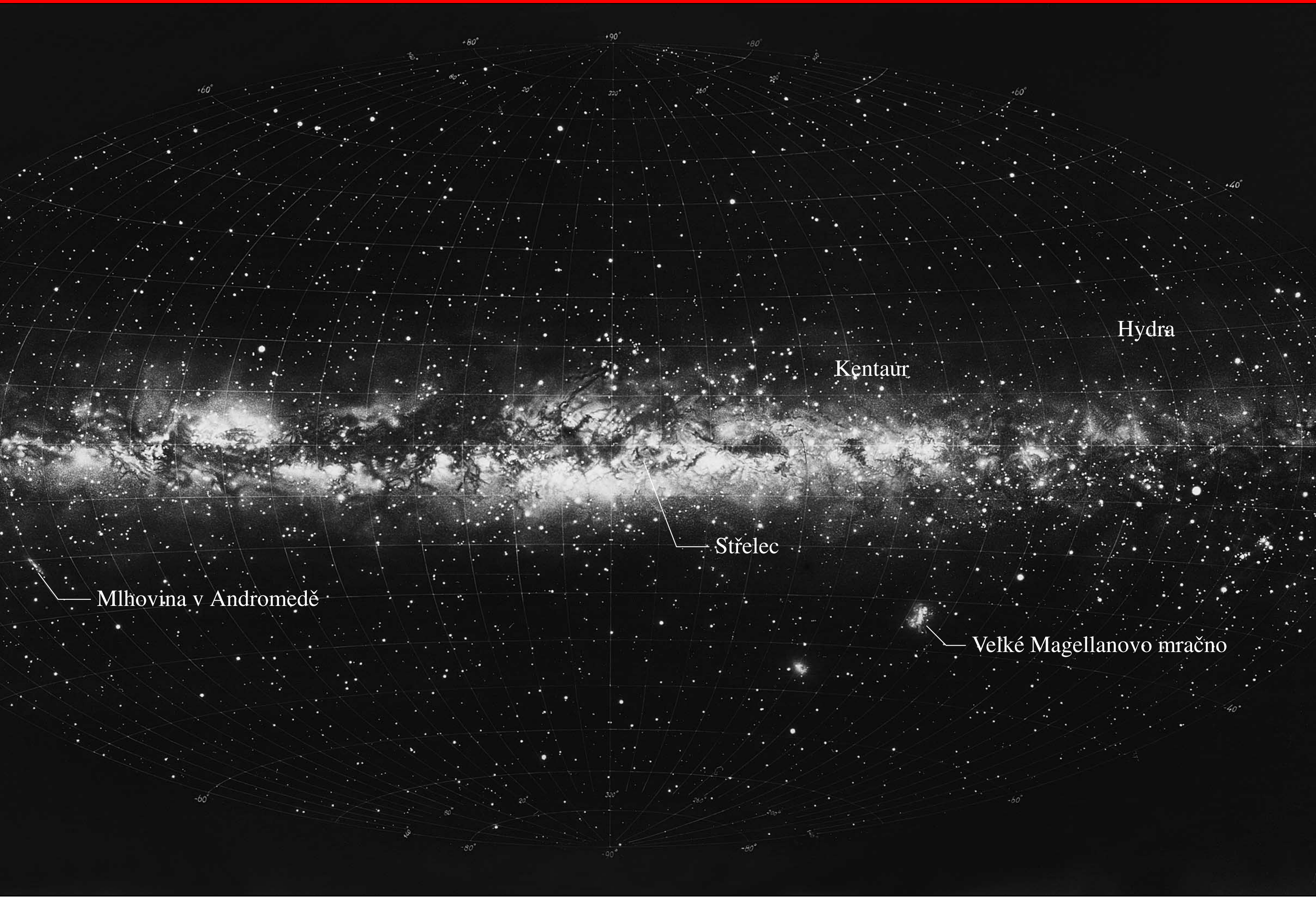
14
Gravitace



Naše Galaxie, kterou vidíme na obloze jako Mléčnou dráhu, má tvar disku. Je složena z miliard hvězd, jejich planet a z prachu. Síla, která váže dohromady všechny složky naší Galaxie nebo kterékoliv jiné galaxie, je tatáž jako síla, která drží Měsíc na jeho oběžné dráze a vás na Zemi — gravitace. Ta je také odpovědná za jeden z nejzvláštnějších objektů ve vesmíru, černou díru — hvězdu, která se úplně zhroutila (zkolabovala) dovnitř sebe samé. Gravitační síla poblíž černé díry je tak silná, že ji nepřekoná ani světlo. Ale je-li tomu tak, jak můžeme černou díru zjistit?

14.1 SVĚT A GRAVITAČNÍ SÍLA

Úvodní obrázek ukazuje, jak vidíme Mléčnou dráhu; my se nacházíme poblíž okraje galaktického disku, asi 26 000 světelných let ($2{,}5\cdot10^{20}$ m) od jejího středu, který na obrázku leží v souhvězdí Střelce. Naše Galaxie je členem skupiny galaxií, která zahrnuje galaxii v souhvězdí Andromedy (obr. 14.1) ve vzdálenosti $2{,}3\cdot10^{6}$ světelných let a jiné trpasličí galaxie, jako Velké Magellanovo mračno na úvodním obrázku.

Obr. 14.1 Galaxie v Andromedě. Je od nás vzdálena $2{,}3\cdot10^{6}$ světelných let, je slabě viditelná i prostým okem a je velmi podobná naší rodné Galaxii — Mléčné dráze.

Místní skupina galaxií je částí místní kupy galaxií. Měření provedená v osmdesátých létech ukazují, že místní kupa galaxií a kupy galaxií v souhvězdích Hydry a Kentaura se všechny řítí na výjimečně hmotný objekt zvaný Velký atraktor nebo též Velký poutač. Ten je vzdálen od nás přibližně 150 milionů světelných let, na opačnou stranu, než kde vidíme Mléčnou dráhu, mezi souhvězdími Hydry a Kentaura.

Síla, která váže dohromady tyto tak dalece rozsáhlé objekty, od hvězd přes galaxie ke skupinám, kupám a nadkupám galaxií, a která je patrně všechny přitahuje k Velkému poutači, je **gravitační síla**. Nejenom že vás přidržuje na Zemi, ale vládne i hlubinám mezigalaktického prostoru.

14.2 NEWTONŮV GRAVITAČNÍ ZÁKON

Fyziky vždycky zajímá, zda by se při podrobnějším zkoumání nenašel mezi zdánlivě nesouvisejícími jevy nějaký vzájemný vztah. Tato snaha po sjednocování fyzikálních teorií panuje již po staletí. V roce 1665 učinil mladý, třiadvacetiletý Isaac Newton základní přínos pro fyziku, když ukázal, že síla držící Měsíc na jeho oběžné dráze je táž jako síla, která nutí padat jablko na Zem. My to nyní pokládáme za takovou samozřejmost, že si těžko představujeme starověké pojetí, podle kterého byly pohyby pozemských a nebeských těles zcela různých druhů a řídily se různými zákony.

Newton dospěl k názoru, že nejenom Země přitahuje jablko i Měsíc, ale že každé těleso ve vesmíru přitahuje každé jiné těleso; tuto tendenci všech těles přitahovat se navzájem nazýváme **gravitace**. Na tento závěr nejsme příliš zvyklí, protože na povrchu zemském je ona důvěrně známá přitažlivost zemská tak veliká, že zdaleka překrývá vzájemnou přitažlivou sílu ostatních těles mezi sebou. Tak například Země přitahuje jablko jistou silou (totiž jeho váhou). Také vy přitahujete jablko (a ono přitahuje vás), ale tato přitažlivá síla je menší než váha nejjemnějšího prášku.

Zákon o síle, který nyní nazýváme **Newtonův gravitační zákon**, formuloval Newton kvantitativně: každá částice přitahuje každou jinou částici **gravitační silou**, jejíž velikost je

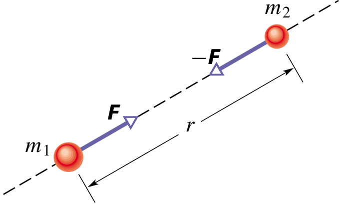
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(Newtonův gravitační zákon).} \qquad (14.1)$$

Zde m_1, m_2 značí hmotnosti obou částic, r vzdálenost mezi nimi a G je* **gravitační konstanta**, jejíž hodnota činí

$$G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}} = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}. \qquad (14.2)$$

Obr. 14.2 ilustruje ověřenou skutečnost, že se částice vždy přitahují „k sobě“ a nikdy se neodpuzují „od sebe“; částice m_2 přitahuje částici m_1 gravitační silou $\boldsymbol{F}$, která směřuje k částici m_2.

Obr. 14.2 Dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2 ve vzdálenosti r se navzájem přitahují podle Newtonova gravitačního zákona, rov. (14.1). Přitažlivé síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ jsou stejné co do velikosti a mají opačné směry.



* Symbol G je předepsán normou a užívá se v celém světě. U nás se někdy užívá symbol $\varkappa$.

Podobně částice m_1 přitahuje částici m_2 gravitační silou, která je orientována k částici m_1. Síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ jsou ve vztahu akce a reakce; mají stejné velikosti a opačné směry. Závisejí na vzdálenosti obou částic, ale nikoli na jejich umístění; částice by stejně dobře mohly být v nějaké dutině nebo přemístěny do hlubin vesmíru. Síly $\boldsymbol{F}$ a $-\boldsymbol{F}$ nejsou ovlivněny přítomností jiných těles, dokonce ani kdyby tato tělesa ležela mezi uvažovanými přitahujícími se částicemi.

Velikost gravitační síly, tj. to, jak silně se dvě částice daných hmotností na danou vzdálenost přitahují, závisí na velikosti gravitační konstanty G. Kdyby nějakým kouzlem vzrostlo G desetkrát, leželi bychom na podlaze rozdrceni zemskou přitažlivostí. A kdyby se naopak G desetkrát zmenšilo, zeslábla by zemská přitažlivost natolik, že bychom mohli skákat přes domy. (Ale spíš bychom zahynuli, protože by si Země neudržela svou atmosféru.)

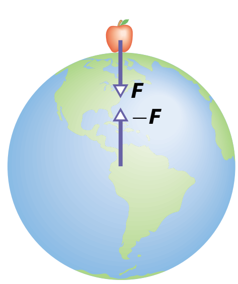
Ačkoliv Newtonův zákon platí přesně jen pro částice (tedy hmotné body), můžeme ho použít i na reálné předměty, pokud jsou jejich vlastní rozměry zanedbatelné vůči jejich vzdálenosti. Měsíc a Země jsou od sebe dostatečně daleko na to, abychom je mohli v dobrém přiblížení považovat za hmotné body. Ale co jablko na Zemi? Z hlediska jablka se veliká a široká Země, rozprostírající se od obzoru k obzoru, jistě nejeví jako hmotný bod.

Newton vyřešil problém jablko + Země tím, že formuloval tzv. „**slupkový teorém**“:

> Homogenní hmotná kulová slupka přitahuje vně ležící částici stejně, jako kdyby veškerá hmota slupky byla soustředěna v jejím středu.

Zemi můžeme považovat za složenou z takových kulových slupek asi jako cibuli — jedna slupka uvnitř druhé. (Říkáme, že Země je **po vrstvách homogenní** neboli má hmotu rozloženu **sféricky symetricky**.) Každá z těchto slupek přitahuje vně ležící předmět tak, jako by její hmota byla soustředěna do jejího středu — tedy do středu Země. Z hlediska jablka se tedy (překvapivě) Země chová jako hmotný bod — jako částice umístěná ve středu Země, v níž je soustředěna veškerá hmota Země.

Předpokládejme tak jako na obr. 14.3, že Země přitahuje dolů jablko silou 0,8 N. Potom jablko musí přitahovat Zemi nahoru silou 0,8 N; tuto sílu si umístíme do středu Země. Ačkoliv obě síly mají stejnou velikost, udělí při uvolnění jablka různá zrychlení jablku a Zemi. Jablko získá zrychlení kolem $9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, dobře známé zrychlení těles padajících nedaleko zemského povrchu. Země by však (v těžišťovém systému soustavy jablko + Země) získala zrychlení pouze asi $1{\cdot}10^{-25}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



Obr. 14.3 Jablko přitahuje nahoru Zemi stejně silně jako Země dolů jablko.

KONTROLA 1: Částici postupně umístíme vně čtyř objektů, z nichž každý má hmotnost m; jsou to
(1) velká homogenní plná koule;
(2) velká homogenní kulová slupka;
(3) malá homogenní plná koule;
(4) malá homogenní kulová slupka.
Ve všech případech má částice stejnou vzdálenost d od středu objektu. Uspořádejte objekty podle velikosti gravitační síly, jakou působí na částici, od největší síly k nejmenší.

14.3 GRAVITACE A PRINCIP SUPERPOZICE

Pro skupinu částic nalezneme výslednou gravitační sílu (výslednici sil) působící na kteroukoliv z nich pomocí **principu superpozice**, což je obecný princip, předpokládající, že výsledný jev je součtem všech dílčích jevů. V tomto případě princip říká, že pro výpočet gravitační síly působící na konkrétní částici můžeme nejprve postupně vypočítat dílčí síly od každé z ostatních částic. Poté vypočteme výslednou sílu jako vektorový součet všech těchto sil — jako obvykle.

Pro n interagujících částic můžeme zapsat princip superpozice takto:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{14} + \boldsymbol{F}_{15} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1n}. \qquad (14.3)$$

Zde je $\boldsymbol{F}_1$ výsledná síla působící na částici 1 a např. $\boldsymbol{F}_{13}$ je síla, kterou působí částice 3 na částici 1. Tento vektorový součet můžeme zapsat kompaktněji:

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i}. \qquad (14.4)$$

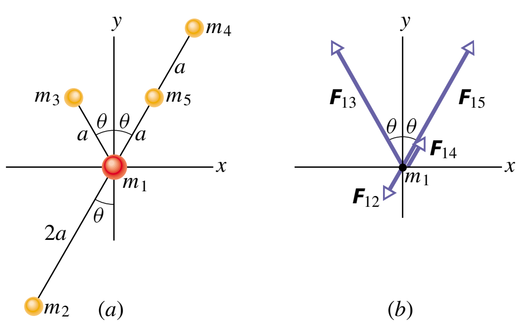
Jak je tomu se silou, kterou na částici působí reálné těleso, zaujímající jistý prostor? Najdeme ji tak, že těleso rozložíme na kousíčky tak malé, abychom je mohli pokládat za hmotné body, a potom použijeme rov. (14.4) k nalezení vektorového součtu všech sil působících na částici ode všech kousíčků tělesa. V limitním případě můžeme těleso rozdělit na infinitezimální kousíčky o hmotnostech dm, z nichž každý působí na uvažovanou částici jen infinitezimální silou d$\boldsymbol{F}$. V limitě přejde suma z rov. (14.4) na integrál:

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}, \tag{14.5}$$

kde integrujeme přes celý objem zaujímaný tělesem. Jde-li však o homogenní kouli nebo kulovou slupku, můžeme namísto integrace v rov. (14.5) postupovat, tak jako by celá hmota tělesa byla soustředěna v jeho středu, a použít rov. (14.1).

PŘÍKLAD 14.1

Na obr. 14.4a je uspořádáno pět částic s hmotnostmi $m_1 = 8{,}0\,\mathrm{kg}$, $m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, délka $a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, úhel $\theta = 30°$. Jaká je výsledná gravitační síla $\boldsymbol{F}_1$, působící na částici m_1 od ostatních čtyř částic?



Obr. 14.4 Příklad 14.1. Uspořádání pěti částic. Síly, kterými působí ostatní čtyři částice na částici m_1.

ŘEŠENÍ: Z rov. (14.4) víme, že výslednice $\boldsymbol{F}_1$ je vektorovým součtem sil $\boldsymbol{F}_{12}$, $\boldsymbol{F}_{13}$, $\boldsymbol{F}_{14}$, $\boldsymbol{F}_{15}$, což jsou gravitační síly působící na částici m_1 od ostatních částic. Protože hmotnosti m_2 a m_4 jsou si rovny a protože obě částice jsou ve stejných vzdálenostech $r = 2a$ od první, plyne z rov. (14.1)

$$F_{12} = F_{14} = \frac{Gm_1m_2}{(2a)^2}. \tag{14.6}$$

Podobně hmotnosti m_3 a m_5 jsou si rovny a obě částice jsou ve stejných vzdálenostech $r = a$ od m_1, takže platí

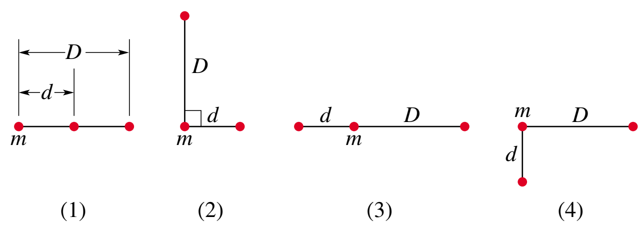
$$F_{13} = F_{15} = \frac{Gm_1m_3}{a^2}. \tag{14.7}$$

Na obr. 14.4b je silový diagram pro m_1. Odtud a z rov. (14.6) je zřejmé, že $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ mají stejné velikosti, ale opačné směry; tyto síly se proto vyruší. Z obr. 14.4b a rov. (14.7) vidíme, že x-ové složky sil $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se také zruší, zatímco jejich y-ové složky mají stejnou velikost, ale směr tentokrát stejný — ve směru osy y. Výsledná síla $\boldsymbol{F}_1$ tedy směřuje podél osy y a její velikost je dvojnásobkem velikosti y-ové složky $\boldsymbol{F}_{13}$:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2F_{13}\cos\theta = 2\,\frac{Gm_1m_3}{a^2}\cos\theta = \\ &= 2\,\frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}})(8{,}0\,\mathrm{kg})(2{,}0\,\mathrm{kg})}{(0{,}020\,\mathrm{m})^2}\cos 30° = \\ &= 4{,}6\cdot10^{-6}\,\mathrm{N}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

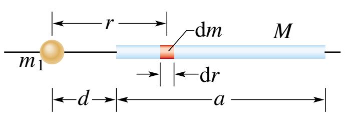
Všimněme si, že přítomnost částice m_5 mezi částicemi m_1 a m_4 neměla vliv na jejich gravitační působení: síla mezi m_1 a m_4 zůstává táž.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje čtyři konfigurace tří částic se stejnými hmotnostmi. (a) Uspořádejte konfigurace sestupně podle velikostí výsledné gravitační síly působící na částici m. (b) Je v konfiguraci (2) směr výsledné síly blíže k úsečce délky d, nebo k úsečce délky D?



PŘÍKLAD 14.2

Na obr. 14.5 je částice o hmotnosti $m_1 = 0{,}67\,\mathrm{kg}$ vzdálena $d = 23\,\mathrm{cm}$ od konce homogenní tyče délky $a = 3\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $M = 5\,\mathrm{kg}$. Jak velkou gravitační silou $\boldsymbol{F}_1$ přitahuje tyč částici?



Obr. 14.5 Příklad 14.2. Částice o hmotnosti m_1 leží na ose tyčky délky a ve vzdálenosti d od jejího konce. Infinitezimální kousek tyčky dm leží ve vzdálenosti r od m_1.

ŘEŠENÍ: Uvažujme infinitezimálně malý kousek tyče o hmotnosti dm a délce dr, vzdálený r od m_1. Z rov. (14.1) vyjádříme velikost gravitační síly d$\boldsymbol{F}_1$, kterou dm působí na m_1:

$$\mathrm{d}F_1 = \frac{Gm_1}{r^2}\,\mathrm{d}m. \tag{14.8}$$

Na obr. 14.5 směřuje tato síla doprava. Protože m_1 leží na ose tyče, směřuje doprava také každá z částečných sil d$\boldsymbol{F}_1$, kterými působí kousek dm tyče na m_1. Velikost úhrnné síly F_1 působící na m_1 můžeme tedy najít prostým sečtením velikostí dílčích sil. Provedeme to integrací rov. (14.8) podél tyče.

(Kdyby bod m_1 neležel na ose tyče, směřovaly by dílčí síly do různých směrů a bylo by nutno získat výslednou sílu jako vektorový součet dílčích sil.)

Pravá strana rov. (14.8) obsahuje dvě proměnné, r a m, resp. dm. Před integrací musíme z integrálu odstranit výraz dm. Protože je tyčka homogenní (má konstantní hustotu), můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{M}{a}. \tag{14.9}$$

To nám umožňuje nahradit $\mathrm{d}m = (M/a)\,\mathrm{d}r$ v rov. (14.8). Potom integrujeme rov. (14.5) a dostaneme

$$\begin{aligned} F_1 &= \int dF_1 = \int_d^{a+d} \frac{Gm_1}{r^2}\frac{M}{a}\,\mathrm{d}r = \frac{Gm_1M}{a}\int_d^{a+d}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= -\frac{Gm_1M}{a}\left[\frac{1}{r}\right]_d^{a+d} = -\frac{Gm_1M}{a}\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{d}\right) = \\ &= \frac{Gm_1M}{d(a+d)} = \\ &= \frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}})(0{,}67\,\mathrm{kg})(5{,}0\,\mathrm{kg})}{(0{,}23\,\mathrm{m})(3{,}0\,\mathrm{m}+0{,}23\,\mathrm{m})} = \\ &= 3{,}0\cdot10^{-10}\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$
(Odpověď)

RADY A NÁMĚTY

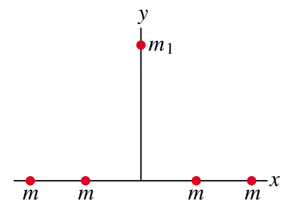
Bod 14.1: *Znázornění vektorů gravitační síly*

Máme dáno rozložení částic (např. na obr. 14.4a) a chceme najít celkovou gravitační sílu působící na jednu z nich. Pak doporučujeme nakreslit silový diagram, který obsahuje jen zkoumanou částici (nikoli ostatní) a jen ty síly, které na ni působí, jako je to v obr. 14.4b. Pokud byste se rozhodli skládat vektory sil v původním diagramu, umísťujte je vždy *do té částice, na kterou příslušná síla působí* (a to raději „patičkou" vektoru než jeho „šipkou"). Pokud nakreslíte vektory sil jinak, vnesete si do diagramu zmatek. A ten bude zaručený, pokud budete umísťovat vektory sil do těch částic, které na zkoumanou částici působí.

Bod 14.2: *Zjednodušení součtu sil využitím symetrie*

V př. 14.1 jsme použili symetrii systému k úspoře času a zjednodušení výpočtů vedoucích k řešení. Uvědomíme-li si, že m_2 a m_4 jsou umístěny symetricky vzhledem k m_1, a tedy $\boldsymbol{F}_{12}$ a $\boldsymbol{F}_{14}$ se vyruší, nemusíme tyto síly počítat. A pokud si uvědomíme, že x-ové složky sil $\boldsymbol{F}_{13}$ a $\boldsymbol{F}_{15}$ se vzájemně vyruší a jejich y-ové složky jsou shodné a sečtou se, ušetříme si další námahu.

KONTROLA 3: Určete, jaký směr má výslednice gravitační síly působící na částici o hmotnosti m_1 od jiných částic o hmotnostech m, které jsou umístěny na ose x symetricky vůči ose y podle obrázku.



14.4 GRAVITACE V BLÍZKOSTI POVRCHU ZEMĚ

Zanedbejme prozatím rotaci Země a předpokládejme, že Země je stojící homogenní koule o hmotnosti M a poloměru $R = 6\,371$ km, odpovídajícímu objemu skutečné Země. Velikost gravitační síly působící na částici o hmotnosti m stojící ve vzdálenosti $r > R$ od středu Země je podle rov. (14.1)

$$F = G\frac{Mm}{r^2}. \tag{14.10}$$

Pokud na částici nepůsobí jiné síly, bude působením gravitační síly $\boldsymbol{F}$ padat ke středu Země. Síle $\boldsymbol{F}$ odpovídá zrychlení, které nazýváme **gravitační zrychlení** a_g. Newtonův druhý pohybový zákon nám říká, že pro F a a_g platí

$$F = ma_\mathrm{g}. \tag{14.11}$$

Dosadíme-li nyní F z rov. (14.10) do rov. (14.11) a vyjádříme-li a_g, dostaneme

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM}{r^2}. \tag{14.12}$$

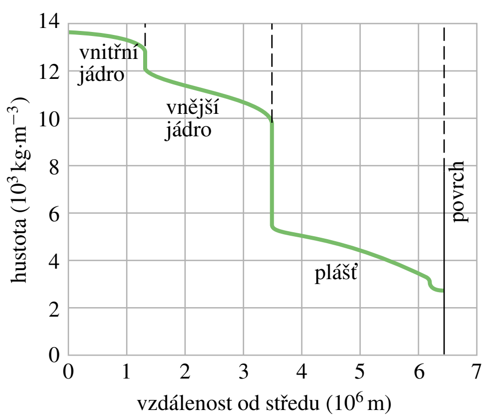
Tab. 14.1 ukazuje hodnoty a_g vypočítané pro různé výšky nad zemským povrchem.

Tabulka 14.1 **Změna gravitačního zrychlení a_g s výškou h**

PŘÍKLAD VÝŠKY	$\dfrac{h}{\mathrm{km}}$	$\dfrac{a_\mathrm{g}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$
mořská hladina	0	9,83
Mount Everest	8,8	9,80
nejvyšší výška dosažená balonem s lidskou posádkou	36,6	9,71
oběžná dráha raketoplánu	400	8,70
komunikační satelit	35 700	0,225

Gravitační zrychlení a_g vyjádřené z rov. (14.12) není úplně stejné jako **tíhové zrychlení** g, které opravdu naměříme na volně padajících tělesech (a které je přibližně $9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ u povrchu Země). Tato dvě zrychlení se liší ze tří důvodů. Země totiž (1) není homogenní, (2) není dokonalá koule, (3) rotuje, tj. otáčí se kolem vlastní osy. Protože je g různé od a_g, je také tíhová síla mg různá od gravitační síly podle rov. (14.10), a to ze stejných důvodů. Rozeberme si nyní tyto důvody.

1. *Země není homogenní.* Hustota Země se mění radiálně dosti výrazně, jak ukazuje obr. 14.6. To by podle slupkového teorému gravitační sílu vně Země neovlivnilo. Jenomže hustota zemské kůry (či vnější části) se mění v jednotlivých oblastech pod povrchem Země. Proto se také g mění od oblasti k oblasti.



Obr. 14.6 Hustota Země jako funkce vzdálenosti od středu. Hranice pevného vnitřního jádra, převážně tekutého vnějšího jádra a pevného pláště jsou v grafu vyneseny, ale zemská kůra je příliš tenká, než aby mohla být v tomto grafu zachycena v odpovídajícím měřítku.

2. *Země není koule.* Země je přibližně elipsoid, zploštělý na pólech a vypuklý na rovníku. Jeho rovníkový poloměr je 6 378 km, polární 6 357 km. Proto jsou body na pólech blíž hustému jádru Země než body na rovníku. To je jeden z důvodů, proč tíhové zrychlení g roste na úrovni mořské hladiny ve směru od rovníku k pólům.

3. *Země rotuje kolem své osy.* Osa rotace prochází severním a jižním pólem Země. Každý předmět umístěný na povrchu Země kdekoli kromě těchto pólů obíhá po kružnici kolem osy rotace, a proto musí mít dostředivé zrychlení, které míří do středu této kružnice. Toto dostředivé zrychlení lze popsat dostředivou silou, která také míří do středu této kružnice.

Ukážeme si, jak rotace Země způsobuje rozdíl mezi tíhovým zrychlením g a gravitačním zrychlením a_g, a tím i mezi tíhovou a gravitační silou podle rov. (14.10). Rozebereme za tím účelem jednoduchou situaci, v níž bedna o hmotnosti m leží na číslicové váze na rovníku. Obr. 14.7a názorně ukazuje tuto situaci z pohledu shora nad severním pólem.

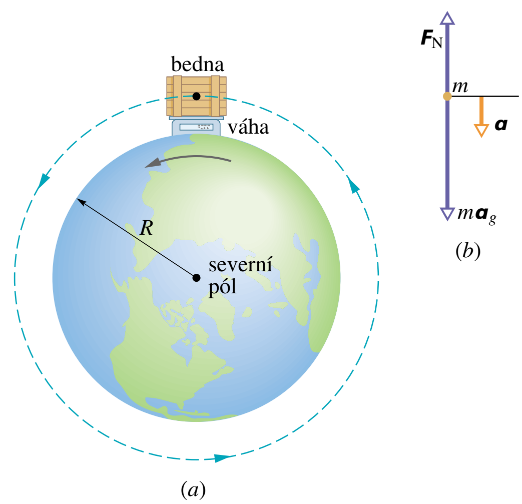
Obr. 14.7b je silový diagram pro bednu. Dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}$ bedny míří do středu kružnice, po níž se bedna pohybuje, a tento střed je totožný se středem Země (předpokládáme-li kouli). Země působí na bednu gravitační silou o velikosti ma_g podle rov. (14.11). Číslicová váha působí na bednu normálovou silou $\boldsymbol{F}_N$. Užijeme druhý Newtonův zákon na bednu, kladný směr osy orientujeme ke středu Země a dostáváme

$$\sum F = ma_g - F_N = ma. \qquad (14.13)$$

Velikost F_N síly čteme na stupnici váhy; bedna váží mg. Dosadíme-li mg za F_N do rov. (14.13), dostaneme

$$ma_g - mg = ma, \qquad (14.14)$$

což ukazuje, že velikost tíhové síly bedny (její váha) mg se liší od velikosti gravitační síly ma_g působící na bednu. Vydělíme-li rov. (14.14) m, vidíme, že také g se liší od a_g, a to o dostředivé zrychlení a.



Obr. 14.7 (a) Bedna ležící na váze na zemském rovníku. Pohled je podél osy zemské rotace, shora od severního pólu. (b) Silový diagram pro bednu. Bedna koná rovnoměrný kruhový pohyb, a má proto zrychlení orientované do středu Země. Gravitační síla na ni působící má velikost ma_g. Normálová síla $\boldsymbol{F}_N$ působící na váhu má velikost mg, kde g je tíhové zrychlení.

Dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}$ má velikost $\omega^2 R$, kde ω je úhlová rychlost rotující Země a R je poloměr kruhové dráhy, kterou opisuje bedna. (R je přibližně poloměr Země.) Za ω můžeme dosadit $2\pi/T$, kde $T = 24$ h je přibližně doba jednoho oběhu Země. Po dosazení do rov. (14.14) a vydělení m dostaneme

$$a_g - g = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \\ = 0{,}034\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad (14.15)$$

Odtud plyne, že tíhové zrychlení $g \doteq 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ měřené na rovníku skutečné, rotující planety je o něco menší než gravitační zrychlení a_g způsobené pouze gravitační silou.

Umístíme-li bednu kamkoli mezi rovník a pól, budou mít $\boldsymbol{a}_g$ a $\boldsymbol{g}$ různé směry, neboť dostředivá síla na rozdíl od síly gravitační nemíří do středu Země, nýbrž kolmo k ose otáčení. Rov. (14.15) by proto bylo nutno upravit. Přesto ale můžeme odhadnout, že se rozdíl mezi $\boldsymbol{a}_g$ a $\boldsymbol{g}$ směrem k pólům zmenšuje, protože bedna opisuje menší a menší kružnice při stejné úhlové rychlosti ω. Na pólu je pak tíha bedny rovna gravitační síle, neboť se bedna pouze otáčí, ale nepohybuje se po kružnici.

Rozdíl tíhových zrychlení na rovníku a na pólu není velký (na rovníku je $g \doteq 9{,}78\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, na pólu $g \doteq 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$), a proto ho obvykle zanedbáváme. Také tíhovou sílu mg můžeme aproximovat gravitační silou podle rov. (14.10).

PŘÍKLAD 14.3

Uvažujme pulzar, extrémně hustou zkolabovanou hvězdu, s hmotností Slunce $M = 1{,}98\cdot10^{30}\,\mathrm{kg}$, ale s poloměrem pouze $R = 12\,\mathrm{km}$ a s rotační periodou $T = 0{,}041\,\mathrm{s}$. Jak se procentuálně liší na jeho rovníku tíhové zrychlení g od gravitačního a_g?

ŘEŠENÍ: Hodnotu a_g na povrchu pulzaru najdeme podle rov. (14.12), kde R nahradí r a M bude hmotnost pulzaru. Dosazením daných hodnot dostaneme

$$a_g = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(1{,}98\cdot10^{30}\,\mathrm{kg})}{(12\,000\,\mathrm{m})^2} = \\ = 9{,}2\cdot10^{11}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Dosazením daných hodnot do rov. (14.15) a vydělením a_g dostaneme

$$\frac{a_g - g}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{a_g} = \left(\frac{2\pi}{0{,}041\,\mathrm{s}}\right)^2 \frac{(12\,000\,\mathrm{m})}{(9{,}2\cdot10^{11}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})} = \\ = 3{,}1\cdot10^{-4} = 0{,}031\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Přestože pulzar rotuje velmi rychle, ovlivní jeho rotace tíhové zrychlení jen málo, protože poloměr pulzaru je velmi malý.

PŘÍKLAD 14.4

(a) Astronaut vysoký $h = 1{,}70\,\mathrm{m}$ se vznáší nohama dolů v raketoplánu na oběžné dráze ve vzdálenosti $r = 6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m}$ od středu Země. Jaký je rozdíl v gravitačním zrychlení jeho chodidel a hlavy?

ŘEŠENÍ: Rov. (14.12) nám říká, že gravitační zrychlení ve vzdálenosti r od středu Země je

$$a_g = \frac{GM_Z}{r^2}, \qquad (14.16)$$

kde M_Z je hmotnost Země. Nemůžeme dost dobře použít dvakrát rov. (14.16), jednou s $r = 6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m}$ pro chodidla a potom s $r = 6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m} + 1{,}70\,\mathrm{m}$ pro hlavu. Pokud bychom to udělali, kalkulačka by nám dala stejný výsledek pro obě hodnoty a rozdíl by byl nulový; h je totiž příliš malé v porovnání s r. Místo toho zderivujeme rov. (14.16) podle r a získáme

$$\mathrm{d}a_g = -2\frac{GM_Z}{r^3}\,\mathrm{d}r, \qquad (14.17)$$

kde $\mathrm{d}a_g$ je infinitezimální změna gravitačního zrychlení způsobená infinitezimální změnou $\mathrm{d}r$. Pro astronauta je $\mathrm{d}r = h$ a $r = 6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m}$. Nahradíme-li veličiny v rov. (14.17), dostaneme

$$\mathrm{d}a_g = -2\frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(5{,}98\cdot10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m})^3}\cdot \\ \cdot(1{,}70\,\mathrm{m}) = -4{,}37\cdot10^{-6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tento výsledek znamená, že gravitační zrychlení, a tím i síla působící směrem k Zemi na astronautova chodidla, je větší než na jeho hlavu. Tento rozdíl mezi silami, kterými působí nehomogenní pole na různé části téhož (dostatečně rozlehlého) tělesa, se nazývá **slapová síla**; způsobuje, že se astronautovo tělo protahuje. V tomto případě je ovšem tak malá, že je prakticky neměřitelná.

(b) Pokud by astronaut ve stejné poloze obíhal na stejné dráze o poloměru $r = 6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m}$, ale tentokrát kolem černé díry o hmotnosti $M_č = 1{,}99\cdot10^{31}\,\mathrm{kg}$ (což je desetinásobek hmotnosti Slunce), jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení jeho chodidel a hlavy? Černá díra má povrch (zvaný **horizont** černé díry) o poloměru $R_č = 2{,}95\cdot10^4\,\mathrm{m}$. Nic, ani světlo, neunikne z této hranice, natož z vnitřního prostoru černé díry. Povšimněme si, že astronaut je (moudře) dost daleko od této hranice ($r = 229R_č$).

ŘEŠENÍ: Opět použijeme rov. (14.17), kde dosadíme $M_č = 1{,}99\cdot10^{31}\,\mathrm{kg}$ za M_Z. Dostaneme

$$\mathrm{d}a_g = -2\frac{(6{,}67\cdot10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(1{,}99\cdot10^{31}\,\mathrm{kg})}{(6{,}77\cdot10^6\,\mathrm{m})^3}\cdot \\ \cdot(1{,}70\,\mathrm{m}) = -14{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tentokrát je gravitační zrychlení astronautových chodidel směrem k černé díře značně větší než to, které působí na jeho hlavu. Slapová síla, natahující jeho tělo, by byla sice snesitelná, ale dosti bolestivá. Pokud by se přiblížil k černé díře ještě více, natahování by drasticky stouplo.

14.5 GRAVITAČNÍ POLE UVNITŘ ZEMĚ

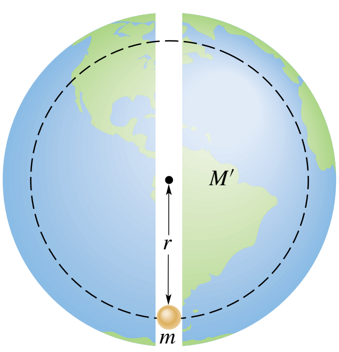
Newtonův slupkový teorém můžeme použít také na situaci, v níž je částice umístěna *uvnitř* homogenní kulové slupky, a to v tomto tvaru:

Homogenní kulová hmotná slupka *nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou* na částici umístěnou uvnitř této slupky.

Kdyby byla hustota Země konstantní (tj. kdyby byla Země homogenní), pak by gravitační síla působící na částici byla maximální na povrchu Země. S klesající vzdáleností od středu Země by lineárně klesala k nule; hmotná slupka ležící nad částicí totiž nepřispívá k celkové síle působící na částici. Hustota Země však konstantní není a její jádro je podstatně hustší než její plášť. Začne-li tedy částice klesat pod povrch, převažuje nejprve vliv hustšího jádra a celková gravitační síla působící na částici roste. V určité hloubce dosáhne maxima a teprve při dalším pohybu směrem ke středu Země se opět začne zmenšovat, prakticky až k nule.

PŘÍKLAD 14.5

Představme si tunel procházející skrz Zemi od pólu k pólu (obr. 14.8). Předpokládejme, že Země je nerotující homogenní koule. Najděte gravitační sílu působící na částici o hmotnosti m, která je puštěna do tunelu, když dosáhne vzdálenosti r od středu Země.



Obr. 14.8 Příklad 14.5. Částice je puštěna do tunelu vyvrtaného skrz zeměkouli.

ŘEŠENÍ: Síla působící na částici je vyvolána jen tou hmotou Země, která leží uvnitř koule o poloměru r. Část Země, která leží vně této koule, nepůsobí na částici žádnou výslednou silou. Hmotnost M' vnitřní části je dána vztahem

$$M' = \varrho V' = \varrho \frac{4\pi r^3}{3}, \qquad (14.18)$$

kde V' je objem (který je ohraničen přerušovanou čarou v obr. 14.8), M' je hmotnost části Země uvnitř tohoto objemu a ϱ je předpokládaná hustota homogenní Země.

Síla působící na částici je po užití rov. (14.1) a (14.18) určena vzorcem

$$F = -\frac{GmM'}{r^2} = -\frac{Gm\varrho\, 4\pi r^3}{3r^2} = -\left(\frac{4\pi m G\varrho}{3}\right)\cdot r = -K\cdot r, \qquad \text{(Odpověď)} \qquad (14.19)$$

kde K je konstanta rovná $4\pi mG\varrho/3$. Znaménko minus jsme ponechali proto, abychom zdůraznili, že síla $\boldsymbol{F}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ mají opačný směr. Síla směřuje do středu Země, zatímco polohový vektor směřuje od středu Země ven. Rov. (14.19) nám tedy říká, že síla působící na částici je přímo úměrná výchylce částice od středu Země, ale má opačný směr. Chová se tedy podobně jako síla pružnosti v Hookově zákonu.

14.6 GRAVITAČNÍ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

V čl. 8.3 jsme probírali gravitační potenciální energii E_p soustavy částice + Země. Zabývali jsme se případem, kdy částice byla poměrně blízko zemského povrchu a gravitační sílu jsme mohli pokládat za konstantní. Zvolili jsme vhodnou referenční konfiguraci pro nulovou potenciální energii čili konfiguraci, k níž budeme potenciální energii vztahovat. Často bývá takovou konfigurací částice ležící na povrchu Země. Neleží-li částice na povrchu Země, pak E_p klesá, když se zmenšuje vzdálenost mezi částicí a Zemí.

V této kapitole rozšíříme dosavadní pojetí a budeme uvažovat gravitační potenciální energii E_p soustavy dvou částic o hmotnostech m a M, které jsou od sebe vzdáleny r. Znovu si zvolíme konfiguraci, při níž bude $E_p = 0$. Abychom si však zjednodušili rovnice, bude to tentokrát ve vzdálenosti r natolik velké, abychom ji mohli nahradit *nekonečnou* vzdáleností. Stejně jako předtím se potenciální energie zmenšuje, když se zmenšuje vzdálenost částic. Zavedeme-li tedy $E_p = 0$ pro $r \to \infty$, bude potenciální energie pro každou konečnou vzdálenost záporná a bude mít tím větší absolutní hodnotu $|E_p|$, čím blíže budou částice u sebe.

Jak dále dokážeme, bude **gravitační potenciální energie** systému dvou částic rovna

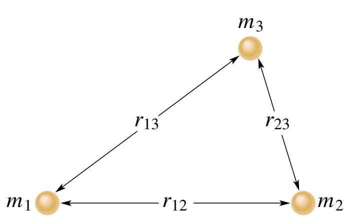
$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(gravitační potenciální energie).} \qquad (14.20)$$

Všimněme si, že se $E_p(r)$ skutečně blíží k nule, když se r blíží k nekonečnu, a že pro každou konečnou hodnotu r je $E_p(r)$ záporné.

Energie daná rov. (14.20) je vlastností *soustavy dvou částic*, nikoli jedné osamocené částice. Tuto energii nelze rozdělit a říci, že tolik a tolik přísluší jedné částici a zbytek té druhé. Je-li však $M \gg m$, jako třeba pro Zemi a míč, hovoříme často o „potenciální energii míče“. Můžeme to tak říci proto, že když se míč pohybuje v blízkosti zemského povrchu, projevují se změny v potenciální energii soustavy míč+Země jen jako změny kinetické energie míče, zatímco změny kinetické energie Země jsou příliš malé na to, aby byly měřitelné. (Naproti tomu změna hybnosti je stejně velká pro Zemi i pro malý míček; proč?) Podobně budeme v čl. 14.8 mluvit o „potenciální energii umělé družice“, která obíhá kolem Země, protože hmotnost družice je také mnohem menší než hmotnost Země. Budeme-li však mluvit o potenciální energii těles se srovnatelnými hmotnostmi, musíme s nimi zacházet zase jako s celkem — se soustavou.

Pokud náš systém obsahuje více než dvě částice, uvažujeme postupně každou dvojici částic a počítáme energii každé dvojice podle rov. (14.20), jako by tam ostatní částice nebyly. Nakonec všechny tyto příspěvky algebraicky sečteme. Použijeme-li rov. (14.20) na každou ze tří dvojic z obr. 14.9, dostaneme potenciální energii tohoto systému jako

$$E_p = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \qquad (14.21)$$

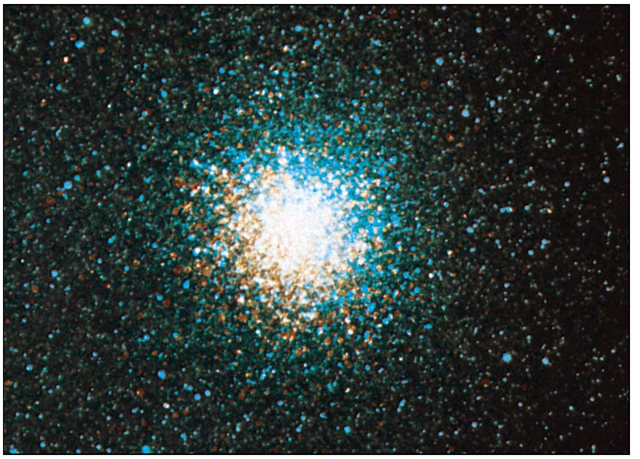


Obr. 14.9 Tři částice působící na sebe vzájemnými gravitačními silami. Gravitační potenciální energie tohoto systému je součtem dílčích energií každé ze tří možných dvojic.

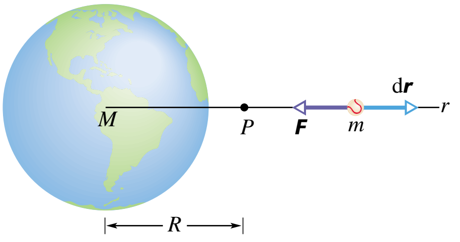
Kulová hvězdokupa (obr. 14.10) v souhvězdí Střelce je dobrým příkladem systému částic, který se vyskytuje v přírodě. Obsahuje kolem 70 000 hvězd, které lze spárovat $2{,}5 \cdot 10^9$ různými způsoby. Zamyslíme-li se nad touto strukturou, uvědomíme si, jak obrovské množství gravitační potenciální energie je ve vesmíru nahromaděno.

Odvození rov. (14.20)

Nechť míček, pohybující se z klidu ve velké (nekonečné) vzdálenosti od Země, padá do bodu P, jak je znázorněno na obr. 14.11. Potenciální energie soustavy míček + Země je na počátku nulová. Když míček dosáhne bodu P, bude potenciální energie rovna záporně vzaté práci W vykonané



Obr. 14.10 Kulová hvězdokupa, jako např. tato v souhvězdí Střelce, obsahuje desítky tisíc hvězd uspořádaných ve výsledném kulovitém útvaru. V naší Galaxii, kterou vidíme jako Mléčnou dráhu, je mnoho takových hvězdokup a některé z nich jsou viditelné již malým dalekohledem.



Obr. 14.11 Míček o hmotnosti m padá k Zemi z nekonečna podél radiální přímky a prochází bodem P, který je ve vzdálenosti R od středu Země.

gravitační silou působící na míček, která ho přesunula do bodu P z jeho vzdálené polohy. Z rov. (8.5) plyne

$$E_p = -W = -\int_{\infty}^{R} \boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad (14.22)$$

Meze integrálu jsou dány počáteční vzdáleností míčku, kterou bereme jako nekonečnou, a jeho koncovou vzdáleností R.

Vektor $\boldsymbol{F}(r)$ v rov. (14.22) směřuje radiálně do středu Země v obr. 14.11 a vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ míří radiálně od něj, takže úhel φ mezi těmito vektory je 180°. Je tedy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= F(r)(\cos 180^\circ)(\mathrm{d}r) = \\ &= -F(r)\,\mathrm{d}r. \end{aligned} \qquad (14.23)$$

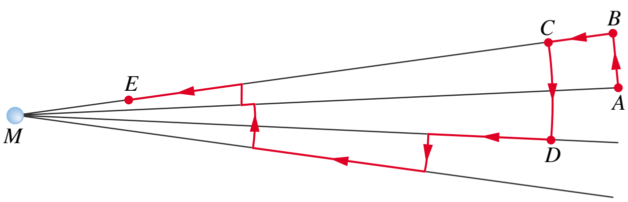
Za $F(r)$ v rov. (14.23) nyní dosadíme z Newtonova gravitačního zákona (rov. (14.1)) a dostáváme

$$\boldsymbol{F}(r) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

Dosadíme-li ještě tento výraz do rov. (14.22), získáme výsledek

$$E_p = \int_\infty^R \left(\frac{GMm}{r^2}\right) dr = -\left[\frac{GMm}{r}\right]_\infty^R = -\frac{GMm}{R},$$

což odpovídá přímo rov. (14.20).



Obr. 14.12 Práce vykonaná gravitační silou při přesunu míčku z A do E je nezávislá na cestě, po níž se míček pohybuje.

V rov. (14.22) nezáleží na trajektorii, po které se míček k Zemi pohybuje. Uvažujme cestu vytvořenou z malých kroků, jako na obr. 14.12. Podél kroků, jako je AB nebo CD, kdy se nemění vzdálenost od Země, se nekoná žádná práce, protože gravitační síla je při nich kolmá na posunutí. Celková práce vykonaná při radiálních krocích, jako třeba BC, je tedy stejná jako práce vykonaná při pohybu podél jedné radiální přímky, což je vidět na obr. 14.12. Výsledná práce vykonaná gravitační silou působící na částici při jejím pohybu mezi libovolnými dvěma body je tedy nezávislá na cestě, po které se částice pohybuje, ale závisí pouze na počáteční a koncové poloze dané částice. Tuto práci můžeme jednoduše spočítat jako záporně vzatý rozdíl potenciální energie v těchto dvou bodech

$$W = -\Delta E_p = -(E_{p,f} - E_{p,i}), \tag{14.24}$$

kde $E_{p,f}$ je potenciální energie v koncovém a $E_{p,i}$ v počátečním bodě. A právě to jsme chtěli říci v kap. 8 slovy, že gravitační síla je **konzervativní**. A jak jsme už výše rozebrali, pokud by práce na cestě *závisela* (jako např. u třecí síly), pak taková síla není potenciálová a potenciální energii nelze zavést.

Potenciální energie a síla

V důkazu rov. (14.20) jsme odvodili potenciální energii E_p ze síly $\boldsymbol{F}$. Měli bychom být také schopni postupovat obráceně, tedy začít od potenciální energie a dojít k síle. Se znalostí rov. (8.19) můžeme zapsat její radiální složku

$$F_r = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \tag{14.25}$$

To je právě Newtonův gravitační zákon (rov. (14.1)). Znaménko minus udává, že síla působící na hmotu m směřuje radiálně dovnitř, směrem k hmotě M.

Úniková rychlost

Když vypálíme střelu svisle vzhůru, začne se zpomalovat, až se obvykle v jisté výšce na okamžik zastaví a pak se zase vrací k Zemi. Existuje však jistá počáteční rychlost, při které se částice bude pohybovat vzhůru navždy a zastaví se teoreticky až v nekonečnu. Tato počáteční rychlost se nazývá **úniková rychlost**.

Uvažujme střelu o hmotnosti m, která opouští povrch planety (nebo nějakého astronomického tělesa či systému) s únikovou rychlostí v. Její kinetická energie je rovna $\frac{1}{2}mv^2$ a potenciální energie E_p je dána podle rov. (14.20):

$$E_p = -\frac{GMm}{R},$$

kde M je hmotnost planety a R její poloměr.

Když střela dosáhne nekonečna, zastaví se a nemá tedy žádnou kinetickou energii. Nemá ani žádnou potenciální energii, protože polohu v nekonečnu jsme zvolili za konfiguraci s nulovou potenciální energií. Celková energie střely v nekonečnu je proto nulová. Ze zákona zachování energie plyne, že její celková energie na povrchu planety musela být také nulová, takže platí

$$E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0.$$

Z toho plyne

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{14.26}$$

Úniková rychlost nezávisí na směru, kterým je střela vypuštěna. Uvážíme-li však rotaci Země kolem vlastní osy, je získání této rychlosti snadnější, pokud je střela vypuštěna ve směru pohybu Země. Například rakety startující na východ od mysu Canaveral mají navíc rychlost 1 500 km/h, kterou se mys pohybuje na východ díky rotaci Země.

Tabulka 14.2 **Příklady únikových rychlostí**

TĚLESO	$\frac{M}{\mathrm{kg}}$	$\frac{R}{\mathrm{m}}$	$\frac{v}{\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$
Ceres[a]	$1{,}17\cdot10^{21}$	$3{,}8\cdot10^{5}$	0,64
Měsíc	$7{,}36\cdot10^{22}$	$1{,}74\cdot10^{6}$	2,38
Země	$5{,}98\cdot10^{24}$	$6{,}37\cdot10^{6}$	11,2
Jupiter	$1{,}90\cdot10^{27}$	$7{,}15\cdot10^{7}$	59,5
Slunce	$1{,}99\cdot10^{30}$	$6{,}96\cdot10^{8}$	618
Sirius B[b]	$2\cdot10^{30}$	$1\cdot10^{7}$	5 200
neutronová hvězda[c]	$2\cdot10^{30}$	$1\cdot10^{4}$	$2\cdot10^{5}$

[a] nejhmotnější asteroid (planetka)
[b] *bílý trpaslík* (hvězda v koncovém stádiu vývoje), který je souputníkem jasné hvězdy Siria
[c] zhroucené jádro hvězdy, které zbylo po jejím výbuchu v *supernovu*.

Rov. (14.26) můžeme použít k určení únikové rychlosti střely z jakéhokoli astronomického objektu, dosadíme-li za M hmotnost tohoto objektu a za R jeho poloměr. Tab. 14.2 udává únikové rychlosti z vybraných astronomických těles.

KONTROLA 4: Míč o hmotnosti m vzdalujeme z povrchu koule o hmotnosti M. (a) Roste, nebo klesá gravitační potenciální energie soustavy míč+koule? (b) Je práce konaná gravitační silou mezi míčem a koulí kladná, nebo záporná?

PŘÍKLAD 14.6

Asteroid letící přímo na Zem má ve vzdálenosti deseti poloměrů Země od jejího středu rychlost 12 km/s vůči Zemi. Pokud pomineme vliv zemské atmosféry na jeho pohyb, určete, jakou rychlostí na Zemi dopadne.

ŘEŠENÍ: Jelikož je hmotnost asteroidu mnohem menší než hmotnost Země, můžeme gravitační potenciální energii systému Země + asteroid připsat jen samotnému asteroidu. Můžeme také zanedbat změnu relativní rychlosti Země vzhledem k asteroidu během jeho letu. Protože zanedbáváme vliv atmosféry na asteroid, zachovává se mechanická energie asteroidu během letu, tedy

$$E_{\mathrm{k,f}} + E_{\mathrm{p,f}} = E_{\mathrm{k,i}} + E_{\mathrm{p,i}},$$

kde E_k a E_p jsou kinetická a potenciální energie asteroidu a indexy f a i označují stav koncový (ve vzdálenosti 1 poloměru Země) a počáteční (ve vzdálenosti 10 poloměrů Země).

Označme m hmotnost asteroidu, $M = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg hmotnost Země a $R = 6\,378$ km poloměr Země. Použijeme-li rov. (14.20) pro potenciální energii a $\frac{1}{2}mv^2$ pro kinetickou energii, dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 - \frac{GMm}{10R}.$$

Úpravou rovnice a dosazením známých hodnot získáme

$$\begin{aligned} v_\mathrm{f}^2 &= v_\mathrm{i}^2 + \frac{2GM}{R}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \\ &= (12\cdot10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 + \\ &\quad + \frac{2(6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}})(5{,}98\cdot10^{24}\ \mathrm{kg})}{(6{,}37\cdot10^6\ \mathrm{m})}\,0{,}9 = \\ &= 2{,}567\cdot10^8\ \mathrm{m^2\cdot s^{-2}} \end{aligned}$$

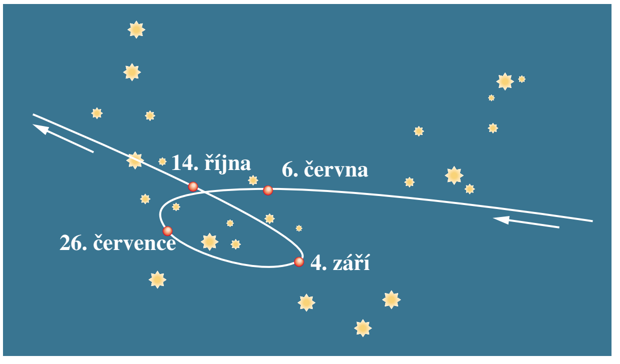
a odtud plyne

$$v_\mathrm{f} = 1{,}60\cdot10^4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 16\ \mathrm{km/s}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při této rychlosti by asteroid nemusel být nijak zvlášť veliký k tomu, aby způsobil na Zemi vážné škody. I kdyby měl například průměr pouhých 5 m, uvolnil by jeho dopad tolik energie jako výbuch jaderné bomby v Hirošimě. Varovné je, že v blízkosti oběžné dráhy Země se nachází 500 milionů podobných asteroidů. V roce 1944 jeden z nich zřejmě pronikl zemskou atmosférou a explodoval ve výšce 20 km nedaleko osamělého ostrova v jižním Pacifiku. Tím způsobil, že se na šesti válečných satelitech spustil varovný signál před jadernou explozí. Asteroid o průměru 500 m (a takových může být poblíž zemské oběžné dráhy milion) by mohl zničit celou moderní civilizaci a téměř vyhladit celé lidstvo. Víme-li však o něm včas, umíme ho už (výbuchem) vhodně vychýlit z dráhy. (Jak je vidět, fyzika, astronomie i technika mohou lidstvu opravdu prospět.)

14.7 PLANETY A DRUŽICE: KEPLEROVY ZÁKONY

Pohyby planet, které po obloze putují na pozadí hvězd, byly hádankou již od dávných časů. Smyčkovitý pohyb Marsu, znázorněný na obr. 14.13, byl obzvláště matoucí. Johannes Kepler (1571–1630) formuloval po celoživotním studiu empirické zákony, kterými se tyto pohyby řídí. Tycho Brahe (1546–1601), který jako poslední z velkých astronomů prováděl pozorování bez pomoci dalekohledu, nashromáždil rozsáhlé množství poznatků a údajů, které umožnily Keplerovi odvodit tři zákony o pohybech planet, nesoucí dnes Keplerovo jméno. Později ukázal Newton (1642–1727), že z jeho gravitačního zákona lze Keplerovy empirické zákony odvodit i teoreticky.



Obr. 14.13 Dráha planety Mars, po níž se pohybovala na pozadí souhvězdí Kozoroha během roku 1971. Na obrázku je znázorněna jeho poloha ve čtyřech různých dnech. Planety Mars i Země se obě pohybují po oběžných drahách kolem Slunce; zde vidíme polohu Marsu vzhledem k Zemi. Díky tomu pozorujeme na dráze Marsu zdánlivé smyčky.

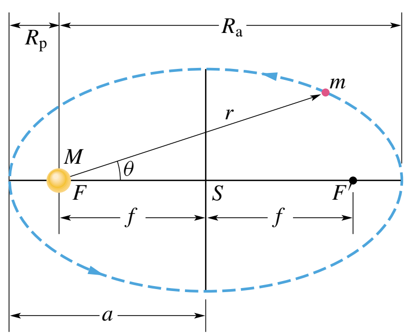
Probereme si postupně každý z Keplerových zákonů. Nejprve formulace pro skutečné planety naší sluneční soustavy:

1. Keplerův zákon (**zákon oběžných drah**): Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách (jen málo odlišných od kružnic), v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Ačkoli jsou zde zákony formulovány pro planety, které se pohybují kolem Slunce, platí stejně dobře pro družice (satelity), ať už přírodní nebo umělé, které obíhají kolem Země nebo jakéhokoli jiného objektu, v tomto trochu obecnějším znění:

Obecná formulace 1. Keplerova zákona: Částice se pod vlivem centrální síly pohybuje po kuželosečce (kružnici, elipse, parabole nebo hyperbole), která má ohnisko v centru síly.

Obr. 14.14 představuje planetu o hmotnosti m obíhající po jedné z oběžných drah kolem Slunce, jehož hmotnost je M. Předpokládáme, že $M \gg m$, a proto těžiště soustavy planeta + Slunce leží téměř ve středu Slunce (úloha 88).



Obr. 14.14 Planeta o hmotnosti m pohybující se po eliptické oběžné dráze kolem Slunce. Slunce o hmotnosti M se nachází v jednom ohnisku F dané elipsy; druhé, „prázdné" ohnisko, je označeno F'. Každé z ohnisek je vzdáleno o $f = |SF| = ea$ od středu elipsy, kde e je excentricita elipsy a a je její hlavní poloosa. Perihelium (nejbližší místo ke Slunci) je ve vzdálenosti R_p a afelium (nejvzdálenější místo od Slunce) je ve vzdálenosti R_a.

Oběžná dráha na obr. 14.14 je popsána vyznačenou **hlavní poloosou** a a **excentricitou** e neboli **výstředností**, definovanou tak, že $f = ea$ je vzdálenost středu elipsy S od ohniska F nebo F'. Nulová excentricita odpovídá kružnici, v níž obě ohniska splynou do jednoho bodu — do středu kružnice. Excentricity oběžných drah planet jsou poměrně malé, takže tyto dráhy — načrtnuty na papíru — vypadají skoro jako kružnice. Excentricita elipsy na obr. 14.14, která je pro větší názornost přehnaně velká, činí 0,74. Skutečná excentricita oběžné dráhy Země je pouze 0,016 7. Jiné objekty než planety (např. komety) mohou mít excentricitu podstatně větší.

2. Keplerův zákon (**zákon ploch**): Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké.

Z tohoto zákona plyne, že se planeta bude pohybovat nejpomaleji, když bude od Slunci nejdále, a nejrychleji, když bude k Slunci nejblíže. Druhý Keplerův zákon je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti. Dokažme to:

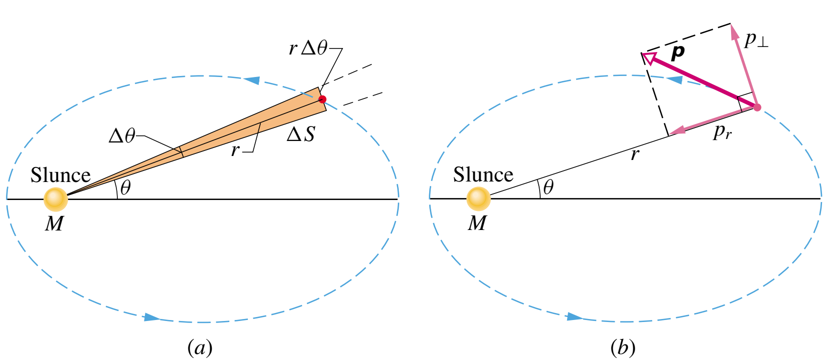
Obsah vystínovaného klínu na obr. 14.15a je přibližně roven obsahu plochy opsané průvodičem planety o délce r za čas Δt. Obsah tohoto klínu ΔS je přibližně roven obsahu trojúhelníka o základně $r\,\Delta\theta$ a výšce r, tedy $\Delta S \doteq \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. Toto vyjádření pro ΔS bude tím přesnější, čím více se bude Δt (a také $\Delta\theta$) blížit nule. Okamžitá rychlost, s jakou přibývá plocha, je tedy

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2\omega}{2}, \qquad (14.27)$$

kde ω je úhlová rychlost průvodiče.

Obr. 14.15b znázorňuje hybnost planety a její jednotlivé průměty. Z rov. (12.27) je velikost momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ planety obíhající kolem Slunce dána ramenem r a složkou $p_\perp$ hybnosti $\boldsymbol{p}$ kolmou k r:

$$L = rp_\perp = (r)(mv_\perp) = (r)(m\omega r) = \\ = mr^2\omega, \qquad (14.28)$$



Obr. 14.15 (a) Za čas Δt opíše průvodič r úhel $\Delta\theta$ a plochu o obsahu ΔS. (b) Hybnost $\boldsymbol{p}$ dané planety a její složky.

kde jsme za $v_\perp$ dosadili ωr z rov. (11.16). Vyloučíme-li společný výraz $r^2\omega$ z rov. (14.27) a (14.28), dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}. \tag{14.29}$$

Pokud bude $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$ konstanta, a to tvrdí 2. Keplerův zákon, pak podle rov. (14.29) musí být L také konstanta, což znamená, že se moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ bude zachovávat. Druhý Keplerův zákon je tedy skutečně ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.

3. Keplerův zákon (**zákon oběžných dob**): Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

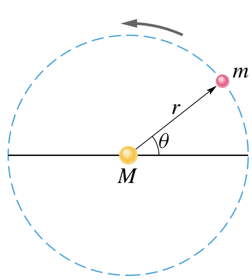
Pro ilustraci, uvažujme kruhovou oběžnou dráhu o poloměru r (poloměr u kružnice je ekvivalentem hlavní poloosy u elipsy). Užitím druhého Newtonova zákona $F = ma$ pro obíhající planetu na obr. 14.16 dostáváme

$$\frac{GMm}{r^2} = (m)(\omega^2 r). \tag{14.30}$$

Za sílu F jsme dosadili z rov. (14.1) a dále jsme použili rov. (11.21), odkud jsme za velikost dostředivého zrychlení dosadili výraz $\omega^2 r$. Když podle rov. (11.18) dosadíme $\omega = 2\pi/T$, kde T je oběžná doba, získáme třetí Keplerův zákon:

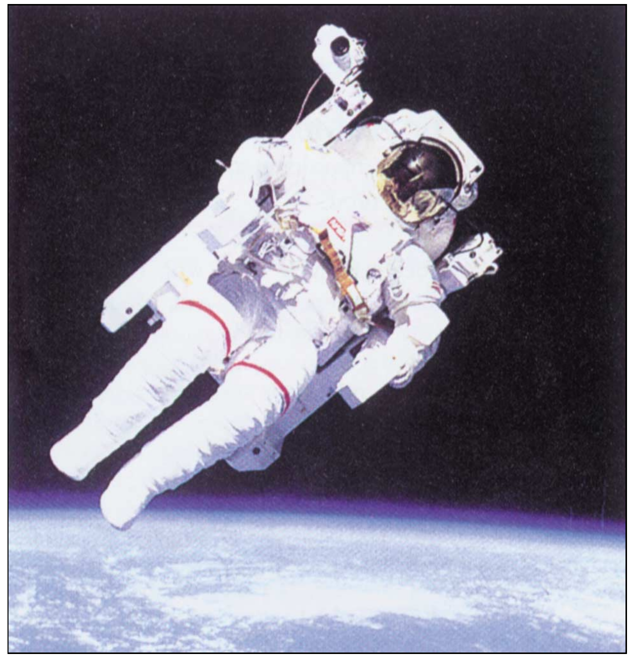
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(zákon oběžných dob)}. \tag{14.31}$$

Výraz v závorkách je konstanta, jejíž hodnota závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa.



Obr. 14.16 Planeta o hmotnosti m pohybující se kolem Slunce po kruhové oběžné dráze o poloměru r.

Rov. (14.31) platí také pro eliptické dráhy, zaměníme-li v ní r za a, čili hlavní poloosu elipsy. Tento zákon předpovídá, že poměr T^2/a^3 bude stejný pro oběžné dráhy všech planet obíhajících kolem daného hmotného tělesa. Tab. 14.3 ukazuje, jak dalece zákon platí pro oběžné dráhy planet naší Sluneční soustavy.



Dne 7. února 1984, ve výšce 102 km nad Havajskými ostrovy v rychlosti 29 000 km/h, vystoupil Bruce McCandless z raketoplánu (s nímž nebyl pevně spojen) do vesmíru. Tím se stal prvním lidským satelitem.

Tabulka 14.3 **Třetí Keplerův zákon pro Sluneční soustavu**

Planeta	a / 10^{10} m	T / y	T^2/a^3 / 10^{-34} y^2/m^3
Merkur	5,79	0,241	2,99
Venuše	10,8	0,615	3,00
Země	15,0	1,00	2,96
Mars	22,8	1,88	2,98
Jupiter	77,8	11,9	3,01
Saturn	143	29,5	2,98
Uran	287	84,0	2,98
Neptun	450	165	2,99
Pluto	590	248	2,99

KONTROLA 5: Družice 1 obíhá planetu po jisté kruhové dráze, družice 2 ji obíhá po větší kruhové dráze. Která z družic má (a) delší dobu oběhu a (b) větší rychlost?

PŘÍKLAD 14.7

Družice, obíhající po kruhové dráze ve výšce $h = 230$ km nad Zemí, má dobu oběhu $T = 89$ min. Jakou hmotnost by podle těchto údajů měla mít Země?

ŘEŠENÍ: K výpočtu použijeme 3. Keplerův zákon pro soustavu družice + Země. Vyjádříme-li z rov. (14.31) hmotnost M, získáme vztah

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}. \qquad (14.32)$$

Poloměr r dráhy družice je

$$r = R + h = (6{,}37{\cdot}10^6\,\mathrm{m} + 230{\cdot}10^3\,\mathrm{m}) = \\ = 6{,}60{\cdot}10^6\,\mathrm{m},$$

kde R je poloměr Země. Dosazením této hodnoty poloměru a doby oběhu do rov. (14.32) dostaneme

$$M = \frac{4\pi^2(6{,}60{\cdot}10^6\,\mathrm{m})^3}{(6{,}67{\cdot}10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}})(89\cdot 60\,\mathrm{s})^2} = \\ = 6{,}0{\cdot}10^{24}\,\mathrm{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Stejným způsobem můžeme také určit hmotnost Slunce ze známých hodnot doby oběhu Země a poloměru její oběžné dráhy kolem Slunce (předpokládáme-li, že je kruhová) nebo třeba hmotnost Jupitera pomocí doby oběhu a poloměru oběžné dráhy některého z jeho měsíců (jehož hmotnost znát nemusíme).

PŘÍKLAD 14.8

Halleyova kometa obíhá kolem Slunce s periodou 76 let. V roce 1986 měla nejbližší vzdálenost od Slunce, tj. vzdálenost v **periheliu**, rovnu $R_\mathrm{p} = 8{,}9{\cdot}10^{10}\,\mathrm{m}$. Tab. 14.3 ukazuje, že se nacházela mezi oběžnými drahami Merkura a Venuše. (a) Jaká je největší vzdálenost této komety od Slunce, čili její vzdálenost v **aféliu*** R_a?

ŘEŠENÍ: Z rov. (14.31) můžeme určit velikost hlavní poloosy oběžné dráhy Halleovy komety. Nahradíme-li r za a a vyjádříme-li a z této rovnice, dostaneme

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \qquad (14.33)$$

Nyní stačí dosadit za hmotnost Slunce $M = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$ a dobu oběhu komety $T = 76\,\text{let} = 2{,}4{\cdot}10^9\,\mathrm{s}$; vypočteme, že $a = 2{,}7{\cdot}10^{12}\,\mathrm{m}$. Z obr. 14.14 vidíme, že $R_\mathrm{a} + R_\mathrm{p} = 2a$ neboli

$$R_\mathrm{a} = 2a - R_\mathrm{p} = \\ = 2(2{,}7{\cdot}10^{12}\,\mathrm{m}) - (8{,}9{\cdot}10^{10}\,\mathrm{m}) = \\ = 5{,}3{\cdot}10^{12}\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z tab. 14.3 je vidět, že tato vzdálenost je jen o něco málo menší než hlavní poloosa oběžné dráhy planety Pluto.

(b) Jakou excentricitu má oběžná dráha Halleovy komety?

ŘEŠENÍ: Na obr. 14.14 vidíme, že $ea = a - R_\mathrm{p}$ neboli

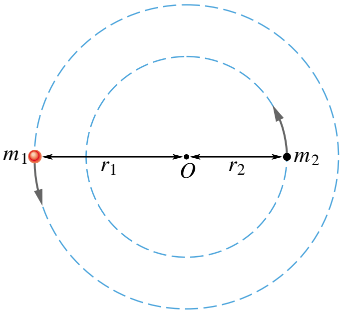
$$e = \frac{a - R_\mathrm{p}}{a} = 1 - \frac{R_\mathrm{p}}{a} = \\ = 1 - \frac{(8{,}9{\cdot}10^{10}\,\mathrm{m})}{(2{,}7{\cdot}10^{12}\,\mathrm{m})} = 0{,}97. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Z toho vyplývá, že oběžná dráha Halleovy komety, jejíž excentricita je blízká jedné, má tvar velmi protáhlé úzké elipsy.

* Při oběhu kolem Slunce se užívají tvary perihelium i perihel, a afélium (stažené z apo-helium). Při oběhu kolem Země jde o **perigeum** a **apogeum**.

PŘÍKLAD 14.9

Pozorování světla z jisté hvězdy nám naznačuje, že tato hvězda je součástí dvojhvězdy. Viditelná hvězda má oběžnou rychlost $v = 270\,\mathrm{km/s}$ (což zjistíme z Dopplerova posuvu v jejím spektru, viz čl. 18.9), dobu oběhu $T = 1{,}70\,\text{dní}$ a hmotnost přibližně rovnu $m_1 = 6M_\mathrm{S}$, kde $M_\mathrm{S} = 1{,}99{\cdot}10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce. Předpokládejme, že se hvězda a její společník, který je temný, a proto neviditelný, pohybují po kruhových oběžných drahách (obr. 14.17). Určete přibližnou hmotnost m_2 jejího temného společníka.



Obr. 14.17 Příklad 14.9. Viditelná hvězda o hmotnosti m_1 a tmavý, neviditelný objekt o hmotnosti m_2 obíhají kolem hmotného středu dvojhvězdy v bodě O.

ŘEŠENÍ: Stejně jako u soustavy dvou částic v čl. 9.2 leží těžiště této dvojhvězdy na spojnici středů obou hvězd. A stejně jako volně rotující tělesa a systémy v kap. 12 rotuje tato dvojhvězda kolem společného těžiště. Na obr. 14.17 je těžiště vyznačeno bodem O. Viditelná hvězda a temná hvězda obíhají kolem bodu O po oběžných drahách o poloměrech r_1 a r_2, čili mají navzájem stálou vzdálenost $r = r_1 + r_2$. Z rov. (14.1) můžeme určit velikost gravitační síly, jakou působí temný objekt na viditelnou hvězdu,

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Použitím Newtonova zákona síly, $F = ma$, pro viditelnou hvězdu platí

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = m_1a = (m_1)(\omega^2 r_1), \qquad (14.34)$$

kde ω je úhlová rychlost viditelné hvězdy a $\omega^2 r_1$ velikost jejího dostředivého zrychlení mířícího do bodu O.

Pro tytéž veličiny však můžeme získat ještě další vztah, totiž vzorec pro polohu těžiště O

$$r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}.$$

Z toho plyne

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \tag{14.35}$$

Když teď dosadíme r z rov. (14.35) do rov. (14.34) a nahradíme ω výrazem $2\pi/T$, pak po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{4\pi^2}{GT^2} r_1^3. \tag{14.36}$$

Stále zůstávají dvě neznámé, m_2 a r_1. Hodnotu r_1 však můžeme určit z kruhového pohybu viditelné hvězdy: doba oběhu T je rovna podílu obvodu oběžné dráhy $(2\pi r_1)$ a rychlosti v hvězdy. Tedy

$$T = \frac{2\pi r_1}{v}$$

neboli

$$r_1 = \frac{vT}{2\pi}. \tag{14.37}$$

Dosadíme-li $m_1 = 6M_S$ a r_1 z rov. (14.37), pak rov. (14.36) nabude tvaru

$$\begin{aligned}\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} &= \frac{v^3 T}{2\pi G} = \\ &= \frac{(2{,}7\cdot 10^5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^3 (1{,}70\ \mathrm{d})(86\,400\ \mathrm{s/d})}{2\pi (6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}})} = \\ &= 6{,}90\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}\end{aligned}$$

neboli

$$\frac{m_2^3}{(6M_S + m_2)^2} = 3{,}47 M_S. \tag{14.38}$$

Mohli bychom řešit tuto kubickou rovnici pro m_2. Pokud nám však stačí jen odhad (stejně počítáme jen s přibližnými hodnotami hmotností), stačí zkoušet postupně dosazovat za m_2 celočíselné násobky M_S. Hodnota, která nejlépe vyhovuje dané rovnici, je

$$m_2 \doteq 9 M_S. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tyto hodnoty přibližně odpovídají systému LMC X-3 ve Velkém Magellanově mračnu (viz obrázek na začátku této kapitoly). Z dalších údajů zjistíme, že temný objekt je obzvláště hustý: mohla by to být vlastní gravitací zhroucená hvězda, ze které se stala buď neutronová hvězda, nebo černá díra. Vzhledem k tomu, že neutronová hvězda nemůže mít hmotnost větší než $2M_S$, utvrzuje nás výsledek $m_2 \doteq 9M_S$ v přesvědčení, že se jedná o černou díru.

O přítomnosti černé díry se tedy můžeme přesvědčit např. tehdy, pokud je součástí binárního systému s viditelnou hvězdou, jejíž hmotnost, oběžnou rychlost a oběžnou dobu můžeme měřit.

14.8 DRUŽICE: OBĚŽNÉ DRÁHY A ENERGIE

S pohybem družice kolem Země se mění jak její rychlost, která určuje její kinetickou energii, tak vzdálenost od středu Země, která určuje její gravitační potenciální energii, a to ve stejných časových intervalech. Přesto však její celková mechanická energie E zůstává stejná. Vzhledem k tomu, že hmotnost družice je mnohem menší než hmotnost Země, připisujeme tyto energie E_p a E soustavy družice + Země jen samotné družici.

Potenciální energie je dána rov. (14.20) a je rovna

$$E_p = -\frac{GMm}{r},$$

kde $E_p = 0$ pro $r \to \infty$. Zde je r poloměr oběžné dráhy; předpokládejme zatím, že je kruhová.

Abychom určili kinetickou energii družice na kruhové oběžné dráze, použijeme druhý Newtonův zákon $F = ma$ a napíšeme ho ve tvaru

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \tag{14.39}$$

kde v^2/r je velikost dostředivého zrychlení družice. Potom z rovnice (14.39) plyne vztah pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}, \tag{14.40}$$

který nám ukazuje, že pro družici obíhající po kruhové dráze platí

$$E_k = -\frac{E_p}{2}. \tag{14.41}$$

Celková mechanická energie pohybující se družice je

$$E = E_k + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

neboli

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \tag{14.42}$$

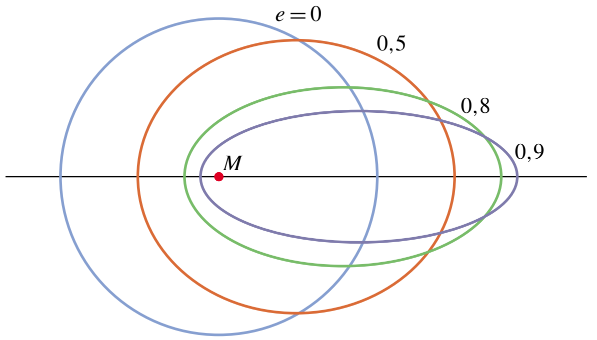
To nám říká, že celková energie E družice je záporně vzatá kinetická energie E_k:

$$E = -E_k \quad \text{(pro kruhovou dráhu)}. \tag{14.43}$$

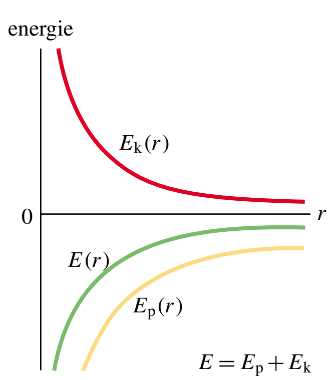
Pro družici pohybující se po eliptické oběžné dráze s hlavní poloosou a můžeme dosadit $r = a$ v rov. (14.42) a určit celkovou mechanickou energii vztahem

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad \text{(pro eliptickou dráhu).} \qquad (14.44)$$

Rov. (14.44) ukazuje, že celková mechanická energie obíhající družice závisí pouze na velikosti hlavní poloosy její oběžné dráhy a nezávisí na její excentricitě e. Např. na obr. 14.18 jsou nakresleny čtyři oběžné dráhy o stejně dlouhé poloose a. Družice pohybující se po těchto čtyřech odlišných drahách by však měly stejné celkové mechanické energie E. Obr. 14.19 ukazuje závislosti veličin E_k, E_p a E na poloměru r u družice, která se pohybuje po kruhové dráze kolem těžkého centrálního tělesa.

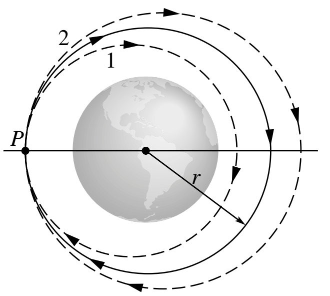


Obr. 14.18 Čtyři oběžné dráhy kolem centrálního tělesa o hmotnosti M. Všechny tyto dráhy mají stejně velkou hlavní poloosu a, a proto jim odpovídá stejná celková energie E. Excentricity e jednotlivých drah jsou na obrázku vyznačeny.



Obr. 14.19 Kinetická energie E_k, potenciální energie E_p a celková mechanická energie E v závislosti na poloměru r kruhové oběžné dráhy družice. Hodnoty E_p a E jsou záporné pro každé r, hodnoty E_k jsou naopak pouze kladné a platí $E = -E_k$. Blíží-li se r nekonečnu, klesají hodnoty všech tří energií k nule.

KONTROLA 6: Uvažujme situaci na obrázku. Raketoplán se na počátku pohybuje po kruhové dráze o poloměru r kolem Země. V bodě P vystřelil pilot dopředu pomocnou raketu, a tím zmenšil kinetickou energii E_k raketoplánu i jeho celkovou mechanickou energii E. (a) Po které z eliptických drah, vyznačených na obrázku přerušovanou čarou, se bude poté raketoplán pohybovat? (b) Bude nová oběžná doba T raketoplánu (tj. čas, za který se vrátí zpět do bodu P) větší, menší, nebo stejná jako při pohybu po kruhové oběžné dráze?



PŘÍKLAD 14.10

Rozverný astronaut vypustil ve výšce $h = 350$ km nad Zemí velký medicinbal o hmotnosti $m = 7{,}20$ kg na kruhovou oběžnou dráhu kolem Země.

(a) Jaká je mechanická energie E míče na této dráze?

ŘEŠENÍ: Poloměr její oběžné dráhy r je roven

$$r = R + h = (6\,378\,\text{km}) + (350\,\text{km}) = 6{,}73 \cdot 10^6\,\text{m},$$

kde R je poloměr Země. Z rov. (14.42) pak snadno určíme mechanickou energii koule

$$E = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2})(5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg})(7{,}20\,\text{kg})}{2(6{,}73 \cdot 10^6\,\text{m})} = -2{,}134 \cdot 10^8\,\text{J} \doteq -213\,\text{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká byla mechanická energie E_0 medicinbalu na startovací rampě v Mysu Canaveral? Spočítejte přírůstek ΔE energie při přemístění z odpalovací rampy na oběžnou dráhu kolem Země.

ŘEŠENÍ: Na startovací rampě měl míč, díky rotaci Země, také jistou kinetickou energii, ale její hodnota je oproti výsledné energii natolik malá, že ji můžeme zanedbat. Celková energie E_0 je tedy rovna potenciální energii $E_{p,0}$, která je dána vztahem (14.20)

$$E_0 = E_{p,0} = -\frac{GMm}{R} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2})(5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg})(7{,}20\,\text{kg})}{(6{,}38 \cdot 10^6\,\text{m})} = -4{,}501 \cdot 10^8\,\text{J} = -450\,\text{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Mohli byste namítnout, že potenciální energie koule na povrchu Země je nulová. Připomeňme si však, že hladinu nulové potenciální energie jsme zvolili v nekonečnu. Také byste možná chtěli k výpočtu E_0 použít rov. (14.42), ale pozor — tato rovnice platí jen pro družici *obíhající* kolem Země. *Přírůstek* mechanické energie koule od startu až na oběžnou dráhu je roven

$$\Delta E = E - E_0 = (-213\,\mathrm{MJ}) - (-450\,\mathrm{MJ}) = \\ = 237\,\mathrm{MJ}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Toto množství energie ve formě elektřiny by vás (bez započtení pravidelných měsíčních poplatků) při domácí sazbě N, tj. 0,91 Kč/(kW·h), stálo ani ne 60 Kč.

14.9 EINSTEIN A GRAVITACE

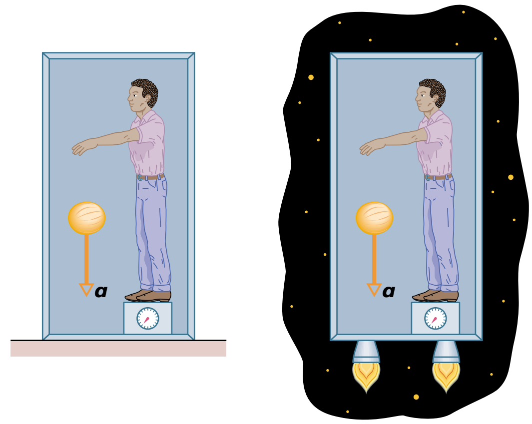
Princip ekvivalence

Albert Einstein jednou vyprávěl: „Byl jsem… na patentovém úřadě v Bernu a najednou mě napadla myšlenka: »Bude-li osoba padat volným pádem, nebude pociťovat vlastní váhu.« Bylo to překvapení. Tato jednoduchá myšlenka na mě hluboce zapůsobila. A to mě dovedlo až k teorii gravitace."

Einstein nám zde popsal, jak vlastně začala vznikat jeho známá **obecná teorie relativity**. Základní postulát této teorie, zabývající se gravitací (vzájemným gravitačním působením předmětů), se nazývá **princip ekvivalence** a říká, že gravitace a zrychlení si jsou navzájem ekvivalentní. Bude-li fyzik uzavřen v nějaké skříni jako na obr. 14.20a, nebude schopen určit, je-li skříň v klidu na Zemi (a je vystavena působení gravitační síly Země), nebo se pohybuje v mezihvězdném prostoru se zrychlením $9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ (a je tedy vystavena působení síly, která toto zrychlení vyvolala) jako na obr. 14.20b. V obou případech se fyzik bude cítit úplně stejně a na váze si bude moci přečíst stejný údaj. Navíc, bude-li vedle něj volně padat nějaký předmět, bude mít vůči němu v obou případech stejné zrychlení.

Zakřivení prostoru

Doposud jsme vysvětlovali gravitaci jako působení vzájemných přitažlivých sil mezi hmotnými tělesy. Einstein však ukázal, že gravitaci lze také popsat zakřivením prostoru, které je vyvoláno přítomností hmoty. (Jak bude v této knize zmíněno později, prostor a čas jsou spolu provázány, takže zakřivení, o kterém Einstein mluvil, je ve skutečnosti zakřivení **prostoročasu**, čtyřrozměrného útvaru složeného z trojrozměrného prostoru a jednorozměrného času, v němž popisujeme náš vesmír.)



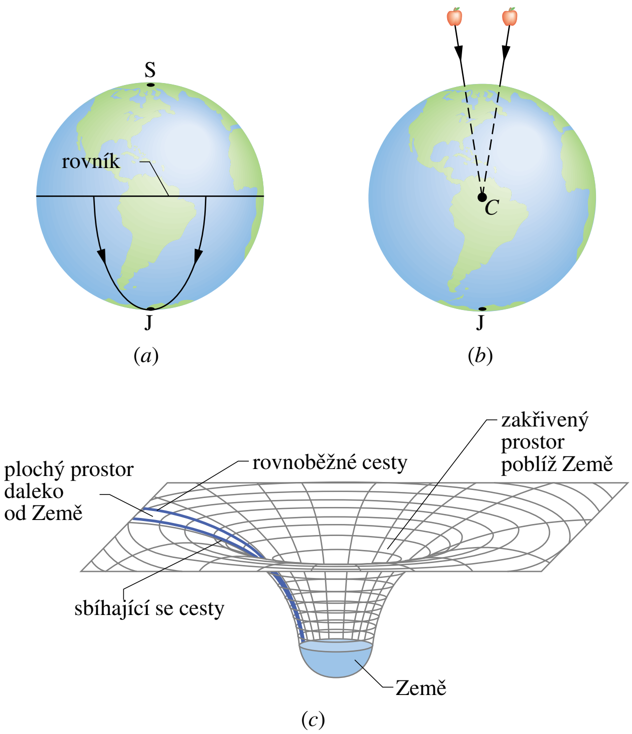
(*a*) (*b*)

Obr. 14.20 (a) Fyzik zavřený ve skříni, která stojí v klidu na Zemi, vidí padat meloun se zrychlením $a = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. (b) Pokud bude skříň i s ním urychlována v hlubinách vesmíru se zrychlením $9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, bude mít meloun vzhledem k němu stejné zrychlení jako v případě (a). Není tedy možné, aby jen na základě takovýchto experimentů prováděných uvnitř skříně mohl fyzik říci, v jaké situaci se nachází. Například váha, na které stojí, ukazuje v obou případech stejný údaj.

Znázornění toho, jak může být prostor (stejně jako vakuum) zakřivený, je složité. Analogie nám však může pomoci: Představme si, že se díváme z oběžné dráhy na závod dvou lodí, které startují na rovníku ve vzdálenosti 20 km a míří na jih (obr. 14.21a). Námořníkům na těchto lodích se jejich cesty zdají být přímé* a rovnoběžné. Přesto však se po čase začnou lodě k sobě přibližovat a těsně u jižního pólu se spolu setkají. Námořníci si to mohou vysvětlit tak, že na lodě působila nějaká síla. My však vidíme, že se lodě spolu setkaly díky zakřivení zemského povrchu. Máme možnost to vidět proto, že jsme závod pozorovali zvenčí, mimo tento povrch.

Obr. 14.21b ukazuje podobné závody: dvě jablka v jisté horizontální vzdálenosti jsou puštěna ze stejné výšky nad Zemí. Ačkoli se může zdát, že se jablka pohybují po rovnoběžných drahách, ve skutečnosti se k sobě přibližují, protože obě padají do středu Země. Jejich pohyb můžeme vysvětlit tak, že na jablka působí Země svou gravitační silou. Také to však můžeme vysvětlit tím, že v blízkosti Země je prostor zakřiven (díky přítomnosti zemské hmoty). Tentokrát nemůžeme toto zakřivení vidět, protože nemáme možnost dostat se „vně" zakřiveného prostoru jako v předešlém příkladu s loděmi. Můžeme ho však popsat třeba pomocí obr. 14.21c. Tady by se jablka pohybovala po po-

* „Přímkou" je na kouli s poloměrem R každá **hlavní kružnice**, tj. kružnice s poloměrem také rovným R.

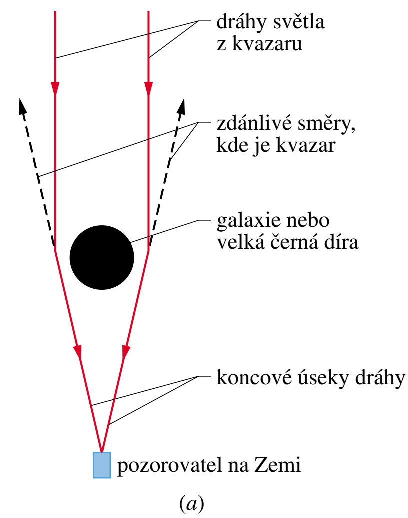


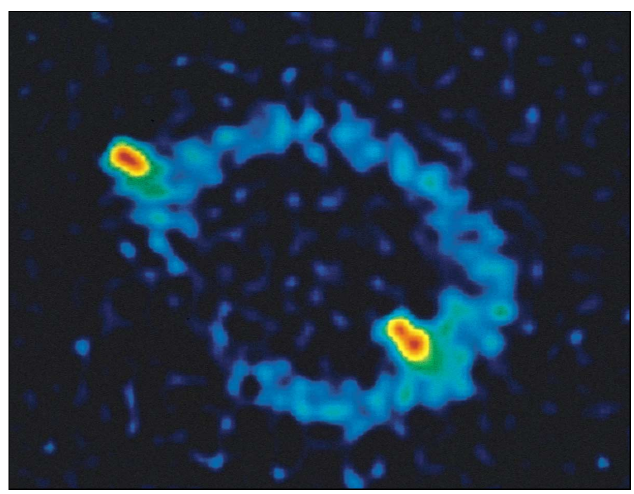
Obr. 14.21 (a) Dva předměty pohybující se podél poledníků směrem k jižnímu pólu se přibližují, protože zemský povrch je zakřiven. (b) Dva předměty padající volným pádem v blízkosti Země se pohybují po přímých čarách, které se sbíhají ke středu Země, a to díky zakřivení prostoru v okolí Země. (c) Daleko od Země (a jiných hmotných objektů) je prostor plochý a rovnoběžné dráhy zůstávají rovnoběžné a stejně vzdálené od sebe. V blízkosti Země se však rovnoběžné dráhy začínají sbíhat, protože prostor je zde zakřiven hmotou Země.

vrchu, který se směrem k Zemi stále více zakřivuje právě vlivem hmoty Země.

Když kolem nějakého hmotného předmětu prochází světlo, je i dráha světla lehce ohnuta díky zakřivení prostoru v okolí tohoto předmětu. Tento jev se nazývá **gravitační čočka**. Bude-li světlo míjet nějaký hodně hmotný objekt, třeba galaxii nebo černou díru o velké hmotnosti, bude dráha paprsku ohnuta víc. Pokud se tento hmotný objekt nachází mezi námi a kvazarem (kvazar je extrémně jasný a extrémně vzdálený zdroj světla), bude paprsek přicházející z kvazaru ohnut kolem této struktury k nám na Zemi (obr. 14.22a). Jelikož se díky tomuto ohybu zdá, že světlo přichází z trochu jiného směru, vidíme v těchto různých směrech na obloze naprosto stejné kvazary. V některých případech jsou kvazary, které vidíme, ohnuty k sobě a vytvářejí obrovský světelný oblouk, který nazýváme **Einsteinův prstenec** (obr. 14.22b).

Je lepší přisuzovat gravitaci síle působící mezi hmotnými objekty, anebo zakřivení prostoročasu, způsobenému přítomností hmoty? A bylo by ji možno popsat jistým druhem elementárních částic zvaných **gravitony**, jak se uvažuje v některých moderních fyzikálních teoriích? To zatím nevíme.





(b)

Obr. 14.22 (a) Světlo ze vzdáleného kvazaru se kolem galaxie nebo velké černé díry pohybuje po zakřivené dráze, protože hmota této galaxie nebo černé díry zakřivuje okolní prostor. Když světlo dopadá na Zemi, zdá se nám, že se jeho zdroj nachází v prodloužení koncové dráhy světelného paprsku (přerušovaná čára). (b) Einsteinův prstenec, známý jako MG 1 131+0 456, na počítačovém snímku z dalekohledu. Zdroj světla (vlastně rádiových vln, které jsou druhem neviditelného světla) je daleko za velkou, nespatřitelnou galaxií, která vytváří tento prstenec. Část tohoto zdroje vystupuje jako dvě jasné skvrny, které vidíme podél prstence.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Gravitační zákon

Libovolné dvě částice ve vesmíru se navzájem přitahují *gravitační silou* o velikosti

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{14.1}$$

kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti částic a r je vzdálenost mezi nimi. *Gravitační konstanta* G je univerzální konstantou a její hodnota je $6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$.

Gravitační chování homogenní kulové slupky

Rov. (14.1) platí pouze pro částice. Gravitační síla mezi rozměrnými tělesy se musí obecně určit ze součtu (integrací) jednotlivých sil působících na všechny částice uvnitř těchto těles. Pokud však každé toto těleso je kulově symetrické (neboli po vrstvách homogenní), lze výslednou gravitační sílu, která působí na *vnější* předměty, spočítat tak, jako by veškerá hmota každého tělesa byla soustředěna v jeho středu.

Skládání sil

Gravitační síly se řídí *principem superpozice*, který říká, že výsledná síla $\boldsymbol{F}_1$ působící na částici označenou číslem 1 je dána součtem sil, kterými na ni působí ostatní částice:

$$\boldsymbol{F}_1 = \sum_{i=2}^{n} \boldsymbol{F}_{1i}. \tag{14.4}$$

Jedná se o vektorový součet sil $\boldsymbol{F}_{1i}$, kterými na zvolenou částici 1 působí částice 2, 3, …, n. Gravitační síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou působí na částici nějaký větší hmotný předmět, se určí tak, že tento předmět rozdělíme na infinitezimální dílky o hmotnosti dm. Každý z nich působí infinitezimální silou d$\boldsymbol{F}$ a po integraci těchto příspěvků dostaneme

$$\boldsymbol{F}_1 = \int \mathrm{d}\boldsymbol{F}. \tag{14.5}$$

Připomeňme, že příspěvky uvažujeme v tomtéž okamžiku, tedy jako by se gravitace šířila nekonečně rychle. To je v souladu s klasickou fyzikou, nikoli ovšem s teorií relativity. Relativistickou teorii gravitace rozvíjí až obecná teorie relativity.

Gravitační zrychlení

Gravitační zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{g}$ částice (o hmotnosti m) je způsobeno výhradně gravitační silou, která na částici působí. Je-li částice ve vzdálenosti r od středu homogenního kulového tělesa o hmotnosti M, pak velikost gravitační síly na ni působící je dána rov. (14.1). Navíc, podle druhého Newtonova zákona platí

$$F = ma_\mathrm{g} \tag{14.11}$$

a odtud pro a_g plyne vztah

$$a_\mathrm{g} = \frac{GM}{r^2}. \tag{14.12}$$

Tíhové zrychlení a tíhová síla

Tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$ částice v blízkosti Země se trochu (méně než o $\frac{1}{2}$ %) liší od gravitačního zrychlení $\boldsymbol{a}_\mathrm{g}$. Proto i tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ se liší od gravitační síly (rov. (14.1)) působící na částici. Země totiž není ani homogenní, ani dokonale kulová a navíc rotuje.

Gravitace uvnitř kulové slupky

Homogenní kulová hmotná slupka nepůsobí žádnou výslednou gravitační silou na částice, které se nacházejí uvnitř. To znamená, že pokud je částice umístěna uvnitř homogenní pevné koule ve vzdálenosti r od jejího středu, bude výsledná gravitační síla působící na částici vyvolána pouze tou hmotou, která se nachází uvnitř koule o poloměru r. Její hmotnost je dána vztahem

$$M' = \varrho\frac{4\pi r^3}{3}, \tag{14.18}$$

kde ϱ je hustota dané koule.

Gravitační potenciální energie

Gravitační potenciální energie $E_\mathrm{p}(r)$ soustavy dvou částic o hmotnostech M a m vzájemně vzdálených r je rovna záporně vzaté práci, kterou by vykonala gravitační síla jedné z částic působící na druhou částici při jejím přesunu z nekonečna (z velké vzdálenosti) na vzdálenost r. Tato energie je rovna

$$E_\mathrm{p} = -\frac{GMm}{r}. \tag{14.20}$$

Potenciální energie systému

Pokud systém obsahuje více než dvě částice, je výsledná gravitační potenciální energie součtem příspěvků od všech dvojic částic. V textu jsme uvažovali systém tří částic o hmotnostech m_1, m_2 a m_3; v tom případě je

$$E_\mathrm{p} = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{14.21}$$

Úniková rychlost

Předmět může uniknout z gravitačního vlivu vesmírného tělesa o hmotnosti M a poloměru R, pokud z povrchu tělesa odlétá alespoň *únikovou rychlostí* o velikosti

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{14.26}$$

Keplerovy zákony

Gravitační přitažlivost drží pohromadě sluneční soustavu. Díky ní např. také obíhají družice (přírodní i umělé) kolem Země. Jejich pohyby se řídí třemi Keplerovými zákony, které jsou přímým důsledkem Newtonových pohybových zákonů a Newtonova gravitačního zákona.

1. ***Zákon oběžných drah***: Planety se pohybují po elipsách jen málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce. Obecně: Částice se v centrálním gravitačním poli pohybuje po kuželosečce, mající ohnisko v centru pole.

2. ***Zákon ploch***: Plochy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou stejně velké. (Toto tvrzení je ekvivalentní zákonu zachování momentu hybnosti.)

3. ***Zákon oběžných dob***: Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich drah.

Pro kruhovou oběžnou dráhu o poloměru r dostává tento zákon tvar

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3, \tag{14.31}$$

kde M je hmotnost centrálního tělesa — ve sluneční soustavě tedy hmotnost Slunce. Tento závěr je platný i pro eliptické oběžné dráhy planet, pokud v tomto vztahu nahradíme poloměr r hlavní poloosou a.

Energie pohybu planet

Pohybuje-li se planeta nebo družice o hmotnosti m po kruhové oběžné dráze o poloměru r, pak její energie potenciální E_p a kinetická E_k jsou

$$E_p = -\frac{GMm}{r} \quad \text{a} \quad E_k = \frac{GMm}{2r}. \tag{14.20, 14.40}$$

Mechanická energie $E = E_k + E_p$ se rovná

$$E = -\frac{GMm}{2r}. \tag{14.42}$$

Pro eliptickou dráhu s hlavní poloosou a platí

$$E = -\frac{GMm}{2a}. \tag{14.44}$$

Einsteinův pohled na gravitaci

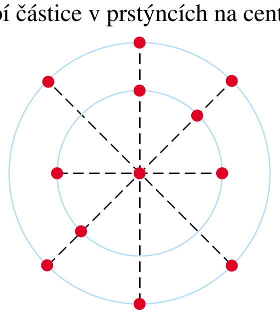
Einstein ukázal, že gravitace a zrychlení jsou ekvivalentní. Tento *princip ekvivalence* jej dovedl k teorii gravitace (k *obecné teorii relativity*), která vysvětluje gravitační jevy pomocí zakřivení prostoru.

OTÁZKY

1. Mějme dvě částice o hmotnostech m a $2m$ připevněny k ose (obr. 14.23). (a) Kde můžeme na ose umístit třetí částici s hmotností $3m$ (jinde než v nekonečnu), aby celková gravitační síla, která by na ni od prvních dvou částic působila, byla nulová? Je to vlevo od obou částic, vpravo, anebo mezi nimi — blíže k hmotnější, nebo k lehčí? (b) Změní se odpověď, pokud by třetí částice měla hmotnost $16m$? (c) Existuje pro třetí částici bod mimo osu, ve kterém by celková na ni působící síla byla nulová?

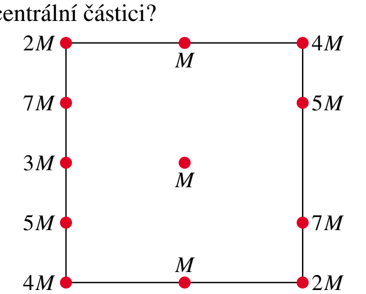
Obr. 14.23 Otázka 1

2. Na obr. 14.24 je centrální částice obklopena dvěma kruhovými prstýnky částic s poloměry r a R, $R > r$. Všechny částice mají hmotnost m. Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly, kterou působí částice v prstýncích na centrální částici?



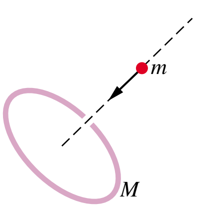
Obr. 14.24 Otázka 2

3. Na obr. 14.25 je centrální částice s hmotností M obklopena čtvercovým uspořádáním jiných částic. Vzdálenosti mezi těmito částicemi jsou buď d, nebo $\frac{1}{2}d$ podél obvodu čtverce. Jaká je velikost a směr výsledné gravitační síly působící díky těmto částicím na centrální částici?



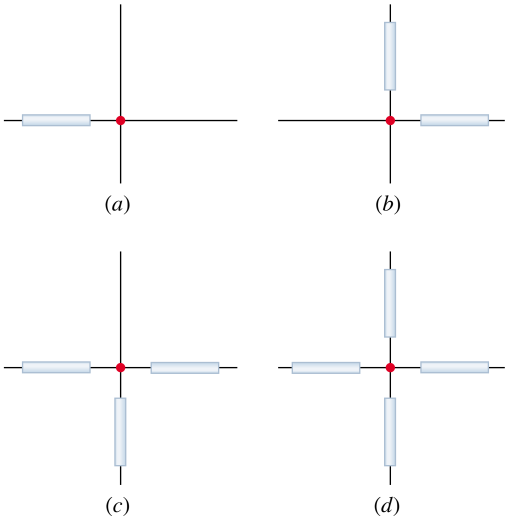
Obr. 14.25 Otázka 3

4. Obr. 14.26 ukazuje částici s hmotností m, která se pohybuje z nekonečna do středu kroužku s hmotností M podél jeho osy. Jak se během tohoto přenosu mění velikost gravitační síly působící na částici?



Obr. 14.26 Otázka 4

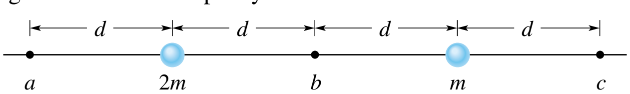
5. Na obr. 14.27 jsou zobrazeny čtyři uspořádání částice s hmotností m a jedné nebo více homogenních tyčí, každé s hmotností M, délkou L a vždy umístěné ve vzdálenosti d od částice. Seřaďte sestupně uspořádání podle velikosti celkové gravitační síly, kterou působí tyče na částici.



Obr. 14.27 Otázka 5

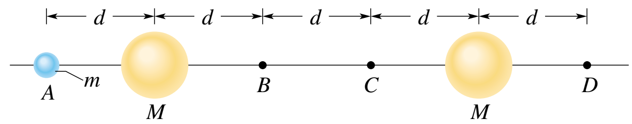
6. Seřaďte sestupně čtyři systémy stejně hmotných částic z kontroly 2 podle absolutní hodnoty gravitační potenciální energie.

7. Na obr. 14.28 má být částice s hmotností m (nezakreslena) přenesena z nekonečna na jedno ze tří míst a, b, nebo c. Dvě další částice, s hmotnostmi m a $2m$, jsou pevně umístěny. Seřaďte sestupně možnosti a, b, c podle celkové práce vykonané gravitačními silami pevných částic.



Obr. 14.28 Otázka 7

8. Na obr. 14.29 je částice s hmotností m nejprve v místě A ve vzdálenosti d od středu jedné homogenní koule a ve vzdálenosti $4d$ od středu druhé homogenní koule. Obě koule mají hmotnost $M \gg m$. Pokud byste částici přenesli do bodu D, řekněte, zda následující veličiny by byly kladné, záporné, nebo nulové: (a) změna gravitační potenciální energie částice, (b) práce vykonaná celkovou gravitační silou na částici, (c) práce vykonaná vámi. (d) Jaké by byly odpovědi, kdybychom přemístili částici z bodu B do C?

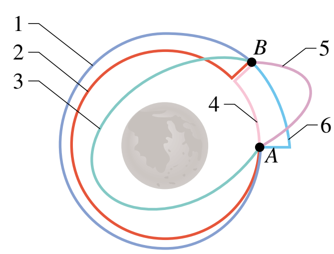


Obr. 14.29 Otázka 8

9. Vyjděme ze situace v otázce 8. Byla by práce vámi vykonaná kladná, záporná, nebo nulová, kdybyste přemístili částici (a) z A do B, (b) z A do C, (c) z B do D? Seřaďte sestupně tyto přesuny podle absolutní hodnoty vámi vykonané práce.

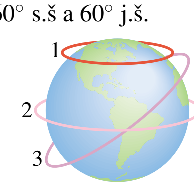
10. Mějme tři planety o následujících hmotnostech a poloměrech: planeta A: $2M$ a R; planeta B: $3M$ a $2R$; planeta C: $4M$ a $2R$. Seřaďte sestupně tyto planety podle velikosti únikové rychlosti z jejich povrchů.

11. Obr. 14.30 nabízí šest drah, po kterých se raketa oblétající Měsíc může pohybovat z bodu A do bodu B. Seřaďte sestupně dráhy podle (a) příslušné změny gravitační potenciální energie systému raketa + Měsíc a (b) celkové práce vykonané na raketě gravitační silou Měsíce.



Obr. 14.30 Otázka 11

12. Které z oběžných drah (řekněme pro špionážní družici) na obr. 14.31 nevyžadují stálé opravy korekčními motorky? Dráha 1 je na 60° s.š.; dráha 2 leží v rovníkové rovině; dráha 3 je kolem středu Země, mezi 60° s.š a 60° j.š.



Obr. 14.31 Otázka 12

13. Družice s rychlostí v_1 a hmotností m je na kruhové oběžné dráze kolem planety s hmotností M_1. Jiná družice, s rychlostí v_2 a hmotností $2m$, obíhá po kruhové dráze o stejném poloměru kolem planety s hmotností M_2. Je M_2 větší, menší, nebo rovné M_1, (a) pokud družice mají stejnou oběžnou dobu, (b) pokud $v_2 > v_1$?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 14.2 Newtonův gravitační zákon

1C. Jaká musí být vzdálenost mezi částicemi o hmotnostech 5,2 kg a 2,4 kg, aby se gravitačně přitahovaly silou $2{,}3\cdot 10^{-12}$ N?

2C. Někteří lidé věří, že pozice planet v okamžiku narození ovlivňuje narozeného. Jiní tento názor nesdílejí a tvrdí, že gravitační síla, kterou na dítě působí porodník, je větší než od planet. Abychom posoudili toto tvrzení, spočtěte a porovnejte gravitační sílu působící na 3 kg dítě (a) od 70 kg lékaře, který je 1 m daleko a zhruba aproximovaný hmotným bodem, (b) od Jupiteru ($m = 2\cdot 10^{27}$ kg) v okamžiku, kdy je nejblíže Zemi ($= 6\cdot 10^{11}$ m) a (c) když je od Země nejdále ($= 9\cdot 10^{11}$ m). (d) Je tvrzení skeptiků správné?

3C. Slunce i Země gravitačně působí na Měsíc. Jaký je poměr F_S/F_Z velikostí těchto sil? (Průměrná vzdálenost Slunce – Měsíc je rovna vzdálenosti Slunce – Země).

4C. Jeden ze satelitů *Echo* tvořil nafouknutý kulový hliníkový balon s průměrem 30 m a hmotností 20 kg. Předpokládejme, že by ve vzdálenosti 3 m od povrchu satelitu prolétl meteoroid s hmotností 7 kg. Jaká by byla největší gravitační síla, která by působila díky satelitu na meteoroid?

5Ú. Objekt s hmotností M byl rozdělen na dvě části, m a $M-m$, které byly od sebe poté oddáleny na jistou vzdálenost. Jaký by měl být poměr m/M, aby byla gravitační síla mezi částmi co největší?

ODST. 14.3 Gravitace a princip superpozice

6C. Jak daleko od Země ve směru ke Slunci musíme umístit sondu, aby se právě vyrovnala přitažlivá síla Slunce a Země?

7C. Kosmická loď je na přímé dráze mezi Zemí a Měsícem. V jaké vzdálenosti od Země je celková gravitační síla na loď nulová?

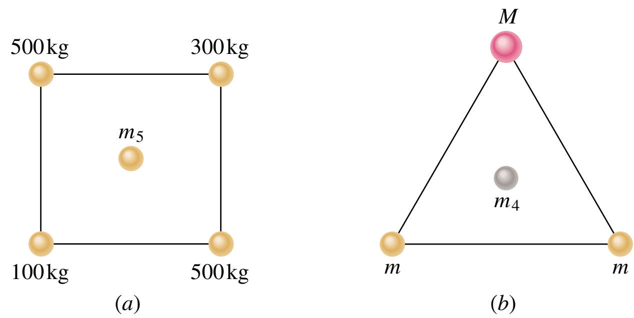
8Ú. Jaká je procentuální změna zrychlení Země směrem ke Slunci, když se postavení Země, Slunce a Měsíce změní ze zatmění Slunce (Měsíc je mezi Zemí a Sluncem) na zatmění Měsíce (Země je mezi Měsícem a Sluncem)?

9Ú. Čtyři koule s hmotnostmi $m_1 = 400$ kg, $m_2 = 350$ kg, $m_3 = 2\,000$ kg a $m_4 = 500$ kg mají souřadnice (x, y) po řadě (0; 50), (0; 0), (−80; 0), (40; 0), vše v centimetrech. Jaká je celková gravitační síla $\boldsymbol{F}_2$ působící na m_2?

10Ú. Na obr. 14.32a leží čtyři koule ve vrcholech čtverce se stranou 2,0 cm. Jaká je velikost a směr celkové gravitační síly, kterou působí na centrální kouli s hmotností $m_5 = 250$ kg?

11Ú. Na obr. 14.32b tvoří dvě koule s hmotnostmi m a třetí s hmotností M rovnostranný trojúhelník. Čtvrtá koule s hmotností m_4 je v jeho těžišti. Celková gravitační síla působící na m_4 od ostatních koulí je nulová; čemu je rovno M vyjádřeno v m?

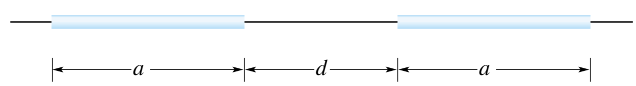
12Ú. Dvě koule s hmotnostmi $m_1 = 800$ kg a $m_2 = 600$ kg jsou od sebe vzdáleny 0,25 m. Jaká je celková gravitační síla (velikost i směr) působící díky nim na kouli s hmotností 2,0 kg, vzdálenou 0,20 m od m_1 a 0,15 m od m_2?



Obr. 14.32 Úlohy 10 a 11

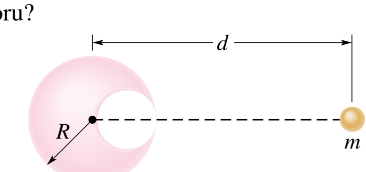
13Ú. Tři koule mají tyto hmotnosti a souřadnice: 20 kg, $x = 0{,}50$ m, $y = 1{,}0$ m; 40 kg, $x = -1{,}0$ m, $y = -1{,}0$ m; 60 kg, $x = 0$, $y = -0{,}5$ m. Jaká gravitační síla vyvolaná těmito koulemi působí na kouli s hmotností 20 kg umístěnou v počátku?

14Ú. Obr. 14.33 zobrazuje dvě homogenní tyče délky a a hmotnosti M, ležící na přímce ve vzdálenosti d od sebe. S použitím výsledku př. 14.2 napište určitý integrál určující gravitační přitažlivou sílu mezi nimi.



Obr. 14.33 Úloha 14

15Ú. Na obr. 14.34 je kulová dutina uvnitř olověné koule s poloměrem R; povrch dutiny prochází středem koule a dotýká se pravé strany koule. Hmotnost koule před vytvořením dutiny byla M. S jakou gravitační silou přitahuje olověná koule s dutinou malou kouli s hmotností m, která je umístěna ve vzdálenosti d od středu olověné koule na přímce spojující středy koulí a střed otvoru?



Obr. 14.34 Úloha 15

ODST. 14.4 Gravitace v blízkosti povrchu Země

16C. Vypočítejte gravitační zrychlení na povrchu Měsíce, znáte-li jeho hmotnost a poloměr (dodatek C).

17C. V jaké výšce nad zemským povrchem má gravitační zrychlení velikost $4{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$?

18C. Vážíte 120 lb a stojíte na chodníku vedle Světového obchodního centra v New Yorku. Předpokládejte, že se odtud přemístíte na vrchol jedné z jeho budov vysoké 1 350 ft. O kolik byste tam byli lehčí (díky tomu, že se nacházíte o trochu dále od středu Země)? Rotaci Země zanedbejte.

19C. Typická hmotnost neutronové hvězdy je srovnatelná s hmotností Slunce, její poloměr je však pouze 10 km. (a) Jaké gravitační zrychlení je na povrchu takové hvězdy? (b) Jak rychle dopadne předmět, který spadne z výšky 1 m nad povrchem (zanedbejte rotaci hvězdy)?

20C. Předmět ležící na rovníku je urychlován (a) do středu Země kvůli její rotaci, (b) směrem ke Slunci, protože Země kolem něho obíhá téměř po kruhové dráze, a (c) směrem ke středu naší Galaxie, protože Slunce obíhá kolem galaktického středu. Perioda oběhu Slunce je $2{,}5\cdot 10^{8}$ y a jeho poloměr $2{,}2\cdot 10^{20}$ m. Vypočítejte tato tři zrychlení a vyjádřete je v násobcích $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

21C. (a) Jaká bude tíha předmětu na povrchu Měsíce, je-li na zemském povrchu rovna 100 N? (b) V jaké vzdálenosti od Země se musí předmět nacházet, aby měl stejnou tíhu jako na Měsíci? Vzdálenost vyjádřete v násobcích poloměru Země.

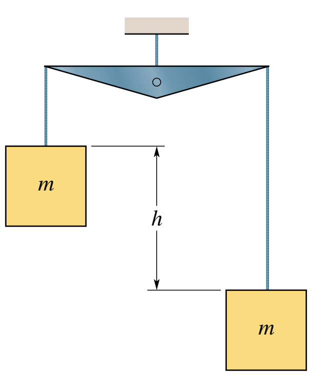
22Ú. Určujete g tak, že pustíte předmět z výšky přesně 10 m. Jaká relativní chyba v měření doby pádu by způsobila výslednou chybu 0,1 % pro g?

23Ú. Největší možná rychlost rotace planety je ta, pro kterou je gravitační síla na rovníku právě rovna dostředivé síle potřebné k této rotaci. (Proč?) (a) Ukažte, že příslušná nejkratší perioda rotace je

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}},$$

kde ϱ hustota homogenní sférické planety. (b) Vypočítejte periodu T pro hustotu $3{,}0\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, která odpovídá mnoha planetám, satelitům a asteroidům. U žádného astronomického objektu nebyla zaznamenána kratší perioda rotace, než jsme určili na základě této analýzy.

24Ú. Předměty stejné hmotnosti m jsou zavěšeny na závěsech nad zemským povrchem a jsou v rovnováze (obr. 14.35). Závěsy mají zanedbatelnou hmotnost a rozdíl jejich délek je h. Předpokládejte, že je Země kulatá a má hustotu $\varrho = 5{,}5\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$. (a) Ukažte, že rozdíl jejich tíh $m\Delta g$, způsobený odlišnou vzdáleností od Země, je roven $8\pi G\varrho m h/3$. (b) Rozhodněte, jaký musí být rozdíl délek závěsů, aby byl poměr $\Delta g/g = 1\cdot 10^{-6}$.



Obr. 14.35 Úloha 24

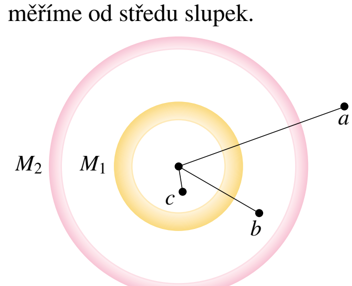
25Ú. Těleso je zavěšeno na pružinové váze v lodi jedoucí podél rovníku rychlostí v. (a) Ukažte, že hodnota odečítaná na stupnici bude blízká hodnotě $G_0(1 \pm 2\omega v/g)$, kde ω je úhlová rychlost Země a G_0 je údaj váhy, je-li rychlost lodi nulová. (b) Zdůvodněte znaménko $\pm$.

26Ú. Velice hmotné neutronové hvězdy rotují rychlostí cca 1 ot. za sekundu. Jaká by musela být minimální hmotnost takové hvězdy s poloměrem 20 km, aby se povrchová vrstva hmoty od hvězdy neodtrhla?

27Ú. Poloměr černé díry $R_č$ a její hmotnost $M_č$ jsou spojeny vztahem $R_č = 2GM_č/c^2$, kde c je rychlost světla. Označme a_{g0} gravitační zrychlení ve vzdálenosti $r_0 = 1{,}001 R_č$ od středu černé díry a předpokládejme, že ho lze určit z rov. (14.12) (platné pro velké černé díry). (a) Vyjádřete a_{g0} ve vzdálenosti r_0 jen pomocí $M_č$ (a univerzálních konstant). (b) Je a_{g0} rostoucí, nebo klesající funkcí proměnné $M_č$? (c) Čemu se rovná a_{g0} pro velmi velkou černou díru, jejíž hmotnost je $1{,}55\cdot 10^{12}$ hmotností Slunce? (d) Jaký by byl rozdíl gravitačního zrychlení mezi hlavou a nohama astronauta z př. 14.4, kdyby se nacházel v místě r_0, nohama směrem k černé díře? (e) Byly by slapové síly natahující astronauta výrazné?

ODST. 14.5 Gravitační pole uvnitř Země

28C. Dvě soustředné slupky s konstantní hustotou mají hmotnosti M_1 a M_2 (obr. 14.36). Jaká síla působí na bod o hmotnosti m, leží-li ve vzdálenosti (a) $r = a$, (b) $r = b$, (c) $r = c$? Vzdálenost r měříme od středu slupek.



Obr. 14.36 Cvičení 28

29C. S jakou rychlostí by proletěl předmět středem Země, kdyby byl upuštěn u ústí tunelu z př. 14.5?

30C. Uvažujte Zemi jako homogenní kouli o poloměru R. Ukažte, že na dně svislé šachty o hloubce D bude naměřena hodnota a_g

$$a_g = a_{g0}\left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

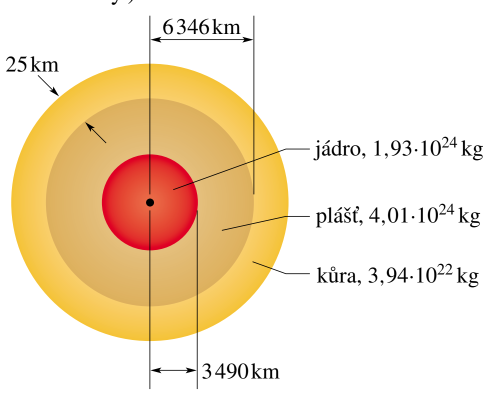
kde a_{g0} je hodnota zrychlení na povrchu.

31Ú. Pevná homogenní koule má hustotu $1{,}0\cdot 10^{4}$ kg a poloměr 1,0 m. Jaká gravitační síla působí na bod o hmotnosti m ve vzdálenosti (a) 1,5 m, (b) 0,5 m od středu koule? (c) Napište obecný vztah pro gravitační sílu působící na bod ve vzdálenosti $r \leqq 1{,}0$ m od středu koule.

32Ú. Homogenní koule s poloměrem R má na povrchu gravitační zrychlení a_g. Pro jaké dvě vzdálenosti od středu koule bude gravitační zrychlení rovno $a_g/3$? (*Tip*: Vezměte v úvahu vzdálenosti vně i uvnitř koule.)

33Ú. Řez Zemí. Země není homogenní a lze ji zhruba rozdělit na tři slupky: kůru, plášť a jádro. Rozměry slupek a jejich hmotnosti jsou uvedeny na obr. 14.37. Celková hmotnost Země je $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg a její poloměr bereme 6 371 km. Zanedbejte rotaci a předpokládejte, že Země je kulová.

(a) Určete a_g na povrchu. (b) Jaké a_g bude v hloubce 25 km na dně vrtu, který má být v rámci projektu Mohole proveden k rozhraní kůry a pláště? (Moho vrstva, kterou předpověděl geolog Mohorovičić, leží v hloubce 5 km až 70 km.) (c) Předpokládejte, že Země má známou hmotnost i rozměr, ale je to ideální koule s konstantní hustotou. Jaké bude a_g v hloubce 25 km? (Viz cvič. 30.) (Přesná měření a_g jsou citlivým indikátorem vnitřního uspořádání Země, mohou být ovšem ovlivněna i místními odchylkami hustoty.)



Obr. 14.37 Úloha 33. Měřítko není zachováno

ODST. 14.6 Gravitační potenciální energie

34C. (a) Jaká je energie systému v cvič. 1, složeného ze dvou hmotných bodů? (b) Jakou práci vykonají gravitační síly, ztrojnásobíte-li vzdálenost mezi hmotnými body? (c) Jakou práci vykonáte vy?

35C. (a) Vyjměte m_1 v úloze 9 a vypočítejte pro zbývající tři hmotné body gravitační potenciální energii. (b) Nyní vraťte m_1 na původní místo. Bude potenciální energie celého systému vyšší, nebo nižší? (c) Konáte kladnou, nebo zápornou práci při vyjmutí m_1 ze systému čtyř hmotných bodů? (d) Jaká práce je nutná pro navrácení m_1?

36C. Udává poměr m/M z úlohy 5 nejmenší možnou gravitační potenciální energii systému?

37C. Střední průměry Země a Marsu jsou $6{,}9 \cdot 10^3$ km a $1{,}3 \cdot 10^4$ km. Hmotnost Marsu je 0,11násobek hmotnosti Země. (a) Stanovte poměr průměrné hustoty Marsu a Země. (b) Jaká je hodnota g na Marsu? (c) Jaká je úniková rychlost pro Mars?

38C. Vesmírná loď se nachází na okraji naší Galaxie ve vzdálenosti 80 000 světelných let od jejího středu. Stanovte únikovou rychlost z naší Galaxie. Hmotnost Galaxie je $1{,}4 \cdot 10^{11}$ Sluncí, pro jednoduchost předpokládejte, že je v ní hmota rozprostřena rovnoměrně.

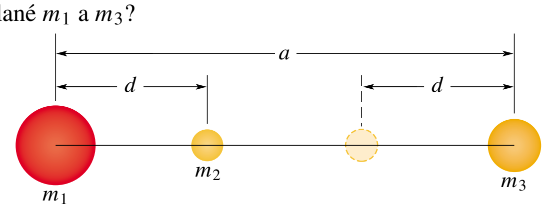
39C. Vypočítejte energii potřebnou k úniku od (a) Měsíce a (b) Jupiteru a vyjádřete ji v násobcích únikové rychlosti ze Země.

40C. Ukažte, že úniková rychlost $v_{\text{únik}}$ od Slunce v místě Země je $\sqrt{2}$násobkem posuvné oběžné rychlosti v_{ob} Země; předpokládejte, že její dráha kolem Slunce je kružnice. (Jde o speciální případ obecně platného vztahu: $v_{\text{únik}} = \sqrt{2} v_{\text{ob}}$.)

41C. Částice prachu komety o hmotnosti m se nachází ve vzdálenosti R od středu Země a ve vzdálenosti r od středu Měsíce. Jaká je potenciální energie systému částice + Země a jaká systému částice + Měsíc, je-li hmotnost Země M_Z a Měsíce M_M?

42C. Velké hvězdy mohou po spálení svého paliva zkolabovat v černou díru působením vlastních gravitačních sil. Jejich poloměr R_S je pak takový, že k přenesení tělesa o hmotnosti m z povrchu do nekonečna je třeba veškerá energie tělesa mc^2. Je-li hmotnost hvězdy M_S, ukažte pomocí Newtonova gravitačního zákona, že její poloměr je $R = GM_S/c^2$. (Správná hodnota R_S je ve skutečnosti dvojnásobná. K získání správného výsledku je totiž nutno využít Einsteinovy gravitační teorie namísto Newtonovy.)

43Ú. Středy tří koulí o hmotnostech $m_1 = 800$ g, $m_2 = 100$ g a $m_3 = 200$ g leží na jedné přímce ve vzdálenostech $a = 12$ cm a $d = 4$ cm (obr. 14.38). Nyní přemístíte střední kouli m_2 směrem k m_3 tak, že vzdálenost jejich středů bude $d = 4$ cm. Jakou práci na m_2 (a) jste vykonali vy a (b) jakou gravitační síly vyvolané m_1 a m_3?



Obr. 14.38 Úloha 43

44Ú. Raketa je urychlena při povrchu Země na rychlost $v = 2\sqrt{gR_Z}$ (kde R_Z je poloměr Země) a pak vzlétne směrem vzhůru. (a) Ukažte, že unikne ze Země. (b) Ukažte, že ve velké vzdálenosti od Země bude mít rychlost $v = \sqrt{gR_Z}$.

45Ú. (a) Jaká je úniková rychlost z kulového asteroidu, jehož poloměr je 500 km a jehož gravitační zrychlení na povrchu je $3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$? (b) Jak daleko od povrchu se dostane částice, jestliže opustí povrch asteroidu s radiální rychlostí $1\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? (c) Jakou rychlostí dopadne předmět na asteroid, jestliže byl puštěn z výšky 1 000 km nad povrchem?

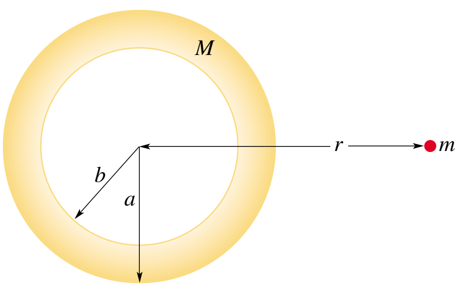
46Ú. Hypotetická planeta Deli podobná Marsu má hmotnost $5{,}0 \cdot 10^{23}$ kg, poloměr $3{,}0 \cdot 10^6$ m a nemá žádnou atmosféru. Vesmírná sonda o hmotnosti 10 kg je vystřelena vertikálně z jejího povrchu. (a) Jaká bude kinetická energie sondy ve vzdálenosti $4{,}0 \cdot 10^6$ m od středu Deli, jestliže sonda byla vystřelena s počáteční energií $5{,}0 \cdot 10^7$ J? (b) S jakou počáteční kinetickou energií musí být sonda vystřelena z povrchu Deli, jestliže má dosáhnout maximální vzdálenost $8{,}0 \cdot 10^6$ m od středu Deli? Předpokládejte, že Deli nerotuje.

47Ú. Dvojhvězdu tvoří dvě hvězdy o hmotnosti $3{,}0\cdot10^{30}$ kg obíhající okolo společného těžiště ve vzdálenosti $1{,}0\cdot10^{11}$ m. (a) Jakou úhlovou rychlostí obíhají? (b) Jestliže meteor prolétne těžištěm dvojhvězdy kolmo k rovině oběhu hvězd, jakou rychlost musí v tomto těžišti mít, aby unikl z dvojhvězdy „do nekonečna“?

48Ú. Dvě neutronové hvězdy jsou od sebe vzdáleny $1\cdot10^{10}$ m. Obě dvě mají hmotnost $1\cdot10^{30}$ kg a poloměr $1\cdot10^{5}$ m. Na začátku jsou obě hvězdy navzájem v klidu. (a) Jak rychle se budou hvězdy pohybovat, až se jejich vzdálenost zmenší na polovinu původní hodnoty? (b) S jakou rychlostí se srazí?

49Ú. Náboj je vystřelen svisle z povrchu Země s počáteční rychlostí 10 km/s. Jak vysoko nad povrch Země dolétne, jestliže zanedbáme odpor vzduchu?

50Ú. Koule o hmotnosti M a poloměru a má soustřednou dutinu o poloměru b (obr. 14.39). (a) Vyneste do grafu velikost F gravitační síly, kterou působí koule na částici o hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu koule, jako funkci r v intervalu $0 \leqq r \leqq \infty$. Uvažujte zejména hodnoty r rovné 0, a, b a ∞. (b) Nakreslete odpovídající křivku pro potenciální energii $E_p(r)$ systému.

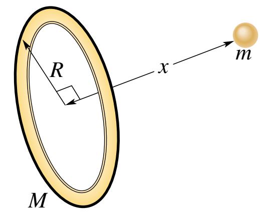


Obr. 14.39 Úloha 50

51Ú. Těleso o hmotnosti 20 kg udržujeme v počátku vztažné soustavy. Druhé těleso o hmotnosti 10 kg držíme na začátku pokusu na ose x ve vzdálenosti $x = 0{,}80$ m; poté ho pustíme. (a) Jaká je potenciální energie tohoto systému těsně po uvolnění? (b) Jaká je kinetická energie desetikilogramové hmoty poté, co se posunula o 0,20 m?

52Ú★. Některé planety (Jupiter, Saturn, Uran) jsou obklopeny skoro kruhovými prstenci; ty jsou pravděpodobně tvořeny materiálem, který se nedokázal zformovat do obíhajících měsíců. Dokonce i některé galaxie obsahují takovéto prstencové útvary. Uvažujme homogenní prstenec o hmotnosti M a poloměru R. (a) Jakou gravitační silou působí tento prstenec na částici o hmotnosti m, která leží na ose prstence ve vzdálenosti x od jeho středu (obr. 14.40)? (b) Předpokládejme, že se částice vlivem přitažlivosti prstence začne pohybovat. Najděte výraz pro rychlost, s jakou částice prolétne středem prstence.

53Ú★. Gravitační síla přitahuje k sobě dvě částice o hmotnostech M a m, které se zpočátku nalézaly v klidu ve velké vzdálenosti. Ukažte, že v každém okamžiku je rychlost jedné částice vůči druhé rovna $\sqrt{2G(M+m)/d}$, kde d je jejich okamžitá vzdálenost. (*Tip*: Použijte zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti.)



Obr. 14.40 Úloha 52

ODST. 14.7 Planety a družice: Keplerovy zákony

54C. Průměrná vzdálenost Marsu od Slunce je 1,52krát větší než vzdálenost Země od Slunce. Z Keplerova zákona o dobách oběhu planet spočítejte, kolik roků potřebuje Mars k jednomu oběhu kolem Slunce. Porovnejte váš výsledek s hodnotou uvedenou v dodatku C.

55C. Planeta Mars má měsíc Phobos, který obíhá po oběžné dráze o poloměru $9{,}4\cdot10^{6}$ m s periodou 7 h 39 min. Z těchto informací vypočítejte hmotnost Marsu.

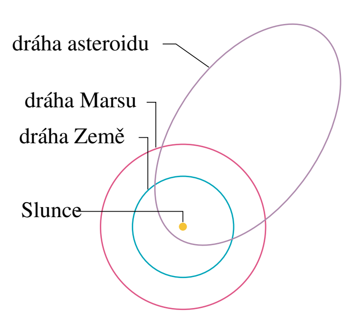
56C. Vypočítejte hmotnost Země z periody T a poloměru r oběžné dráhy Měsíce kolem Země: $T = 27{,}3$ dní a $r = 3{,}82\cdot10^{5}$ km. Předpokládejte zjednodušeně, že Měsíc obíhá okolo středu Země (a nikoli okolo společného těžiště).

57C. Naše Slunce o hmotnosti $2{,}0\cdot10^{30}$ kg obíhá okolo středu naší Galaxie, který je vzdálen $2{,}2\cdot10^{20}$ m, jeden oběh za $2{,}5\cdot10^{8}$ roků. Předpokládejme, že každá hvězda naší Galaxie má stejnou hmotnost jako naše Slunce, že všechny hvězdy jsou stejnoměrně rozloženy v kouli okolo středu Galaxie a že naše Slunce se nachází na okraji této koule. Odhadněte počet hvězd v naší Galaxii.

58C. Satelit byl umístěn na kruhovou oběžnou dráhu v poloviční vzdálenosti k Měsíci. Jakou má periodu oběhu v lunárních měsících? (Lunární měsíc je perioda otáčení Měsíce.)

59C. (a) Jakou posuvnou rychlost musí mít satelit na kruhové oběžné dráze ve výšce 160 km nad Zemí? (b) Jakou má periodu oběhu?

60C. Většina asteroidů obíhá okolo Slunce mezi Marsem a Jupiterem. Přesto některé asteroidy typu Apollo, s poloměrem okolo 30 km, obíhají po drahách, které kříží dráhu Země. Oběžná dráha jednoho takového asteroidu je znázorněna v obr. 14.41. Odečtěte hodnoty přímo z obrázku a vypočítejte v rocích dobu oběhu, s jakou asteroid obíhá.



Obr. 14.41 Cvičení 60

61C. Satelit, který se pohybuje po eliptické oběžné dráze, je v nejvyšším bodě 360 km nad povrchem Země a 180 km v nejnižším bodě. Vypočítejte (a) hlavní poloosu a (b) excentricitu trajektorie. (*Tip*: Viz př. 14.8.)

62C. Slunce leží zhruba v jednom z ohnisek oběžné dráhy Země. Jak daleko od něj leží druhé ohnisko? Vyjádřete svůj výsledek v násobcích slunečního poloměru $6{,}96\cdot 10^8$ m. Excentricita oběžné dráhy Země je 0,016 7 a hlavní poloosu lze vzít rovnu $1{,}50\cdot 10^{11}$ m. Viz obr. 14.14.

63C. (a) Použijte třetí Keplerův zákon (rov. (14.31)) k vyjádření gravitační konstanty G v těchto jednotkách: astronomická jednotka pro délku (ly), hmotnost Slunce (M_S) pro hmotnost a rok (y) pro jednotku času. (b) Jaký tvar má třetí Keplerův zákon v těchto jednotkách?

64C. Satelit visí nehybně nad jedním místem zemského rovníku. Jaká je výška jeho oběžné dráhy? (Jde o tzv. **geocentrickou oběžnou dráhu**.)

65C. Kometa zpozorovaná v dubnu roku 547 čínskými astronomy v den, který nazývali Woo Woo, byla opět spatřena v květnu roku 1994. Předpokládejte, že doba mezi oběma pozorováními je perioda oběhu komety, a předpokládejte její výstřednost rovnu 0,11. Jaká je (a) velikost hlavní poloosy oběžné dráhy komety a (b) její největší vzdálenost od Slunce v násobcích průměrného poloměru R_P oběžné dráhy Pluta?

66C. V roce 1993 nám vesmírná sonda Galileo poslala fotografii (obr. 14.42) asteroidu 243 Ida spolu s jeho malým měsícem. Jedná se o první potvrzený případ systému asteroid+jeho měsíc. Měsíc na fotografii má šířku 1,5 km a je vzdálen 100 km od středu 55 km dlouhého asteroidu. Tvar oběžné dráhy měsíce není přesně znám; předpokládáme, že je kruhová s periodou 27 hodin. (a) Jaká je hmotnost asteroidu? (b) Objem asteroidu, měřený z fotografií Galilea, je 14 100 km^3. Jaká je hustota asteroidu?

Obr. 14.42 Cvičení 66. Na fotografii z družice *Galileo* je asteroid 243 Ida se svým maličkým měsícem.

67Ú. Uvažujme, že satelit z cvič. 64 je na oběžné dráze na brněnském poledníku. Vy jste v budově VUT v Brně (zeměpisná šířka je 49,2°) a chcete zachytit signál ze satelitního vysílání. Jakým směrem musíte natočit anténu?

68Ú. V roce 1610 objevil Galileo Galilei pomocí svého teleskopu čtyři největší měsíce Jupiteru. Průměrné poloměry a jejich oběžné dráhy a periody T oběhu ve dnech jsou uvedeny v tabulce.

JMÉNO	$\dfrac{a}{10^8\ \mathrm{m}}$	$\dfrac{T}{\mathrm{d}}$
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganymedes	10,7	7,16
Callisto	18,8	16,7

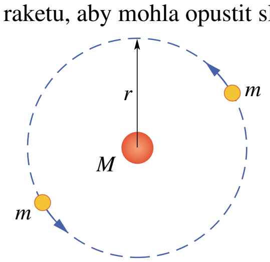
(a) Vyneste do grafu závislost $\log a$ (osa y) na $\log T$ (osa x) a ukažte, že je lineární. (b) Změřte sklon přímky a výsledek porovnejte s hodnotou, kterou lze předpovědět z Keplerova třetího zákona. (c) Z průsečíku přímky s osou y zjistěte hmotnost Jupiteru.

69Ú. Ukažte s pomocí Keplerova třetího zákona (rov. (14.31)), jak mohl Newton odvodit, že síla udržující Měsíc na jeho oběžné dráze (uvažujme kruhovou), je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti od středu Země.

70Ú. Jistá dvojhvězda je tvořena hvězdami se stejnými hmotnostmi jako naše Slunce. Hvězdy obíhají okolo společného těžiště. Vzdálenost mezi nimi je stejná, jako je vzdálenost mezi Sluncem a Zemí. Jaká je perioda jejich oběhu?

71Ú. Speciální trojhvězda se skládá ze dvou hvězd o hmotnostech m, které obíhají po stejné kruhové oběžné dráze o poloměru r okolo centrální hvězdy o hmotnosti M (obr. 14.43). Obě menší hvězdy jsou vždy na protilehlé straně oběžné dráhy. Odvoďte vztah pro periodu oběhu těchto hvězd.

72Ú. (a) Jaká je úniková rychlost ze Sluneční soustavy pro těleso, které je na oběžné dráze Země (dráha s poloměrem R), ale je daleko od Země? (b) Jestliže těleso již má rychlost stejně velkou, jako je rychlost oběhu Země, jakou rychlost je mu ještě třeba dodat, aby mohlo uniknout jako v (a)? (c) Předpokládejme, že těleso je vystřeleno ze Země ve směru oběhu Země okolo Slunce. Jakou počáteční rychlost musí mít, aby poté, co se vzdálí od Země, ale má stále zhruba stejnou vzdálenost od Slunce, se vzdálilo ze sluneční soustavy? (Je to rychlost potřebná pro jakoukoliv pozemskou raketu, aby mohla opustit sluneční soustavu.)



Obr. 14.43 Úloha 71

73Ú★. Tři identické hvězdy o hmotnostech M jsou umístěny na vrcholech rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a.

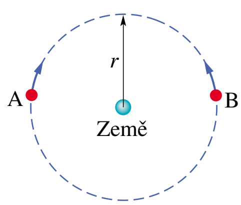
Jakou rychlostí se musejí pohybovat, jestliže všechny obíhají pod vlivem gravitačních sil ostatních hvězd po opsané kružnici a zároveň zachovávají svou vzájemnou polohu?

74Ú★. Družice na kruhové oběžné dráze byla navržena tak, aby se vznášela nad určitým místem zemského povrchu. Omylem se stalo, že poloměr obíhání družice byl o 1,0 km větší, než měl být. Jak rychle a v jakém směru se bude pohybovat bod přímo pod satelitem po zemském povrchu?

ODST. 14.8 Družice: Oběžné dráhy a energie

75C. Asteroid, jehož hmotnost je $2{,}0\cdot 10^{-4}$násobkem hmotnosti Země, obíhá po kruhové dráze okolo Slunce ve vzdálenosti rovné dvojnásobku vzdálenosti Země–Slunce. (a) Spočtěte periodu obíhání asteroidu v rocích. (b) Jaký je poměr kinetické energie asteroidu a Země?

76C. Uvažujte dvě stejné družice A a B o stejných hmotnostech m pohybující se po stejné kruhové dráze o poloměru r kolem Země (hmotnost M_Z), ale v opačných směrech, tzn. na kolizní dráze (obr. 14.44). (a) Pomocí G, M_Z, m a r vyjádřete celkovou mechanickou energii $E_A + E_B$ soustavy obou družic + Země před srážkou. (b) Jestliže je srážka dokonale nepružná, tzn. vznikne-li jediná troska o hmotnosti $2m$, určete celkovou mechanickou energii bezprostředně po kolizi. (c) Popište další pohyb trosky.



Obr. 14.44 Cvičení 76

77Ú. Dvě družice (A a B), každá o hmotnosti m, jsou vypuštěny na oběžné kruhové dráhy kolem Země. Údaje jsme si přečetli v mílích: družice A obíhá ve výšce 4 000 mi, družice B ve výšce 12 000 mi. Poloměr Země R_Z je 4 000 mi. (a) Jaký je poměr potenciálních energií družic B a A? (b) Jaký je poměr kinetických energií družic B a A? (c) Která družice má větší celkovou energii, jestliže hmotnost každé z nich je 14,6 kg? O kolik?

78Ú. Použitím zákona zachování mechanické energie a rovnice (14.44) ukažte, že pokud těleso obíhá planetu po eliptické dráze, pak je vzdálenost r od planety a rychlost tělesa v svázána vztahem

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

79Ú. Využijte výsledku úlohy 78 a dat v př. 14.8 k výpočtu (a) rychlosti v_p Halleyovy komety v perihéliu a (b) její rychlosti v_a v aféliu. (c) Použitím zákona zachování momentu hybnosti vzhledem ke Slunci najděte poměr vzdáleností komety v perihéliu R_p a v aféliu R_a, vyjádřený pomocí v_p a v_a.

80Ú. Z kvizu v americkém časopise (údaje v mílích): (a) Je potřeba více energie k vynesení družice do výšky 1 000 mi nad Zemí nebo k urychlení na kruhovou oběžnou dráhu, jakmile se družice v této výšce nachází? (Uvažujte poloměr Země 4 000 mi.) (b) Jaký výsledek dostaneme pro 2 000 mi a (c) pro 3 000 mi?

81Ú. Jednou z možností, jak zaútočit na družici obíhající Zemi, je vypustit roj kuliček na stejné dráze jako družice, ale v opačném směru. Uvažujte družici obíhající 500 km nad povrchem Země, která se srazí s kuličkou o hmotnosti 4,0 g. (a) Jaká je kinetická energie kuličky ve vztažné soustavě spojené s družicí? (b) Jaký je poměr této kinetické energie ke kinetické energii čtyřgramového náboje vystřeleného z moderní pušky počáteční rychlostí 950 m·s^{-1}?

82Ú. Uvažujte družici obíhající Zemi po kruhové dráze. Určete, jak závisejí následující veličiny na poloměru r dráhy družice: (a) perioda, (b) kinetická energie, (c) moment hybnosti a (d) rychlost družice.

83Ú. Jaká je (a) rychlost a (b) perioda 220 kg družice na téměř kruhové dráze 640 km nad povrchem Země? Předpokládejte dále, že družice ztrácí svoji mechanickou energii s průměrnou rychlostí $1{,}4\cdot 10^5$ J na jeden oběh. Přijmeme-li jako dobrou aproximaci, že výslednou trajektorií je „kružnice s pomalu se zmenšujícím poloměrem“, určete na konci 1 500. oběhu (c) výšku dráhy družice, (d) její rychlost a (e) periodu. (f) Jaká je velikost průměrné brzdné síly? (g) Zachovává se moment hybnosti okolo zemského středu pro družici nebo pro soustavu družice + Země?

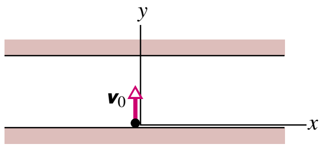
84Ú. Oběžná dráha Země kolem Slunce je téměř kruhová: nejmenší vzdálenost je $1{,}47\cdot 10^8$ km, největší $1{,}52\cdot 10^8$ km. Určete odpovídající změny (a) celkové energie, (b) potenciální energie, (c) kinetické energie a (d) oběžnou rychlost. (*Tip*: Využijte zákonů zachování energie a momentu hybnosti.)

85Ú. V raketoplánu o hmotnosti $m = 2\,000$ kg obíhá kapitán Janeway planetu o hmotnosti $M = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg na dráze o poloměru $r = 6{,}80\cdot 10^6$ m. Jaká je (a) perioda obíhání a (b) rychlost raketoplánu? Janeway odpálí dopředu mířící pomocnou raketu, takže se rychlost raketoplánu zmenší o 1,00 %. Jaká je bezprostředně poté (c) rychlost, (d) kinetická energie, (e) gravitační potenciální energie a (f) mechanická energie raketoplánu? (g) Jaká je nyní hlavní poloosa oběžné dráhy raketoplánu? (h) Jaký je rozdíl mezi periodou původní a nové, eliptické oběžné dráhy a která z nich je menší?

ODST. 14.9 Einstein a gravitace

86C. Na obr. 14.20b ukazuje váha, na které stojí šedesátikilový student, hodnotu 220 N. Jak dlouho bude trvat melounu, než dopadne na zem, jestliže mu vyklouzne z výšky 2,1 m nad zemí?

87Ú. Na obr. 14.45 jsou znázorněny stěny trubice v kosmické lodi v kosmickém prostoru; loď má zrychlení $\boldsymbol{a} = (2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\boldsymbol{i}$. Elektron je vyslán ze znázorněného počátku přes šířku trubice 3,0 cm s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = (0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})\boldsymbol{j}$. Popište pomocí jednotkových vektorů vzhledem k lodi, jaké je (a) posunutí elektronu na konci jeho letu a (b) jeho rychlost těsně před dopadem na protější zeď.



Obr. 14.45 Úloha 87

88Ú. Spočtěte s užitím dodatku C pro každou planetu vzdálenost těžiště soustavy Slunce + planeta od středu Slunce. Srovnejte ji s rozměry Slunce.

Již samotný Jupiter způsobuje, že těžiště sluneční soustavy leží poblíž slunečního okraje; společné působení Jupiteru, Saturnu, Neptunu a Pluta „v zákrytu" by vzdálilo těžiště sluneční soustavy až na 2,17násobek slunečního poloměru od středu Slunce. Kvůli různě dlouhým oběžným dobám těchto planet koná Slunce kolem těžiště sluneční soustavy „lístkový" pohyb s periodou cca 178,7 let, sestávající z cca padesátileté části pravidelné (trojlístkové) a z části chaotické. To se projevuje i v našem životě, viz např. I. Charvátová: Solar-Terestrial and Climatic Phenomena…, Surveys in Geophysics, 1997, **18**, pp. 131–146.

PRO POČÍTAČ

89Ú. Sonda o hmotnosti 6 000 kg obíhá Slunce na kruhové dráze o poloměru $108\cdot10^6$ km (poloměr oběžné dráhy Venuše). Kosmická agentura chce dostat sondu na dráhu o stejném poloměru jako Země, tzn. na kružnici o poloměru $150\cdot10^6$ km. Prvním krokem je zvýšení rychlosti sondy tak, aby vzniklá eliptická trajektorie měla vzdálenost v perihéliu rovnou poloměru požadované kruhové dráhy. (a) Spočítejte požadovaný přírůstek rychlosti a energie. Nakreslete eliptickou dráhu (rovnice elipsy v polárních souřadnicích se středem v počátku souřadnic je

$$r^2 = \frac{r_p r_a (r_p + r_a)^2}{(r_p + r_a)^2 \sin^2\theta + 4 r_p r_a \cos^2\theta},$$

kde r_p je vzdálenost perihélia a r_a vzdálenost afélia). (b) Když je dosaženo afélia, je rychlost sondy opět změněna tak, aby se dostala na výslednou kruhovou dráhu. Jaké změny rychlosti a energie jsou k tomu nutné?

90Ú. Sestavte v počítači seznam period T a hlavních poloos a pro planety uvedené v tab. 14.3. Vynásobte všechna T takovým faktorem, aby T bylo v sekundách. (a) Uložte hodnoty T^2 a a^3 do nových seznamů. Nechte počítač provést lineární regresi T^2 vůči a^3. Z parametrů regrese a s použitím známé hodnoty G určete hmotnost Slunce. (b) Vypočtěte hodnoty $\log T$ a $\log a$. Nechte počítač nakreslit závislost $\log T$ na $\log a$ a proveďte lineární regresi. Z jejích parametrů a ze známé hodnoty G určete opět hmotnost Slunce.