

# 17

## *Vlny — I*



---

*V okruhu několika desítek centimetrů od tohoto písečného štíra se v písku pohybuje brouk. Má smůlu. Štír se k němu okamžitě natočí a uloví ho. Přitom štír nemůže brouka vidět (loví zásadně v noci), ani slyšet. Jak tedy dokáže tak přesně lokalizovat svou kořist ?*

---

## 17.1 VLNY A ČÁSTICE

Když se chcete domluvit se svým přítelem ve vzdáleném městě, můžete mu napsat dopis nebo zatelefonovat.

První způsob komunikace (dopis) má povahu „částice“: hmotný objekt se pohybuje z jednoho místa na druhé a přenáší přitom energii a informaci. Ve většině předchozích kapitol jsme studovali individuální částice nebo jejich soustavy.

Druhý způsob (telefonem) má povahu „vlny“; tou se budeme zabývat v této a v příští kapitole. Také vlny přenášejí informaci a energii z místa na místo. Přitom však neputují žádné hmotné objekty. Během telefonování předávají nejprve zvukové vlny vaši zprávu od hlasivek k mikrofonu. Dále přebírají štafetu elektromagnetické vlny a zpráva je jimi přenášena měděným vodičem, optickým vláknem nebo možná i atmosférou přes komunikační družici. Na druhém konci je zpráva opět transformována na zvukové vlny a putuje od sluchátka k uchu vašeho přítele. Zpráva je předána, avšak váš přítel neobdržel nic z toho, čeho jste se dotkli vy. Tuto vlastnost vln pochopil Leonardo da Vinci, když píše o vlnách na vodní hladině: „Často se stává, že vlna uniká z místa svého zrození, zatímco voda nikoliv; podobně jako větrem vytvořené vlny běží přes obilné pole, zatímco jednotlivé klasy zůstávají na místě.“

**Částice a vlna** jsou dva klíčové pojmy klasické fyziky. Tím říkáme, že se jeden nebo druhý z těchto pojmů uplatňuje téměř v každém odvětví klasické fyziky. Přitom jsou to pojmy zásadně odlišné. Slovo *částice* vyvolává představu materiálního objektu, soustředěného v malém objemu a schopného přenášet energii. Slovo *vlna* vzbuzuje představu právě opačnou. Vybavuje se nám široce rozložená energie, vyplňující celý prostor, kterým vlna putuje. Před námi je nyní kus práce, při které se dozvíme o vlnách více. Pojem částice přitom na chvíli odložíme stranou.

## 17.2 DRUHY VLN

Setkáváme se se třemi druhy vln:

**1. Vlny mechanické.** Tyto vlny jsou nejnámější, protože se s nimi téměř neustále setkáváme. Běžné příklady jsou vlny na vodní hladině, zvukové vlny a seizmické vlny. Všechny mechanické vlny mají společné základní rysy: řídí se Newtonovými zákony a mohou existovat pouze v určitém látkovém prostředí (voda, vzduch, hornina).

**2. Vlny elektromagnetické.** Ty jsou již známé o něco méně, avšak používáme je prakticky neustále; běžné příklady jsou viditelné a ultrafialové světlo, rádiové a televizní vlny, rentgenové záření, radarové vlny. Pro svou existenci nevyžadují látkové prostředí. Například světlo hvězd se k nám

šíří vakuem v kosmu. Všechny elektromagnetické vlny se ve vakuu šíří stejnou rychlostí  $c$ :

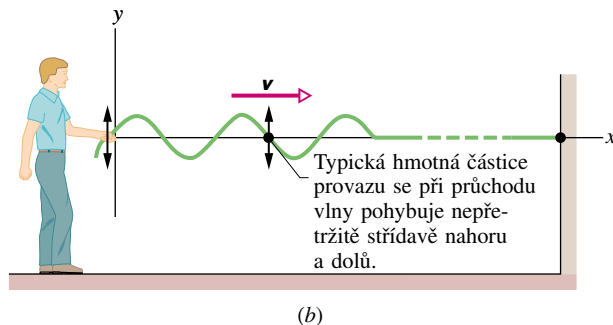
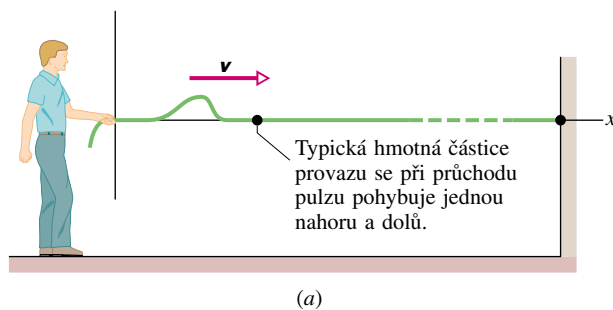
$$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (\text{rychlost světla}). \quad (17.1)$$

**3. Vlny hmoty (de Broglieho vlny).** I když se tyto vlny běžně vyskytují v moderních zařízeních, není tento druh vln příliš znám. Elektrony, protony, další elementární částice a dokonce atomy a molekuly se projevují jako vlny. Protože běžně předpokládáme, že uvedené objekty jsou stavebními elementy hmoty, nazýváme tyto vlny vlnami hmoty nebo častěji de Broglieho.

V této kapitole se výklad z velké části týká všech uvedených druhů vln. Nicméně konkrétní jevy budeme vysvětlovat na vlnách mechanických.

## 17.3 VLNY PŘÍČNÉ A PODÉLNÉ

Nejjednodušší mechanická vlna je vlna vyslaná podél nataženého a na jednom konci upevněného provazu (obr. 17.1). Když na druhém konci rychle trhnete provazem jednou nahoru a dolů, začne se podél něj šířit vlna ve formě *pulzu* jako na obr. 17.1a. Pulz se může šířit jen díky tomu, že



**Obr. 17.1** (a) Vyslání izolovaného pulzu podél nataženého provazu. (b) Vyslání spojitě sinusové vlny podél provazu. Libovolná hmotná částice provazu (na obrázku znázorněná tečkou) kmitá ve směru kolmém ke směru šíření vlny. Vlna je tedy *příčná* (*transverzální*).

v provazu lze vyvolat napětí. Když totiž přesouváme rukou nahoru první úsek provazu, je díky napětí v provazu tažen nahoru také přilehlý úsek. A když se již začne nahoru pohybovat tento přilehlý úsek, je jím opět tažen nahoru také následující úsek atd. Mezitím však již naše ruka táhne konec provazu směrem dolů. A tak každý úsek, který se pohybuje nahoru, začíná být tažen dolů sousedními úseky, které se již pohybují směrem dolů. Celkový výsledek vzájemného působení jednotlivých úseků pak spočívá v pohybu změny tvaru provazu (v pohybu pulzy) podél provazu určitou rychlostí  $v$ .

Když pohybujeme rukou harmonicky nahoru a dolů, je její pohyb popsán funkcí sinus, a vlna obvykle má (při nepřilíh velkých výchylkách) také v libovolném okamžiku sinusový tvar, jako na obr. 17.1b. To znamená, že tvar vlny odpovídá křivce, představující funkci sinus nebo kosinus.

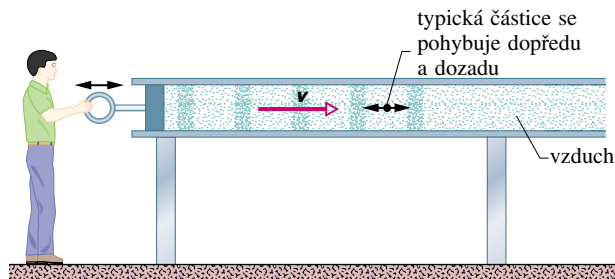
V naší úvaze vystupuje „ideální“ provaz (vlákno, struna), tj. neuvažujeme síly tření, které by šířící se vlnu nakonec utlumily. Navíc předpokládáme, že provaz je dostatečně dlouhý, a nemusíme se tedy zatím zabývat odrazem vlny na vzdáleném, upevněném konci provazu.

Dosud jsme studovali vlny na obr. 17.1 tak, že jsme vlastně sledovali **tvar vlny** při jejím pohybu směrem doprava. Na druhé straně můžeme také sledovat pohyb pevně zvolené částice provazu, tj. sledovat její kmitání nahoru a dolů při průchodu vlny. Jak je vyznačeno na obr. 17.1, výchylka každé částice provazu je *kolmá* ke směru šíření vlny. Pohyb typické částice je **příčný (transverzální)**, samotná vlna se nazývá **vlna příčná (transverzální)**. Zde se zabýváme jen **lineárně polarizovanou vlnou**, jejíž výchylka má stálý směr (neorientovaný). Jiné druhy polarizace zavedeme až v čl. 34.6.

Obr. 17.2 znázorňuje vznik zvukové vlny v dlouhé trubici, která je vyplněna vzduchem a na jednom konci uzavřena pístem. Jestliže rychle postrčíme píst doprava a pak hned doleva, vyšleme do trubice zvukový pulz. Pohyb pístu doprava vyvolá pohyb vzduchu těsně za pístem také směrem doprava. Těsně vpravo za pístem tak vzniká oblast vyššího tlaku vzduchu. Tato oblast vyvíjí tlak směrem doprava a stlačuje vzduch v sousedním objemovém elementu, umístěném směrem doprava podél osy trubice. Mezitím však již vznikl těsně za pístem podtlak, neboť jsme jej posunuli směrem

doleva. Pohyb libovolné částice vzduchu směrem doprava je tak následován pohybem směrem doleva. Posunutí jednotlivých částic a současně změny tlaku tak putují jako pulz směrem doprava podél osy trubice.

Jestliže nyní pohybujeme pístem střídavě doprava a doleva, uskutečňuje píst harmonický pohyb a podél osy trubice se šíří sinusová vlna. Jak je naznačeno na obr. 17.2,

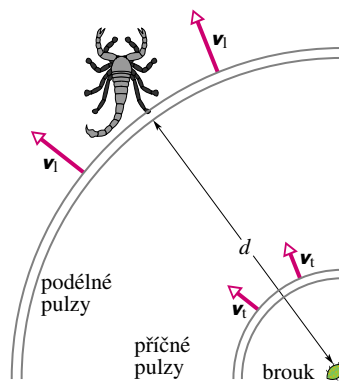


**Obr. 17.2** Pohybem pístu dopředu a dozadu vyšleme do trubice naplněné vzduchem zvukovou vlnu. Částice vzduchu (na obrázku je znázorněna černou tečkou) přitom kmitá rovnoběžně se směrem postupu vlny. Vlna je tedy *podélná (longitudinální)*.

typická částice vzduchu se přitom pohybuje ve směru rovnoběžném s osou trubice, a tedy také se směrem šíření vlny. Tento pohyb označujeme jako **podélný (longitudinální)**, samotnou vlnu nazýváme **vlnou podélnou (longitudinální)**. V této kapitole se zaměříme na příčné vlny a speciálně na vlny, vznikající ve strunách. V kap. 18 se budeme věnovat vlnám podélným a speciálně vlnám zvukovým.

Zatím jsme probírali **vlny postupné**; ty postupují z jednoho místa na druhé. Tak například vlna na obr. 17.1 postupuje od jednoho konce provazu směrem k druhému konci, vlna na obr. 17.2 postupuje od jednoho konce trubice směrem k druhému konci. Všimněme si, že postupuje skutečně pouze vlna a nikoliv látka (to jest částice provazu nebo částice vzduchu), kterou se vlna šíří.

Štír na úvodní fotografii této kapitoly využívá k zaměření své kořisti jak příčné, tak podélné vlny. Brouk totiž při každém svém pohybu nepatrně pohybuje zrnky písku a vysílá tak podél povrchu písku pulzy (obr. 17.3). Jsou to jednak pulzy podélné, šířící se rychlostí  $v_l = 150 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jednak pulzy příčné, postupující rychlostí  $v_t = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .



**Obr. 17.3** Pohybem brouka jsou vyvolány podél povrchu písku rychlé podélné pulzy a pomalejší pulzy příčné. Štír tedy nejprve zachytí pulzy podélné. Na obrázku je znázorněno, jak jsou tyto podélné pulzy nejdříve zachyceny pravou nejzadnější (čtvrtou) končetinou.

Osm končetin štíra je při lovu rozloženo zhruba na kružnici o průměru 5 cm. Štír tedy přijímá svými končetinami nejprve rychleji postupující podélné pulzy. Azimut kořisti je určen končetinou, která zachytila pulzy jako první. Poté štír vyhodnotí časový interval  $\Delta t$  mezi zachycením prvního podélného pulzu a prvního pomalejšího, příčného pulzu. Označíme-li vzdálenost kořisti  $d$ , platí

$$\Delta t = \frac{d}{v_t} - \frac{d}{v_l},$$

a to tedy znamená

$$d = (75 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) \Delta t.$$

Jestliže vezmeme například  $\Delta t = 4,0 \text{ ms}$ , vychází  $d = 30 \text{ cm}$ . Tím je kořist perfektně zaměřena a zbytek je již pro štíra rutinní záležitost.

## 17.4 POSTUPNÉ VLNY

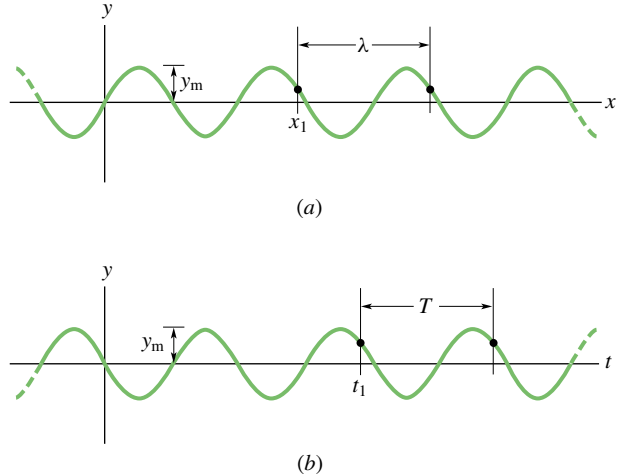
K úplnému popisu vlny ve struně (tj. k popisu pohybu její libovolné částice) potřebujeme znát funkci, která určuje tvar vlny. Formálněji řečeno, potřebujeme znát funkční závislost  $y = y(x, t)$ . Ta určuje příčnou výchylku určité částice struny jako funkci času  $t$  a polohy  $x$  této částice podél struny. Pro vlny sinusového tvaru (nazývané též harmonické), jako jsou vlny na obr. 17.1b, je výchylka  $y$  dána funkcí sinus (nebo kosinus).

Má-li sinusová vlna na obr. 17.1b postupovat stálou rychlostí ve směru osy  $x$ , musí být příčná výchylka  $y$  částice struny o souřadnici  $x$  v čase  $t$  určena vztahem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.2)$$

Zde  $y_m$  je **amplituda** vlny; index  $m$  znamená *maximum*. Amplituda vlny udává velikost maximální výchylky libovolné částice struny. (Amplituda  $y_m$  je tedy vždy kladná veličina.) Veličiny  $k$  a  $\omega$  jsou konstanty; jejich význam se právě chystáme diskutovat. Veličina  $kx - \omega t$  se nazývá **fáze** vlny.

Patrně si kladete otázku, proč jsme si k podrobnějšímu studiu vybrali právě vlny sinusové, tj. vlny popsané rov. (17.2), když přece existuje nekonečně mnoho vln různých jiných tvarů. Náš výběr je ale moudrý. Jak uvidíme v čl. 17.8, *všechny* jiné tvary vln — počítaje v to i pulz na obr. 17.1a — lze vytvořit sčítáním sinusových vln. Stačí, když u jednotlivých sčítanců pečlivě vybereme amplitudy a konstanty  $k$ . Klíčem k pochopení vln obecného tvaru je tedy studium vln sinusových.



**Obr. 17.4** (a) Snímek struny, zaznamenaný v okamžiku  $t = 0$ . Na struně postupuje sinusová vlna určená rov. (17.2). Na obrázku je vyznačena vlnová délka: je to podélná vzdálenost mezi dvěma nejbližší po sobě následujícími částicemi struny (jsou vyznačeny tečkami), v nichž se situace opakuje (stejná příčná výchylka ve stejné části křivky). Na obrázku je vyznačena také amplituda vlny  $y_m$ , tj. největší příčná výchylka jednotlivých částic. (b) Závislost výchylky částice se souřadnicí  $x = 0$  na čase při průběhu sinusové vlny tímto místem. Na obrázku je vyznačena typická perioda  $T$ : je to doba mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav částice shodný. Tyto časové okamžiky odpovídají dvěma tečkám na obrázku.

Funkce v rov. (17.2) má dvě nezávisle proměnné (souřadnici  $x$  a čas  $t$ ). Úplné znázornění funkční hodnoty  $y$  jedinou křivkou v dvojrozměrném obrázku tedy není možné. Ke zviditelnění pohybu celé vlny v reálném čase bychom potřebovali videokameru. Nicméně hodně se můžeme dozvědět i studiem dvojice křivek na obr. 17.4.

### Vlnová délka a úhlový vlnčet

Na obr. 17.4a vidíme změnu příčné výchylky v jednom daném okamžiku v závislosti na poloze částice  $x$ . Výchylka je určena rov. (17.2). Uvedený okamžik jsme zvolili libovolně, ale pevně; můžeme jej označit  $t = 0$ . Jinak řečeno, uvedená křivka představuje „snímek“ vlny v tomto okamžiku. Jestliže tedy v rov. (17.2) položíme  $t = 0$ , dostaneme

$$y(x, 0) = y_m \sin kx \quad (t = 0). \quad (17.3)$$

Křivka na obr. 17.4a představuje právě tuto funkci; ukazuje tedy okamžitý tvar vlny v čase  $t = 0$ .

**Vlnová délka**  $\lambda$  vlny je nejmenší vzdálenost (měřená ve směru šíření vlny), na které dochází k opakování tvaru vlny. Typická vlnová délka je vyznačena na obr. 17.4a. Podle uvedených definic je příčná výchylka stejná na obou koncích

intervalu délky  $\lambda$ , tedy v místech  $x = x_1$  a  $x = x_1 + \lambda$ . V čase  $t = 0$  je ovšem výchylka v libovolném místě určena rov. (17.3). Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} y_m \sin(kx_1) &= y_m \sin(k(x_1 + \lambda)) = \\ &= y_m \sin(kx_1 + k\lambda). \end{aligned} \quad (17.4)$$

Funkce sinus se začíná opakovat, jestliže zvětšíme její argument (úhel) o  $2\pi$  rad; pro nejkratší vzdálenost  $\lambda$  vyhovující rov. (17.4) tedy platí  $k\lambda = 2\pi$ , tj.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{úhlový vlnoččet}). \quad (17.5)$$

Konstantu  $k$  nazýváme **úhlovým vlnočtem** dané vlny; její jednotkou v soustavě SI je radián na metr. (Zdůrazněme, že symbol  $k$  zde nemá význam tuhosti pružiny, jak tomu bylo v předchozích kapitolách.)

### Perioda, úhlová frekvence a frekvence

Na obr. 17.4b vidíme časovou závislost výchylky  $y$  částice se souřadnicí  $x$ . Závislost je vyčíslena podle rov. (17.2) pro polohu  $x = 0$ . Kdybychom mohli nafilmovat pohyb struny, viděli bychom, jak se uvedená částice pohybuje nahoru a dolů. Přesněji: částice uskutečňuje harmonický pohyb. Pohyb částice je tedy popsán rov. (17.2), v níž položíme  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y_m \sin(-\omega t) = \\ &= -y_m \sin \omega t \quad (x = 0). \end{aligned} \quad (17.6)$$

Zde jsme použili vztahu  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ , platného pro libovolný úhel  $\alpha$ . Obr. 17.4b demonstruje právě uvedenou časovou závislost; není tedy zobrazením tvaru vlny.

**Periodu** kmitů vlny definujeme jako dobu mezi nejdříve po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je stav (tj. výchylka i rychlost) určité částice struny stejný (poloha částice  $x$  je přitom libovolná, ale pevná). Typická perioda je vyznačena na obr. 17.4b. Když použijeme rov. (17.6) na oba časové okamžiky, ohraničující uvedený interval, musí se oba výsledky shodovat. Tak dostáváme

$$\begin{aligned} -y_m \sin \omega t_1 &= -y_m \sin \omega(t_1 + T) = \\ &= -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T). \end{aligned} \quad (17.7)$$

Pro nejkratší dobu  $T$  vyhovující této rovnici tedy platí  $\omega T = 2\pi$ , tj.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (17.8)$$

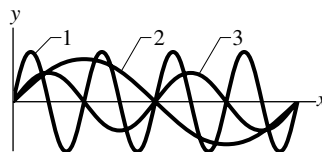
Veličina  $\omega$  se nazývá **úhlová frekvence (úhlový kmitoččet)** dané vlny; její jednotka v soustavě SI je radián za sekundu.

**Frekvence** vlny  $f$  je definována jako  $1/T$  a s úhlovou frekvencí  $\omega$  souvisí vztahem

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{frekvence}). \quad (17.9)$$

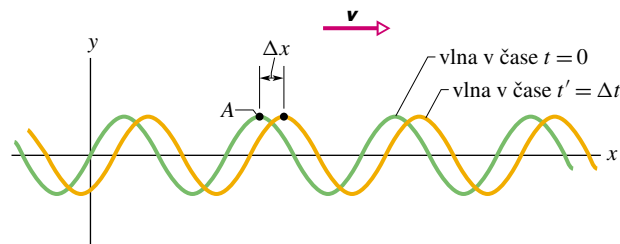
Podobně jako frekvence harmonického pohybu v kap. 16 představuje frekvence  $f$  počet kmitů za jednotku času. V nynější souvislosti kmitá částice struny při průchodu vlny místem, ve kterém je částice umístěna. Stejně jako v kap. 16 vyjadřujeme frekvenci obvykle v hertzech nebo v jejich násobcích.

**KONTROLA 1:** Na obrázku jsou uvedeny snímky tří vln, postupujících podél struny. Fáze těchto vln jsou určeny vztahy (a)  $2x - 4t$ , (b)  $4x - 8t$  a (c)  $8x - 16t$ . Přiřaďte uvedené fáze jednotlivým vlnám na obrázku.



### 17.5 RYCHLOST POSTUPNÉ VLNY

Na obr. 17.5 vidíme dva snímky vlny určené rov. (17.2). Snímky byly vytvořeny v malém časovém odstupu  $\Delta t$ . Vlna postupuje ve směru osy  $x$  (na obr. 17.5 směrem doprava). Celá křivka, znázorňující tvar vlny, se tedy posune v uvedeném směru za dobu  $\Delta t$  o vzdálenost  $\Delta x$ . Zlomek  $\Delta x/\Delta t$  představuje **rychlost vlny** (v limitě infinitezimálních přírůstků přechází zlomek na derivaci  $dx/dt$ ). Jak můžeme tuto rychlost určit?



**Obr. 17.5** Dva snímky postupné vlny popsané v rov. (17.2). První snímek zachycuje vlnu v čase  $t = 0$ , druhý v pozdějším čase  $t' = \Delta t$ . Během časového intervalu  $\Delta t$  se celá křivka posunula o vzdálenost  $\Delta x$  doprava.

Při postupu vlny na obr. 17.5 si zachovává každý bod na křivce (jako například bod A) svou výchylku  $y$ . (Zde

nehovoříme o částicích vláknů, jejichž výchylka se nepo-  
chybně mění s časem, ale o bodech na křivce, mající tvar  
vlny.) Pro každý takový bod musí být argument funkce  
sinus v rov. (17.2) konstantní:

$$kx - \omega t = \text{konst.} \quad (17.10)$$

Všimněte si, že ačkoliv je tento argument (zvaný fáze) kon-  
stantní, veličiny  $x$  a  $t$  se mění. Vzdělává-li čas  $t$ , musí vzrůstat  
i poloha  $x$  tak, aby se fáze neměnila. Tím máme potvrzeno,  
že se bod  $A$  a obecněji i celá vlna pohybují ve směru osy  $x$ .

K určení rychlosti vlny  $v$  zderivujeme podle času obě  
strany rov. (17.10). Tak získáme

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

neboli

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}. \quad (17.11)$$

Když nyní použijeme rov. (17.5) (tj. vztah  $k = 2\pi/\lambda$ )  
a rov. (17.8) (tj. vztah  $\omega = 2\pi/T$ ), můžeme rychlost vlny  
vyjádřit jako

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (\text{rychlost vlny}). \quad (17.12)$$

Rovnice  $v = \lambda/T$  nám říká, že rychlost vlny vyjadřuje  
posuv o jednu vlnovou délku za periodu: za dobu jedné  
periody postoupí vlna o jednu vlnovou délku.

Rov. (17.2) popisuje vlnu, která postupuje ve směru  
osy  $x$ . Jestliže nahradíme v rov. (17.2) proměnnou  $t$  výra-  
zem  $-t$ , získáme rovnici vlny, která postupuje opačným  
směrem. To odpovídá podmínce

$$kx + \omega t = \text{konst.}, \quad (17.13)$$

kdy naopak (srovnejte s rov. (17.10)) klesá  $x$  s rostoucím  $t$ .  
Vlna, která postupuje proti směru osy  $x$ , je tedy popsána  
rovnici

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.14)$$

Kdybychom studovali vlnu určenou rov. (17.14) na-  
prsto stejným postupem, jaký jsme před chvílí použili pro  
vlnu podle rov. (17.2), dostali bychom pro její rychlost

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}. \quad (17.15)$$

Záporné znaménko (v porovnání se znaménkem plus  
v rov. (17.11)) zde ukazuje, že vlna nyní skutečně postupuje

proti směru osy  $x$ . Tím jsme zpětně ověřili správnost změny  
znamení u časové proměnné.

Uvažme nyní vlnu obecného tvaru postupující ve směru  
osy  $x$  stálou rychlostí  $v$ . (Vlnu postupující proti směru osy  $x$   
lze vyjádřit záměnou  $v \rightarrow -v$ .) Takovou vlnu můžeme  
vždy popsat rovnicí

$$y(x, t) = h(x - vt), \quad (17.16)$$

kde  $h$  je libovolná funkce. Jednou z možností je právě  
funkce sinus, jako v rov. (17.2) zapsané ve tvaru  $y(x, t) =$   
 $= y_m \sin(k(x - \frac{\omega}{k}t))$ . Z rov. (17.16) je vidět (a dokázali  
bychom to jako výše), že vlna se beze změny tvaru pohy-  
buje stálou rychlostí  $v$  podél osy  $x$  (pro  $v > 0$ ). A také ob-  
ráceně, rovnici libovolné postupné vlny s konstantní rych-  
lostí  $v$  lze zapsat ve tvaru (17.6). Tak například rovnice  
 $y(x, t) = \sqrt{ax + bt}$  popisuje možnou (ačkoliv fyzikálně  
snad poněkud bizarní) postupnou vlnu. Na druhé straně  
vztah  $y(x, t) = \sin(ax) \cos(bt)$  není rovnicí postupné vl-  
ny.

### PŘÍKLAD 17.1

Uvažme sinusovou vlnu popsanou rovnicí

$$y = 0,00327 \sin(72,1x - 2,72t), \quad (17.17)$$

což je stručný zápis, běžně užívaný namísto přesnějšího, ale  
méně přehledného zápisu

$$y(x, t) = (0,00327 \text{ m}) \sin(72,1 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}x - 2,72 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}t).$$

(a) Jakou má vlna amplitudu?

**ŘEŠENÍ:** Při srovnání dané rovnice s rov. (17.2) vidíme, že

$$y_m = 0,00327 \text{ m} = 3,27 \text{ mm}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou má vlnovou délku, periodu a frekvenci?

**ŘEŠENÍ:** Vyjdeme z rov. (17.17), ve které jsou zadány hod-  
noty úhlového vlnočtu a úhlové frekvence. Dále použijeme  
rov. (17.5):

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ rad}}{(72,1 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1})} = \\ &= 8,71 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Periodu dostaneme z rov. (17.9):

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{(2,72 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})} = \\ &= 2,31 \text{ s}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Frekvence je podle rov. (17.9)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(2,31 \text{ s})} = 0,433 \text{ Hz}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jak rychle tato vlna postupuje?

**ŘEŠENÍ:** Použijeme rov. (17.12), podle které

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{(2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})}{(72,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})} = 0,0377 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 3,77 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaká je příčná výchylka  $y$  na souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  v čase  $t = 18,9 \text{ s}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Po dosazení za  $k$ ,  $x$ ,  $\omega$  a  $t$  do rov. (17.17) vyjde argument funkce sinus  $-35,1855 \text{ rad}$ . Dále probíhá vyčíslení výchylky takto:

$$\begin{aligned} y &= (0,00327 \text{ m}) \sin(-35,1855 \text{ rad}) = \\ &= (0,00327 \text{ m})(0,588) = \\ &= 0,00192 \text{ m} = 1,92 \text{ mm}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Příčná výchylka je tedy kladná. (Před vyčíslením funkce sinus se přesvědčte, že kalkulačku máte nastavenou do modu obloukové míry.)

### PŘÍKLAD 17.2

V př. 17.1d jsme studovali vlnu určenou rov. (17.17). Vypočetli jsme příčnou výchylku  $y$  částice struny o souřadnici  $x = 0,225 \text{ m}$  v čase  $t = 18,9 \text{ s}$ . Velikost výchylky vyšla  $1,92 \text{ mm}$ .

(a) Jaká je příčná rychlost  $u$  téže částice struny v tomtéž čase a pro tutéž vlnu? (Příčná rychlost je spojena s příčným kmitáním uvedené částice, má tedy stejný směr jako výchylka, tj. směr osy  $y$ . Nezaměňujeme ji s konstantní rychlostí vlny  $v$ , se kterou postupuje tvar vlny ve směru osy  $x$ .)

**ŘEŠENÍ:** Naše vlna je určena rov. (17.17). Je tedy jednou z vln obecně popsaných rov. (17.2):

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \quad (17.18)$$

V této rovnici budeme držet proměnnou  $x$  konstantní a budeme sledovat změny výchylky v čase. Pro tuto chvíli je tedy jedinou proměnnou čas  $t$ . Vypočteme derivaci výchylky podle času. Výsledek má tvar\*

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.19)$$

Nyní stačí dosadit číselné hodnoty z př. 17.1:

$$\begin{aligned} u &= (-2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})(3,27 \text{ mm}) \cos(-35,1855 \text{ rad}) = \\ &= 7,20 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

V čase  $t = 18,9 \text{ s}$  se tedy částice struny o souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  pohybuje ve směru osy  $y$  rychlostí  $7,20 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ .

(b) Jaké je příčné zrychlení částice struny o uvedené souřadnici  $x$  a v uvedeném čase  $t$ ?

**ŘEŠENÍ:** Tentokrát vyjdeme z rov. (17.19) a budeme (v tomto výpočtu) opět pokládat  $x$  za konstantu a  $t$  za proměnnou. Parciální derivaci podle času dostaneme

$$a_y = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t).$$

Avšak po srovnání s rov. (17.18) vidíme, že výsledek můžeme zapsat také takto:

$$a_y = -\omega^2 y.$$

Příčné zrychlení kmitající částice struny je tedy úměrné její příčné výchylce, má však opačné znamení. Jinými slovy, uvažovaná částice struny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$\begin{aligned} a_y &= -(2,72 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2(1,92 \text{ mm}) = \\ &= -14,2 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

V čase  $t = 18,9 \text{ s}$  je tedy částice struny o souřadnici  $x = 22,5 \text{ cm}$  vysunuta z rovnovážné polohy  $y = 0$  ve směru osy  $y$  o  $1,92 \text{ mm}$  a má zrychlení o velikosti  $14,2 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-2}$  ve směru opačném k ose  $y$ .

**KONTROLA 2:** Uvažte tři vlny, popsané rovnicemi (1)  $y(x, t) = 2 \sin(4x - 2t)$ , (2)  $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$  a (3)  $y(x, t) = 2 \sin(3x - 3t)$ . Uspořádejte tyto vlny ve vzestupném smyslu (a) podle rychlosti vlny, (b) podle největší příčné rychlosti kmitajících částic.

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 17.1:** Vyčíslení velkých fází

Za určitých okolností, jako třeba v př. 17.1d a 17.2, stojíme před úkolem vyčísřit funkci sinus nebo kosinus pro argument, který je mnohem větší než  $2\pi \text{ rad}$  (mnohem větší než  $360^\circ$ ). Když k argumentu přidáme nebo od něj odečteme celočíselný násobek  $2\pi \text{ rad}$ , nezmění se funkční hodnota goniometrických funkcí. Tak třeba v př. 17.1d vystupuje úhel  $-35,1855 \text{ rad}$ . Když k tomuto úhlu přičteme  $(6)(2\pi \text{ rad})$ , dostaneme

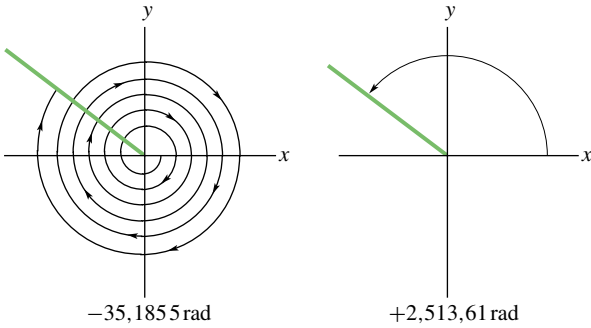
$$-35,1855 \text{ rad} + (6)(2\pi \text{ rad}) = 2,51361 \text{ rad}.$$

Tento úhel je již menší než  $2\pi \text{ rad}$ , přitom je pro něj hodnota goniometrických funkcí stejná jako pro původní úhel  $-35,1855 \text{ rad}$  (obr. 17.6). Například sinus úhlu  $2,51361 \text{ rad}$  i sinus úhlu  $-35,1855 \text{ rad}$  mají stejnou hodnotu  $0,588$ .

Kapesní kalkulátor provádí popsanou redukci velkých úhlů zcela automaticky. Ale pozor: před vyčíslením goniometrických funkcí velké argumenty nezaokrouhluje. Když totiž počítáte sinus velkého úhlu, velkou část argumentu (příslušnou celočíselnému násobku  $2\pi \text{ rad}$ ) odhodíte a pak počítáte sinus toho, co zbývá. Například kdybyste zaokrouhlili

\* Jestliže derivujeme funkci více proměnných podle jedné z nich a ostatní proměnné pokládáme za konstantní, používáme termínu **parciální derivace**. Parciální derivaci označujeme symbolem  $\partial/\partial t$ .

–35,1855 rad na –35 rad (to je při normálním zaokrouhlování rozumné, vzniklá změna představuje 0,5 % z původní hodnoty), změnili bychom sinus původního úhlu o 27 %. Stejně tak, když převádíte velký úhel ze stupňů na radiány, použijte přesný převodní faktor (tj. například  $180^\circ = \pi$  rad). Vyhněte se přiblížení typu  $57,3^\circ \doteq 1$  rad.



**Obr. 17.6** Tyto dva úhly jsou různé, ale jejich goniometrické funkce se shodují.

## 17.6 RYCHLOST VLNY NA STRUNĚ

Rov. (17.12) udává souvislost rychlosti vlny s vlnovou délkou a s frekvencí. Z fyzikálního hlediska je však rychlost vlny *určena vlastnostmi látky*, ve které se vlna šíří. Má-li se totiž vlna šířit ve vodě, ve vzduchu, v oceli nebo na napnuté struně, musí se při jejím postupu částice daného prostředí rozkmitat. K tomu musí prostředí vykazovat jak setrvačnost (aby mohlo být nositelem kinetické energie), tak pružnost (aby na sebe mohlo vázat energii potenciální). Tyto dvě vlastnosti nakonec určují, jak rychle bude vlna danou látkou postupovat. Jinými slovy, rychlost vlny by mělo být možné vypočítat na základě znalosti vlastností prostředí, kterým se vlna šíří. Tento výpočet nyní provedeme pro napnutou strunu. Budeme přitom postupovat dvěma způsoby.

### Rozměrová analýza

Při rozměrové analýze pečlivě zkoumáme rozměry fyzikálních veličin, které se mohou v dané situaci uplatnit (resp. jejich jednotky). V našem případě hledáme rychlost vlny  $v$ . Její fyzikální rozměr je tvořen podílem fyzikálních rozměrů délky a času, jednotkou je tedy  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Setrvačná tendence určitého úseku napnuté struny je určena hmotností tohoto úseku. Rozhodujícím parametrem je zde podíl hmotnosti struny  $m$  a její délky  $l$ . Tento podíl nazýváme **délkovou hustotou** struny a označíme jej  $\mu$ . Máme tedy  $\mu = m/l$  a fyzikální rozměr této veličiny je podíl fyzikálních rozměrů hmotnosti a délky, tedy jednotkou je  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Má-li se na struně šířit vlna, nestačí strunu pouze napřít. Musíme ji navíc napnout, tj. vytvořit v ní napětí. Napětí vytváří sílu působící proti příčné výchylce jednotlivých úseků struny. Fyzikální veličinou, která představuje pružný aspekt při kmitání jednotlivých úseků struny, je tedy síla napínající strunu a její jednotkou je  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  (vzpomeňte na  $F = ma$ ).

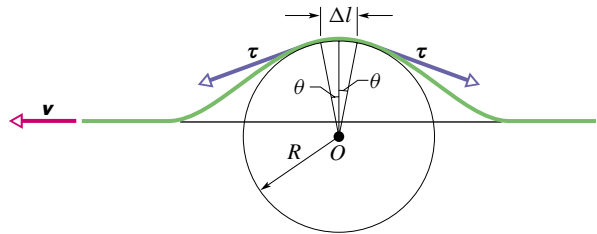
Naším úkolem je nyní zkombinovat  $\mu$  (jednotka  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$ ) a  $\tau$  (jednotka  $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ) takovým způsobem, abychom získali  $v$  (jednotka  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Když trochu probereme možné kombinace, dospějeme nakonec k výrazu

$$v = C \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}, \quad (17.20)$$

ve kterém je  $C$  bezrozměrová konstanta. Právě zde je slabé místo rozměrové analýzy: v jejím rámci zůstává konkrétní hodnota takovéto bezrozměrové konstanty neurčena. V průběhu druhého odvození vztahu pro rychlost vlny uvidíme, že rov. (17.20) je skutečně správná; navíc získáme  $C = 1$ .

### Odvození z druhého Newtonova zákona

Místo sinusové vlny na obr. 17.1b se nyní zaměříme na jeden symetrický pulz, znázorněný na obr. 17.7. Pro větší pohodlí zvolíme vztahnou soustavu, ve které se tento pulz nepohybuje. Jinak řečeno, poběžíme společně s pulzem, a tak jej budeme mít stále před očima. V naší soustavě budeme vidět strunu ubíhající dozadu, přesněji na obr. 17.7 zprava doleva, rychlostí  $v$ .



**Obr. 17.7** Symetrický pulz pozorujeme ve vztahné soustavě, která se pohybuje společně s pulzem. V této soustavě pulz stojí a struna se pohybuje zprava doleva rychlostí  $v$ . Při výpočtu vlnové rychlosti  $v$  vyjdeme z druhého Newtonova zákona. Příslušnou pohybovou rovnicí aplikujeme na elementární úsek struny délky  $\Delta l$ , který se právě nachází na temeni pulzu.

Uvažme malý úsek struny délky  $\Delta l$ . V okamžiku zachyceném na obr. 17.7 vytváří tento úsek kruhový oblouk na kružnici o poloměru  $R$ . Na obou koncích úseku působí síla ve směru tečny ke křivce pulzu. Velikosti obou sil jsou rovny velikosti  $\tau$  napětí ve struně. Jejich vodorovné složky se ruší, avšak svislé složky se sčítají. Celkově tak na daný



úsek působí vratná síla  $\mathbf{F}$  o velikosti

$$F = 2\tau \sin \theta \approx \tau(2\theta) = \tau \frac{\Delta l}{R} \quad (\text{síla}). \quad (17.21)$$

Použili jsme zde aproximaci  $\sin \theta \approx \theta$ , platnou pro malý úhel  $\theta$  na obr. 17.7. Z obrázku také vidíme, že platí  $2\theta = \Delta l/R$ .

Hmotnost uvažovaného úseku činí

$$\Delta m = \mu \Delta l \quad (\text{hmotnost}). \quad (17.22)$$

V okamžiku, který je zachycen na obr. 17.7, se úsek  $\Delta l$  pohybuje rychlostí  $v$  po obvodu kružnice o poloměru  $R$ . Musí mu tedy být uděleno dostředivé zrychlení. Směr zrychlení souhlasí se směrem vratné síly  $\mathbf{F}$ , jeho velikost činí

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{zrychlení}). \quad (17.23)$$

Rov. (17.21), (17.22) a (17.23) popisují veličiny, které jsou vázány druhým Newtonovým zákonem

$$\text{síla} = (\text{hmotnost}) \cdot (\text{zrychlení}).$$

Po dosazení tak získáváme rovnici

$$\tau \frac{\Delta l}{R} = (\mu \Delta l) \left( \frac{v^2}{R} \right).$$

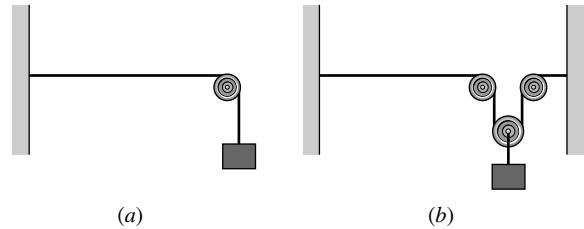
Její řešení pro neznámou rychlost vlny  $v$  nakonec dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (\text{rychlost vlny na struně}), \quad (17.24)$$

což přesně souhlasí s rov. (17.20), pokud je konstanta  $C$  v rov. (17.20) rovna jedné. Rov. (17.24) tedy určuje rychlost pulzu na obr. 17.7, a tím ovšem i rychlost jakékoliv jiné postupné vlny na stejné struně (stejně  $\mu$ ), podrobené stejnému napětí (stejně  $\tau$ ).

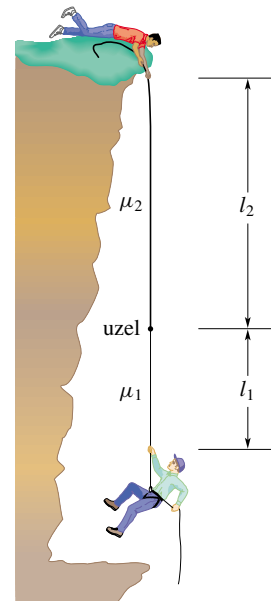
V případě sinusových vln nám rov. (17.24) říká, že rychlost vlny na ideální napnuté struně závisí pouze na parametrech struny, nikoliv na frekvenci vlny. Frekvence vlny je určena výhradně způsobem, kterým vlnu vybudíme (například osobou na obr. 17.1b). Jak vyplývá z rov. (17.12), rychlostí vlny a frekvencí je již pevně nastavena *vlnová délka*:  $\lambda = v/f$ .

**KONTROLA 3:** Na obrázku jsou znázorněna dvě uspořádání, ve kterých je napětí na stejné struně vytvořeno tíhou závaží o hmotnosti 5 kg. V kterém případě bude rychlost vlny, postupující ve struně, větší?



### PŘÍKLAD 17.3

Na obr. 17.8 se poraněný horolezec zavěsil na vyprošťovací lano, spuštěné jeho zachráncem. Lano mezi horolezcem a zachráncem je složeno ze dvou úseků: v prvním úseku délky  $l_1$  má lano délkovou hustotu  $\mu_1$ , v druhém úseku délky  $l_2 = 2l_1$  hustotu  $\mu_2 = 4\mu_1$ . V určitém okamžiku šklubnul horolezec za spodní konec lana (chtěl vyslat signál „připraven“). V tomtéž okamžiku šklubnul za horní konec lana zachránce.



**Obr. 17.8** Příklad 17.3. Poraněný horolezec visí na laně, které se skládá ze dvou úseků. Horní konec lana pevně drží jeho zachránce.

(a) Vyjádřete rychlost  $v_1$  vzniklých pulzů v úseku 1 pomocí jejich rychlosti  $v_2$  v úseku 2.

**ŘEŠENÍ:** Předně budeme předpokládat, že součet hmotností obou úseků lana je zanedbatelný v porovnání s hmotností horolezce. Napětí v laně je tedy určeno pouze tíhou horolezce a je shodné v obou úsecích lana. Podle rov. (17.24) jsou vlnové rychlosti v jednotlivých úsecích lana určeny vztahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \quad \text{a} \quad v_2 = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_2}}. \quad (17.25)$$

První výraz dělíme druhým a dosadíme  $\mu_2 = 4\mu_1$ . Takto

získáme

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\tau}{\mu_1}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{4\mu_1}{\mu_1}} = 2$$

neboli

$$v_1 = 2v_2. \quad (\text{Odpověď}) \quad (17.26)$$

(b) V jaké vzdálenosti od zachránce se oba pulzy setkají? Vyjádřete hledanou vzdálenost pomocí délky  $l_2$ .

**ŘEŠENÍ:** Pro zjednodušení dalšího výpočtu nejprve rozhodneme, zda místo setkání pulzů leží nad uzlem nebo pod ním. Označme  $t$  dobu od vyslání obou pulzů k jejich setkání. Z rov. (17.26) již víme, že pulz horolezce postupuje prvním úsekem lana rychlostí dvakrát větší, než je rychlost pulzu zachránce při postupu druhým úsekem. Protože platí  $l_2 = 2l_1$ , víme také, že pulz horolezce musí proběhnout k uzlu dvakrát menší dráhu, než pulz zachránce. Celkově tedy pulz horolezce dospěje k uzlu jako první a místo setkání obou pulzů leží nutně nad uzlem. Označme symbolem  $d$  vzdálenost místa setkání obou pulzů od zachránce. K tomuto místu běží oba pulzy po dobu  $t$ .

Pulz zachránce tedy postupuje dolů k místu setkání rychlostí  $v_2$  po dobu  $t$  a proběhne vzdálenost  $d$ . Platí

$$t = \frac{d}{v_2}. \quad (17.27)$$

Pulz horolezce proběhne nahoru nejprve vzdálenost  $l_1$  rychlostí  $v_1$  a potom ještě vzdálenost  $l_2 - d$  rychlostí  $v_2$ . Celková doba jeho pohybu k místu setkání je také  $t$ . Máme tedy

$$t = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}. \quad (17.28)$$

Do této rovnice nyní dosadíme dobu  $t$ , vypočtenou v rovnici (17.27):

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Dále položíme  $l_1 = l_2/2$  a  $v_1 = 2v_2$ :

$$\frac{d}{v_2} = \frac{l_2/2}{2v_2} + \frac{l_2 - d}{v_2}.$$

Po vynásobení obou stran poslední rovnice rychlostí  $v_2$  ji nakonec snadno vyřešíme vzhledem k hledané vzdálenosti  $d$ . Výsledek je

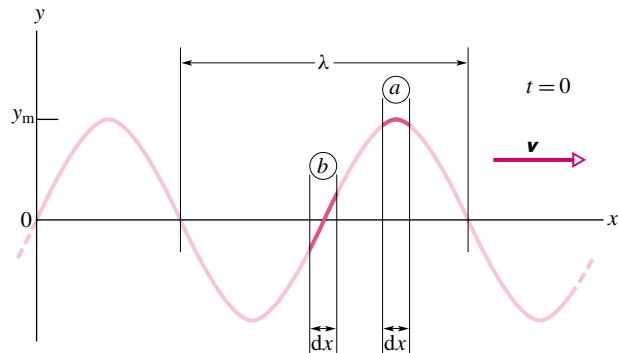
$$d = \frac{5}{8}l_2. \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.7 ENERGIE A VÝKON VLNY

K tomu, aby se na napnuté struně vytvořila vlna, je nutno struně dodat určitou energii, spojenou s pohybem struny. Při pohybu odnáší vlna tuto energii dále. Přenáší přitom jak energii kinetickou, tak potenciální energii pružnosti. Zaměříme se odděleně na každou z těchto dvou forem energie.

### Kinetická energie

Obecný elementární úsek struny má hmotnost  $dm$  a při postupu vlny vykonává harmonický pohyb v příčném směru. Má tedy kinetickou energii, spojenou se svou příčnou rychlostí  $u$ . Když tento úsek právě probíhá polohou  $y = 0$  (obr. 17.9), je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — největší. Když se právě nachází v bodech obratu  $y = \pm y_m$ , je jeho příčná rychlost — a tedy i jeho kinetická energie — nulová.



**Obr. 17.9** Snímek zachycuje postupnou vlnu na struně v čase  $t = 0$ . Elementární úsek struny  $a$  má v tomto okamžiku výchylku  $y = y_m$ , zatímco úsek  $b$  má výchylku  $y = 0$ . Kinetická energie jednotlivých úseků závisí na jejich příčné rychlosti. Potenciální energie úseků závisí na velikosti jejich protažení, nutného k deformaci struny do tvaru vlny.

### Potenciální energie pružnosti

K tomu, abychom mohli na struně vybudit vlnu, je nutno strunu nejen napřímít, ale poté také napnout. Když potom úsek napnuté struny délky  $dx$  začne kmitat v příčném směru, je to nutně spojeno s periodickými změnami jeho délky. Střídavá prodloužení a zkrácení daného úseku jsou nutná k tomu, aby se struna zformovala do sinusoidy. Podobně jako u pružiny je právě s těmito délkovými změnami spojena potenciální energie pružnosti.

Uvažme úsek struny, který se právě nachází v okrajové poloze  $y = y_m$  (obr. 17.9, úsek  $a$ ). Jeho okamžitá délka je rovna původní délce, jakou měl u napnuté a nekmitající struny. Jeho potenciální energie je tedy nulová. Naopak, úsek  $b$  právě probíhá polohou  $y = 0$  a jeho okamžitá délka je největší. Proto má také největší potenciální energii.

V poloze  $y = 0$  má tedy kmitající úsek největší jak kinetickou, tak potenciální energii. Na obr. 17.9 je uveden snímek struny: oblasti struny s největší výchylkou mají nulovou energii, oblasti s nulovou výchylkou mají energii největší. Postupující vlna přenáší energii z těch úseků struny, kde je jí nadbytek, do oblastí bez energie.

## Přenášený výkon

Kinetická energie  $dE_k$ , spojená s úsekem struny hmotnosti  $dm$ , je určena vztahem

$$dE_k = \frac{1}{2} dm u^2, \quad (17.29)$$

kde  $u$  je příčná rychlost při kmitání uvažovaného úseku. V rov. (17.19) jsme tuto rychlost vyjádřili ve tvaru

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t). \quad (17.30)$$

Tento výsledek použijeme nyní v rov. (17.29) a současně dosadíme  $dm = \mu dx$ :

$$dE_k = \frac{1}{2}(\mu dx)(-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t). \quad (17.31)$$

Průměrnou kinetickou energii připadající na jednotkovou délku struny vypočteme integrací:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dE_k. \quad (17.32)$$

Dosazením (17.31) do (17.32) dostaneme

$$\overline{E_k} = \frac{1}{4} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.33)$$

Podél struny ovšem postupuje také potenciální energie pružnosti. Při jejím přenosu má průměrná potenciální energie stejnou velikost jako energie kinetická, tedy velikost určenou v rov. (17.33). Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme. Avšak měli bychom si vybavit obdobnou situaci u kmitajících systémů, jako je například kyvadlo nebo závaží zavěšené na pružině. U nich jsme skutečně dokázali, že (časově) střední kinetická energie a střední potenciální energie pružnosti jsou si rovny.

**Střední výkon** přenášený vlnou je roven energii přenesené strunou za jednotku času (je to součet kinetické a potenciální energie připadající na takovou délku struny, která je číselně rovna rychlosti vlny  $v$ ):

$$\overline{P} = (\overline{E_k} + \overline{E_p})v = 2\overline{E_k}v. \quad (17.34)$$

Použijeme-li výsledku v rov. (17.33), dostaneme

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \quad (\text{střední výkon}). \quad (17.35)$$

V tomto výsledném vztahu jsou konstanty  $\mu$  a  $v$  určeny látkou, ze které je struna vyrobena, a napětím, které jsme v ní vyvolali. Veličiny  $\omega$  a  $y_m$  jsou naopak určeny procesem, kterým jsme dané vlnění vybudili. Závislost středního výkonu vlny na čtverci její amplitudy a také na čtverci její úhlové frekvence představuje obecný závěr, platný pro všechny druhy vln.

### PŘÍKLAD 17.4

Struna má délkovou hustotu  $\mu = 525 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$  a je v ní vyvoláno napětí  $\tau = 45 \text{ N}$ . Na struně postupuje vlna, jejíž frekvence  $f$  a amplituda  $y_m$  mají postupně hodnoty 120 Hz a 8,5 mm. Jaký je výkon přenášený vlnou?

**ŘEŠENÍ:** Chceme-li pro nalezení  $\overline{P}$  použít rov. (17.35), musíme nejprve získat úhlovou frekvenci  $\omega$  a rychlost vlny  $v$ . Z rov. (17.9) dostaneme

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(120 \text{ Hz}) = 754 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

V dalším kroku získáme z rov. (17.24)

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{(45 \text{ N})}{(0,525 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1})}} = 9,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nyní již rov. (17.35) dává

$$\begin{aligned} \overline{P} &= \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 = \\ &= \frac{1}{2} (0,525 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}) (9,26 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (754 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 (0,0085 \text{ m})^2 = \\ &= 100 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.8 PRINCIP SUPERPOZICE

Často postupují určitou oblastí prostoru současně dvě nebo více vln. Když například posloucháme koncert, dopadají na naše ušní bubínky současně zvuky mnoha nástrojů. V anténě rádia nebo v televizní anténě je pohyb elektronů výsledkem působení celé řady signálů různých vysílačů. Na jezeře nebo v kotvišti je voda rozčerena vlnami, běžícími od mnoha člunů.

Předpokládejme, že v téže struně postupují současně dvě vlny. Označme  $y_1(x, t)$  (resp.  $y_2(x, t)$ ) výchylky částic struny, jestliže v ní postupuje jen první (resp. jen druhá) vlna. Při současném šíření obou vln jsou výchylky částic určeny vztahem

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t), \quad (17.36)$$

ve kterém znamení plus představuje algebraický součet. Sčítání výchylek podél struny znamená:

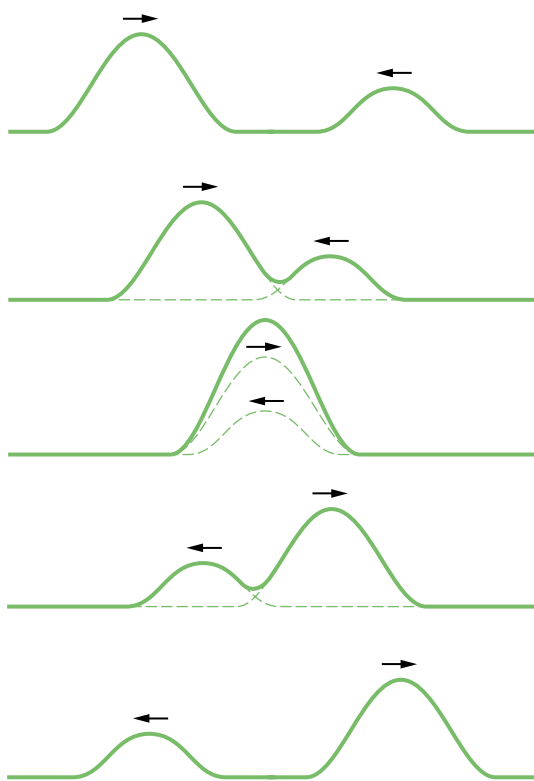
U překrývajících se vln se výchylky algebraicky sčítají a vytvářejí jednu výslednou vlnu.

Máme zde další příklad **principu superpozice**. Uplatňuje se v situacích, kdy současně působí několik vlivů

a tvrdí, že výsledný jev je součtem jevů, vyvolaných individuálně jednotlivými vlivy.\*

Na obr. 17.10 vidíme sérii pěti snímků dvou pulzů, postupujících opačným směrem na téže struně. Když se překrývají (když sebou probíhají), je výsledný pulz roven součtu obou pulzů. Navíc, každý z obou výchozích pulzů probíhá druhým, jako by ten druhý vůbec neexistoval:

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



**Obr. 17.10** Série pěti snímků dvou pulzů, postupujících na napnuté struně v opačném směru. Pokud sebou pulzy právě probíhají, použijeme princip superpozice.

### Fourierova analýza

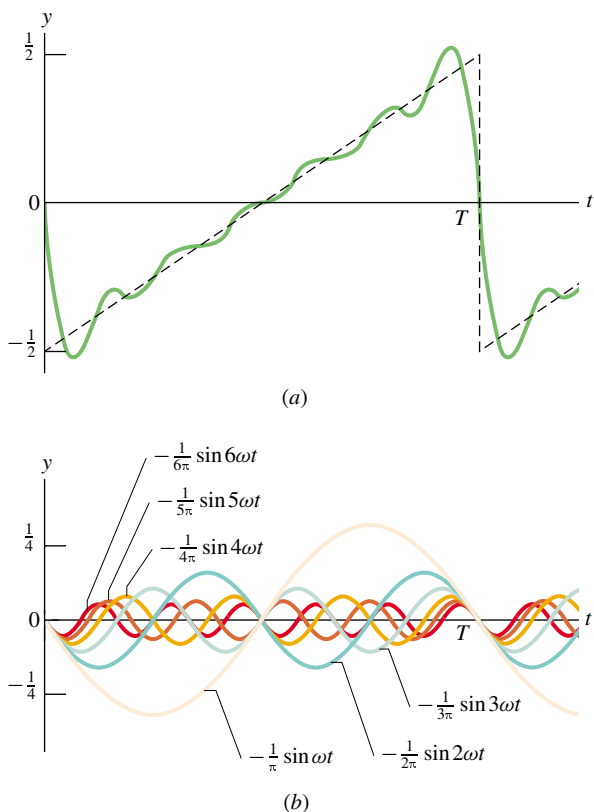
Francouzský matematik Jean Baptiste Fourier (1786–1830) použil princip superpozice ke studiu vln obecného tvaru. Ukázal, že vlnu libovolného tvaru lze vyjádřit ve tvaru součtu velkého počtu sinusových vln. Stačí jen pečlivě zvolit jejich frekvence, amplitudy a fázové konstanty. Dobře to vyjádřil anglický fyzik Sir James Jeans:

(Fourierův) teorém říká, že libovolnou křivku, ať už jsou její vlastnosti jakékoliv nebo ať už byla získána

\* Neplatil by např., kdyby výchylka vlny byla příliš velká, takže bychom překročili mez pružnosti prostředí.

jakýmkoliv způsobem, lze přesně reprodukovat tím, že složíme dostatečný počet jednoduchých harmonických (tj. sinusových) křivek — stručně řečeno, každou křivku lze postavit, když na sebe naskládáme sinusové vlny.

Součty tohoto druhu se nazývají **Fourierovy řady**; na obr. 17.11 vidíte jeden konkrétní příklad. Uvažme po částech lineární křivku na obr. 17.11a (profil pily). Řekněme, že právě tato křivka představuje časovou změnu výchylky  $y(t)$



**Obr. 17.11** (a) Čárkovaná zubatá křivka (profil pily) je aproximována zelenou křivkou, která vznikla součtem prvních šesti členů v rov. (17.37). (Kdybychom sečetli více prvních členů, byla by aproximace přesnější.) (b) Prvních šest členů na pravé straně v rov. (17.37) je zobrazeno jako šest jednotlivých křivek. Každá z nich je sinusová.

(v poloze  $x = 0$ ) při postupu jisté vlny. Lze ukázat, že Fourierova řada, která reprodukuje tento průběh  $y(t)$ , má tvar

$$y(t) = -\frac{1}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{1}{2\pi} \sin(2\omega t) - \frac{1}{3\pi} \sin(3\omega t) - \dots, \quad (17.37)$$

kde  $\omega = 2\pi/T$  a  $T$  je perioda zubaté křivky. Zelená křivka na obr. 17.11a představuje součet prvních šesti členů na

pravé straně rov. (17.37). Vidíme již docela dobrou shodu s průběhem  $y(t)$ . Obr. 17.11b ukazuje odděleně závislost uvedených šesti členů na čase. Kdybychom vzali více členů, mohli bychom profil pily reprodukovat s libovolnou přesností. Obdobně jako tento časový průběh lze i prostoro-  
vový průběh složit ze sinusových vln.

Teď je pochopitelné, proč jsme věnovali tolik pozornosti právě vlnám sinusovým. Když jim totiž rozumíme, otevře nám Fourierův teorém cestu ke všem ostatním vlnám.

## 17.9 INTERFERENCE VLN

Předpokládejme, že v téže napnuté struně postupují v soulasném směru dvě sinusové vlny a že obě mají stejnou amplitudu a stejnou vlnovou délku. Použijeme princip superpozice. Jaká bude výsledná vlna?

Tvar výsledné vlny závisí na tom, do jaké míry jsou obě výchozí vlny navzájem *ve fázi* (jak dalece jsou sfázovány). Jinak řečeno, citlivým parametrem je vzájemný posuv křivek, které představují jednotlivé výchozí vlny. Nejprve uvažme případ, kdy jsou obě vlny přesně ve fázi. To znamená, že vrcholy (údolí) první vlny se přesně kryjí s vrcholy (údolími) vlny druhé. Mezi oběma křivkami vln není vůbec žádný posuv. Výchylka každé částice struny je tedy dvojnásobná v porovnání s vychylkou při samostatném šíření jen jedné z vln. Dále uvažme opačný případ: obě výchozí vlny mají přesně opačnou fázi. To znamená, že polohy vrcholů (údolí) jedné vlny se přesně kryjí s polohami údolí (vrcholů) vlny druhé. Křivky vln jsou navzájem posunuty o polovinu vlnové délky. Výchylky od obou výchozích vln se navzájem ruší a struna zůstává přímá. Tento jev vzájemného zesilování a zeslabování vln nazýváme **interference**. Říkáme, že výchozí vlny spolu interferují. (Slovo „interference“ zde ovšem neznamená, že by se snad obě vlny navzájem nějak ovlivňovaly; ovlivňují se pouze vychylky částic struny, a to tak, že se sčítají.)

Nechť je pro určitost první vlna, postupující na napnuté struně, určena vztahem

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.38)$$

zatímco druhá vlna, posunutá vzhledem k první, vztahem

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (17.39)$$

Tyto dvě vlny mají stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$  (a tedy i stejnou frekvenci  $f$ ), stejný úhlový vlnočet  $k$  (a tedy i stejnou vlnovou délku  $\lambda$ ) a stejnou amplitudu  $y_m$ . Obě postupují stejnou rychlostí, určenou v rov. (17.24), stejným směrem, tj. ve směru osy  $x$ . Liší se pouze konstantním

úhlem  $\varphi$ . Říkáme, že tyto dvě vlny jsou navzájem *fázově posunuty* o úhel  $\varphi$ . Jinými slovy, vlny mají *fázový rozdíl*  $\varphi$ .

Na základě principu superpozice, vyjádřeného v rovnici (17.36), přísluší výsledné vlně vychylka

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (17.40)$$

V dodatku E je uveden goniometrický vzorec pro součet dvou funkcí sinus dvou libovolných úhlů  $\alpha$  a  $\beta$ :

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (17.41)$$

Po jeho použití v rov. (17.40) dostaneme

$$y'(x, t) = (2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi) \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi). \quad (17.42)$$

Výsledná vlna je tedy opět vlna sinusová a postupuje ve směru osy  $x$ . Je to ovšem jediná vlna, kterou lze na struně skutečně pozorovat (jednotlivé komponenty, určené v rov. (17.38) a (17.39), již *nevidíme*).

Interferencí dvou sinusových vln o stejné amplitudě a stejné vlnové délce, postupujících v napnuté struně *souhlasným* směrem, vzniká opět vlna sinusová, postupující stejným směrem, jako obě výchozí vlny.

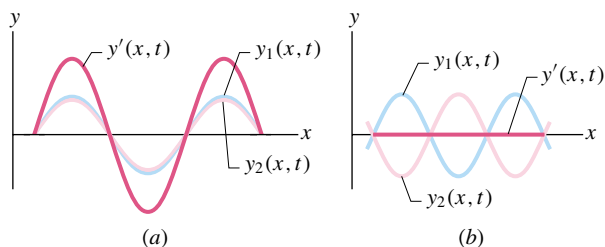
Výsledná vlna se od obou výchozích vln liší ve dvou ohledech: (1) její fáze obsahuje konstantu  $\frac{1}{2}\varphi$  a (2) její amplituda je určena veličinou uvedenou v rov. (17.42) v závorkách:

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi. \quad (17.43)$$

Je-li  $\varphi = 0$  rad (neboli  $0^\circ$ ), jsou obě výchozí vlny přesně ve fázi (jako na obr. 17.12a). V tomto případě se rov. (17.42) redukuje na

$$y'(x, t) = 2y_m \sin(kx - \omega t) \quad (\varphi = 0 \text{ rad}). \quad (17.44)$$

Všimněme si, že amplituda výsledné vlny je dvakrát větší než amplituda každé z výchozích vln. Je to také největší amplituda, kterou může výsledná vlna vůbec mít. Skutečně, člen s funkcí kosinus v rov. (17.42) a (17.43) má největší hodnotu (rovnou jedné) pro  $\varphi = 0$ . Interference, která vytváří největší možnou amplitudu, se nazývá **úplně konstruktivní**.



**Obr. 17.12** Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny  $y_1(x, t)$  a  $y_2(x, t)$ . Jejich interferencí vzniká výsledná vlna  $y'(x, t)$ . (a) Jsou-li výchozí vlny přesně ve fázi, je jejich interference úplně konstruktivní: výsledná vlna má v porovnání s výchozími vlnami dvojnásobnou amplitudu. (b) Jsou-li výchozí vlny přesně v protifázi, je jejich interference úplně destruktivní: struna přestane kmitat.

Je-li  $\varphi = \pi$  rad (nebo  $180^\circ$ ), jsou obě výchozí vlny přesně v protifázi (jako na obr. 17.12b). V tomto případě má  $\cos \frac{1}{2}\varphi$  hodnotu  $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$ , tj. amplituda výsledné vlny (rov. (17.43)) je nulová. Pro všechny hodnoty proměnných  $x$  a  $t$  potom dostáváme

$$y'(x, t) = 0 \quad (\varphi = \pi \text{ rad}). \quad (17.45)$$

Ačkoliv jsme tedy na struně vybudili dvě vlny, struna nekmitá, zůstává v klidu. Tento typ interference se nazývá **úplně destruktivní**.

Fázový rozdíl  $\varphi = 2\pi$  rad (neboli  $360^\circ$ ) odpovídá posuvu křivek, znázorňujících obě výchozí vlny, o vzdálenost jedné vlnové délky. Fázový rozdíl můžeme tedy také vyjádřit jako rozdíl dráhový. Přitom je výhodné vyjadřovat dráhový rozdíl ve vlnových délkách. Například vlny na obr. 17.12b mají dráhový rozdíl 0,50 vlnových délek. V tab. 17.1 jsou uvedeny některé další příklady fázových rozdílů a jim odpovídající typ interference. Když daná interference není ani úplně konstruktivní, ani úplně destruktivní, nazýváme ji **částečnou**. Amplituda výsledné vlny je v tomto případě větší než nula a menší než  $2y_m$ .

Dvě vlny se stejnou vlnovou délkou jsou ve fázi, je-li jejich dráhový rozdíl nulový nebo je-li roven celočíselnému násobku vlnové délky. Ve výpočtech tedy můžeme

od číselné hodnoty dráhového rozdílu, vyjádřeného ve vlnových délkách, odečíst libovolné celé číslo. Například situace s dráhovým rozdílem 0,40 vlnových délek je ve všech směrech ekvivalentní situaci s dráhovým rozdílem 2,40 vlnových délek. Ve výpočtech tak můžeme použít menšího z obou čísel.

### PŘÍKLAD 17.5

Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny a interferují spolu. Amplitudy  $y_m$  výchozích vln jsou 9,8 mm, jejich fázový rozdíl je  $100^\circ$ .

(a) Vypočítejte amplitudu  $y'_m$  výsledné vlny, vznikající interferencí obou výchozích vln. K jakému typu interference zde dochází?

**ŘEŠENÍ:** Pro výpočet amplitudy použijeme rov. (17.43):

$$\begin{aligned} y'_m &= 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi = \\ &= 2(9,8 \text{ mm}) \cos(100^\circ/2) = \\ &= 13 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Protože fázový rozdíl leží mezi  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , jedná se o částečnou interference.

(b) Pro jaký fázový rozdíl výchozích vln by měla amplituda výsledné vlny velikost 4,9 mm? Výsledek vyjádřete v obloukové míře a poté i pomocí dráhového rozdílu ve vlnových délkách.

**ŘEŠENÍ:** Opět vyjdeme z rov. (17.43):

$$y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi$$

neboli

$$4,9 \text{ mm} = 2(9,8 \text{ mm}) \cos \frac{1}{2}\varphi.$$

Pomocí kalkulátoru (přepnutého do módu obloukové míry) vypočteme

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}\varphi &= \frac{(4,9 \text{ mm})}{2(9,8 \text{ mm})} = 0,25, \\ \varphi &= \pm 2,636 \text{ rad} \doteq \pm 2,6 \text{ rad}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

**Tabulka 17.1 Fázové rozdíly a jim odpovídající druh interference<sup>a</sup>**

FÁZOVÝ ROZDÍL VE STUPNÍCH	FÁZOVÝ ROZDÍL V RADIÁNECH	DRÁHOVÝ ROZDÍL VE VLN. DÉLKÁCH	AMPLITUDA VÝSLÉDNÉ VLNY	DRUH INTERFERENCE
0	0	0	$2y_m$	úplně konstruktivní
120	$2\pi/3$	0,33	$y_m$	částečná
180	$\pi$	0,50	0	úplně destruktivní
240	$4\pi/3$	0,67	$y_m$	částečná
360	$2\pi$	1,00	$2y_m$	úplně konstruktivní
865	15,1	2,40	$0,60y_m$	částečná

<sup>a</sup> Interferují dvě identické harmonické vlny o amplitudě  $y_m$ , postupující souhlasným směrem.

Máme zde dvě řešení. První vlna může totiž buď *předbíhat* druhou vlnu (postupovat před ní), nebo se za ní *zpožďovat* (běžet za ní). V prvním případě je fázový rozdíl  $+2,6$  rad, v druhém  $-2,6$  rad. Vyjádřeno v dráhovém rozdílu, odstup vln činí

$$\frac{\varphi}{2\pi \text{ rad} \cdot \lambda^{-1}} = \frac{\pm 2,636 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad} \cdot \lambda^{-1}} = \pm 0,42\lambda. \quad (\text{Odpověď})$$

**KONTROLA 4:** Vyděte ze znění př. 17.5 a uvažte následující čtyři dráhové rozdíly mezi oběma výchozími vlnami:  $0,20\lambda$ ,  $0,45\lambda$ ,  $0,60\lambda$  a  $0,80\lambda$ . Uspořádejte je sestupně podle velikosti amplitudy výsledné vlny.

## 17.10 FÁZORY

Vlnu na struně (a obecněji jakoukoliv harmonickou vlnu) můžeme popsat také vektorově, pomocí **fázoru**. Fázor je vektor umístěný do počátku souřadnic. Jeho velikost se rovná amplitudě vlny a úhlová rychlost jeho rotace je rovna úhlové frekvenci  $\omega$  vlny. Tak např. vlnu

$$y_1(x, t) = y_{m1} \sin(kx - \omega t) \quad (17.46)$$

reprezentuje fázor na obr. 17.13a. Velikost fázoru je amplituda vlny  $y_{m1}$ . Jak čas plyne, fázor se otáčí, a to v záporném směru (díky zápornému znaménku u časového členu  $\omega t$ ). Při rotaci fázoru s úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem počátku si všimněme jeho projekce na svislou osu. Ta se mění sinusově od největší hodnoty  $y_{m1}$ , přes nulu, až k nejmenší hodnotě  $-y_{m1}$ . Její průběh odpovídá sinusovému průběhu výchylky  $y_1(x, t)$  libovolné částice struny, když přes ni postupuje vlna. Částice struny má pevnou souřadnici  $x$ . Obdobně lze znázornit průběh vlny v závislosti na  $x$  při daném čase  $t$ .

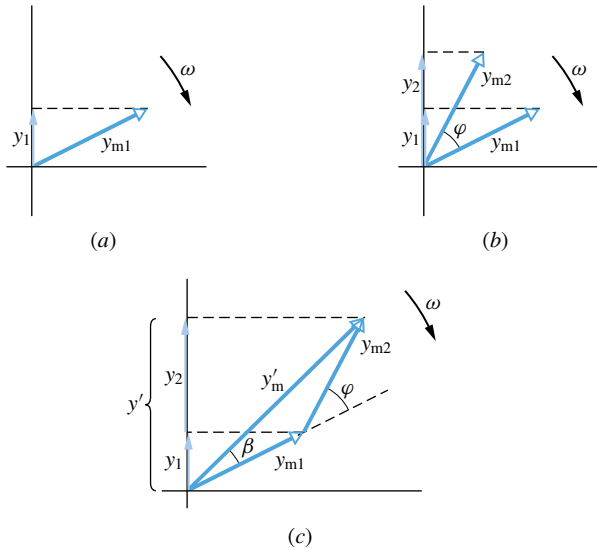
Uvažme obecněji dvě vlny postupující souhlasným směrem v téže struně. Obě tyto výchozí vlny lze společně s vlnou výslednou znázornit pomocí **fázorového diagramu**. Na obr. 17.13b vidíte dva fázory: jeden představuje vlnu v rov. (17.46), druhý odpovídá vlně

$$y_2(x, t) = y_{m2} \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (17.47)$$

Úhel mezi oběma fázory na obr. 17.13b je roven fázové konstantě  $\varphi$  v rov. (17.47). Tento úhel se v čase nemění, protože oba fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$  rovnou úhlové frekvenci obou vln.

Obě uvažované vlny mají stejný úhlový vlnocet  $k$  a stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$ . V čl. 17.9 jsme již studovali jejich interferenci. Víme, že výsledná vlna má tvar

$$y'(x, t) = y'_m \sin(kx - \omega t + \beta), \quad (17.48)$$



**Obr. 17.13** (a) Fázor velikosti  $y_{m1}$ , rotující v záporném směru kolem počátku úhlovou rychlostí  $\omega$ , reprezentuje sinusovou vlnu. Jeho projekce  $y_1$  na svislou osu popisuje výchylku částice struny, přes kterou vlna postupuje. (b) Druhý fázor velikosti  $y_{m2}$  se otáčí s konstantním úhlovým odstupem  $\varphi$  za prvním; představuje druhou vlnu s fázovou konstantou  $\varphi$ . (c) Vektorový součet obou fázorů představuje výslednou vlnu, vznikající interferencí obou výchozích vln. Jeho velikost je  $y'_m$ . Projekce  $y'$  součtu na svislou osu odpovídá výchylce kratičkého úseku struny, kterým právě prochází výsledná vlna.

kde  $y'_m$  je amplituda výslednice a  $\beta$  je její fázová konstanta. Kdybychom chtěli vypočítat hodnoty veličin  $y'_m$  a  $\beta$ , museli bychom sečíst funkce v rov. (17.46) s funkcí v rov. (17.47). To jsme však již vlastně učinili při odvození rov. (17.42).

Na druhé straně můžeme výslednou vlnu studovat ve fázorovém diagramu: v libovolném okamžiku během rotace sestrojíme vektorový součet obou fázorů. Postup je znázorněn na obr. 17.13c, kde jsme nejprve posunuli druhý fázor o velikosti  $y_{m2}$ . Velikost vektorového součtu se rovná amplitudě  $y'_m$  v rov. (17.48), úhel mezi ním a fázorem, který popisuje vlnu  $y_1$ , je roven fázové konstantě  $\beta$  v rov. (17.48).

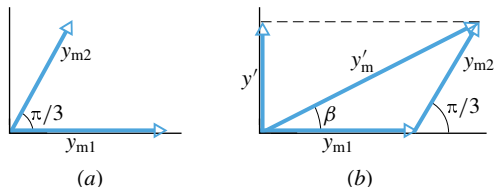
Všimněte si, že na rozdíl od postupu v čl. 17.9 umožňují fázory konstrukci výsledné vlny i v případě, *kdy jsou amplitudy výchozích vln rozdílné*.

### PŘÍKLAD 17.6

Na struně postupují souhlasným směrem dvě vlny  $y_1(x, t)$  a  $y_2(x, t)$ . Obě vlny mají stejnou vlnovou délku, jejich amplitudy jsou  $y_{m1} = 4,0$  mm a  $y_{m2} = 3,0$  mm, jejich fázové konstanty jsou po řadě  $0$  rad a  $\pi/3$  rad. Určete amplitudu  $y'_m$  a fázovou konstantu  $\beta$  výsledné vlny.

**ŘEŠENÍ:** Obě vlny postupují v téže struně. Podle rovnice (17.24) tedy postupují stejnou rychlostí  $v$ . Protože mají

také stejnou vlnovou délkou (a tedy i stejný úhlový vlnocet  $k$ ), musí mít podle rov. (17.12) stejnou úhlovou frekvenci  $\omega$ . Odpovídající fázory tedy rotují kolem počátku se stejnou úhlovou rychlostí  $\omega$ , jak je znázorněno na obr. 17.13b. Úhel  $\varphi$  mezi oběma fázory je nyní  $\pi/3$  rad.



**Obr. 17.14** Příklad 17.6. (a) Dva fázory o velikostech  $y_{m1}$  a  $y_{m2}$  svírají úhel  $\pi/3$ . (b) Vektorové sčítání těchto fázorů, provedené v libovolném okamžiku během jejich rotace, poskytuje velikost  $y'_m$  fázoru výsledné vlny.

Máme sestavit vektorový součet obou fázorů, jako na obr. 17.13c. Oba sčítance můžeme nakreslit v libovolném okamžiku během jejich rotace. Pro zjednodušení vektorového sčítání bude tedy výhodné, když je nakreslíme jako na obr. 17.14a. Nyní fázory sečteme způsobem, který je obvyklý pro sčítání libovolných dvou vektorů (obr. 17.14b). Vodorovná složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{mv} &= y_{m1} \cos 0 + y_{m2} \cos \pi/3 = \\ &= 4,0 \text{ mm} + (3,0 \text{ mm}) \cos \pi/3 = \\ &= 5,50 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Svislá složka výsledného fázoru je

$$\begin{aligned} y'_{ms} &= y_{m1} \sin 0 + y_{m2} \sin \pi/3 = \\ &= 0 \text{ mm} + (3,0 \text{ mm}) \sin \pi/3 = \\ &= 2,60 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Výsledná vlna má tedy amplitudu

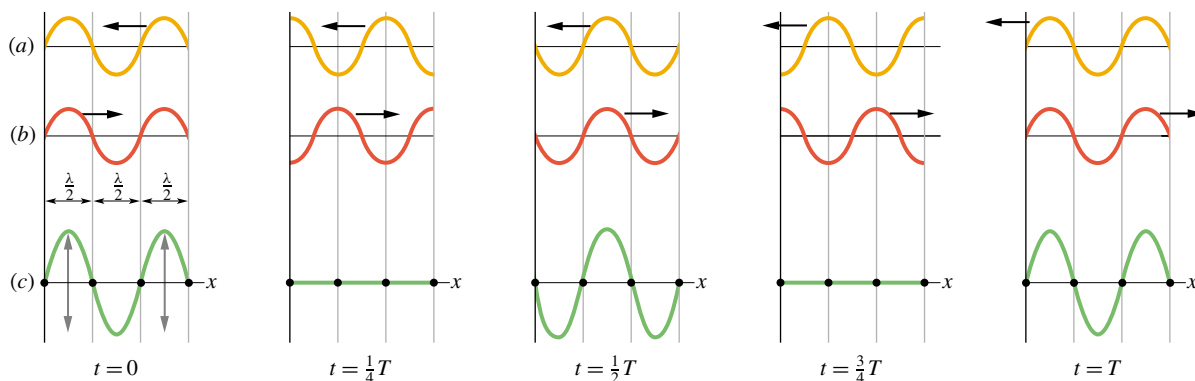
$$\begin{aligned} y'_m &= \sqrt{(5,50 \text{ mm})^2 + (2,60 \text{ mm})^2} = \\ &= 6,1 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

a její fázová konstanta je

$$\begin{aligned} \text{tg } \beta &= \frac{(2,60 \text{ mm})}{(5,50 \text{ mm})} = 0,473, \\ \beta &= 0,44 \text{ rad}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

## 17.11 STOJATÉ VLNY

V předchozích dvou odstavcích jsme studovali dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou postupující v napnuté struně *souhlasným směrem*. A co když běží proti sobě? Také v tomto případě použijeme k nalezení výsledné vlny princip superpozice. Východiskem našich úvah bude obr. 17.15, který znázorňuje danou situaci graficky. Vidíme zde dvě výchozí vlny: ta, která postupuje doleva je na obr. 17.15a. Proti ní, tj. doprava, běží vlna na obr. 17.15b. Na obr. 17.15c vidíme jejich součet, získaný graficky aplikací principu superpozice. Nápadným rysem výsledné vlny je existence určitých míst podél struny, ve kterých je struna neustále v klidu. Těmto místům říkáme **uzly** vlny. Čtyři takové uzly jsou na obr. 17.15c vyznačeny tečkami. Uprostřed mezi sousedními uzly se nacházejí **kmitny**; v nich je naopak amplituda výsledné vlny největší. Vlnu na obr. 17.15c nazýváme **vlnou stojatou**, protože se nepohybuje doprava ani doleva: polohy nulové a maximální výchylky se v čase nemění.



**Obr. 17.15** Vznik stojaté vlny ze dvou vln postupných. Části (a) a (b) ukazují dvě série snímků dvou vln o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou. Vlny běží v opačných směrech a jejich tvary jsou zaznamenány v pěti různých okamžicích v rozmezí jedné periody. (c) Superpozice obou vln v pěti uvedených okamžicích. Všimněte si polohy uzlů a kmiten u výsledné stojaté vlny (c). Uzly jsou označeny černými tečkami. V případě postupných vln (a) a (b) žádné uzly či kmitny neexistují.



Jestliže dvě sinusové vlny o stejné amplitudě a se stejnou vlnovou délkou postupují v napnuté struně opačným směrem, vzniká jejich interferencí stojatá vlna.

Nyní budeme studovat stojatou vlnu matematicky. Dvě výchozí vlny popíšeme rovnicemi

$$y_1(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.49)$$

$$y_2(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \quad (17.50)$$

Výsledná vlna  $y'$  je určena principem superpozice:

$$\begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t). \end{aligned}$$

Nakonec použijeme identitu (17.41) a dostaneme:

$$y'(x, t) = (2y_m \sin kx) \cos \omega t. \quad (17.51)$$

Výsledek nemá tvar rov. (17.16) a není to tedy postupná vlna. Rov. (17.51) popisuje vlnu stojatou.

Veličina  $2y_m \sin kx$  v první závorce na pravé straně rov. (17.51) vlastně určuje amplitudu kmitů té částice struny, která je umístěna na poloze  $x$ . Avšak amplituda musí být vždy nezáporná a  $\sin kx$  může být i záporný. Amplitudu kmitů částice v místě  $x$  tedy vezmeme jako absolutní hodnotu veličiny  $2y_m \sin kx$ .

V případě postupné sinusové vlny máme pro všechny částice struny jednu a tutéž amplitudu kmitů. Pro stojatou vlnu to neplatí: amplituda kmitů se mění s polohou. Tak například u stojaté vlny, popsané rov. (17.51), je amplituda nulová pro všechny částice struny, jejichž polohy splňují rovnici  $\sin kx = 0$ , a tedy také rovnici

$$kx = n\pi \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.52)$$

Když do této rovnice dosadíme  $k = 2\pi/\lambda$  a provedeme malou úpravu, získáme

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.53)$$

(poloha uzlů).

To je podmínka pro polohu částic struny s nulovou amplitudou — uzlů — v případě stojaté vlny popsané rov. (17.51). Všimněte si, že sousední uzly jsou vzdáleny o  $\lambda/2$ , tj. o polovinu vlnové délky, a uprostřed mezi nimi leží kmitna.

Největší z možných amplitud stojaté vlny v rov. (17.51) má velikost  $2y_m$ . Vyskytuje se pro ty hodnoty  $kx$ , pro které platí  $|\sin kx| = 1$ . Těmito hodnotami jsou

$$\begin{aligned} kx &= \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots = \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.54) \end{aligned}$$

Do rov. (17.54) dosadíme  $k = 2\pi/\lambda$  a provedeme malou úpravu. Tak získáme podmínku

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.55)$$

(poloha kmiten).

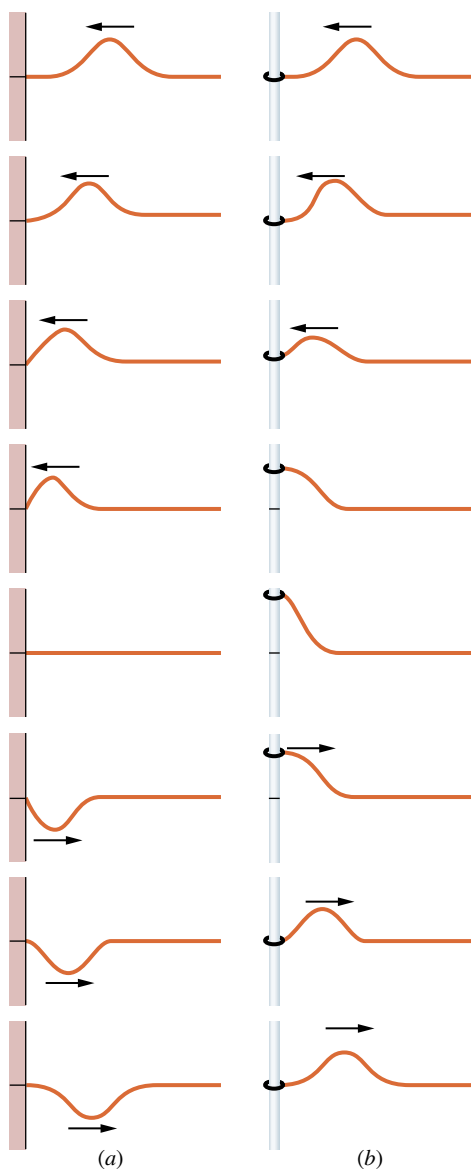
To je podmínka pro polohu částic struny s maximální amplitudou — kmiten — v případě stojaté vlny, popsané rov. (17.51). Sousední kmitny jsou vzdáleny o polovinu vlnové délky a uprostřed mezi nimi leží uzal.

## Odraz na hranici

V napnuté struně lze vytvořit stojatou harmonickou vlnu také odrazem postupné vlny na konci struny. Dopadající (původní) vlna a odražená vlna jsou popsány postupně rov. (17.49) a (17.50). Jejich interferencí vzniká stojatá vlna.

Obr. 17.16 ilustruje odraz vlny na příkladu odrazu jednoho postupného pulzu. Na obr. 17.16a je struna na svém levém konci upevněna, a tedy i znehybněna. Pulz, který zprava dospěje k tomuto konci, působí na stěnu určitou silou ve směru nahoru. Podle zákona akce a reakce tedy také stěna působí na okrajovou částici struny stejně velkou, ale opačně orientovanou silou. Tato reakční síla vytváří u stěny nový pulz, který postupuje podél struny od konce zpátky. Při takovém „tvrdém“ odrazu musí mít vlna u stěny uzal, struna je zde totiž znehybněna upevněním ve stěně. Výchylinky dopadajícího a odraženého pulzu musí být těsně u stěny opačné, interferencí se zde musí nutně vyrušit. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na pevném konci je v protifázi k přicházející vlně.

Na obr. 17.16b je levý konec struny připevněn k lehkému prstenci, který může volně a bez tření klouzat po přímé tyči. Dopadající pulz vytáhne strunu i s prstencem na tyči směrem nahoru. Struna se přitom na svém konci prodlouží a vznikne v ní napětí, které má naopak tendenci toto prodloužení zmenšit: výsledkem je pohyb prstence směrem dolů a tím následný vznik odraženého pulzu, jehož výchylnka je souhlasně orientovaná s výchylnkou pulzu dopadajícího. Při takovém „měkkém“ odrazu se tedy dopadající a odražený pulz navzájem zesilují a u konce struny vzniká kmitna; amplituda výchylnky prstence je dvojnásobkem amplitudy každého z obou pulzů. Jde-li o harmonickou vlnu, zjistíme toto: Vlna odražená na volném konci je ve fázi s přicházející vlnou.



**Obr. 17.16** (a) Zprava nabíhající pulz je na levém konci struny odražen doprava. Levý konec je pevně zabudován ve stěně. Všimněte si, že výchylky dopadajícího a odraženého pulzu jsou u stěny opačné. (b) Levý konec struny je spojen s prstencem, který může volně a bez tření klouzat nahoru a dolů po přímé tyči. Dopadající a odražený pulz mají nyní stejně orientované výchylky.

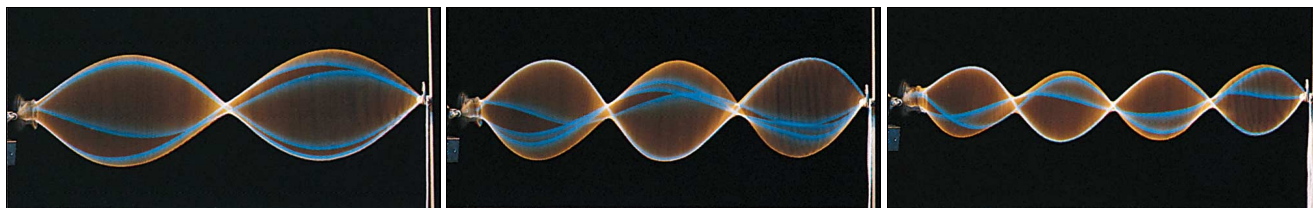
**KONTROLA 5:** Uvažme interferenci dvou vln stejné amplitudy a vlnové délky. Výsledná vlna má rovnici (1)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x - 4t)$ , (2)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x) \cos(4t)$  a (3)  $y'(x, t) = 4 \sin(5x + 4t)$ . Která z těchto rovnic popisuje výslednou vlnu v situaci, kdy se výchozí vlny šíří (a) obě ve směru osy  $x$ , (b) obě proti směru osy  $x$  a (c) v opačných směrech?

## 17.12 VLASTNÍ KMITY

Nechme jeden konec struny, řekněme levý, sinusově kmitat a druhý upevníme. Na struně bude vlna tedy nejprve postupovat ve směru doprava. Její frekvence se rovná frekvenci kmitů levého konce. Na pevném konci se vlna odrazí a postupuje skrze sebe samu zpět doleva. Vlna běžící doprava a vlna běžící doleva spolu interferují.

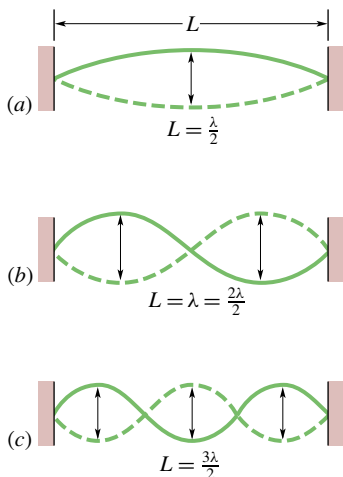
Pro jisté speciální frekvence vznikne díky interferenci stojatá vlna s uzly a s velkými kmitami, podobná vlnám na obr. 17.17. Říkáme jí **vlastní** neboli **rezonanční kmit struny**. Frekvence, při kterých dochází ke vzniku rezonančních kmitů, nazýváme **vlastní** neboli **rezonanční frekvence struny**. Také říkáme, že při těchto frekvencích struna **rezonuje**. Kdyby se frekvence kmitů levého konce nerovnal některé z vlastních frekvencí, stojatá vlna by nemohla vzniknout. Interference vln postupujících doprava a doleva by v tomto nepříznivém případě vedla pouze ke vzniku malých, prakticky nepostřehnutelných kmitů částic struny.

Uvažme nyní podobnou situaci: určitá struna, například kytarová, je napnutá mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je  $L$ . Ve struně vybudíme kmitání na vlastní frekvenci, takže vznikne rezonanční kmit. Protože oba konce struny jsou upevněny, bude zde mít nutně stojatá vlna uzly. Nejjednodušší obrazec, který vyhovuje této podmínce, je na obr. 17.18a. Na něm vidíme strunu ve dvou extrémních polohách (první poloze odpovídá spojité čára, druhé čárkovaná čára). Všimněme si, že zde máme pouze jednu kmitnu, umístěnou uprostřed struny. Všimněme si také, že na vzdálenosti  $L$  (délka struny) se rozložila jedna půl-



**Obr. 17.17** Stroboskopické snímky odhalují speciální (nedokonalé) obrazce stojatých vln. Tyto rezonanční kmity jsou vybudeny vibrátorem na levém konci struny. Vznikají pouze při určitých frekvencích vibrátoru.

vlna. Pro tento vlastní kmit tak máme podmínku  $\lambda/2 = L$ . Podrobněji řečeno: má-li interferenci dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout takový rezonanční kmit, musí mít tyto vlny touž vlnovou délku  $\lambda = 2L$ .



**Obr. 17.18** Struna je natažena mezi dvěma svorkami a jsou v ní vybudeny vlastní kmity. Jednotlivé vlastní kmity můžeme znázornit obrázky odpovídajících stojatých vln. Každý obrazec je tvořen soustavou *půlvln*, vznikajících při znázornění dvou krajních poloh struny v průběhu dané stojaté vlny. (a) Nejjednodušší obrazec je tvořen jedinou půlvlnou. Spojitá a přerušovaná čára znázorňují dvě krajní polohy struny. (b) V pořadí složitosti následuje obrazec tvořený dvěma půlvlnami. (c) Následující obrazec má tři půlvlny.

Druhý nejjednodušší obrazec stojatých vln při upevněných koncích struny je znázorněn na obr. 17.18b. Tento obrazec má tři uzly a dvě kmitny. Má-li interferenci dvou výchozích vln, postupujících doprava a doleva, vzniknout tento vlastní kmit, musí mít obě výchozí vlny vlnové délky  $\lambda = L$ . Třetí obrazec je znázorněn na obr. 17.18c. Odpovídající stojatá vlny má čtyři uzly, tři kmitny a vlnovou délku  $\lambda = \frac{2}{3}L$ . V této posloupnosti bychom mohli pokračovat. Jestliže vyjdeme z daného obrazce, pak následující obrazec stojatých vln má o jednu půlvlnu, o jeden uzel a o jednu kmitnu více. Na délku struny  $L$  musíme navíc vložit jednu půlvlnu  $\lambda/2$ .

V souhrnu můžeme říci, že vlastní kmity v napnuté struně vzniknou, je-li

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.56)$$

Těmto vlnovým délkám pak odpovídají příslušné vlastní frekvence. Dostaneme je z rov. (17.12), do které zahrneme

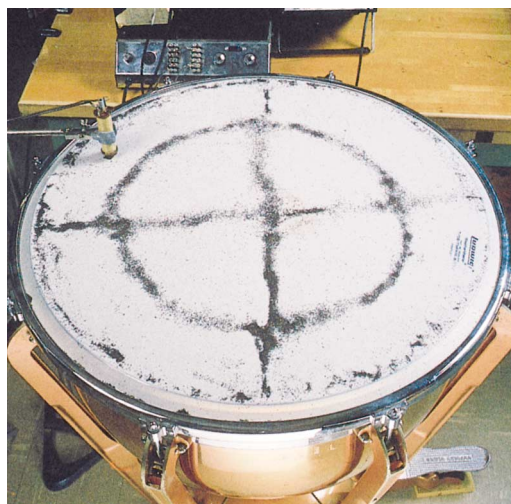
podmínku v rov. (17.56):

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.57)$$

Zde  $v$  je rychlost postupné vlny v dané struně.

Podle rov. (17.57) jsou tedy všechny vlastní frekvence celočíselnými násobky jisté nejnižší vlastní frekvence. Tu získáme, když v rov. (17.57) vezmeme  $n = 1$ :  $f = v/2L$ . Vlastní kmit s touto nejnižší frekvencí nazýváme *základním kmitem* nebo také *prvním harmonickým kmitem* neboli první harmonickou. Kmit odpovídající  $n = 2$  je *druhý harmonický kmit*, pro  $n = 3$  máme *třetí harmonický kmit* atd. Frekvence jednotlivých vlastních kmitů se často označují  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ , kde  $n$  je **číslo harmonického kmítu** neboli **módu**.

Jev rezonance je zcela běžný u všech kmitajících systémů. Pozorujeme jej také u dvojrozměrných a trojrozměrných těles. Například na obr. 17.19 vidíte dvojrozměrný obrazec uzlů, vznikajících na kmitající membráně tympánů (**Chladního obrazce**).



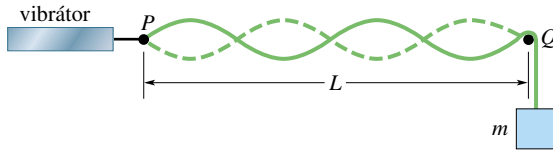
**Obr. 17.19** Jeden z mnoha možných obrazců stojatých vln, vznikajících na membráně tympánů (**Chladního obrazce**). Obrazec je vytvořen tmavým práškem, původně stejnoměrně rozsypaným na membráně. V levém horním rohu fotografie je vidět mechanický vibrátor, který v membráně vybudí kmitání určité frekvence. Prášek se samovolně sesypává k uzlům vzniklé stojaté vlny. V dvojrozměrném případě však uzly nejsou izolované body, ale vytvářejí na membráně kružnice a úsečky.

### PŘÍKLAD 17.7

Na obr. 17.20 je zobrazena struna, spojená na jednom konci v bodě  $P$  s generátorem sinusových kmitů a na druhém konci zatížená přes držák  $Q$  závažím o hmotnosti  $m$ . Vzdálenost  $L$  bodů  $P$  a  $Q$  činí 1,2 m, délková hustota struny je  $1,6 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Frekvence vibrátoru byla 120 Hz. Amplituda příčného pohybu bodu  $P$  je dostatečně malá a bod  $P$  lze tedy považovat za uzel. Uzlům je i bod  $Q$ .

(a) Při jaké hmotnosti závaží  $m$  vybudí vibrátor na struně čtvrtý harmonický kmit?



**Obr. 17.20** Příklad 17.7. Zatížená struna je spojena s vibrátorem. Pro pevnou frekvenci vibrátoru se na struně vybudí stojaté vlny jen pro jisté diskrétní hodnoty napětí na struně.

**ŘEŠENÍ:** Rezonanční frekvence jsou určeny v rov. (17.57) jako

$$f = \frac{v}{2L}n \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.58)$$

Napětí ve struně musíme nastavit tak, aby se frekvence vibrátoru rovnala čtvrté harmonické frekvenci, určené právě uvedenou rovnicí.

Rychlost vlny na struně je určena rov. (17.24):

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}, \quad (17.59)$$

kde za napětí ve struně  $\tau$  byla dosazena váha závaží  $mg$ . Dosadíme  $v$  do rov. (17.58) a vyjádříme  $m$ :

$$m = \frac{4L^2 f^2 \mu}{n^2 g}. \quad (17.60)$$

Do tohoto obecného výsledku dosadíme nyní číslo harmonického kmity  $n = 4$ . Po vyčíslení tak dostaneme

$$m = \frac{4(1,2 \text{ m})^2 (120 \text{ Hz})^2 (0,0016 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1})}{(4)^2 (9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})} = 0,846 \text{ kg} \doteq 0,85 \text{ kg}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jakou stojatou vlnu lze vybudit, jestliže strunu napneme závažím o hmotnosti  $m = 1,00 \text{ kg}$ ?

**ŘEŠENÍ:** Uvedenou hodnotu  $m$  dosadíme do rov. (17.60) a tuto rovnici vyřešíme vzhledem k proměnné  $n$ . Tímto postupem získáme  $n = 3,7$ . Číslo harmonického kmity však musí být celé. Protože toto získané  $n$  celé není, nebude vibrátorem vybudena vůbec žádná stojatá vlna. Kmitání struny bude malé, prakticky nepostřehnutelné.

**KONTROLA 6:** V následující řadě rezonančních frekvencí jedna z nich (nižší než 400 Hz) schází: 150 Hz, 225 Hz, 300 Hz, 375 Hz. (a) Jaká je chybějící frekvence? (b) Jaká je sedmá harmonická frekvence?

### RADY A NÁMĚTY

**Bod 17.2:** Harmonické kmity ve struně

Když potřebujeme prozkoumat určitý harmonický kmit na napnuté struně dané délky  $L$ , nejprve si tento kmit nakreslíme jako na obr. 17.18. Potřebujeme například pátou harmonickou frekvenci. Nejprve si nakreslíme pět půlvln mezi šesti pevnými pomocnými body. Hned uvidíme, že pět půlvln, každá délky  $\lambda/2$ , má pokrývat délku struny  $L$ . To tedy znamená  $5(\lambda/2) = L$ , a tedy  $\lambda = 2L/5$ . Poté můžeme již použít rov. (17.12) ( $f = v/\lambda$ ) a získáme hledanou pátou harmonickou frekvenci.

V každém případě si uvědomme, že vlnová délka harmonického kmity je určena výhradně délkou struny  $L$ . Na druhé straně harmonická frekvence závisí také na rychlosti vlny  $v$  a ta je podle rov. (17.24) určena napětím struny a její délkovou hustotou.

## PŘEHLED & SHRNU TÍ

### Příčné a podélné vlny

Mechanické vlny mohou existovat pouze v látkovém prostředí a jejich pohyb je určen Newtonovými zákony. V případě *příčných* (transverzálních) mechanických vln, jakými jsou například vlny na napnuté struně, kmitají částice prostředí kolmo ke směru postupu vlny. Při šíření *podélných* (longitudinálních) vln kmitají částice prostředí rovnoběžně se směrem postupu vlny.

### Sinusové vlny (harmonické vlny)

Sinusová (harmonická) vlna, postupující ve směru osy  $x$ , je popsána vztahem

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t), \quad (17.2)$$

kde  $y_m$  je amplituda,  $k$  je úhlový vlnocet,  $\omega$  je úhlový kmitočet neboli úhlová frekvence a  $kx - \omega t$  je fáze. Vlnová délka  $\lambda$  souvisí s  $k$  vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (17.5)$$

Perioda  $T$  a frekvence  $f$  vlny jsou s úhlovou frekvencí  $\omega$  vázány vztahy

$$\frac{\omega}{2\pi} = f = \frac{1}{T}. \quad (17.8, 17.9)$$

Rychlost šíření vlny  $v$  je uvedenými parametry určena vztahem

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (17.12)$$

**Rovnice obecné postupné vlny**

Jakákoliv funkce tvaru

$$y(x, t) = h(x - vt) \quad (17.16)$$

popisuje vlnu postupující ve směru osy  $x$  stálou rychlostí  $v$  (pro  $v > 0$ ). Její tvar je určen konkrétním tvarem funkce  $h$ . Vlna postupující proti směru osy  $x$  je popsána funkcí  $h(x + vt)$ .

**Rychlost vlny na napnuté struně**

Rychlost vlny, která postupuje na napnuté struně, je určena napětím struny  $\tau$  a délkovou hustotou struny  $\mu$ . Platí

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}. \quad (17.24)$$

**Výkon**

Střední výkon vlny je střední rychlost změny energie v daném místě v důsledku jejího přenosu touto vlnou. V případě sinusové vlny v napnuté struně je střední výkon roven

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2. \quad (17.35)$$

**Skládání vln**

Při současném šíření dvou nebo více vln v tomtéž prostředí je výchylka libovolné částice prostředí rovna součtu výchylek, které by této částici individuálně udělily jednotlivé vlny. Toto pravidlo se nazývá *princip superpozice*.

**Fourierova řada**

Libovolnou vlnu můžeme vyjádřit ve tvaru *Fourierovy řady*, tj. ve tvaru součtu vhodně zvolených sinusových vln.

**Interference vln**

Výchylky ve dvou vlnách postupujících na téže struně se sčítají nebo odčítají podle principu superpozice. Říkáme, že spolu interferují neboli že dochází k *interferenci*. Pokud se obě výchozí vlny shodují ve směru šíření, v amplitudě  $y_m$  a ve frekvenci  $f$  (a tedy mají také stejnou vlnovou délku), avšak liší se fázovou

konstantou  $\varphi$ , vzniká interferencí jediná vlna stejné frekvence:

$$y'(x, t) = 2y_m \cos \frac{1}{2}\varphi \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\varphi). \quad (17.42)$$

Je-li  $\varphi = 0$ , vlny jsou ve fázi a jejich interference je (úplně) konstruktivní. Při  $\varphi = \pi$  rad jsou vlny v protifázi a jejich interference je (úplně) destruktivní.

**Fázory**

Formálně můžeme vlnu  $y(x, t)$  popsat *fázorem*. Je to vektor, jehož velikost je rovna amplitudě vlny  $y_m$  a který se otáčí kolem počátku s úhlovou rychlostí rovnou úhlové frekvenci vlny  $\omega$ . Projekcí rotujícího fázoru na svislou osu získáme výchylku  $y$  jednotlivých částic při šíření vlny.

**Stojaté vlny**

Interferencí dvou identických sinusových vln, postupujících v opačných směrech, vznikají stojaté vlny. V případě struny s upevněnými konci jsou stojaté vlny popsány vztahem

$$y'(x, t) = 2y_m \sin kx \cos \omega t. \quad (17.51)$$

Stojaté vlny mají pevné polohy uzlů a kmiten. *Uzel*, resp. *kmitna* je poloha nulové, resp. maximální příčné výchylky struny.

**Vlastní kmity**

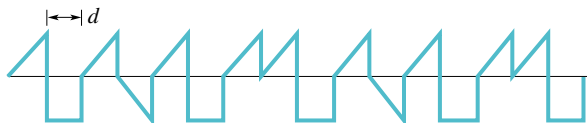
Stojaté vlnění můžeme na struně vytvořit odrazem postupných vln na koncích struny. Na upevněných koncích se vytvářejí uzly vlny. Toto pravidlo omezuje frekvence stojatých vln, které lze na dané struně vybudit. Každou takovou přípustnou frekvenci nazýváme *vlastní* neboli *rezonanční frekvencí* a odpovídající stojatou vlnu nazýváme *vlastním* neboli *rezonančním kmitem* struny. V případě struny délky  $L$  s oběma konci upevněnými jsou vlastní frekvence určeny vztahem

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.57)$$

Kmit příslušný  $n = 1$  nazýváme *základním kmitem* neboli *prvním harmonickým kmitem* (první harmonickou). Kmit odpovídající  $n = 2$  je *druhý harmonický kmit*. Podobně pro vyšší hodnoty  $n$ .

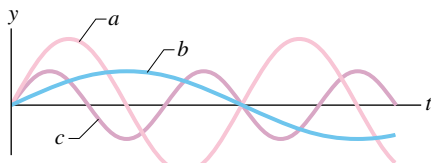
## OTÁZKY

1. Jakou vlnovou délku má (neobvyklá) vlna na obr. 17.21? Délka každého segmentu na obrázku je  $d$ .



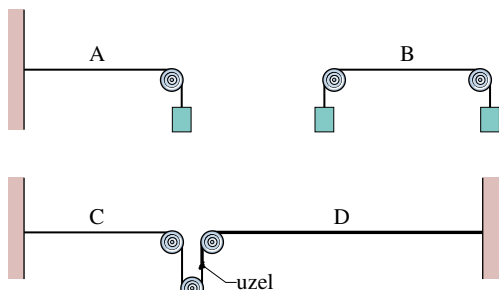
Obr. 17.21 Otázka 1

2. Vlákno napneme a pak podél něj odděleně vyšleme tři různé sinusové vlny. Na obr. 17.22 je znázorněna výchylka pevně zvolené částice vlákna jako funkce času pro každou ze tří uvedených vln. Uspořádejte křivky sestupně podle velikosti vlnové délky odpovídající vlny.



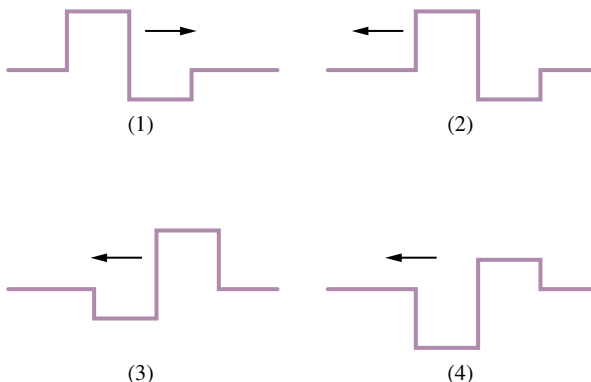
Obr. 17.22 Otázka 2

3. Na obr. 17.23 jsou vyobrazena čtyři vlákna, zatížená jedním nebo dvěma stejnými závažími. Vlákna A, B a C mají stejnou délkovou hustotu; délková hustota vlákna D je ale větší. Uspořádejte vlákna sestupně podle postupné rychlosti vln, které se na nich mohou šířit.



Obr. 17.23 Otázka 3

4. Vlnu 1 na obr. 17.24 tvoří dva pravoúhlé pulzy: první má výšku 4 jednotky a šířku  $d$ , druhý má hloubku 2 jednotky a šířku  $d$ . Vlna postupuje doprava podél osy  $x$ . Podobně jsou vytvořeny vlny 2, 3 a 4. Tyto vlny však postupují podél osy  $x$  doleva. Uvažte interferenci vlny 1 jednotlivě s ostatními vlnami. Při které kombinaci vln bude existovat časový okamžik, ve kterém vznikne interferencí (a) nejhlubší pravoúhlý pulz, (b) nulový signál na celé ose  $x$  a (c) jeden pravoúhlý pulz výšky a šířky  $2d$ ?

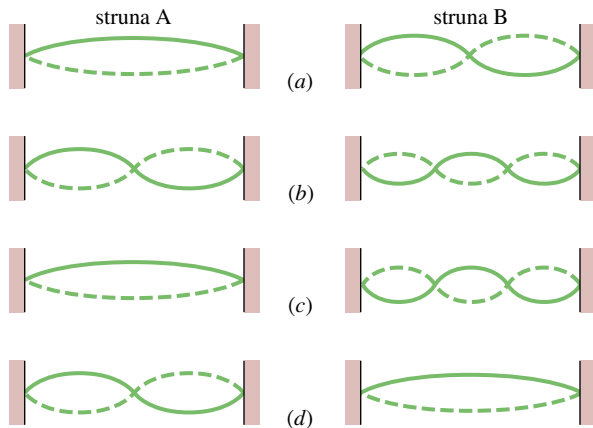


Obr. 17.24 Otázka 4

5. Na struně postupují dvě vlny ve fázi. U jedné z nich změníme určitým způsobem fázi; v důsledku toho se vlna posune o 5,4 vlnové délky. Jaký druh interference se nyní objeví na struně?
6. Vyjdeme ze znění př. 17.5 a uvážíme následující čtyři fázové rozdíly mezi oběma vlnami:  $\pi/4$ ,  $7\pi/4$ ,  $-\pi/4$  a  $-7\pi/4$ . (a) Uspořádejte sestupně tyto čtyři fázové rozdíly podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (b) Pro každý ze čtyř uvedených fázových rozdílů popište typ vzniklé interference.
7. Uvažujme postupně čtyři dvojice harmonických vln stejné vlnové délky postupující týmž směrem podél struny. Pro každou dvojici známe amplitudy obou vln a jejich fázový rozdíl: (a) 2 mm, 6 mm,  $\pi$  rad; (b) 3 mm, 5 mm,  $\pi$  rad; (c) 7 mm, 9 mm,  $\pi$  rad; (d) 2 mm, 2 mm, 0 rad. Obě vlny spolu interferují. Uspořádejte sestupně uvedené čtyři dvojice podle velikosti amplitudy výsledné vlny. Řešte bez provádění detailního výpočtu. (Tip: Sestrojte fázorové diagramy.)
8. (a) Na struně postupují souhlasným směrem tři vlny stejné amplitudy a stejné vlnové délky. Řekněme, že jedna z nich má fázovou konstantu  $0^\circ$ . Jaké jsou fázové konstanty zbylých dvou vln, jestliže je interference všech tří vln úplně destruktivní? (Tip: Sestrojte fázorové diagramy.) (b) Uvažte čtyři výchozí vlny popsaných vlastností, jedna z nich má opět fázovou konstantu  $0^\circ$ . Jaké jsou fázové konstanty zbylých tří vln, jestliže je interference všech čtyř vln úplně destruktivní? Nyní existují dvě různé odpovědi.
9. Na struně vybudíme sedmý harmonický kmit. (a) Kolik vznikne uzlů? (b) Nachází se uprostřed struny uzel, kmitna, nebo něco jiného? (c) Je vlnová délka šestého harmonického kmity delší, nebo kratší v porovnání se sedmým harmonickým kmitem? (d) Je šestá harmonická frekvence vyšší, nebo nižší než sedmá?
10. (a) Uvažme situaci popsanou v př. 17.7 a znázorněnou na obr. 17.20. Jestliže při pevné frekvenci vibrátoru postupně zvyšujeme hmotnost závaží, objevují se nové harmonické kmity.

Jsou pořadová čísla těchto harmonických kmitů větší, nebo menší než číslo harmonického kmity v textu př. 17.7? (b) Následují nové harmonické kmity spojitě za sebou (při určité zátěži je jeden nahrazen druhým), nebo nejprve daný harmonický kmit zanikne a teprve po určitém zvýšení zátěže se objeví nový?

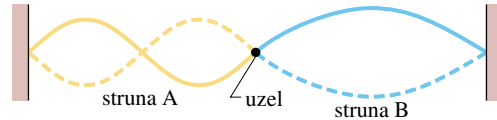
**11.** Mezi dvěma pevnými držáky, umístěnými ve vzdálenosti  $L$ , je natažena struna. (a) Pro která pořadová čísla harmonických kmitů existuje ve vzdálenosti  $L/3$  od jednoho z držáků uzel? (b) Na struně vybudíme pátý harmonický kmit a zaměříme se na bod vzdálený o  $2L/5$  od jednoho z držáků. Je v něm uzel, kmitna, nebo nic z toho? (c) Stejná otázka jako v bodě (b) pro desátý harmonický kmit.



Obr. 17.25 Otázka 12

**12.** Struny A a B mají stejnou délku a stejnou délkovou hustotu. Napětí ve struně B je však větší než napětí ve struně A. Na obr. 17.25 vidíte čtyři dvojice situací, označené (a) až (d), kdy na strunách byly vybudeny stojaté vlny. U které dvojice kmitají obě struny se stejnou frekvencí?

**13.** Dvě struny stejné délky, ale různé délkové hustoty, jsou na koncích pevně spojeny a vzniklá struna je natažena mezi dvěma držáky. Určitá frekvence vybudí na vzniklé struně stojatou vlnu. Jeden její uzel je v místě spojení obou původních strun. Situace je znázorněna na obr. 17.26. Která struna má větší délkovou hustotu?



Obr. 17.26 Otázka 13

**14.** Uvažte postupně vlnovou délku a rezonanční frekvenci pro druhý harmonický kmit jisté struny, napnuté mezi dvěma držáky. Zvětší se tyto veličiny, zmenší se, nebo zůstanou stejné, jestliže (a) zvětšíme vzdálenost držáků beze změny napětí ve struně, (b) zvýšíme napětí ve struně beze změny vzdálenosti držáků a (c) použijeme strunu s větší délkovou hustotou?

**15.** Hráči na klasickou kytaru vědí, že před představením musí kytaru rozehrát a poté znovu naladit. Během prvních několika minut hry se totiž struny zahřejí a tím i nepatrně uvolní. Má toto uvolnění za následek snížení, nebo zvýšení rezonanční frekvence jednotlivých strun?

## CVIČENÍ & ÚLOHY

### ODST. 17.5 Rychlost postupné vlny

**1C.** Daná vlna má rychlost  $240 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a vlnovou délku  $3,2 \text{ m}$ . Jaká je (a) frekvence vlny a (b) perioda vlny?

**2C.** Daná vlna má úhlovou frekvenci  $110 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  a vlnovou délku  $1,80 \text{ m}$ . Vypočtete (a) úhlový vlnčet a (b) rychlost vlny.

**3C.** Rychlost elektromagnetické vlny ve vakuu je  $3,0\cdot 10^8 \text{ m/s}$ . (a) Vlnové délky viditelného světla vyplňují interval zhruba od  $400 \text{ nm}$  (pro fialové světlo) do  $700 \text{ nm}$  (pro červené světlo). Určete obor frekvencí světelných vln. (b) Vlny v oboru frekvencí od  $1,5 \text{ MHz}$  do  $300 \text{ MHz}$  jsou označovány jako krátkovlnné rádiové vlny (patří sem například frekvence rozhlasových FM stanic nebo frekvence televizního signálu VHF). Určete odpovídající obor vlnových délek. (c) Také rentgenové paprsky jsou elektromagnetickými vlnami. Jejich vlnové délky leží v intervalu od  $1,0\cdot 10^{-2} \text{ nm}$  do  $5,0 \text{ nm}$ . Jaký je odpovídající frekvenční obor?

**4C.** Na struně postupuje sinusová vlna. Příčná výchylka částice struny klesla z maximální hodnoty na nulu za dobu  $0,170 \text{ s}$ . Určete (a) periodu vlny a (b) frekvenci vlny. (c) Vlnová délka dané vlny je  $1,40 \text{ m}$ . Jaká je rychlost vlny?

**5C.** Napište rovnici postupné vlny, která se šíří proti směru

osy  $x$ , má amplitudu  $0,010 \text{ m}$ , frekvenci  $550 \text{ Hz}$  a rychlost  $330 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

**6C.** Na struně se šíří postupná vlna popsána vztahem

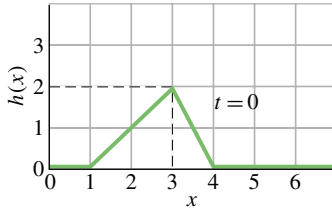
$$y = 2,0 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{0,40} + \frac{x}{80} \right) \right],$$

kde souřadnice  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v centimetrech a čas  $t$  v sekundách. (a) Vezměte  $t = 0$  a graficky znázorněte  $y$  jako funkci  $x$  pro  $0 \leq x \leq 160 \text{ cm}$ . (b) Opakujte část (a) pro  $t = 0,05 \text{ s}$  a pro  $t = 0,10 \text{ s}$ . (c) Z grafů určete rychlost a směr šíření vlny ( $+x$ , nebo  $-x$ ).

**7C.** Ukažte, že vlnu  $y = y_m \sin(kx - \omega t)$  lze zapsat v následujících ekvivalentních tvarech:

$$\begin{aligned} y &= y_m \sin [k(x - vt)], \\ y &= y_m \sin \left[ \omega \left( \frac{x}{v} - t \right) \right], \\ y &= y_m \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - ft \right) \right], \\ y &= y_m \sin \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]. \end{aligned}$$

**8C.** Na obr. 17.27 je znázorněn izolovaný pulz v čase  $t = 0$ . Tvar pulzu je určen funkcí  $h(x - 5t)$ , kde  $x$  je v centimetrech a  $t$  v sekundách. Jaká je (a) rychlost a (b) směr postupu pulzu? (c) Nakreslete  $h(x - 5t)$  jako funkci proměnné  $x$  pro  $t = 2$  s. (d) Nakreslete  $h(x - 5t)$  jako funkci proměnné  $t$  pro  $x = 10$  cm.



Obr. 17.27 Cvičení 8

**9C.** Ukažte, že při šíření příčné postupné harmonické vlny na struně je (a) maximální příčná rychlost částic struny určena vztahem  $u_{\max} = \omega y_m = 2\pi f y_m$  a (b) maximální příčné zrychlení částic struny určeno vztahem  $a_{y,\max} = \omega^2 y_m = 4\pi^2 f^2 y_m$ .

**10C.** Příčná postupná vlna na struně je určena rovnicí

$$y = (2,00 \text{ mm}) \sin [(20 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x - (600 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

(a) Určete pro tuto vlnu amplitudu, frekvenci, rychlost a vlnovou délku. (b) Určete největší příčnou rychlost částic struny při šíření uvedené vlny.

**11C.** (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, která se šíří na vlákně ve směru osy  $y$  s úhlovým vlnočtem  $60 \text{ cm}^{-1}$ , s periodou  $0,20$  s a s amplitudou  $3,0$  mm. (b) Předpokládejte, že při šíření této vlny kmitají jednotlivé částice vlákna ve směru osy  $z$ . Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna?

**12Ú.** Příčná postupná vlna, šířící se na velmi dlouhé struně, je popsána rovnicí

$$y = 6,0 \sin(0,020\pi x + 4,0\pi t),$$

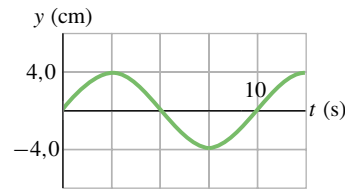
kde souřadnice  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v centimetrech a čas  $t$  v sekundách. Pro tuto vlnu určete (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) frekvenci, (d) rychlost, (e) směr šíření a (f) největší příčnou rychlost částic struny. (g) Jaká je příčná výchylka struny v místě  $x = 3,5$  cm a v čase  $t = 0,26$  s?

**13Ú.** (a) Napište rovnici příčné postupné sinusové vlny, šířící se na vlákně ve směru  $+x$ , má-li tato vlna vlnovou délku  $10$  cm, frekvenci  $400$  Hz a amplitudu  $2,0$  cm. (b) Jaká je největší příčná rychlost částic vlákna? (c) Jaká je rychlost vlny?

**14Ú.** Uvažte příčnou postupnou sinusovou vlnu v napnuté struně. Ukažte, že v libovolném čase a v libovolném bodě struny je sklon tečny ke tvaru vlny roven poměru příčné rychlosti částic struny v daném bodě a rychlosti vlny.

**15Ú.** Na struně se ve směru osy  $x$  šíří příčná sinusová vlna vlnové délky  $20$  cm. Obr. 17.28 znázorňuje časovou závislost příčné výchylky částice struny o souřadnici  $x = 0$ . (a) Načrtněte tvar vlny na úseku jedné vlnové délky (mezi  $x = 0$  a  $x = 20$  cm) v čase  $t = 0$ . (b) Jaká je rychlost šíření vlny? (c) Napište rovnici

vlny a explicitně v ní uveďte všechny konstanty. (d) Jaká je příčná rychlost částice struny o souřadnici  $x = 0$  v čase  $t = 5,0$  s?



Obr. 17.28 Úloha 15

**16Ú.** Sinusová vlna o frekvenci  $500$  Hz běží ve struně rychlostí  $350 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je vzdálenost dvou částic struny, které mají při kmitání fázový rozdíl  $\pi/3$  rad? (b) Jaký je fázový rozdíl mezi dvěma výchylkami téže částice struny, jestliže výchylky po sobě následují s časovým odstupem  $1,00$  ms?

### ODST. 17.6 Rychlost vlny na struně

**17C.** Jaká je rychlost příčné postupné vlny na vlákně hmotnosti  $60,0$  g a délky  $2,00$  m, jestliže napětí ve vlákně činí  $500$  N?

**18C.** Nejtěžší, resp. nejlehčí struna jistých houslí má délkovou hustotu  $3,0 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ , resp.  $0,29 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ . Jaký je poměr průměru těžší struny k průměru struny lehčí? Předpokládejte, že obě struny jsou vyrobeny z téhož materiálu.

**19C.** Při napětí  $120$  N činí rychlost příčné vlny na struně  $170 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Na jakou hodnotu musíme změnit napětí, chceme-li zvýšit rychlost vlny na  $180 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ?

**20C.** U ocelového drátu, který je na obou koncích upevněn ve svorkách, jsme zdvojnásobili napětí, aniž se přitom znatelně změnila jeho délka. Jaký je poměr nové rychlosti šíření příčné vlny k původní rychlosti vlny?

**21C.** Uvažme drát vyrobený z materiálu o objemové hustotě  $\rho$ . V drátu vyvoláme tah  $\sigma$  (sílu na jednotku plochy příčného průřezu). Ukažte, že rychlost příčné vlny  $v$  je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}.$$

**22C.** Příčná vlna na struně je popsána rovnicí

$$y = (2,00 \text{ mm}) \sin [(20 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x - (600 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

Napětí ve struně je  $15$  N. (a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočtěte délkovou hustotu struny v gramech na metr.

**23C.** Délková hustota struny je  $1,6\cdot 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ . Na struně se šíří příčná vlna, popsána vztahem

$$y = (0,021 \text{ m}) \sin [(2,0 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1})x + (30 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})t].$$

(a) Určete rychlost vlny. (b) Vypočtěte napětí ve struně.

**24C.** Určete největší dosažitelnou rychlost příčné vlny v ocelovém drátu. Při započtení přiměřeného bezpečnostního faktoru lze

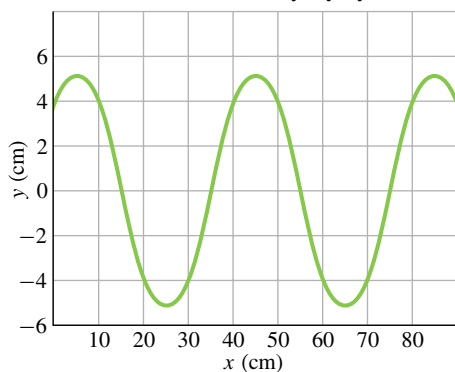


v ocelovém drátu vyvolat maximální tah (sílu na jednotku plochy příčného průřezu)  $7,0 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Objemová hustota oceli je  $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dokažte, že výsledek nezávisí na průměru drátu.

**25Ú.** Struna má délkovou hustotu  $5,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$  a je napínána silou  $10 \text{ N}$ . Šíří se v ní příčná sinusová vlna o amplitudě  $0,12 \text{ mm}$  a frekvenci  $100 \text{ Hz}$ . Vlna postupuje proti směru osy  $x$ . Napište její rovnici.

**26Ú.** Uvažte sinusovou příčnou vlnu v napnutém vlákně. Naleznete poměr největší příčné rychlosti částic vlákna k rychlosti vlny. Dále předpokládejte, že znáte frekvenci a amplitudu vlny. Závisejí uvedený poměr rychlostí na materiálu, z něhož je vlákno vyrobeno (například vlákno nylonové, ocelové apod.)?

**27Ú.** V napnuté struně se šíří ve směru osy  $x$  příčná postupná vlna. Na obr. 17.29 vidíme závislost výchylky částic struny v ča-



Obr. 17.29 Úloha 27

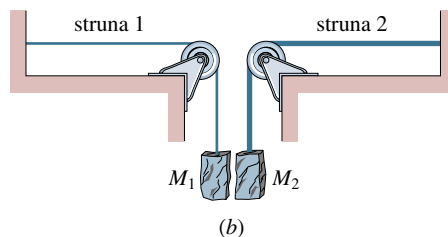
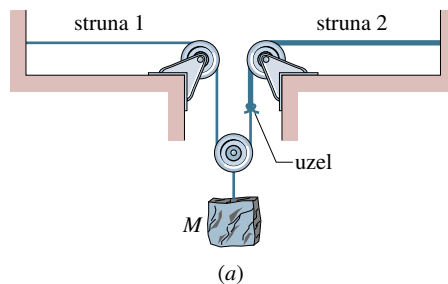
se  $t = 0$  na jejich poloze podél struny. Ve struně je napětí  $3,6 \text{ N}$ , její délková hustota činí  $25 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ . Naleznete (a) amplitudu, (b) vlnovou délku, (c) rychlost vlny a (d) periodu vlny. (e) Jaká je největší příčná rychlost částic struny? (f) Napište rovnici vlny.

**28Ú.** Na struně se šíří rychlostí  $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  příčná sinusová vlna. Časová závislost výchylky částice struny o souřadnici  $x = 10 \text{ cm}$  je popsána rovnicí

$$y = (5,0 \text{ cm}) \sin [1,0 \text{ rad} - (4,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})t].$$

Délková hustota struny činí  $4,0 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$ . Vypočítejte (a) frekvenci vlny a (b) vlnovou délku. (c) Naleznete obecnou rovnici vlny, udávající závislost příčné výchylky částic struny na čase a na jejich souřadnici. (d) Vypočítejte napětí ve struně.

**29Ú.** Struna 1 na obr. 17.30a má délkovou hustotu  $3,00 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ , struna 2 má délkovou hustotu  $5,00 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$ . Napětí ve strunách je vyvoláno závažím o hmotnosti  $M = 500 \text{ g}$ . (a) Vypočítejte rychlost vlny na každé z obou strun. (b) Závaží rozdělíme na dvě části (přitom platí  $M = M_1 + M_2$ ) a napínání strun uzpůsobíme podle obr. 17.30b. Jaké mají být hmotnosti  $M_1$  a  $M_2$ , aby na obou strunách byla stejná rychlost vlny?



Obr. 17.30 Úloha 29

**30Ú.** Drát délky  $10,0 \text{ m}$  a hmotnosti  $100 \text{ g}$  je napnut silou  $250 \text{ N}$ . Na každém konci drátu byl s časovým odstupem  $30,0 \text{ ms}$  vytvořen pulz. Kde se oba pulzy poprvé setkají?

**31Ú.** Uvnitř některých typů baseballových a golfových míčků se používá gumová páska, splňující v širokém rozsahu prodloužení Hookův zákon. Uvažme určitý úsek této pásky hmotnosti  $m$  a nezátžené délky  $l$ . Působením síly  $F$  se daný úsek prodlouží o délku  $\Delta l$ . (a) Určete rychlost vlny pro příčné vlnění v napnuté pásce; vyjádřete ji pomocí hmotnosti  $m$ , prodloužení  $\Delta l$  a tuhosti  $k$ . (b) S využitím výsledku části (a) dokažte, že doba postupu příčného pulzu od jednoho konce napnuté pásky k druhému konci je pro  $\Delta l \ll l$  úměrná  $1/\sqrt{\Delta l}$  a pro  $\Delta l \gg l$  je konstantní.

**32Ú\*.** Ze stropu visí stejnorodé lano délky  $l$  a hmotnosti  $m$ . V laně se šíří příčná vlna. (a) Ukažte, že rychlost vlny je závislá na vzdálenosti  $y$  od spodního konce lana a je určena vztahem  $v = \sqrt{gy}$ . (b) Ukažte, že doba postupu vlny od jednoho konce lana k druhému činí  $t = 2\sqrt{l/g}$ .

### ODST. 17.7 Energie a výkon vlny

**33C.** Jestliže je daná struna napnutá silou  $\tau_1$ , přenáší se na frekvenci  $f_1$  střední výkon  $P_1$ . (a) Ve struně zvýšíme čtyřikrát napětí, takže  $\tau_2 = 4\tau_1$ . Vyjádřete nový střední přenášený výkon  $P_2$  pomocí původní hodnoty  $P_1$ . (b) Ve struně s původním napětím postupuje vlna s dvakrát nižší frekvencí, takže  $f_2 = f_1/2$ . Vyjádřete střední výkon, přenášený na frekvenci  $f_2$ , pomocí původní hodnoty  $P_1$ .

**34C.** Struna délky  $2,7 \text{ m}$  a hmotnosti  $260 \text{ g}$  je napnutá silou  $36,0 \text{ N}$ . Ve struně postupuje příčná vlna s amplitudou  $7,70 \text{ mm}$ . Jaká musí být její frekvence, jestliže je přenášen střední výkon  $85,0 \text{ W}$ ?

**35Ú.** Na jednom konci dlouhé vodorovné struny je upevněno vahadlo. Struna má délkovou hustotu  $120 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  a je napínána

silou 90,0 N. Vahadlo vykonává 120krát za sekundu spojité pohyby nahoru a dolů o 1,00 cm. Pohybem vahadla se na struně vytváří příčná sinusová vlna. Nalezněte pro libovolnou částici struny (a) největší velikost příčné rychlosti  $u$  a (b) největší hodnotu příčné složky napětí. (c) Ukažte, že obě uvedené maximální hodnoty se objevují se stejnou fází. Jaká je při této fázi příčná výchylka  $y$  částice struny? (d) Jaký největší výkon je přenášen danou částicí struny? (e) Jaká je příčná výchylka  $y$  částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen největší výkon? (f) Jaký nejmenší výkon je přenášen danou částicí struny? (g) Jaká je příčná výchylka  $y$  částice struny v okamžiku, kdy je jí právě přenášen nejmenší výkon?

### ODST. 17.9 Interference vln

**36C.** Dvě stejné vlny, postupující souhlasným směrem, mají fázový rozdíl  $\pi/2$  rad. Vyjádřete amplitudu výsledné vlny pomocí společné amplitudy  $y_m$  obou výchozích vln.

**37C.** Na napnuté struně postupují souhlasným směrem dvě stejné vlny. Jaký je mezi nimi fázový rozdíl, jestliže amplituda výsledné vlny je 1,5krát větší než společná amplituda obou výchozích vln? Výsledek vyjádřete ve stupních, v radiánech a ve vlnových délkách.

**38Ú.** Na struně se šíří souhlasným směrem dvě stejné sinusové vlny a interferují. Výsledná vlna má rovnici

$$y'(x, t) = (3,0 \text{ mm}) \sin(20 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}x - 4,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}t + 0,820 \text{ rad}).$$

(a) Jaká je společná vlnová délka  $\lambda$  obou výchozích vln? (b) Jaký je mezi nimi fázový rozdíl? (c) Jaká je jejich společná amplituda  $y_m$ ?

### ODST. 17.10 Fázory

**39C.** Dvě sinusové vlny mají stejnou frekvenci a šíří se stejným směrem. Jejich amplitudy jsou 3,0 cm a 4,0 cm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a  $\pi/2$  rad. Určete amplitudu výsledné vlny.

**40C.** Amplitudy dvou sinusových vln, které se současně šíří stejným směrem v napnuté struně, jsou 3,0 mm a 5,0 mm. Jejich fázové konstanty jsou  $0^\circ$  a  $70^\circ$ . Obě vlny mají stejnou vlnovou délku. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

**41C.** Dvě sinusové vlny o stejné vlnové délce postupují současně souhlasným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 4,0 mm a 7,0 mm, fázové konstanty mají hodnotu 0 a  $0,8\pi$  rad. Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny?

**42Ú.** Dvě sinusové vlny o stejné periodě se současně šíří stejným směrem v napnuté struně. Jejich amplitudy jsou 5,0 mm a 7,0 mm. Interferencí vzniká výsledná vlna, jejíž amplituda činí 9,0 mm. Fázová konstanta vlny s amplitudou 5,0 mm je 0. Určete fázovou konstantu vlny s amplitudou 7,0 mm.

**43Ú.** Tři sinusové vlny o stejné frekvenci postupují v napnuté struně v kladném směru osy  $x$ . Jejich amplitudy jsou postupně

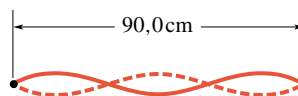
$y_1$ ,  $y_1/2$  a  $y_1/3$ . Fázové konstanty činí postupně 0,  $\pi/2$  a  $\pi$ . Jaká je (a) amplituda a (b) fázová konstanta výsledné vlny? (c) Nakreslete tvar výsledné vlny v čase  $t = 0$  a diskutujte jeho závislost na čase.

**44Ú.** Čtyři sinusové vlny postupují současně v téže napnuté struně v kladném směru osy  $x$ . Jejich frekvence jsou v poměru 1 : 2 : 3 : 4, poměr jejich amplitud je postupně 1 :  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{1}{3}$  :  $\frac{1}{4}$ . V čase  $t = 0$  a na souřadnici  $x = 0$  je první a třetí vlna fázově posunuta o  $180^\circ$  vzhledem k druhé a čtvrté vlně. Nakreslete tvar výsledné vlny v čase  $t = 0$  a diskutujte jeho změny při vzrůstajícím  $t$ .

### ODST. 17.12 Vlastní kmity

**45C.** Ve struně vyvoláme jisté napětí  $\tau_a$  a vybudíme v ní třetí harmonický kmit. Jemu odpovídá vlastní frekvence  $f_3$  a vlnová délka  $\lambda_3$ . Poté zvýšíme napětí ve struně na hodnotu  $\tau_b = 4\tau_a$  a opět v ní vyvoláme třetí harmonický kmit. (a) Vyjádřete novou hodnotu třetí vlastní frekvence pomocí původní hodnoty  $f_3$ . (b) Vyjádřete novou vlnovou délku odpovídající stojaté vlny pomocí původní vlnové délky  $\lambda_3$ .

**46C.** Nylonová kytarová struna délkové hustoty  $7,2 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  je napnutá silou 150 N a natažena přes dva pražce vzdálené 90 cm. Na struně vyvoláme stojatou vlnu znázorněnou na obr. 17.31. Vypočítejte (a) rychlost vlny, (b) vlnovou délku a (c) frekvenci postupných vln, jejichž superpozicí vzniká uvedená stojatá vlna.



Obr. 17.31 Cvičení 46

**47Ú.** V napnuté struně postupují rychlostí  $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  v opačných směrech dvě sinusové vlny se stejnou vlnovou délkou a stejnou amplitudou. Doba mezi dvěma po sobě následujícími okamžiky, ve kterých je struna zcela rovná, činí 0,50 s. Jaká je společná vlnová délka obou výchozích vln?

**48C.** Nejnižší vlastní frekvence jisté houslové struny byla rovna 440 Hz (komorní  $a^1$ ). Určete pro tuto strunu druhou a třetí harmonickou frekvenci.

**49C.** Struna délky 8,40 m a hmotnosti 0,120 kg je napnutá silou 96,0 N a na obou koncích upevněna. Poté jsou v ní vybudeny vlastní kmity. (a) Určete pro danou strunu rychlost vlny. (b) Jaká je nejdelší možná vlnová délka stojaté vlny? (c) Vypočítejte její frekvenci.

**50C.** Rovnice postupné příčné vlny v jisté struně má tvar

$$y = 0,15 \sin(0,79x - 13t),$$

kde veličiny  $x$  a  $y$  jsou vyjádřeny v metrech a čas  $t$  v sekundách. (a) Jaká je výchylka struny  $y$  na souřadnici  $x = 2,3 \text{ m}$  v čase  $t = 0,16 \text{ s}$ ? (b) Napište rovnici vlny, která vytvoří při interferenci s výše uvedenou vlnou stojaté vlnění. (c) Jaká je výchylka výsledné stojaté vlny na souřadnici  $x = 2,3 \text{ m}$  a v čase  $t = 0,16 \text{ s}$ ?

**51C.** Struna délky 120 cm je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Určete tři nejdelší možné vlnové délky postupných vln, které mohou v upevněné struně vytvořit vlnu stojatou. Nakreslete obrazce odpovídajících stojatých vln.

**52C.** Struna délky 125 cm a hmotnosti 2,00 g je napnuta silou 7,00 N a upevněna mezi dvěma svorkami. (a) Jakou rychlostí se po struně šíří vlny? (b) Jakou má struna nejnižší vlastní frekvenci?

**53C.** Jaké jsou tři nejnižší vlastní frekvence pro stojaté vlny na struně délky 10,0 m a hmotnosti 100 g, jestliže je struna napnuta silou 250 N a upevněna mezi dvěma svorkami?

**54C.** Struna délky 1,50 m a hmotnosti 8,70 g je napínána silou 120 N. Oba její konce jsou upevněny a struna je rozkmitána. (a) Vypočítejte rychlost vln na struně. (b) Určete vlnovou délku postupné vlny, která vytvoří stojatou vlnu, tvořenou jedinou půlvlnou. Totéž pro stojatou vlnu s dvěma půlvlnami. (c) Určete frekvence stojatých vln v části (b).

**55C.** Struna A je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami. Vzdálenost svorek je  $l$ . Struna B má stejnou délkovou hustotu jako struna A a je napnuta stejnou silou mezi dvěma svorkami, vzdálenými  $4l$ . Uvažte prvních osm vlastních frekvencí pro strunu B. Vystupuje v této sérii nějaká vlastní frekvence struny A?

**56Ú.** Struna je napnuta mezi dvěma pevnými svorkami, vzdálenými 75,0 cm. Vykazuje vlastní frekvence 420 Hz a 315 Hz; mezi nimi již žádná další vlastní frekvence neleží. (a) Jakou má tato struna nejnižší vlastní frekvenci? (b) Jakou rychlostí se po ní šíří vlny?

**57Ú.** Na velmi dlouhé napnuté struně postupují proti sobě dvě vlny. Vibrátor na jednom konci struny generuje vlnu, popsanou rovnicí

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x + (8,0 \text{ s}^{-1})t].$$

Vibrátor na opačném konci generuje vlnu

$$y = (6,0 \text{ cm}) \cos \frac{\pi}{2} [(2,0 \text{ m}^{-1})x - (8,0 \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Vypočítejte pro každou z uvedených dvou vln frekvenci, vlnovou délku a rychlost vlny. (b) Nalezněte pro vznikající stojatou vlnu polohu uzlů. (c) Nalezněte polohu kmiten.

**58Ú.** Kmitání struny je popsáno rovnicí

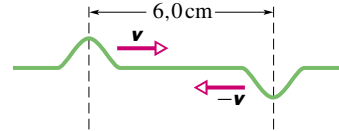
$$y' = (0,50 \text{ cm}) \sin \left[ \left( \frac{\pi}{3} \text{ cm}^{-1} \right) x \right] \cos [(40\pi \text{ s}^{-1})t].$$

(a) Uvedené kmitání vzniklo superpozicí dvou stejných vln (až na směr šíření). Jaká byla jejich amplituda a rychlost? (b) Jaká je vzdálenost mezi sousedními uzly stojaté vlny? (c) Jak velkou příčnou rychlost má částice struny o souřadnici  $x = 1,5 \text{ cm}$  v čase  $t = \frac{9}{8} \text{ s}$ ?

**59Ú.** Na struně postupují proti sobě dvě příčné sinusové vlny. Obě mají amplitudu 0,30 cm a vlnovou délku 6,0 cm. Rychlost příčných vln v dané struně činí  $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Nakreslete tvar

vzniklé stojaté vlny v čase  $t = 0$  (libovolný počátek odečítání času),  $t = 5,0 \text{ ms}$ ,  $t = 10 \text{ ms}$ ,  $t = 15 \text{ ms}$  a  $t = 20 \text{ ms}$ .

**60Ú.** Na obr. 17.32 jsou znázorněny dva pulzy, které postupují v napnuté struně proti sobě. Rychlost  $v$  příčných vln v dané struně činí  $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . V čase  $t = 0$  jsou pulzy vzdáleny 6,0 cm. (a) Načrtněte tvar struny v čase  $t = 5,0 \text{ ms}$ ,  $t = 10 \text{ ms}$ ,  $t = 15 \text{ ms}$ ,  $t = 20 \text{ ms}$  a  $t = 25 \text{ ms}$ . (b) Jak je rozložena původní energie pulzů v čase  $t = 15 \text{ ms}$ ?



Obr. 17.32 Úloha 60

**61Ú.** V napnuté struně postupují dvě příčné vlny, popsané rovnicemi

$$y_1 = (0,10 \text{ m}) \sin 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x + (20 \text{ s}^{-1})t],$$

$$y_2 = (0,20 \text{ m}) \sin 2\pi [(0,50 \text{ m}^{-1})x - (20 \text{ s}^{-1})t].$$

Nakreslete, jak se s časem pohybuje částice struny o souřadnici  $x = 3,0 \text{ m}$ .

**62Ú.** Na struně délky 3,0 m je vybuzena stojatá vlna, jejíž amplituda činí 1,0 cm. Je tvořena třemi půlvlnami. Po struně se šíří vlny rychlostí  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (a) Jaká je frekvence stojaté vlny? (b) Napište rovnice dvou výchozích vln, jejichž superpozicí vzniká uvažovaná stojatá vlnění.

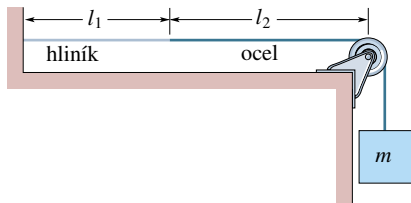
**63Ú.** Struna, po níž se šíří vlny rychlostí  $400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , je na obou koncích uchycena v pevných svorkách. Strunu rozkmitáme ladičkou o frekvenci 600 Hz. Vznikající stojatá vlna má amplitudu 2,0 mm a je tvořena čtyřmi půlvlnami. (a) Jaká je vzdálenost mezi svorkami? (b) Určete výchylku jednotlivých částic struny jako funkci polohy částic a času.

**64Ú.** V průběhu pokusu, demonstrujícího vlastnosti stojatých vln, byla struna délky 90 cm a hmotnosti 0,044 kg na jednom konci připevněna ke hrotu elektricky buzené ladičky. Hrot kmitá s frekvencí 60 Hz ve směru kolmém ke struně. Jakou silou je struna napínána (závaží je umístěno na opačném konci struny), jestliže stojatá vlna je tvořena čtyřmi půlvlnami?

**65Ú.** Uvažte stojatou vlnu, vznikající ze dvou postupných vln stejné amplitudy. Ukažte, že největší kinetická energie částic struny, které jsou rozloženy v rozsahu jedné půlvlny, je určena výrazem  $2\pi^2 \mu y_m^2 f v$ .

**66Ú.** Hliníkový drát délky  $l_1 = 60,0 \text{ cm}$ , příčného průřezu  $1,00 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$  a hustoty  $2,60 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  je na jednom konci vetknut do stěny. Na druhém konci jej spojíme s ocelovým drátem stejného příčného průřezu a hustoty  $7,80 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Soustava obou drátů je přes kladku zatížena závažím o hmotnosti  $m = 10,0 \text{ kg}$ . Vzdálenost  $l_2$  místa spojení obou drátů od kladky je 86,6 cm. Popsané uspořádání je znázorněno na obr. 17.33. Pomocí vnějšího zdroje s proměnnou frekvencí lze v soustavě

generovat příčné vlnění; přitom je na kladce vždy uzel. (a) Určete nejnižší frekvenci vnějšího zdroje, při které se v soustavě vybudí rezonanční kmitání a současně se v místě spojení obou drátů vytvoří uzel. (b) Kolik uzlů je při této frekvenci rozloženo podél celé kmitající soustavy?



Obr. 17.33 Úloha 66

### PRO POČÍTAČ

**67Ú.** V napnutém vlákně postupují dvě vlny:

$$y_1(x, t) = (2,50 \text{ mm}) \sin(kx - \omega t),$$

$$y_2(x, t) = (1,50 \text{ mm}) \sin(kx + \omega t),$$

kde  $k = 25,1 \text{ rad}\cdot\text{m}^{-1}$  je úhlový vlnčet a  $\omega = 440 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  je úhlová frekvence. (a) Nakreslete funkci  $y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$  jako funkci času  $t$  pro  $x = 0, \lambda/8, \lambda/4, 3\lambda/8$  a  $\lambda/2$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka. Grafické znázornění by mělo zahrnovat časový interval od  $t = 0$  až do doby o málo větší než jedna perioda. (b) Výsledek lze popsat jako superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny. Jaký je směr šíření této postupné vlny? Jak by bylo nutno změnit obě výchozí vlny, aby jejich součet vyjadřoval opět superpozici jedné stojaté vlny a jedné postupné vlny, které by nyní měly stejné amplitudy jako dříve, avšak směr šíření postupné vlny by byl opačný? (c) Na základě grafického znázornění funkce  $y'$  určete polohu míst, ve kterých je amplituda výsledného kmitání největší a nejmenší. (d) Jak souvisí tato maximální a minimální amplituda s původními amplitudami 2,50 mm a 1,50 mm dvou výchozích postupných vln?