodnotám  $m_s = +\frac{1}{2}$ , resp.  $-\frac{1}{2}$ . Spinový moment hybnosti soustavy elementárních částic se zachovává při jejich srážkách nebo reakcích.

## OTÁZKY

1. Kvádr na prvním z obr. 12.23 klouže dolů po dokonale hladké nakloněné rovině s úhlem sklonu  $\theta$ . Koule na vedlejším obrázku má stejnou hmotnost jako kvádr a bez klouzání se valí po nakloněné rovině se stejným úhlem sklonu. Obě tělesa byla po nakloněné rovině volně vypuštěna z bodu  $A$  a dorazila do bodu  $B$ . (a) Rozhodněte, zda tíhová síla působící na kvádr vykonala při jeho pohybu z bodu  $A$  do bodu  $B$  větší, menší, nebo stejnou práci jako tíhová síla působící na kouli. (b) Které z obou těles má v bodě  $B$  větší kinetickou energii připadající na posuvný pohyb? (c) Které z nich má v bodě  $B$  větší rychlost?



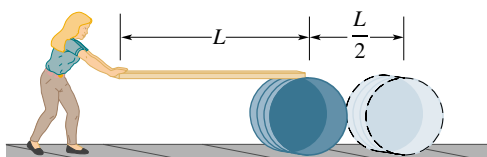
Obr. 12.23 Otázka 1

2. Dělová koule a dětská kulička se valí bez klouzání po nakloněné rovině. Obě tělesa byla zpočátku v klidu. (a) Rozhodněte, zda doba, za kterou dorazí dělová koule na konec nakloněné roviny, je větší, menší, či stejná jako v případě malé kuličky. (b) Zjistěte, zda část kinetické energie dělové koule připadající na její posuvný pohyb je větší, menší, nebo stejná jako u kuličky.

3. Dělová koule se valí bez klouzání nejprve po nakloněné rovině o úhlu sklonu  $\theta$ , poté po jiné rovině stejné výšky, avšak s menším úhlem sklonu. Rozhodněte, zda (a) doba potřebná k dosažení konce nakloněné roviny a (b) kinetická energie posuvného pohybu na konci nakloněné roviny je při druhém experimentu větší, menší, nebo stejná jako v prvním případě.

4. Dva plné válce, mosazný a dřevěný, mají shodný poloměr i hmotnost (dřevěný válec je tedy delší). Oba jsou volně vypuštěny po nakloněné rovině a valí se bez klouzání. (a) Dorazí některý z nich na konec nakloněné roviny dříve? Pokud ano, který? (b) Pro další pokus byly válce upraveny tak, aby měly stejnou délku a hmotnost. Dřevěný válec byl zkrácen a v mosazném válci byl podél osy jeho rotační symetrie vyvrtán otvor vhodného průměru. Jak dopadne závod válců po nakloněné rovině nyní?

5. Skladnice na obr. 12.24 valí válcový soudek pomocí desky o délce  $L$ . Soudek se valí bez klouzání a urazí dráhu  $L/2$ . Deska po povrchu na soudku rovněž neklouže. (a) Jak dlouhá část desky přišla během pohybu do styku s povrchem soudku? (b) Jakou vzdálenost přitom ušla skladnice?

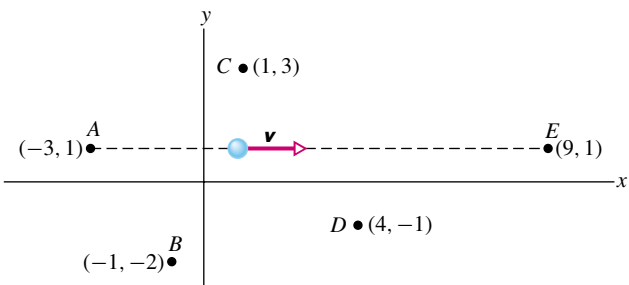


Obr. 12.24 Otázka 5

6. Polohový vektor částice  $\mathbf{r}$ , vztažený k bodu  $O$ , má délku 3 m.

Na částici působí síla  $\mathbf{F}$  o velikosti 4 N. Jaký úhel svírají vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$ , jestliže velikost momentu síly vzhledem k bodu  $O$  (a) je nulová, (b) má hodnotu 12 N·m?

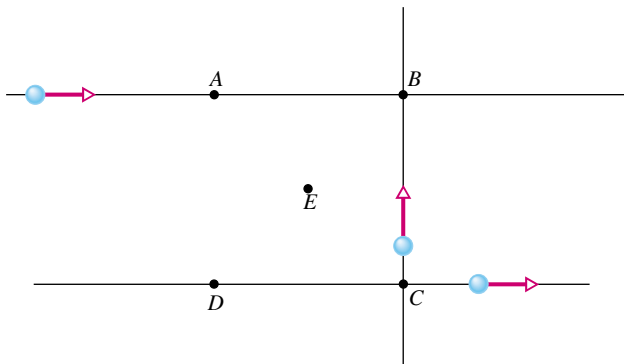
7. Na obr. 12.25 je rozmístěno pět vztažných bodů, jejichž polohy jsou určeny souřadnicemi  $(x, y)$ . Částice, která je v obdrázků rovněž zakreslena, se pohybuje stálou rychlostí  $\mathbf{v}$ . Seřadte vztažné body postupně podle velikosti odpovídajícího momentu hybnosti částice.



Obr. 12.25 Otázka 7

8. (a) V kontrole 4 se částice 1 a 2 pohybují rovnoměrně po kružnicích. V obou případech určete moment dostředivé síly vzhledem k bodu  $O$ . (b) Částice 3, 4 a 5 se pohybují po přímkách zleva doprava. Pro každou z nich rozhodněte, zda velikost jejího momentu hybnosti vzhledem k bodu  $O$  roste, klesá, nebo zůstává stejná.

9. Na obr. 12.26 jsou znázorněny tři stejné částice pohybující se ve vyznačených směrech stejně rychle. Tyto částice tvoří soustavu. Vztažné body  $A, B, C$  a  $D$  leží ve vrcholech čtverce, bod  $E$  je v jeho středu. Seřadte body (sestupně) podle velikosti celkového momentu hybnosti soustavy částic.



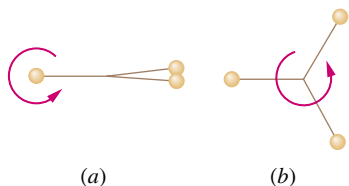
Obr. 12.26 Otázka 9

10. Následující funkce představují časovou závislost momentu hybnosti částice ve čtyřech různých situacích: (1)  $L(t) = 3t + 4$ , (2)  $L(t) = -6t^2$ , (3)  $L(t) = 2$ , (4)  $L(t) = 4/t$ . Ve které z nich je výsledný moment sil působících na částici (a) nulový,



(b) kladný a konstantní, (c) záporný s rostoucí velikostí (pro  $t > 0$ ), (d) záporný s klesající velikostí (pro  $t > 0$ )?

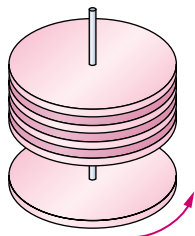
**11.** Bolaso se skládá ze tří těžkých koulí spojených třemi stejně dlouhými pevnými lany (obr. 12.27). S předmětem se zachází takto: jednu kouli držíme nad hlavou a zbývající dvě roztočíme tak, aby obíhaly po kružnici (obr. 12.27a). V určitém okamžiku střední kouli uvolníme. Rozložení koulí se změní podle obr. 12.27b. Rozhodněte, zda se (a) moment hybnosti a (b) úhlová rychlost bolasa během této změny zvětší, zmenší, případně nemění.



Obr. 12.27 Otázka 11

**12.** Brouk sedí na obvodu kolotoče, který se otáčí proti směru chodu hodinových ručiček. V určitém okamžiku začne brouk lézt po obvodu ve směru otáčení. Rozhodněte, zda následující veličiny při pohybu brouka rostou, klesají, nebo se nemění: (a) moment hybnosti soustavy kolotoč + brouk, (b) moment hybnosti a úhlová rychlost brouka a (c) moment hybnosti a úhlová rychlost kolotoče? (d) Jak se změní odpovědi na předchozí otázku, poleze-li brouk proti směru otáčení kolotoče?

**13.** Spodní kotouč na obr. 12.28 se volně otáčí kolem vyznačené

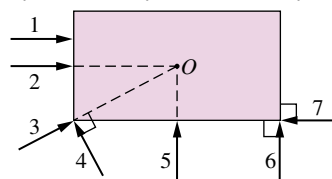


Obr. 12.28 Otázka 13

osy proti směru chodu hodinových ručiček. Jeho moment hybnosti vzhledem k jeho ose otáčení je 50 jednotek. Čtyři další rotující kotouče jsou postupně spuštěny po ose a dopadnou na spodní kotouč. Jejich momenty hybnosti před dopadem jsou

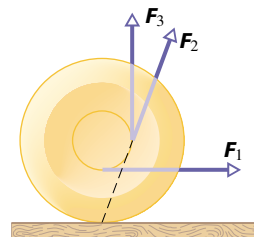
(1) 20 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček, (2) 10 jednotek proti směru otáčení hodinových ručiček, (3) 10 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček a (4) 60 jednotek ve směru otáčení hodinových ručiček. Po dopadu se kotouče vlivem třecích sil spojí a celek se nakonec otáčí stejnou úhlovou rychlostí. (a) Jaký je výsledný moment hybnosti soustavy kotoučů? (b) V jakém pořadí je třeba kotouče přidávat, aby nastal okamžik, kdy je úhlová rychlost spojených kotoučů nulová?

**14.** Vodorovná obdélníková deska na obr. 12.29 se může otáčet kolem svislé osy procházející jejím středem  $O$ . Zpočátku je deska v klidu. Dítě hází na desku stejné kousky žvýkačky, které se s ní po dopadu spojí. V obrázku jsou vyznačeny možné trajektorie kousků dopadajících na desku ve vyznačených bodech jejího obvodu. Velikost rychlosti žvýkaček bezprostředně před dopadem je rovněž stejná. (a) Seřadte vyznačené trajektorie podle velikosti úhlové rychlosti, kterou se budou otáčet soustava deska + žvýkačka po dopadu žvýkačky. (b) Pro kterou z nich bude moment hybnosti desky s kouskem žvýkačky záporný?



Obr. 12.29 Otázka 14

**15.** Jojo na obr. 12.30 je zpočátku v klidu. Promyslete, jak se bude pohybovat, bude-li na vlákno působit tažná síla (a)  $F_2$ , jejíž vektorová přímka prochází bodem dotyku joja s podložkou, (b)  $F_1$  s vektorovou přímkou ležící nad bodem dotyku, (c)  $F_3$  s vektorovou přímkou procházející vpravo od bodu dotyku.



Obr. 12.30 Otázka 15

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 12.1 Valení

**1C.** Tenkostěnná trubice se valí po podlaze. Určete poměr kinetické energie jejího posuvného pohybu a kinetické energie otáčivého pohybu vzhledem k její podélné ose.

**2C.** Prstenec o hmotnosti 140 kg se valí po vodorovné podlaze. Jeho těžiště má rychlost  $0,150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jakou práci je třeba vykonat, aby se prstenec zastavil?

**3C.** Automobil jede rychlostí 80,0 km/h. (a) Určete úhlovou

rychlost pneumatik vzhledem k jejich osám, víte-li, že průměr pneumatiky je 75,0 cm. (b) Řidič automobilu zastavil bez prokluzu kol. Od okamžiku, kdy začal rovnoměrně brzdit, vykonala kola 30,0 otáček. Určete jejich úhlové zrychlení. (c) Jakou dráhu automobil během brzdění urazil?

**4C.** Vůz o hmotnosti 1 000 kg má čtyři kola. Hmotnost každého z nich je 10 kg. Jaká část celkové kinetické energie vozu připadá na otáčivý pohyb jeho kol? Při výpočtu momentu setrvačnosti

považujeme kolo za homogenní kotouč. Proč nepotřebujete znát poloměr kol?

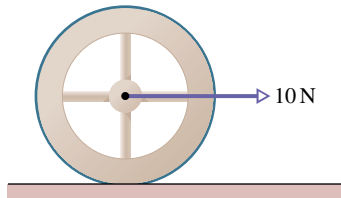
**5C.** Kolo o poloměru  $0,250\text{ m}$  se valí bez klouzání s počáteční rychlostí  $43,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a zastaví se na dráze  $225\text{ m}$ . Vypočítejte jeho (a) zrychlení a (b) úhlové zrychlení. (c) Moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho středem je  $0,155\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Vypočítejte vzhledem k této ose moment třecích sil, které na kolo při brzdění působí.

**6C.** Automobil o celkové hmotnosti  $1\,700\text{ kg}$  se rozjíždí z klidu a za dobu  $10\text{ s}$  dosáhne rychlosti  $40\text{ km/h}$ . Každé jeho kolo považujeme za homogenní kotouč o hmotnosti  $32\text{ kg}$ . Vypočítejte (a) kinetickou energii otáčivého pohybu každého kola vzhledem k jeho ose, (b) celkovou kinetickou energii každého kola, (c) celkovou kinetickou energii automobilu na konci desáté sekundy pohybu.

**7C.** Homogenní koule se valí dolů po nakloněné rovině. (a) Jak je třeba zvolit úhel sklonu roviny, aby se těžiště koule pohybovalo se zrychlením o velikosti  $0,10g$ ? (b) Jaké by bylo zrychlení tělesa, které by po této nakloněné rovině klouzalo bez tření?

**8C.** Plná koule o hmotnosti  $4,00\text{ kg}$  se valí vzhůru po nakloněné rovině se sklonem  $30,0^\circ$ . Počáteční rychlost jejího těžiště má velikost  $5,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Vypočítejte počáteční kinetickou energii koule. (b) Jakou dráhu koule po nakloněné rovině urazí, než vystoupí do bodu obratu? (c) Závísí odpověď na otázku (b) na hmotnosti koule?

**9Ú.** Na kolo o hmotnosti  $10\text{ kg}$  a poloměru  $0,30\text{ m}$  působí stálá vodorovná síla o velikosti  $10\text{ N}$  (obr. 12.31). Kolo se valí bez klouzání po vodorovné rovině a zrychlení jeho těžiště je  $0,60\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . (a) Určete velikost a směr třecí síly působící na kolo. (b) Vypočítejte moment setrvačnosti kola vzhledem k ose vedené jeho těžištěm kolmo k jeho rovině.

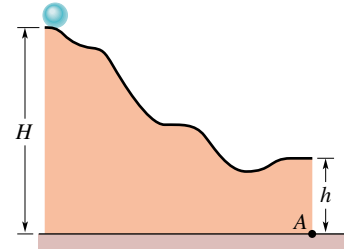


Obr. 12.31 Úloha 9

**10Ú.** Automobil jede rychlostí  $80\text{ km/h}$  ve směru kladné osy  $x$ . Průměr pneumatik je  $66\text{ cm}$ . Ve vztažné soustavě spojené s automobilem určete rychlost a zrychlení (a) středu kola, (b) bodu na vrcholu pneumatiky, (c) bodu dotyku pneumatiky se silnicí. (d) Úlohy (a), (b) a (c) řešte i ve vztažné soustavě spojené se silnicí.

**11Ú.** Těleso o poloměru  $R$  a hmotnosti  $m$  se valí bez klouzání po vodorovné podlaze rychlostí  $v$ . V určitém okamžiku najede na nakloněnou rovinu a začne podél ní stoupat. Bod obratu leží ve výšce  $h = 3v^2/(4g)$  nad úrovní podlahy. (a) Určete moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose vedené jeho těžištěm. (b) O jaké těleso se pravděpodobně jedná?

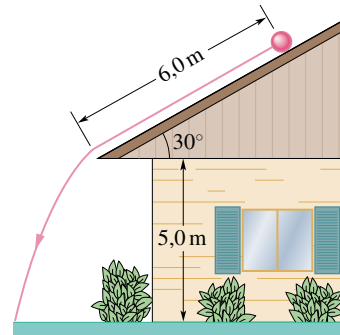
**12Ú.** Homogenní koule je uvolněna z klidové polohy v nejvyšším bodě dráhy znázorněné na obr. 12.32 a valí se po ní bez klouzání. Dráha končí nad bodem  $A$ , který je v obrázku vyznačen. V okamžiku, kdy koule opustí dráhu, má její rychlost vodorovný směr. Pro hodnoty  $H = 6,0\text{ m}$  a  $h = 2,0\text{ m}$  zjistěte, jak daleko od bodu  $A$  dopadne koule na podlahu.



Obr. 12.32 Úloha 12

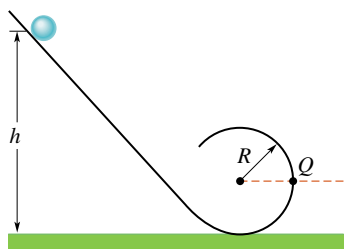
**13Ú.** Kulička o poloměru  $r$  a hmotnosti  $m$  se může valit bez klouzání po vnitřním povrchu nádoby polokulového tvaru o poloměru  $R$ . Kuličku uvolníme z klidové polohy na okraji nádoby. (a) Určete její kinetickou energii v nejnižším bodě trajektorie. (b) Jaká část vypočtené hodnoty odpovídá otáčivému pohybu kuličky vzhledem k ose vedené jejím těžištěm? (c) Určete tlakovou sílu, jíž působí kulička na polokouli v nejnižším bodě své trajektorie. Předpokládejte, že poloměr kuličky  $r$  je mnohem menší než poloměr nádoby  $R$ .

**14Ú.** Válec o poloměru  $10\text{ cm}$  a hmotnosti  $12\text{ kg}$  byl volně puštěn po šikmé střeše se sklonem  $30^\circ$  (obr. 12.33) a valí se po ní bez klouzání. Poté, co urazí dráhu  $6,0\text{ m}$ , dospěje k okapu a spadne. (a) Určete jeho úhlovou rychlost vzhledem k ose vedené jeho těžištěm v tomto okamžiku. (b) Stěna domu je vysoká  $5,0\text{ m}$ . Jak daleko od okapu dopadne válec na zem?



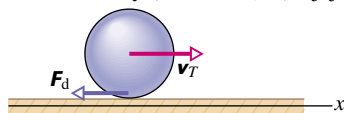
Obr. 12.33 Úloha 14

**15Ú.** Malá plná kulička o hmotnosti  $m$  a poloměru  $r$  se valí bez klouzání po nakloněné rovině zakončené smyčkou podle obr. 12.34. Kulička byla uvolněna ve výšce  $h$  nad úrovní vodorovné podlahy. (a) Určete nejmenší hodnotu  $h$ , při které kulička ještě projde vrcholem smyčky. Poloměr  $R$  smyčky je mnohonásobně větší než poloměr  $r$  kuličky. (b) Pro hodnotu  $h = 6R$  vypočítejte vodorovnou složku síly, kterou působí dráha na kuličku v bodě  $Q$ .



Obr. 12.34 Úloha 15

**16Ú.** Koule o poloměru  $R = 11$  cm byla vržena po vodorovné podlaze s počáteční rychlostí  $v_0 = 8,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a nulovou počáteční úhlovou rychlostí  $\omega_0 = 0$ . Koeficient dynamického tření mezi koulí a podlahou je 0,21. Zpočátku koule po podlaze klouže. Vlivem dynamické třecí síly (obr. 12.35)  $\mathbf{F}_d$  a jejího nenulového



Obr. 12.35 Úloha 16

momentu vzhledem k těžišti je nenulové jak zrychlení těžiště koule, tak její úhlové zrychlení. Velikost rychlosti posuvného pohybu koule  $v$  klesá a její úhlová rychlost  $\omega$  naopak roste. V určitém okamžiku přestane koule po podlaze klouzat a začne se valit. Rychlost jejího těžiště  $v_T$  i úhlová rychlost  $\omega$  se od té chvíle přestanou měnit. (a) Zapište vztah mezi „ustálenými“ hodnotami  $v_T$  a  $\omega$ . Zjistěte, (b) s jakým zrychlením se pohybovalo těžiště koule a (c) jaké bylo její úhlové zrychlení do okamžiku, než se začala valit bez klouzání. (d) Jak dlouho koule klouzala a (e) jakou dráhu přitom urazila? (f) Určete hodnotu  $v_T$  v okamžiku, kdy se koule začala valit.

### ODST. 12.2 Jojo

**17C.** Jojo o hmotnosti 120 g má moment setrvačnosti  $950 \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ . Poloměr jeho osičky 3,2 mm a vlákno má délku 120 cm. Jojo je zpočátku v klidu a po uvolnění se odvaluje podél vlákna dolů. (a) Určete jeho zrychlení. (b) Určete okamžik, kdy jojo dospěje na konec vlákna, a zjistěte hodnoty následujících veličin v tomto okamžiku: (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) kinetickou energii otáčivého pohybu, (f) úhlovou rychlost.

**18Ú.** Předpokládejme, že na rozdíl od předchozího cvičení nebylo jojo uvolněno z klidové polohy, ale vrženo svisle dolů počáteční rychlostí o velikosti  $1,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Za jak dlouho dorazí jojo na konec vlákna nyní? Vypočítejte v tomto okamžiku jeho (b) celkovou kinetickou energii, (c) rychlost, (d) kinetickou energii posuvného pohybu, (e) úhlovou rychlost a (f) kinetickou energii otáčivého pohybu.

### ODST. 12.3 Ještě jednu moment síly

**19C.** Pro  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  a  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  dokažte, že moment síly  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  je dán vztahem

$$\mathbf{M} = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}.$$

**20C.** Dokažte následující tvrzení: Průmět momentu síly  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  do roviny vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$  je nulový.

**21C.** Na malý míček umístěný v bodě  $(-2, 0 \text{ m}; 0; 4, 0 \text{ m})$  působí síla  $\mathbf{F}$ , která má nenulovou pouze jedinou složku. Určete velikost a směr momentu této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic v následujících případech: (a)  $F_x = 6,0 \text{ N}$ , (b)  $F_x = -6,0 \text{ N}$ , (c)  $F_z = 6,0 \text{ N}$  a (d)  $F_z = -6,0 \text{ N}$ .

**22C.** Na částici v bodě o souřadnicích  $(0; -4, 0 \text{ m}; 3, 0 \text{ m})$  působí (a) síla  $\mathbf{F}_1$  o složkách  $F_{1x} = 2,0 \text{ N}$  a  $F_{1y} = F_{1z} = 0$ , (b) síla  $\mathbf{F}_2$  o složkách  $F_{2x} = 0$ ,  $F_{2y} = 2,0 \text{ N}$  a  $F_{2z} = 4,0 \text{ N}$ . V obou případech vypočítejte velikost a směr momentu síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

**23Ú.** Síla  $\mathbf{F} = (2,0 \text{ N})\mathbf{i} - (3,0 \text{ N})\mathbf{k}$  působí na kamínek, jehož poloha vzhledem k počátku soustavy souřadnic je dána vektorem  $\mathbf{r} = (0,50 \text{ m})\mathbf{j} - (2,0 \text{ m})\mathbf{k}$ . Vypočítejte moment této síly (a) vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (b) vzhledem k bodu o souřadnicích  $(2, 0 \text{ m}; 0; -3, 0 \text{ m})$ .

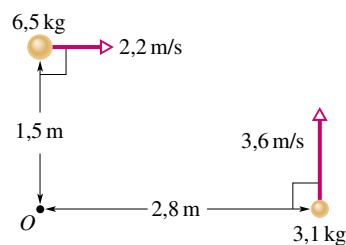
**24Ú.** Na částici v poloze určené souřadnicemi  $(3, 0 \text{ m}; -2, 0 \text{ m}; 4, 0 \text{ m})$  působí (a) síla  $\mathbf{F}_1 = (3, 0 \text{ N})\mathbf{i} - (4, 0 \text{ N})\mathbf{j} + (5, 0 \text{ N})\mathbf{k}$ , (b) síla  $\mathbf{F}_2 = (-3, 0 \text{ N})\mathbf{i} - (4, 0 \text{ N})\mathbf{j} - (5, 0 \text{ N})\mathbf{k}$ , (c) výslednice sil  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_2$ . Ve všech případech vypočítejte moment síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

**25Ú.** Na částici v bodě o souřadnicích  $(0; -4, 0 \text{ m}; 5, 0 \text{ m})$  působí síly  $\mathbf{F}_1 = (3, 0 \text{ N})\mathbf{k}$  a  $\mathbf{F}_2 = (-2, 0 \text{ N})\mathbf{j}$ . Vypočítejte jejich výsledný moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic.

**26Ú.** Na částici o poloze  $\mathbf{r} = (3, 0 \text{ m})\mathbf{i} + (4, 0 \text{ m})\mathbf{j}$  působí síla  $\mathbf{F} = (-8, 0 \text{ N})\mathbf{i} + (6, 0 \text{ N})\mathbf{j}$ . Vypočítejte (a) moment této síly vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) úhel mezi vektory  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{F}$ .

### ODST. 12.4 Moment hybnosti

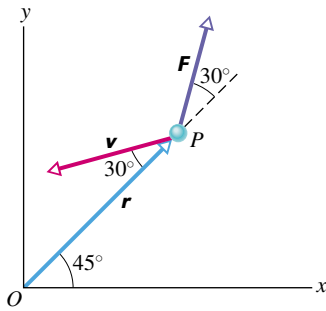
**27C.** Soustava na obr. 12.36 je složena ze dvou pohybujících se těles. Vypočítejte její celkový moment hybnosti vzhledem k bodu  $O$ .



Obr. 12.36 Cvičení 27

**28C.** Letadlo o hmotnosti 1 200 kg letí rychlostí  $80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Letí po přímce ve stálé výšce 1,3 km nad zemí. Vypočítejte velikost jeho momentu hybnosti vzhledem k bodu, který leží na zemském povrchu přímo pod ním.

**29C.** Částice o hmotnosti 2,0 kg je právě v poloze určené vektorem  $\mathbf{r}$  ( $r = 3,0 \text{ m}$ ) a má rychlost  $\mathbf{v}$  ( $v = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) (obr. 12.37). Síla  $\mathbf{F}$  ( $F = 2,0 \text{ N}$ ), která na ni působí, leží v rovině vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{v}$ . Vypočítejte vzhledem k počátku soustavy souřadnic (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly  $\mathbf{F}$ .



Obr. 12.37 Cvičení 29

**30C.** Pomocí rov. (12.26) lze ze zadaných hodnot  $r$ ,  $p$  a  $\varphi$  určit moment hybnosti částice. V některých případech jsou však místo velikostí vektorů  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$  a úhlu mezi nimi zadány pouze jejich složky  $(x, y, z)$  a  $(v_x, v_y, v_z)$ . (a) Dokažte, že složky momentu hybnosti částice  $\mathbf{L}$  jsou dány vztahy  $L_x = m(v_y z - z v_y)$ ,  $L_y = m(z v_x - x v_z)$  a  $L_z = m(x v_y - y v_x)$ . (b) Dokažte, že při pohybu částice v rovině  $xy$  má její moment hybnosti nenulovou jediné  $z$ -ovou složku.

**31C.** Částice má v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r} = 2,0\mathbf{i} - 2,0\mathbf{k}$  (v metrech) rychlost  $\mathbf{v} = -5,0\mathbf{i} + 5,0\mathbf{k}$  (v m/s) a působí na ni síla  $\mathbf{F} = 4,0\mathbf{j}$  (v newtonech). Vypočtěte (a) moment hybnosti částice a (b) moment síly  $\mathbf{F}$ , obojí vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (Tip: Viz cvič. 19 a 30.)

**32Ú.** Člověk o hmotnosti 84 kg stojí na rovníku. Jaká je velikost jeho momentu hybnosti vzhledem ke středu Země?

**33Ú.** Soustava je tvořena dvěma stejně hmotnými částicemi, které se pohybují opačnými rychlostmi o velikosti  $v$ . Vzdálenost jejich přímkových trajektorií je  $d$ . (a) Vyjádřete velikost momentu hybnosti soustavy vzhledem k bodu ležícímu uprostřed mezi oběma trajektoriemi pomocí veličin  $m$ ,  $v$  a  $d$ . (b) Jak se změní velikost momentu hybnosti, zvolíme-li jiný vztahový bod? (c) Jak se změní odpověď na otázky (a) a (b), budou-li se částice pohybovat po přímkách souhlasně?

**34Ú.** Těleso o hmotnosti 2,0 kg se pohybuje v rovině  $xy$  rychlostí  $\mathbf{v}$  o složkách  $v_x = 30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a  $v_y = 60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . V určitém okamžiku prochází bodem o souřadnicích  $(x, y) = (3,0 \text{ m}; -4,0 \text{ m})$ . (a) Určete v tomto okamžiku moment hybnosti tělesa vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Vypočtěte moment hybnosti tělesa v tomtéž okamžiku, avšak vzhledem k bodu  $(-2,0 \text{ m}; -2,0 \text{ m})$ .

**35Ú.** (a) Pomocí údajů v dodatcích vypočtěte velikost celkového momentu hybnosti soustavy planet při jejich oběhu kolem Slunce. Slunce považujte za vztahový bod. (b) Jak velký je moment hybnosti samotného Jupiteru a jakou část velikosti celkového momentu hybnosti představuje?

### ODST. 12.5 Věta o momentu hybnosti

**36C.** Částice o hmotnosti 3,0 kg má v bodě o souřadnicích  $x = 3,0 \text{ m}$  a  $y = 8,0 \text{ m}$  rychlost  $\mathbf{v} = (5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{i} - (6,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{j}$ . Na částici působí síla  $\mathbf{F}$  o velikosti 7,0 N ve směru záporné osy  $x$ .

(a) Vypočtěte její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (b) Určete moment síly  $\mathbf{F}$  vzhledem k počátku soustavy souřadnic. (c) Jak rychle se mění moment hybnosti částice? (Rychlost změny fyzikální veličiny určuje její časová derivace.)

**37C.** Na částici působí dvě síly. Moment první síly, označený  $\mathbf{M}_1$  a vztažený k počátku soustavy souřadnic, má velikost 2,0 N·m a směřuje podél kladné osy  $x$ . Moment druhé síly,  $\mathbf{M}_2$ , má velikost 4,0 N·m a je rovnoběžný se záporným směrem osy  $y$ . Určete velikost a směr vektoru  $d\mathbf{L}/dt$ , představujícího časovou derivaci momentu hybnosti částice, vztaženého rovněž k počátku soustavy souřadnic.

**38C.** V každém z následujících případů určete moment síly, která působí na částici pohybující se v rovině  $xy$ , znáte-li její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic:

- (a)  $-4,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ , (c)  $-4,0\sqrt{t} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ ,  
 (b)  $-4,0t^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ , (d)  $-4,0/t^2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

**39C.** Autíčko o hmotnosti 3,0 kg jede podél osy  $x$ . Časová závislost jeho rychlosti je dána funkcí  $v_x = -2,0t^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . V obecném okamžiku  $t > 0$  vyjádřete (a) moment hybnosti autíčka vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (b) moment síly, která na ně působí, vzhledem k témuž vztahovému bodu. Opakujte výpočet (a) a (b) pro vztahový bod o souřadnicích (c)  $(2,0 \text{ m}; 5,0 \text{ m}; 0)$ , (d)  $(2,0 \text{ m}; -5,0 \text{ m}; 0)$ .

**40Ú.** V okamžiku  $t = 0$  je poloha částice o hmotnosti 2,0 kg dána polohovým vektorem  $\mathbf{r} = (4,0 \text{ m})\mathbf{i} - (2,0 \text{ m})\mathbf{j}$ . Její rychlost závisí na čase vztahem  $\mathbf{v} = (-6,0t^4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{i} + (3,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{j}$ . Pro libovolný okamžik  $t > 0$  vyjádřete (a) moment hybnosti částice, (b) výsledný moment sil, které na ni působí. Za vztahový bod pro výpočet momentů zvolte počátek soustavy souřadnic. (c) Výpočet částí (a) a (b) zopakujte pro vztahový bod  $(-2,0 \text{ m}; -3,0 \text{ m}; 0 \text{ m})$ .

**41Ú.** Kulka o hmotnosti  $m$  je vystřelena ze země počáteční rychlostí o velikosti  $v_0$  pod elevačním úhlem  $\theta_0$ . (a) Vyjádřete její moment hybnosti vzhledem k místu výstřelu v závislosti na čase. (b) Jak rychle se moment hybnosti mění? (c) Vypočtěte velikost vektoru  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  přímo a porovnejte ji s výsledkem úlohy (b). Proč jsou oba výsledky shodné?

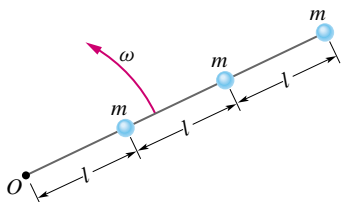
### ODST. 12.7 Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k pevné ose

**42C.** Brusný kotouč s momentem setrvačnosti  $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  je připojen k motoru, který na něj působí silou s momentem 16 N·m. Určete (a) moment hybnosti kotouče vzhledem k ose vedené jeho středem a (b) jeho úhlovou rychlost po uplynutí doby 33 ms od zapnutí motoru.

**43C.** Velikost momentu hybnosti setrvačnicku vzhledem k ose vedené jeho středem se během 1,50 s zmenšila z  $3,00 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$  na  $0,800 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . Těleso má vzhledem k této ose moment setrvačnosti  $0,140 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . (a) Určete průměrný moment sil, které na setrvačnick při jeho brzdění působily, vzhledem k ose otáčení. (b) Vypočtěte celkový úhel otočení setrvačnicku během brzdění

za předpokladu, že bylo rovnoměrné. (c) Jakou práci vykonaly brzdící síly? (d) Jaký byl jejich průměrný výkon?

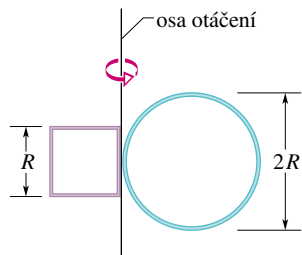
**44C.** Tři částice se stejnými hmotnostmi  $m$  jsou navzájem spojeny třemi vlákny délky  $l$  a připojeny k ose otáčení vedené bodem  $O$  (obr. 12.38). Hmotnost vláken je zanedbatelná. Soustava částic se otáčí kolem této osy s úhlovou rychlostí  $\omega$  tak, že částice leží na přímce. Pomocí veličin  $m$ ,  $l$  a  $\omega$  vyjádřete (a) moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu  $O$ , (b) moment hybnosti prostřední částice vzhledem k téměř bodu a (c) celkový moment hybnosti soustavy vzhledem k bodu  $O$ .



Obr. 12.38 Cvičení 44

**45C.** Homogenní tyč se otáčí ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím koncem. Délka tyče je 6,00 m, tíhová síla má velikost 10,0 N. Tyč se otáčí úhlovou rychlostí 240 ot/min ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. (a) Vypočítejte moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení a (b) její moment hybnosti vzhledem k této ose.

**46Ú.** Na obr. 12.39 je znázorněno tuhé těleso, které se skládá z kruhové obruče o poloměru  $R = 0,50$  m a hmotnosti  $m = 2,0$  kg a ze čtverce vyrobeného ze čtyř stejných tenkých tyčí o délce  $R$  a hmotnosti  $m$ . Těleso se otáčí konstantní úhlovou rychlostí kolem svislé osy s periodou 2,5 s. Vypočítejte (a) moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a (b) jeho moment hybnosti vzhledem k této ose.

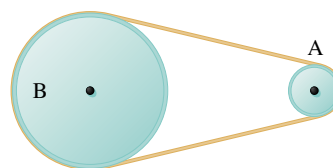


Obr. 12.39 Úloha 46

**47Ú.** Kola A a B na obr. 12.40 jsou spojena neprokluzujícím řemenem. Poloměr kola B je třikrát větší než poloměr kola A. Určete poměr momentů setrvačnosti kol  $I_A/I_B$  víte-li, že mají (a) stejný moment hybnosti vzhledem k osám otáčení, nebo (b) stejnou kinetickou energii otáčivého pohybu.

**48Ú.** Síla  $F(t)$  působí po krátkou dobu  $\Delta t$  na rotující tuhé těleso s momentem setrvačnosti  $I$ . Ukažte, že platí

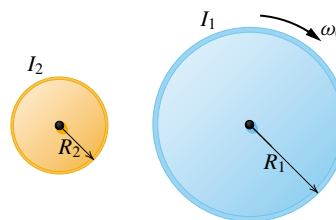
$$\int M dt = \bar{F}R\Delta t = I(\omega_f - \omega_i),$$



Obr. 12.40 Úloha 47

kde  $R$  je rameno síly,  $\bar{F}$  průměrná hodnota síly  $F$  v časovém intervalu  $\Delta t$  a  $\omega_i$ ,  $\omega_f$  jsou úhlové rychlosti tělesa na začátku a na konci intervalu  $\Delta t$ . (Veličina  $\int M dt = \bar{F}R\Delta t$  se nazývá *impulz momentu síly*, v analogii s impulzem síly  $\bar{F}\Delta t$ .)

**49Ú\*.** Dva válce s poloměry  $R_1$  a  $R_2$  se mohou volně otáčet kolem svých os (obr. 12.41). Odpovídající momenty setrvačnosti vzhledem k těmto osám jsou  $I_1$  a  $I_2$ . Zpočátku se větší válec otáčí úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Menší válec je v klidu a v určitém okamžiku se dotkne většího válce. Vlivem třecí síly se začne rovněž roztáčet. Po jisté době přestanou válce klouzat a od té chvíle se budou otáčet stálými úhlovými rychlostmi v opačných směrech. Vyjádřete úhlovou rychlost  $\omega_2$  menšího válce pomocí veličin  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  a  $\omega_0$ . (Tip: Moment hybnosti soustavy ani její kinetická energie se nezachovávají. Použijte vztah pro impulz momentu síly z úlohy 48.)



Obr. 12.41 Úloha 49

### ODST. 12.8 Zákon zachování momentu hybnosti

**50C.** Rotor elektrického motoru má vzhledem k ose své rotační symetrie moment setrvačnosti  $I_m = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Motor je umístěn na palubě vesmírné sondy a slouží ke změně její orientace. Moment setrvačnosti sondy vzhledem k její ose, rovnoběžné s osou motoru, je  $I_s = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Vypočítejte, kolik otáček musí rotor vykonat, aby se sonda pootočila kolem své osy o úhel  $30^\circ$ .

**51C.** Člověk stojí s upaženými rukama na desce, která se otáčí bez tření úhlovou rychlostí 1,2 ot/s. V každé ruce drží závaží. Moment setrvačnosti soustavy člověk+závaží+podložka vzhledem k ose otáčení má hodnotu  $6,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Člověk připaží a zmenší tak moment setrvačnosti soustavy na hodnotu  $2,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (a) Jakou úhlovou rychlostí se potom bude deska otáčet? (b) Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?

**52C.** Dva kotouče jsou připojeny k ose pomocí ložisek a mohou se volně otáčet bez tření. Posouváním kotoučů podél osy lze docílit jejich spojení v jedno těleso. (a) První kotouč, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je  $3,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , byl roztočen úhlovou rychlostí 450 ot/min. Druhý kotouč s momen-

tem setrvačnosti  $6,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  má úhlovou rychlost  $900 \text{ ot/min}$ . Kotouče se otáčejí souhlasně. (a) Určete společnou úhlovou rychlost kotoučů po jejich spojení. (b) Zodpovězte otázku (a) pro případ, že se kotouče před spojením otáčejí úhlovými rychlostmi  $900 \text{ ot/min}$  v opačných směrech.

**53C.** Kolo se volně otáčí úhlovou rychlostí  $800 \text{ ot/min}$ . Druhé kolo má dvakrát větší moment setrvačnosti a je zpočátku v klidu. V jistém okamžiku připojíme druhé kolo k hřídeli prvního kola. Hřídel má zanedbatelný moment setrvačnosti. (a) Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy kol na hřídeli. (b) Určete změnu kinetické energie soustavy při spojení kol.

**54C.** Moment setrvačnosti rotující hvězdy se zmenšil na jednu třetinu své původní hodnoty. Určete poměr výsledné a počáteční kinetické energie otáčivého pohybu hvězdy.

**55C.** Předpokládejme, že by Slunce spotřebovalo všechno jaderné palivo a náhle se smrštilo v bílého trpaslíka s poloměrem shodným s poloměrem Země. Jaká by byla nová perioda otáčení Slunce za předpokladu, že by se při smršťování neztratila žádná sluneční hmota? Současná perioda otáčení Slunce je asi 25 dní.

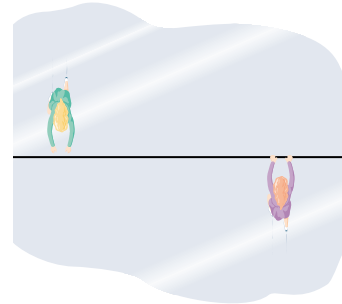
**56C.** Malý kolotoč má poloměr  $1,20 \text{ m}$  a hmotnost  $180 \text{ kg}$ . Jeho gyrační poloměr (úloha 58 v kap. 11) je  $91,0 \text{ cm}$ . Kolotoč je zpočátku v klidu. Chlapec o hmotnosti  $44,0 \text{ kg}$  běží rychlostí  $3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  po přímé dráze, která se dotýká obvodu kolotoče. V bodě dotyku hoch na kolotoč naskočí. Zanedbejte tření v ložiscích a vliv hřídele kolotoče a vypočítejte (a) moment setrvačnosti kolotoče vzhledem k ose otáčení, (b) moment hybnosti běžícího chlapce vzhledem k ose otáčení kolotoče a (c) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a chlapce.

**57C.** Vodorovná kruhová deska se otáčí bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. Deska má hmotnost  $150 \text{ kg}$ , poloměr  $2,0 \text{ m}$  a moment hybnosti  $300 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  vzhledem k ose otáčení. Člověk o hmotnosti  $60 \text{ kg}$  pomalu kráčí od obvodu desky k jejímu středu. V okamžiku, když se nacházel na obvodu desky, byla úhlová rychlost soustavy deska + člověk  $1,5 \text{ rad/s}$ . Určete úhlovou rychlost soustavy v okamžiku, kdy je člověk vzdálen od osy otáčení o  $0,50 \text{ m}$ .

**58C.** Ráfek bicyklového kola má hmotnost  $3,79 \text{ kg}$  a poloměr  $34,7 \text{ cm}$ . Může se otáčet v ložisku bez tření. Člověk stojí na otočné stoličce a drží kolo nad hlavou tak, aby jeho osa byla svislá. Kolo se otáčí úhlovou rychlostí  $57,7 \text{ rad/s}$  ve směru chodu hodinových ručiček při pohledu shora. Otočná stolička je zpočátku v klidu. Moment setrvačnosti soustavy kolo + člověk + stolička vzhledem ke společné ose otáčení je  $1,36 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Člověk volnou rukou náhle zastaví otáčení kola (vzhledem ke stoličce). Určete výslednou úhlovou rychlost (velikost a směr) soustavy. Moment setrvačnosti loukotí a středního ložiska kola zanedbejte.

**59Ú.** Dva bruslaři o hmotnostech  $50 \text{ kg}$  se přibližují po rovnoběžných přímých drahách vzdálených o  $3,0 \text{ m}$ . Rychlosti bruslařů mají stejnou velikost  $1,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jsou však opačně orientovány. První bruslař svírá v rukou konec dlouhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Druhý bruslař uchopí tyč v okamžiku, kdy ji míjí (obr. 12.42). Tření mezi bruslemi a ledem považujeme za zanedbatelné. (a) Popište kvantitativně pohyb bruslařů po je-

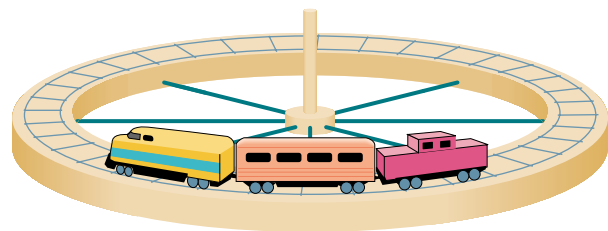
jich spojení. (b) Ručkováním podél tyče se bruslaři přiblížili na vzdálenost  $1,0 \text{ m}$ . Určete výslednou úhlovou rychlost soustavy. (c) Vypočítejte kinetickou energii bruslařů ve stavech (a) a (b). (d) Odkud se vzala „přebytečná“ kinetická energie?



Obr. 12.42 Úloha 59

**60Ú.** Dvě děti o stejných hmotnostech  $m$  sedí na opačných koncích úzké desky o délce  $L$  a hmotnosti  $m$  shodné s hmotností dítěte. Deska se může otáčet bez tření kolem svislé osy vedené jejím středem. (a) Vypočítejte moment setrvačnosti desky s dětmi vzhledem k ose otáčení. (b) Určete moment hybnosti soustavy, otáčí-li se úhlovou rychlostí  $\omega_0$  ve směru otáčení hodinových ručiček při pohledu shora. Určete směr vektoru momentu hybnosti. (c) Během otáčení se děti posunuly podél desky a zmenšily svou vzdálenost od osy otáčení na polovinu původní hodnoty. Vyjádřete výslednou úhlovou rychlost soustavy pomocí  $\omega_0$ . (d) Vypočítejte změnu kinetické energie soustavy. Jak vznikla „přebytečná“ kinetická energie? Při výpočtech nahraďte desku tenkou tyčí.

**61Ú.** Koleje dětského vláčku leží na velkém kole o hmotnosti  $m$  a poloměru  $R$ , které se může volně otáčet bez tření kolem svislé osy (obr. 12.43). Na kolejkách stojí vláček o hmotnosti  $m'$ . Soustava je v klidu. Vláček uvedeme do pohybu rychlostí  $v$  vzhledem ke kolejkám. Vypočítejte úhlovou rychlost  $\omega$  kola. Při výpočtu nahraďte kolo obruči a zanedbejte hmotnost loukotí a středního ložiska.



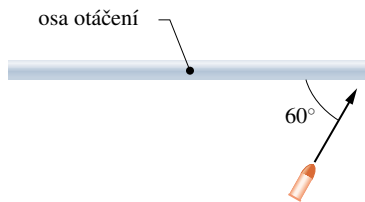
Obr. 12.43 Úloha 61

**62Ú.** Moucha o hmotnosti  $m$  se pohybuje proti směru chodu hodinových ručiček po obvodu kruhového talíře, který se může bez tření otáčet kolem svislé osy. Talíř má poloměr  $R$  a moment setrvačnosti  $I$ . Rychlost mouchy vzhledem k zemi je  $v$ , talíř se otáčí úhlovou rychlostí  $\omega_0$  ve směru chodu hodinových ručiček. Moucha se najednou zastaví. (a) Jaká je výsledná úhlová rychlost talíře? (b) Zachovala se mechanická energie soustavy?

**63Ú.** Děvče o hmotnosti  $m$  stojí na obvodu kolotoče o poloměru  $R$  a momentu setrvačnosti  $I$ . Kolotoč se může otáčet bez tření kolem svislé osy, zpočátku je však v klidu. Děvče hodí kámen o hmotnosti  $m'$  vodorovným směrem tečně k obvodu kolotoče. Rychlost kamene vzhledem k zemi je  $v$ . Vypočítejte (a) výslednou úhlovou rychlost kolotoče a (b) obvodovou rychlost děvčete na kolotoči.

**64Ú.** Gramofonová deska o hmotnosti  $0,10\text{ kg}$  a poloměru  $0,10\text{ m}$  se otáčí kolem svislé osy vedené jejím středem úhlovou rychlostí  $4,7\text{ rad/s}$ . Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení je  $5,0 \cdot 10^{-4}\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . Na desku spadne hruška tmelu o hmotnosti  $0,020\text{ kg}$  a zůstane přilepena na jejím obvodu. Určete úhlovou rychlost desky po dopadu tmelu.

**65Ú.** Tenká homogenní tyč o délce  $0,50\text{ m}$  a hmotnosti  $4,0\text{ kg}$  se může otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy vedené jejím středem. Tyč je zpočátku v klidu. Na konec tyče narazí střela o hmotnosti  $3,0\text{ g}$ . Dráha střely je vodorovná a svírá s osou tyče úhel  $60^\circ$  (obr. 12.44). Střela se do tyče zaryje a roztočí ji úhlovou rychlostí  $10\text{ rad/s}$ . Jakou rychlostí střela do tyče narazila?



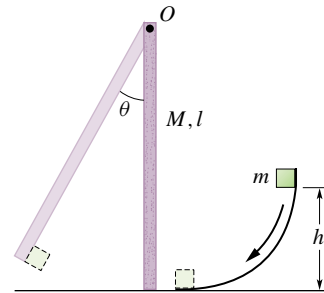
Obr. 12.44 Úloha 65

**66Ú.** Moucha o hmotnosti  $m$  sedí na obvodu homogenního kotouče o hmotnosti  $10,0m$ , který se může volně otáčet kolem svislé osy vedené jeho středem. Zpočátku se kotouč s mouchou otáčí úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Moucha přejde po kotouči směrem k jeho středu a zastaví se v bodě vzdáleném od středu o polovinu poloměru kotouče. (a) Určete změnu úhlové rychlosti  $\Delta\omega$  soustavy kotouč + moucha. (b) Vypočítejte poměr  $E_k/E_{k,0}$  výsledné a počáteční kinetické energie soustavy. (c) Jak vznikl přírůstek kinetické energie?

**67Ú.** Homogenní kotouč o hmotnosti  $10m$  a poloměru  $3,0r$  se může volně otáčet kolem pevné svislé osy vedené jeho středem. Menší homogenní kotouč o hmotnosti  $m$  a poloměru  $r$  leží na povrchu většího kotouče tak, že jejich osy symetrie splývají. Zpočátku se oba kotouče otáčejí společně úhlovou rychlostí o velikosti  $20\text{ rad/s}$ . Vlivem malé poruchy se menší kotouč vychýlí ze své původní polohy a klouže po velkém kotouči až k jeho obvodu, kde se zachytí. Poté se oba kotouče opět otáčejí společně, bez prokluzování. (a) Vypočítejte výslednou úhlovou rychlost velkého kotouče. (b) Vypočítejte poměr  $E_{k,f}/E_{k,i}$  výsledné a počáteční kinetické energie soustavy kotoučů.

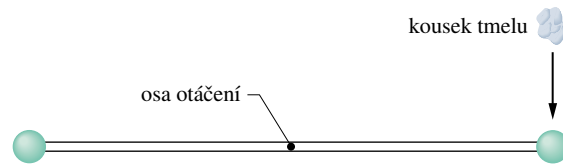
**68Ú.** Znečištění atmosféry prý může způsobit zvýšení průměrné teploty a roztavení polárních čepiček. Kdyby se polární ledové čepičky Země rozpustily a voda se vrátila do světového oceánu, zvětšila by se hloubka oceánu asi o  $30\text{ m}$ . Jaký vliv by tato změna měla na otáčení Země? Odhadněte, jak by se změnila délka dne.

**69Ú\*.** Částice o hmotnosti  $m$  klouže po dokonale hladké skluzavce na obr. 12.45. Narazí na homogenní svislou tyč a spojí se s ní. Po nárazu se tyč otočí kolem bodu  $O$  o úhel  $\theta$ . Vyjádřete tento úhel pomocí veličin uvedených na obrázku.



Obr. 12.45 Úloha 69

**70Ú\*.** Dva míče o hmotnostech  $2,00\text{ kg}$  jsou připevněny ke koncům tenké tyče délky  $50,0\text{ cm}$  zanedbatelné hmotnosti. Tyč se může otáčet bez tření kolem vodorovné osy vedené jejím středem. V okamžiku, kdy má tyč vodorovnou polohu, dopadne na ni hruška tmelu o hmotnosti  $50,0\text{ g}$  rychlostí  $3,00\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a zůstane s ní spojená (obr. 12.46). (a) Určete výslednou úhlovou rychlost tyče. (b) Vypočítejte poměr výsledné a počáteční kinetické energie soustavy tyč s míči + hruška. (c) Vypočítejte úhlovou výchylku tyče z vodorovné polohy v okamžiku, kdy je její okamžitá úhlová rychlost nulová (bod obratu).

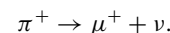


Obr. 12.46 Úloha 70

### ODST. 12.9 Kvantovaný moment hybnosti

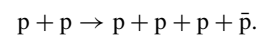
**71C.** Jakou hodnotu má složka spinového momentu hybnosti elektronu do libovolného pevného směru?

**72C.** Kladný pion ( $\pi^+$ ) se může spontánně rozpadnout na kladný mion ( $\mu^+$ ) a neutrino ( $\nu$ ):



Má-li neutrino  $m_s = +\frac{1}{2}$ , vypočítejte (a) kvantové číslo  $m_s$  a (b) spinový moment hybnosti  $S$  kladného mionu.

**73C.** Dva protony, které se sráží velkými rychlostmi, se mohou přeměnit na tři protony a antiproton:



Vypočítejte orientaci spinového momentu hybnosti produktů reakce (nahoru nebo dolů), víte-li, že oba protony mají spinové momenty hybnosti orientovány nahoru.

## PRO POČÍTAČ

**74Ú.** Kuželková koule se obvykle bezprostředně po vrhu nejprve smýká a teprve pak se valí bez klouzání. Během smýkání na ni působí dynamická třecí síla, která zpomaluje její posuvný pohyb a urychluje její otáčení. Koule se přestane smýkat v okamžiku, kdy je  $\omega R = v$ , kde  $\omega$  je úhlová rychlost,  $R$  je poloměr koule a  $v$  rychlost jejího těžiště. Na kouli působí třecí síla o velikosti  $F = f_d N$ , kde  $f_d$  je koeficient dynamického tření a  $N$  je velikost normálové síly. Protože je dráha koule vodorovná, platí  $N = mg$ , kde  $m$  je hmotnost koule. Moment třecí síly je  $M = FR$ . Koule má hmotnost 7,25 kg a poloměr 10,9 cm, její moment setrvačnosti přibližně odpovídá momentu setrvačnosti homogenní koule. Sestavte počítačový program pro výpočet časových závislostí úhlové rychlosti a rychlosti těžiště koule a vypočítejte tyto hodnoty s krokem 0,1 s od okamžiku vrhu až do doby, kdy se koule začne valit. Za koeficient dynamického tření dosadte 0,35 a za počáteční hodnotu rychlosti koule  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Sestrojte grafy závislostí úhlové rychlosti a rychlosti koule na čase. Určete okamžik, kdy se koule přestane smýkat, a velikost její rychlosti v tomto okamžiku. (Touto rychlostí narazí koule do kuželek, neuvažujeme-li malý pokles rychlosti způsobený odporem vzduchu). Výpočty proveďte pro kouli, která (a) se zpočátku neotáčela, (b) byla vržena s počáteční úhlovou rychlostí  $150 \text{ rad/s}$  a otáčela se stejným směrem jako po skončení smýkání, (c) byla vržena se stejnou velikostí úhlové rychlosti jako v (b), ale směr otáčení byl opačný. (d) Jak musíme kouli hodit, aby narazila na kuželek největší možnou rychlostí?

**75Ú.** Střela o hmotnosti  $0,15 \text{ kg}$  je vypálena počáteční rychlostí  $50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  pod elevačním úhlem  $35^\circ$ . Odpor vzduchu je zanedbatelný. (a) Sestavte počítačový program pro výpočet časové závislosti momentu hybnosti střely vzhledem k místu výstřelu. Použijte numerické integrace. Moment hybnosti tabelujte s krokem  $0,1 \text{ s}$  až do okamžiku, kdy střela dopadne na vodorovnou rovinu. Sestrojte graf závislosti velikosti momentu hybnosti střely na druhé mocnině času a ověřte, že je přímkový. Znázorněte závislost velikosti momentu tíhové síly na čase a ověřte, že i v tomto případě je grafem přímková. Při výpočtu použijte vztah  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ , kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor střely vzhledem k vztažnému bodu a  $\mathbf{F}$  je tíhová síla, která na ni působí. Platí pro získané výsledky také vztah  $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$ , analogický druhému Newtonovu pohybovému zákonu? (b) Započtíme nyní i vliv odporu vzduchu. Předpokládejme, že mezní rychlost střely je  $v_m = 75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a že zrychlení střely může být vyjádřeno ve tvaru  $\mathbf{a} = -g\mathbf{j} - b\mathbf{v}\mathbf{v}$ , kde  $b = g/v_m^2$ . Bude i nyní velikost momentu hybnosti přímo úměrná druhé mocnině času? Je velikost momentu síly opět lineární funkcí času? Pro obecně zvolený okamžik rozhodněte, zda je velikost výsledného momentu sil působících na střelu větší, nebo menší než v případě bez odporu vzduchu. Získané numerické výsledky fyzikálně interpretujte.

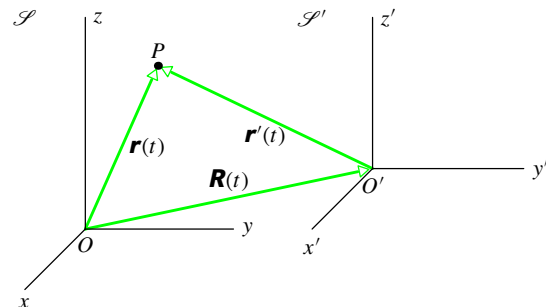
**76Ú.** V určitém okamžiku je poloha částice vzhledem k počátku soustavy souřadnic dána vektorem  $\mathbf{d} = (2,00 \text{ m})\mathbf{i} + (4,00 \text{ m})\mathbf{j} - (3,00 \text{ m})\mathbf{k}$ , její rychlost je  $\mathbf{v} = -(6,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{i} + (3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{j} + (3,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})\mathbf{k}$ . Na částici působí síla  $\mathbf{F} = (6,00 \text{ N})\mathbf{i} - (8,00 \text{ N})\mathbf{j} + (4,00 \text{ N})\mathbf{k}$ . Určete (a) zrychlení čas-

tice, (b) její moment hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic, (c) výsledný silový moment vzhledem k počátku soustavy souřadnic a (d) úhel mezi vektorem rychlosti a vektorem výslednice sil působících na částici.

## PROBLÉM

**77.** Při odvození věty o momentu hybnosti pro soustavu částic (rov. (12.37)) jsme momenty hybnosti všech částic i momenty sil působících na tyto částice vztahovali k pevně zvolenému bodu  $O$ . Tento vztažný bod byl vždy v klidu vzhledem k určité inerciální vztažné soustavě. Na druhé straně jsme konstatovali, že věta o momentu hybnosti ve tvaru (12.37) platí i za předpokladu, že za vztažný bod zvolíme těžiště studované soustavy částic či tělesa. V příkladech a úlohách jsme pak valení těles interpretovali jako jejich otáčení kolem pevné osy vedené těžištěm. Je takový postup opravdu přípustný? Vždyť vztažná soustava spojená s těžištěm může být neinerciální! (Právě tak tomu je například u těles valících se zrychleně po nakloněné rovině.) A jestliže je možné spojit počátek vztažné soustavy s těžištěm, je třeba nějak omezit volbu souřadných os? Odpověď na poslední otázku prozradíme, zbytek dokážete pomocí návodu odvodit sami:

Označme  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$  dvě vztažné soustavy, jejichž odpovídající si souřadnicové osy jsou trvale rovnoběžné (obr. 12.47). Soustava  $\mathcal{S}$  je inerciální a pohyb počátku  $O'$  soustavy  $\mathcal{S}'$  je v ní popsán polohovým vektorem  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ . Poloha částice  $P$  je v okamžiku  $t$  zadána vektorem  $\mathbf{r}(t)$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{S}$  a vektorem  $\mathbf{r}'(t)$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{S}'$ .



**Obr. 12.47** Vztažná soustava  $\mathcal{S}'$  se vzhledem k inerciální soustavě  $\mathcal{S}$  pohybuje čistě posuvným pohybem se zrychlením  $\mathbf{A} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ .

(a) Vyjádřete  $\mathbf{r}(t)$  pomocí  $\mathbf{r}'(t)$  a  $\mathbf{R}(t)$ . Označte  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\mathbf{v}'(t)$ ,  $\mathbf{V}(t)$  a  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{a}'(t)$ ,  $\mathbf{A}(t)$  odpovídající rychlosti a zrychlení a ukažte, že platí následující transformační vztahy:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t) + \mathbf{V}(t), \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{A}(t).$$

(V dalších výpočtech již nebudeme závislost veličin na čase explicitně vypisovat.) Uvědomte si, že požadavek neustálé rovnoběžnosti souřadnicových os soustav  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  zaručuje, že vzájemný pohyb těchto soustav je čistě posuvný. Zamyslete se nad tím, zda by předchozí transformační vztahy pro rychlosti a zrychlení zůstaly v platnosti, kdybychom připustili možnost otáčení soustavy  $\mathcal{S}'$  vzhledem k  $\mathcal{S}$ .



(b) Označme  $\mathbf{L}$  moment hybnosti soustavy částic vzhledem ke vztažené soustavě  $\mathcal{S}$ . Platí (rov. (12.25) a (12.35))

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

a

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i.$$

(Výpočet  $d\mathbf{L}/dt$  proveďte a zdůvodněte poslední rovnost.) Do vztahu pro  $d\mathbf{L}/dt$  dosadte  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R}$  a  $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i + \mathbf{A}$  a vyjádřete tak výsledek pomocí čárkovaných veličin. Přesvědčte se, že platí

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{A} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i + \mathbf{R} \times m\mathbf{A},$$

kde  $\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i$  je moment hybnosti soustavy částic vztažený k bodu  $O'$  a  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  je celková hmotnost soustavy.

(c) Obdobně postupujte při vyjádření celkového momentu vnějších sil působících na částice soustavy. Platí

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i,\text{ext}},$$

kde  $\mathbf{F}_{i,\text{ext}}$  je výslednice sil, jimiž objekty náležející do okolí soustavy působí na její  $i$ -tou částici. Použijte věty o hybnosti pro soustavu částic  $\left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum \mathbf{F}_{i,\text{ext}} \right)$  a ukažte, že

$$\sum \mathbf{M}_{\text{ext}} = \sum \mathbf{M}'_{\text{ext}} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}'_i + \mathbf{R} \times m\mathbf{A},$$

kde  $\mathbf{M}'_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_{i,\text{ext}}$  je výsledný moment vnějších sil působících na soustavu, vztažený k bodu  $O'$ .

(d) Veličiny  $d\mathbf{L}/dt$  a  $\sum \mathbf{M}_{\text{ext}}$  jsou vázány větou o momentu hybnosti (rov. (12.37)). Porovnejte výrazy pro  $d\mathbf{L}/dt$  a  $\sum \mathbf{M}_{\text{ext}}$ , získané v částech (b) a (c) a ukažte, že platí

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum \mathbf{M}'_{\text{ext}} + \left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{A}.$$

(e) V případě, že jsou všechny momenty vztaženy k bodu  $O'$  se tedy veličiny  $d\mathbf{L}'/dt$  a  $\sum \mathbf{M}'_{\text{ext}}$  liší o vektor

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \mathbf{A}.$$

Tento vektor, představující „odchylku“ od zápisu věty o momentu hybnosti v inerciální vztažené soustavě, je nulový v každé ze tří situací (zdůvodněte použitím definice vektorového součinu):

1.  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ,
2.  $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0}$ , a tedy  $\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$  (ověřte zpětným dosazením  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$ ),
3.  $\mathbf{A} \parallel \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i$  v každém okamžiku,

$$\mathbf{A}(t) = K \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{R}(t) \right), \text{ tj. } \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + K\mathbf{R} = K\mathbf{r}_T.$$

$K$  je jistá (neznámá) konstanta. V uvedených situacích budou formulace věty o momentu hybnosti ve vztažných soustavách  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{S}'$  formálně shodné. Fyzikálně významné jsou pouze případy 1 a 2. Interpretujte je. (Třetí případ představuje soustavu diferenciálních rovnic pro neznámý vektor  $\mathbf{R}(t)$ , s konstantou  $K$  jako parametrem.)