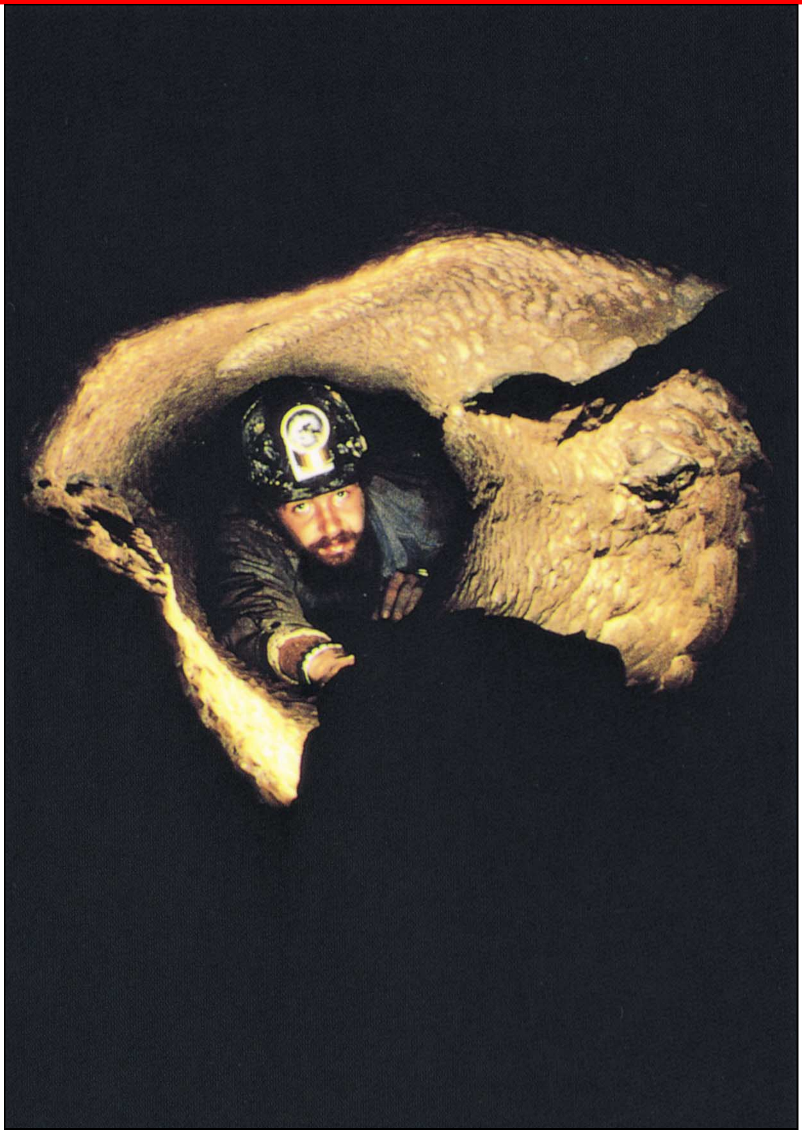
3
Vektory



Po dvě desetiletí prozkoumávali speleologové 200 km dlouhý systém Mamutí jeskyně a jeskyně Flint Ridge. Věřili, že jsou propojeny, a doufali, že se jim podaří spojovací chodby odhalit. Na fotografii je zachycen jeden z členů úspěšného týmu Richard Zopf, jak spouští batoh průlezem Tight Tube, ležícím hluboko v nitru jeskynního labyrintu Flint Ridge. Po dvanácti hodinách postupu se Zopf a jeho šest druhů protáhli proudem ledové vody a octli se v Mamutí jeskyni. Komplex Mamutí–Flintovy jeskyně se tak stal nejdelší jeskyní na světě. Lze nějak jednoduše charakterizovat vzájemnou polohu východiska a cíle cesty průzkumného družstva, aniž bychom podrobně popisovali celou spletitou trasu?

3.1 VEKTORY A SKALÁRY

Pohyb částice po přímce se může dít pouze ve dvou směrech. Jeden z nich můžeme označit za kladný, druhý bude záporný. V trojrozměrném prostoru však již pouhé dvě možnosti, odlišené znaménky plus a minus, pro určení směru pohybu nestačí. Je třeba použít vektorů.

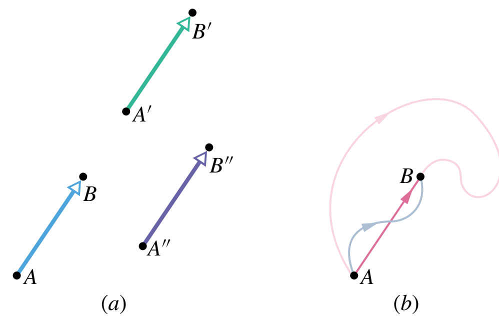
Vektor je zadán směrem a velikostí. S vektory lze počítat podle určitých pravidel, jimiž se za chvíli budeme podrobněji zabývat. **Vektorová veličina** má také směr a velikost. K fyzikálním veličinám, které mohou být popsány vektory (mají tzv. vektorový charakter), patří například posunutí, rychlost a zrychlení.

Některým fyzikálním veličinám nelze přisoudit směr. Například teplota, tlak, energie, hmotnost a čas žádný směr nemají. Takovým veličinám říkáme skaláry a při počítání s nimi používáme pravidla běžné algebry. **Skalár** je určen jediným číslem (například 12,3 kg, 25 J, apod.).* Nejjednodušší vektorovou veličinou je posunutí (změna polohy). Nazýváme ji **vektor posunutí**. (Podobně mluvíme i o vektoru rychlosti a vektoru zrychlení.) Přejde-li pohybující se částice z bodu A do bodu B (obr. 3.1a), lze její posunutí znázornit šipkou směřující z A do B. Šipka je grafickým vyjádřením vektoru. Abychom na dalších obrázcích odlišili vektory od šipek s jiným významem, budeme v koncovém bodě každého vektoru kreslit malý trojúhelník.

Šipky z A do B, z A' do B' a z A'' do B'' na obr. 3.1a představují stejnou změnu polohy hmotného bodu a nebudeme je rozlišovat. Všechny mají stejnou velikost a směr a určují tedy stejný vektor posunutí.

Známe-li pouze vektor posunutí částice, nedokážeme určit její skutečnou trajektorii mezi počátečním a koncovým bodem tohoto posunutí. Na obr. 3.1b jsou zakresleny tři různé trajektorie spojující body A a B. Odpovídá jim stejné výsledné posunutí jako na obr. 3.1a. Posunutí nepopisuje detaily pohybu, určuje pouze jeho celkový výsledek.

* Nezaměňujme skaláry se **souřadnicemi vektorů** na přímce (v jednorozměrném prostoru). Vektor na orientované přímce je číselně reprezentován jedinou souřadnicí. Proto při pevné volbě souřadnicové osy často hovoříme o této souřadnici jako o samotném vektoru, jako tomu bylo v celé kap. 2. Kladné či záporné znaménko souřadnice vektoru rozhoduje o tom, zda je jeho směr souhlasný či nesouhlasný s kladným směrem orientované přímky. Změníme-li orientaci přímky, změní se znaménko souřadnice zadaného vektoru. V případě skaláru patří znaménko k hodnotě. Hodnoty skalárních veličin jsou zcela nezávislé na jakékoli volbě soustavy souřadnic. Při popisu volného pádu tělesa o hmotnosti m v blízkosti povrchu Země máme dvojí možnost volby kladné orientace souřadnicové osy y: nahoru nebo dolů. V případě první volby budou rychlost i zrychlení tělesa (přesněji jejich y-ové souřadnice) v každém okamžiku záporné, v případě druhého způsobu volby budou kladné. Hmotnost tělesa však bude v obou případech stejná.



Obr. 3.1 (a) Všechny vyznačené šipky představují stejné posunutí. (b) Všechny tři trajektorie spojující dva body odpovídají témuž posunutí.

Místo grafického vyjádření lze vektor posunutí zadat velikostí a úhly, které tento vektor svírá se dvěma zvolenými vztažnými směry. Přesvědčíme se o tom při řešení příkladu 3.1.

PŘÍKLAD 3.1

Skupina speleologů, která v roce 1972 objevila spojení mezi Mamutí jeskyní a jeskynním systémem Flint Ridge, absolvovala cestu od Austinova vchodu k řece Echo v Mamutí jeskyni (obr. 3.2a). Ušla při tom 2,6 km západním směrem, 3,9 km na jih a vystoupila o 25 m svisle vzhůru. Jaký vektor posunutí odpovídá této cestě?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjistíme velikost posunutí ve vodorovném směru, kterou označíme d_h. Na obr. 3.2b je znázorněn průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny (pohled shora). Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

$$d_h = \sqrt{(2{,}6\,\mathrm{km})^2 + (3{,}9\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km}.$$

Průmět vektoru posunutí do vodorovné roviny svírá se směrem východ-západ úhel θ, určený výrazem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(3{,}9\,\mathrm{km})}{(2{,}6\,\mathrm{km})} = 1{,}5,$$

tj.

$$\theta = 56^\circ.$$

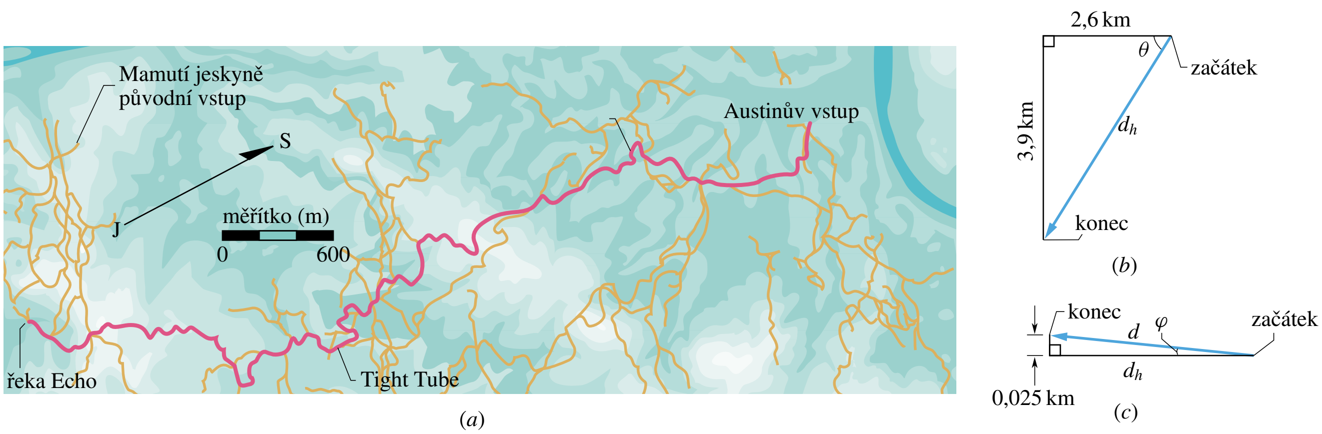
Celkové posunutí $\boldsymbol{d}$ již snadno určíme z obr. 3.2c (boční pohled). Má velikost

$$d = \sqrt{(4{,}69\,\mathrm{km})^2 + (0{,}025\,\mathrm{km})^2} = 4{,}69\,\mathrm{km} \doteq 4{,}7\,\mathrm{km}$$

a svírá s vodorovnou rovinou úhel φ,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(0{,}025\,\mathrm{km})}{(4{,}69\,\mathrm{km})} = 0{,}005\,3,$$
$$\varphi = 0{,}3^\circ.$$

Vektor posunutí, určující změnu polohy speleologické skupiny, má velikost 4,7 km, svírá se směrem východ-západ

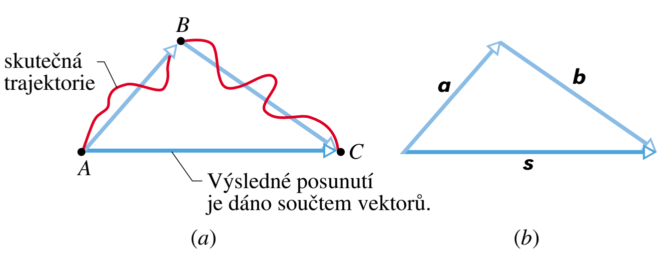


Obr. 3.2 Příklad 3.1. (a) Mapka části systému Mamutí–Flintova jeskyně s vyznačením trasy speleologické skupiny od Austinova vchodu k řece Echo. (b) Průmět posunutí skupiny do vodorovné roviny (nadhled). (c) Boční pohled. (Upraveno podle oficiální mapy.)

úhel 56° a od vodorovné roviny je odkloněn směrem vzhůru o úhel 0,3°. Celkové posunutí ve svislém směru je zanedbatelné v porovnání s pohybem ve vodorovné rovině. Ve skutečnosti však museli průzkumníci nesčetněkrát šplhat nahoru a dolů. Cesta, kterou prošli, se nijak nepodobala vektoru posunutí, který představuje pouze spojnici výchozího a koncového bodu.

3.2 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: GRAFICKÁ METODA

Uvažujme částici, která se pohybuje nejprve z bodu A do bodu B a poté z bodu B do C (obr. 3.3a). Její celkové posunutí je určeno dvěma dílčími posunutími AB a BC bez ohledu na to, jaká byla její skutečná trajektorie. Výsledkem těchto dvou po sobě následujících posunutí je posunutí jediné: z bodu A do bodu C. Posunutí AC nazýváme vektorovým součtem posunutí AB a BC.



Obr. 3.3 (a) AC je vektorovým součtem vektorů AB a BC. (b) Jiné označení vektorů z obrázku (a).

Obr. 3.3b znázorňuje vektory překreslené z obr. 3.3a a označené tučnými písmeny $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{s}$. Tento způsob značení vektorů budeme používat v celém dalším textu. V zápisech psaných ručně značíme vektory šipkou nad příslušným symbolem, např. $\vec{a}$. Pro označení velikosti vektoru používáme obyčejnou kurzívu, např. a, b a s. Tučný symbol zahrnuje tedy úplnou informaci o vektoru, tj. o jeho velikosti i směru. Pro zápis velikosti vektoru, zejména u složitějších výrazů, lze použít i následujícího značení: $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$.

Vztah mezi vektory na obr. 3.3b můžeme zapsat jedinou vektorovou rovnicí

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad \text{(sčítání)}, \tag{3.1}$$

která vyjadřuje skutečnost, že vektor $\boldsymbol{s}$ je součtem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Uvědomme si, že symbol + a slova „součet“ a „sčítat“ mají nyní jiný význam, než je běžné v algebře čísel.

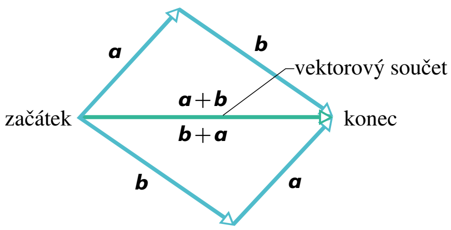
Obr. 3.3 je návodem, jak sečíst dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ graficky. (1) Nejprve narýsujeme vektor $\boldsymbol{a}$ ve vhodném měřítku a odpovídajícím směru. (2) Počáteční bod vektoru $\boldsymbol{b}$ umístíme do koncového bodu vektoru $\boldsymbol{a}$. Dbáme na to, aby oba vektory byly zakresleny ve stejném měřítku a svíraly správný úhel. (3) Vektorový součet $\boldsymbol{s}$ získáme jako spojnici počátečního bodu vektoru $\boldsymbol{a}$ s koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{b}$. Všimněte si, že popsaný postup pracuje jak s velikostí, tak se směrem obou vektorů. Jistě jej dokážete snadno zobecnit pro případ součtu většího počtu vektorů.

Právě definovaný vektorový součet má dvě důležité vlastnosti.

(1) Výsledek nezávisí na pořadí sčítanců, tj.

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \quad \text{(komutativní zákon)}. \tag{3.2}$$

O platnosti komutativního zákona nás přesvědčí obr. 3.4. Z něj je také zřejmé, proč se někdy mluví o pravidlu rovnoběžníka: součet $\boldsymbol{s}$ tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

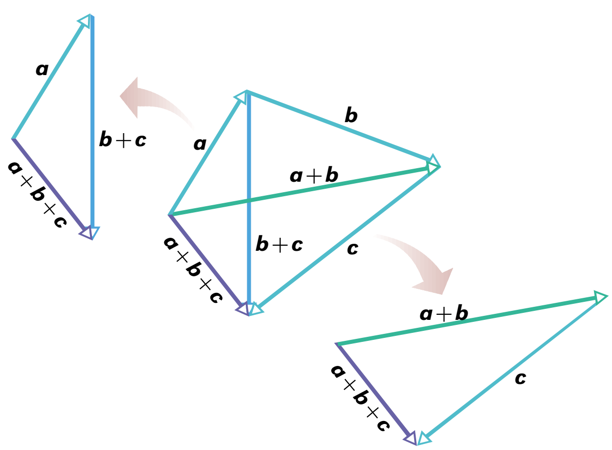


Obr. 3.4 Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ lze sčítat v libovolném pořadí (vztah (3.2)).

(2) Sčítáme-li několik vektorů, je lhostejné, jak je při tom seskupíme. Máme-li například určit součet vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, můžeme nejprve sečíst třeba vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a k výsledku pak přičíst vektor $\boldsymbol{c}$. Stejně dobře však můžeme sečíst napřed vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ a k jejich součtu nakonec přičíst vektor $\boldsymbol{a}$. Výsledek bude v obou případech stejný. Matematický zápis tohoto pravidla je následující:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \text{(asociativní zákon).} \qquad (3.3)$$

Platnost asociativního zákona ilustruje grafická konstrukce na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ lze při sčítání libovolně seskupit (viz vztah (3.3)).

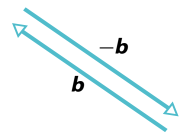
Vektor $\boldsymbol{0}$ nulové velikosti nazýváme **nulový**. Jeho směr není definován. Nulový vektor má mezi vektory stejné postavení jako nula mezi čísly: pro každý vektor $\boldsymbol{b}$ platí $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{b}$. Symbolem $-\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor, který má stejnou velikost jako vektor $\boldsymbol{b}$, avšak **opačný** směr (obr. 3.6). Nazýváme jej **vektorem opačným** k $\boldsymbol{b}$. Vektor opačný k opačnému je opět původní vektor, tj. $-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$. Snadno se přesvědčíme, že součtem navzájem opačných vektorů je nulový vektor:

$$\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$

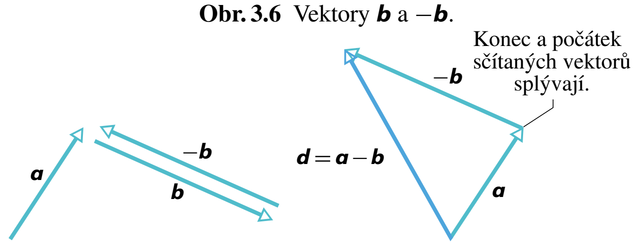
Této vlastnosti využijeme k definici rozdílu dvou vektorů. Rozdílem vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozumíme vektor

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) \quad \text{(odčítání),} \qquad (3.4)$$

který označujeme $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. Získáme jej tak, že k vektoru $\boldsymbol{a}$ *přičteme* vektor $-\boldsymbol{b}$. Příklad grafické konstrukce je na obr. 3.7.



Obr. 3.6 Vektory $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.7 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{b}$. (b) Odečtení vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ je ekvivalentní sečtení vektorů $\boldsymbol{a}$ a $-\boldsymbol{b}$.

I když jsme pravidla pro sčítání a odečítání vektorů zaváděli pro vektory posunutí, je samozřejmě možné jich použít pro jakékoli vektory, bez ohledu na to, zda představují nějakou fyzikální veličinu (sílu, rychlost apod.), či nikoliv. Tak jako při počítání se skaláry má však smysl sčítat pouze vektory stejného druhu (ve fyzice vektory odpovídající téže fyzikální veličině).

Můžeme sečíst například dvě posunutí nebo dvě rychlosti, nelze však sčítat posunutí a rychlost. Byl by to stejný nesmysl jako chtít sečíst 21 sekund a 12 metrů.

KONTROLA 1: Dvě posunutí $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti 3 m a 4 m. Označme $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Jak je třeba volit úhel obou posunutí, aby velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ byla (a) co největší, (b) co nejmenší? V obou případech velikost vektoru $\boldsymbol{c}$ určete.

PŘÍKLAD 3.2

Při branném závodě je úkolem soutěžícího vzdálit se co možná nejvíce od startu třemi postupnými přímočarými přesuny: (a) $\boldsymbol{a}$: 2,0 km na východ, (b) $\boldsymbol{b}$: 2,0 km severovýchodním směrem, svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 30°, (c) $\boldsymbol{c}$: 1,0 km na západ. Pořadí přesunů může závodník volit a kterýkoliv z vektorů $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ může zaměnit vektorem opačným. Do jaké největší vzdálenosti od startu (měřeno vzdušnou čarou) se dokáže dostat?

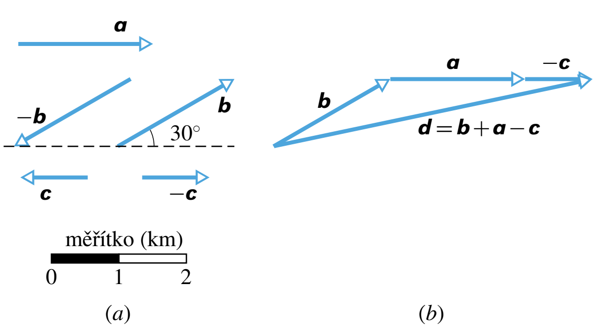
ŘEŠENÍ: Ve vhodném měřítku zakreslíme vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8a). Vybereme některou z povolených trojic posunutí a v souladu s pravidlem pro sčítání vektorů je nakreslíme tak, aby počáteční bod každého následujícího vektoru splynul s koncovým bodem předcházejícího. (Volba pořadí vektorů při sčítání je samozřejmě libovolná, neboť neovlivní výsledek.) Počáteční bod prvního vektoru z vybrané trojice pak označuje místo startu, koncový bod třetího určuje cílovou polohu přesunu. Vektorový součet $\boldsymbol{d}$, spojující tyto dva body, je vektorem výsledného posunutí. Jeho velikost d představuje dosaženou vzdálenost závodníka od startu.

Snadno zjistíme, že největší vzdálenosti lze docílit volbou trojice přesunů určených vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$ (obr. 3.8b):

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Změříme-li velikost vektoru $\boldsymbol{d}$ přímo v obrázku a použijeme-li vyznačeného měřítka, dostaneme vzdálenost d v kilometrech:

$$d = 4{,}8\,\mathrm{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 3.8 Příklad 3.2. (a) Soubor vektorů pro výběr povolené trojice posunutí. (b) Závodník dosáhne největší vzdálenosti od startu, zvolí-li pro přesun trojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{c}$. Obrázek zachycuje jedno z možných pořadí přesunů. Výsledný vektor posunutí je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

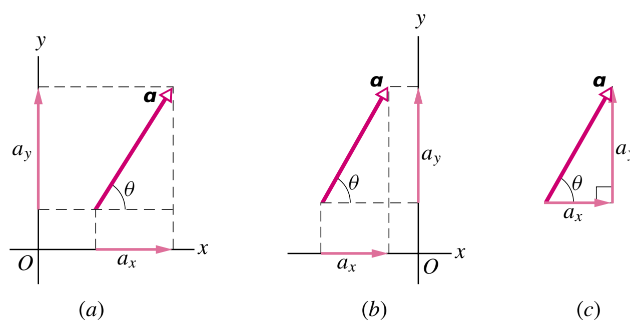
3.3 SLOŽKY VEKTORŮ

Grafické sčítání vektorů je zdlouhavé a málo přesné. Daleko elegantnější a snazší je metoda algebraická, při níž je však třeba vyjádřit vektory v souřadnicích. Pravoúhlou soustavu souřadnic volíme obvykle tak, že osy x a y umístíme do roviny nákresu (obr. 3.9a). Osu z pak vedeme počátkem soustavy souřadnic kolmo k nákresně. Prozatím budeme pracovat pouze s vektory v rovině a osu z nebudeme potřebovat.

Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9 leží v rovině xy. Vedeme-li jeho počátečním i koncovým bodem kolmice k souřadnicovým osám, vzniknou na osách úseky a_x a a_y. Nazýváme je **složky vektoru $\boldsymbol{a}$** ve směrech x a y. Tento postup představuje rozklad vektoru do složek. Obecně pracujeme s vektory v trojrozměrném prostoru, kde mají tři složky. Vektor $\boldsymbol{a}$ na obr. 3.9a má v tomto obecném pojetí třetí složku nulovou. Posuneme-li vektor tak, aby jeho směr zůstal zachován, jeho složky se nezmění (obr. 3.9b). Pomocí pravoúhlého trojúhelníka na obr. 3.9a snadno najdeme výrazy pro složky vektoru $\boldsymbol{a}$:

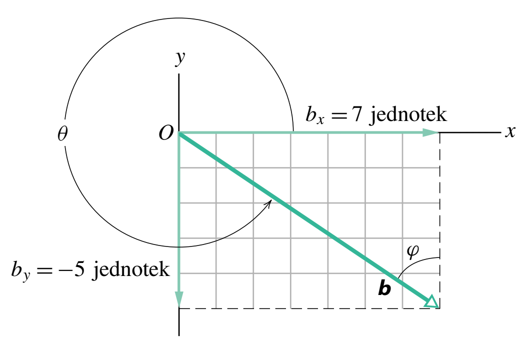
$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

kde θ je úhel, který vektor $\boldsymbol{a}$ svírá s kladným směrem osy x a a je velikost vektoru. Z obr. 3.9c vidíme, že vektor a jeho x-ová a y-ová složka tvoří pravoúhlý trojúhelník. Je také zřejmé, jak sestrojíme vektor pomocí jeho složek: použijeme stejnou geometrickou konstrukci jako při sčítání vektorů.



Obr. 3.9 (a) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$. (b) Při posunutí vektoru (při zachování jeho velikosti i směru) se jeho složky nezmění. (c) Složky vektoru $\boldsymbol{a}$ tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, jehož přeponou je vektor $\boldsymbol{a}$.

V závislosti na hodnotě úhlu θ mohou být složky vektorů kladné, záporné nebo nulové. Pro vyznačení znaménka složek používáme v obrázcích malých plných šipek. Podle běžné dohody je šipka orientována v kladném směru osy, je-li příslušná složka vektoru kladná a naopak. Vektor $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.10 má složku b_x kladnou a složku b_y zápornou.



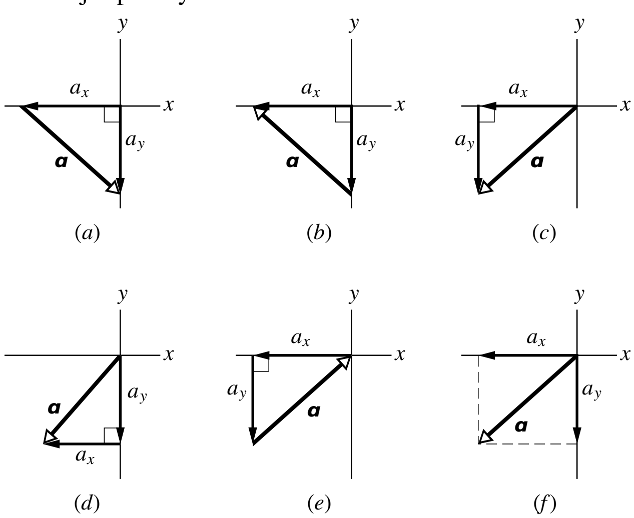
Obr. 3.10 Složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru osy x je kladná, složka ve směru osy y je záporná.

Vektor je svými složkami jednoznačně zadán stejně dobře jako svou velikostí a směrem. Všimněme si znovu obr. 3.9a. Vektor $\boldsymbol{a}$, ležící v rovině tvořené osami x a y, je v každém případě plně určen dvojicí čísel: velikostí a a úhlem θ, nebo složkami a_x a a_y. Každá z těchto dvojic obsahuje tutéž výslednou informaci. Podle potřeby můžeme přecházet od jednoho způsobu vyjádření vektoru k druhému. Známe-li např. složky a_x a a_y, vypočteme velikost a a úhel θ takto (obr. 3.9c):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Při řešení úloh můžeme vektor vyjadřovat *jak* pomocí jeho složek a_x a a_y, *tak* i pomocí dvojice a a θ.

KONTROLA 2: Který z následujících obrázků představuje správný rozklad vektoru $\boldsymbol{a}$ do složek?



PŘÍKLAD 3.3

Malé letadlo odstartovalo za nevlídného počasí. Později bylo spatřeno ve vzdálenosti 215 km od výchozího letiště v severovýchodním směru, svírajícím s místním poledníkem úhel 22°. Jaká byla jeho vzdálenost od letiště v severním a východním směru?

ŘEŠENÍ: Na obr. 3.11 je situace zakreslena v pravoúhlé soustavě souřadnic xy, jejíž počátek jsme pro jednoduchost umístili do polohy letiště. Osa x směřuje na východ, osa y na sever. Vektor $\boldsymbol{d}$ spojuje počátek soustavy souřadnic s místem, kde byl letoun opět spatřen.

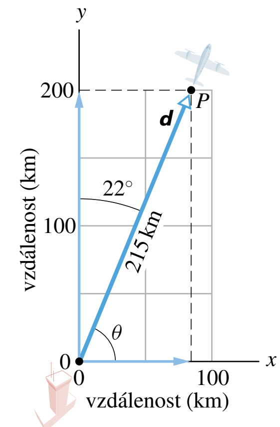
Na otázku položenou v zadání úlohy snadno odpovíme, určíme-li složky vektoru $\boldsymbol{d}$. Použijeme rov. (3.5), kam dosadíme $\theta = 68°$ $(= 90° - 22°)$. Dostaneme

$$d_x = d\cos\theta = (215\,\text{km})(\cos 68°) = = 81\,\text{km} \qquad \text{(Odpověď)}$$

a

$$d_y = d\sin\theta = (215\,\text{km})(\sin 68°) = = 199\,\text{km}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Letadlo bylo spatřeno 199 km severně a 81 km východně od letiště.



Obr. 3.11 Příklad 3.3. Letadlo odstartovalo z počátku soustavy souřadnic O a později bylo spatřeno v bodě P.

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.1: *Úhly — stupně a radiány*

Měříme-li úhel od kladného směru osy x, považujeme jeho hodnotu měřenou proti směru otáčení hodinových ručiček za kladnou, hodnotu měřenou po směru hodinových ručiček za zápornou.* Tak například hodnoty 210° a −150° udávají stejný směr. Proto velmi často nerozlišujeme mezi úhly, které se liší o 360°, tj. o plný úhel — např. právě úhel 210° a −150°.

Většina kalkulaček připouští při výpočtu goniometrických funkcí úhlů obě možnosti. (Vyzkoušejte si tu svou.) Nejběžnějšími jednotkami pro měření úhlů jsou stupně (°) a radiány (rad). Jejich vzájemné přepočty jsou velmi snadné. Stačí si zapamatovat, že plný úhel je roven 360° a 2π rad. Potřebujeme-li například převést 40° na radiány, píšeme

$$40°\,\frac{2\pi\,\text{rad}}{360°} = 0{,}70\,\text{rad}.$$

Zkusme rychle ověřit, je-li získaný výsledek v pořádku. 40° je jedna devítina plného úhlu 2π rad (≐ 6,3 rad). Výsledkem přepočtu by tedy měla být hodnota $\frac{1}{9}\cdot 6{,}3$. Vidíme, že jsme přepočet provedli správně. Správnost převodu můžeme velmi snadno posoudit také tehdy, zapamatujeme-li si přibližný vztah 1 rad ≐ 57°.

Kalkulačky jsou po zapnutí většinou automaticky nastaveny tak, že počítají úhly ve stupních. Chceme-li zadávat úhly

* Jen tak budou rov. (3.5) v souladu s přijatou konvencí pro znaménka složek vektorů. Viz také bod 3.4.

v radiánech, je třeba kalkulačku přepnout do příslušného pracovního režimu. Vyzkoušejte si to, než začnete řešit konkrétní úlohy.

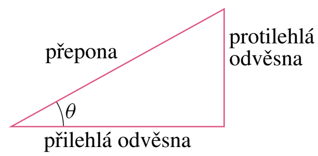
Bod 3.2: *Goniometrické funkce*

Nejužívanější goniometrické funkce sinus, kosinus a tangens je nutno dobře ovládat. Vědecké a technické výpočty se bez nich totiž neobejdou. Definice těchto funkcí jsou shrnuty v obr. 3.12. Označení jednotlivých stran pravoúhlého trojúhelníka není rozhodující a hodnoty $\sin\theta$, $\cos\theta$ a $\operatorname{tg}\theta$ nezávisí ani na jeho „velikosti“. Pro všechny tzv. podobné trojúhelníky jsou stejné.

$$\sin\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}}$$



Obr. 3.12 Definice goniometrických funkcí. Viz též dod. E.

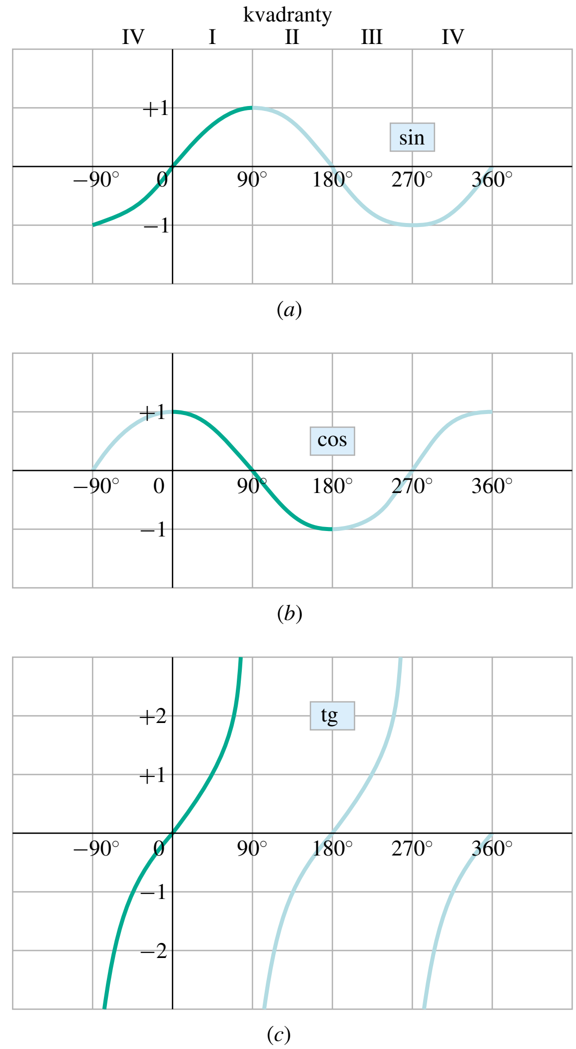
V případě potřeby bychom také měli umět hbitě si vybavit grafy goniometrických funkcí (obr. 3.13). Je výhodné si pamatovat, jaká jsou znaménka hodnot goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech.

Bod 3.3: *Cyklometrické funkce*

Cyklometrickými funkcemi rozumíme funkce inverzní ke goniometrickým. Nejdůležitější z nich jsou arcsin, arccos a arctg. Používáme-li pro jejich výpočet opět kalkulačku, musíme vždy dobře uvážit, je-li získaný výsledek v pořádku. Kalkulačka totiž zobrazí pro zadanou hodnotu y vybrané goniometrické funkce $f(x)$ (například sin) jen jedno z možných řešení x rovnice $y = f(x)$ ($y = \sin x$). Intervaly, v nichž leží řešení získaná na kalkulačce, jsou pro funkce $\sin x$, $\cos x$ a $\operatorname{tg} x$ vymezeny v obr. 3.13 zesílením odpovídající části grafu. Rovnici $0{,}5 = \sin x$ vyhovují hodnoty $30°$ a $150°$ a všechny další, které se od nich liší o celočíselný násobek plného úhlu. (O existenci různých řešení se můžeme snadno přesvědčit, najdeme-li průsečíky přímky $y = 0{,}5$ s grafem funkce sinus.) Při výpočtu na kalkulačce se však na displeji objeví právě výsledek $30°$, který leží ve vyznačeném intervalu. Jak poznáme, které z možných řešení odpovídá zadané úloze? Vraťme se k příkladu 3.1, kde jsme mj. zjišťovali úhel θ na základě znalosti jeho tangenty, $\operatorname{tg}\theta = 1{,}5$. Na kalkulačce dostaneme hodnotu $\theta = 56°$. Snadno však zjistíme, že také tangenta úhlu $\theta = 236°$ $(= 180° + 56°)$ má požadovanou hodnotu 1,5. Který z obou úhlů je správný? Z fyzikální úvahy je zřejmé, že zadání úlohy vyhovuje hodnota $56°$ (obr. 3.2b).

Bod 3.4: *Měření úhlů mezi vektory*

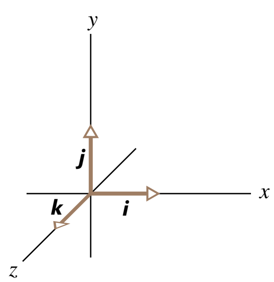
Vztahy (3.5) a (3.6) platí v případě, že je symbolem θ označen úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Je-li v úloze zadán úhel vektoru s jiným vztažným směrem, nemůžeme jej do vztahů (3.5) a (3.6) bezmyšlenkovitě dosadit. Pokud by byl například písmenem θ označen úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy y, museli bychom goniometrické funkce sin a cos ve vztazích (3.5) mezi sebou vyměnit a zlomek ve vztahu (3.6) převrátit. Možné chybě se snadno vyhneme tím, že pomocí zadaného úhlu určujícího směr vektoru vypočteme úhel θ sevřený vektorem a kladným směrem osy x. Přesně tak jsme to provedli při řešení příkladu 3.3.



Obr. 3.13 Grafy tří nejužívanějších goniometrických funkcí. Část křivky určující obor hodnot odpovídající *cyklometrické* funkce je v každém grafu zvýrazněna. Vyznačené obory splývají s rozmezím hodnot cyklometrických funkcí běžných kalkulaček.

3.4 JEDNOTKOVÉ VEKTORY

Jako **jednotkový** je definován každý vektor, který má přesně jednotkovou velikost, bez ohledu na směr. Nepřisuzujeme mu fyzikální rozměr, a tedy ani jednotku. (Říkáme také, že jeho fyzikální rozměr je 1.) Má jediný význam: určuje směr. Jednotkové vektory určující kladné směry souřadnicových os x, y a z označujeme často $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ (obr. 3.14).* Orientace souřadnicových os na obr. 3.14 je volena tak, aby tvořily **pravotočivou soustavu** (odpovídá po řadě palci, ukazováku a prostředníku na pravé ruce, když prsteník a malík jsou v dlani). Při jejím libovolném otočení zůstane tato vlastnost zachována. Pravotočivou soustavu souřadnic určenou navzájem kolmými jednotkovými vektory nazýváme zkráceně **kartézskou**. V dalším textu budeme používat výhradně kartézských souřadnicových soustav.



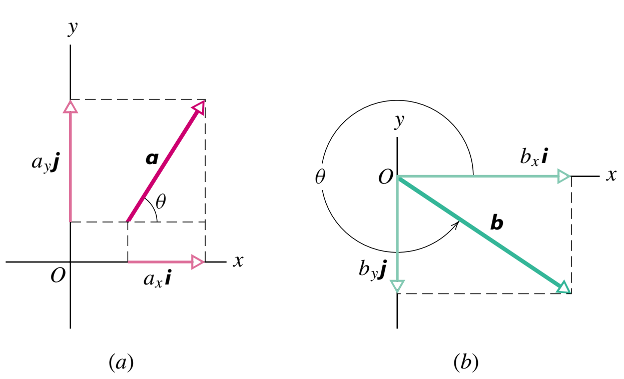
Obr. 3.14 Jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ definují kartézskou soustavu souřadnic.

Pomocí kolmých jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ můžeme velmi snadno vyjádřit každý další vektor. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ z obr. 3.9 a 3.10 zapíšeme například takto:

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}. \tag{3.8}$$

Geometrický význam těchto rovnic ilustruje obr. 3.15. Vektory $a_x\boldsymbol{i}$ a $a_y\boldsymbol{j}$ jsou tzv. **pravoúhlé průměty** vektoru $\boldsymbol{a}$ do směru vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$. Rozlišujme mezi *složkami* (a_x, a_y) a *průměty* $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$.



Obr. 3.15 (a), (b) Pravoúhlé průměty vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

* Dalšími užívanými symboly pro jednotkový vektor příslušný vektoru $\vec{a}$ jsou $\hat{a}$, $\vec{a}_0$, a^0 apod.

Vraťme se ještě na chvíli k popisu cesty speleologické skupiny v příkladu 3.1. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby její počátek splýval s polohou Austinova vchodu, vektory $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ směřovaly východním a severním směrem a vektor $\boldsymbol{k}$ svisle vzhůru. Vyjádření vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od Austinova vchodu k řece Echo je při této volbě soustavy souřadnic velmi přehledné:

$$\boldsymbol{d} = -(2{,}6\,\mathrm{km})\,\boldsymbol{i} - (3{,}9\,\mathrm{km})\,\boldsymbol{j} + (0{,}025\,\mathrm{km})\,\boldsymbol{k}.$$

3.5 SČÍTÁNÍ VEKTORŮ: ALGEBRAICKÁ METODA

Při grafické konstrukci součtu vektorů jsme si mohli všimnout, že je poměrně pracná a nepříliš přesná. V trojrozměrném prostoru je navíc takřka neschůdná. Přímá *algebraická metoda* sčítání vektorů, s níž se seznámíme v tomto článku, je při praktických výpočtech velmi účelná. Využívá vyjádření vektorů pomocí jejich složek ve vhodně zvolené soustavě souřadnic.

Uvažujme o vektorovém součtu tvaru

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{3.9}$$

Podle tohoto vztahu je vektor $\boldsymbol{r}$ shodný s vektorem $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Jeho složky r_x, r_y a r_z musí být tedy shodné s odpovídajícími složkami součtu $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$

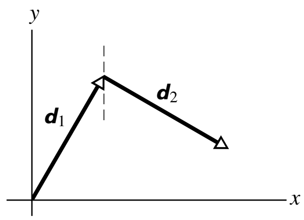
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Stručněji, dva vektory jsou si rovny právě tehdy, jsou-li jejich stejnojmenné složky shodné. Rov. (3.10) až (3.12) přímo obsahují návod pro výpočet složek součtu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$: (1) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rozložíme do složek. (2) Sečtením stejnojmenných složek získáme odpovídající složky vektorového součtu $\boldsymbol{r}$ a (3) vektor $\boldsymbol{r}$ pomocí nich v případě potřeby zapíšeme. Můžeme zvolit dvojí způsob zápisu vektoru $\boldsymbol{r}$: pomocí jednotkových vektorů nebo zadáním velikosti a směru. Směr vektoru v dvojrozměrném prostoru je určen jedním úhlem (například obr. 3.9), v trojrozměrném prostoru je třeba zadat dvojici úhlů.* Často se spokojíme jen se zápisem složek vektoru, nejlépe ve tvaru (a_x, a_y, a_z).

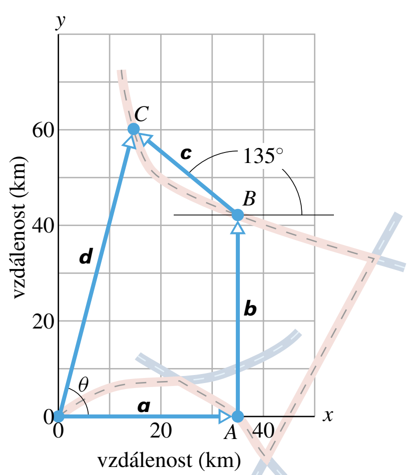
* Nejčastěji volíme zadání směru vektoru $\boldsymbol{r}$ pomocí úhlu θ, který vektor $\boldsymbol{r}$ svírá s kladným směrem osy z (tzv. **sférický úhel**) a úhlu φ mezi průmětem vektoru $\boldsymbol{r}$ do souřadnicové roviny (xy) a osou x (**azimutální úhel**).

KONTROLA 3: (a) Jaká znaménka mají x-ové a (b) y-ové složky vektorů $\boldsymbol{d}_1$ a $\boldsymbol{d}_2$ v následujícím obrázku? (c) Jaká jsou znaménka x-ové a y-ové složky vektoru $(\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2)$?



PŘÍKLAD 3.4

Trasa mototuristické soutěže je vymezena následujícími pokyny: Od místa startu jeďte po nejbližší silnici ke kontrolnímu stanovišti A, které je od startu vzdáleno 36 km východním směrem. Další kontrola B leží 42 km severně od A. Cíl C je od stanoviště B vzdálen 25 km na severozápad. (Silnice s kontrolními stanovišti jsou zakresleny na obr. 3.16.)



Obr. 3.16 Příklad 3.4. Plánek trasy mototuristické soutěže s vyznačením kontrolních stanovišť A, B a C a vhodnou volbou soustavy souřadnic.

(a) Určete velikost a směr vektoru posunutí $\boldsymbol{d}$ od startu do cíle C.

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic v rovině trasy (souřadnicová rovina (xy)) co nejvhodnějším způsobem. Příklad vhodné volby je zachycen na obr. 3.16. V obrázku jsou vyznačeny i vektory posunutí příslušné třem přesunům popsaným v pokynech soutěže. Vektor $\boldsymbol{d}$ má složky

$$d_x = a_x + b_x + c_x = 36\,\text{km} + 0 + (25\,\text{km})(\cos 135^\circ) = \\ = (36 + 0 - 17{,}7)\,\text{km} = 18{,}3\,\text{km}$$

a

$$d_y = a_y + b_y + c_y = 0 + 42\,\text{km} + (25\,\text{km})(\sin 135^\circ) = \\ = (0 + 42 + 17{,}7)\,\text{km} = 59{,}7\,\text{km}.$$

Velikost a směr vektoru $\boldsymbol{d}$ určíme pomocí vztahu (3.6).

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(18{,}3\,\text{km})^2 + (59{,}7\,\text{km})^2} = \\ = 62\,\text{km}, \qquad \text{(Odpověď)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{(59{,}7\,\text{km})}{(18{,}3\,\text{km})} = 3{,}26,$$
$$\theta = 73^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 3.16.

(b) Vyjádřete vektor $\boldsymbol{d}$ pomocí jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$.

ŘEŠENÍ: Vektor $\boldsymbol{d}$ zapíšeme jednoduše ve tvaru

$$\boldsymbol{d} = (x\text{-ová složka})\boldsymbol{i} + (y\text{-ová složka})\boldsymbol{j} = \\ = (18{,}3\,\text{km})\boldsymbol{i} + (59{,}7\,\text{km})\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 3.5

Vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ ležící v souřadnicové rovině (xy) jsou zadány takto:

$$\boldsymbol{a} = 4{,}2\boldsymbol{i} - 1{,}6\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b} = -1{,}6\boldsymbol{i} + 2{,}9\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{c} = -3{,}7\boldsymbol{j}.$$

Určete jejich vektorový součet $\boldsymbol{r}$. Pro jednoduchost nepracujeme s jednotkami, pro pořádek je však možné si představit, že složky vektorů jsou zadány v metrech.

ŘEŠENÍ: Uvědomme si nejprve, že z-ové složky vektorů ležících v souřadnicové rovině (xy) jsou nulové, proto vektor $\boldsymbol{k}$ v jejich zápisech chybí. Podle rov. (3.10) až (3.12) platí

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}2 - 1{,}6 + 0 = 2{,}6,$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}6 + 2{,}9 - 3{,}7 = -2{,}4$$

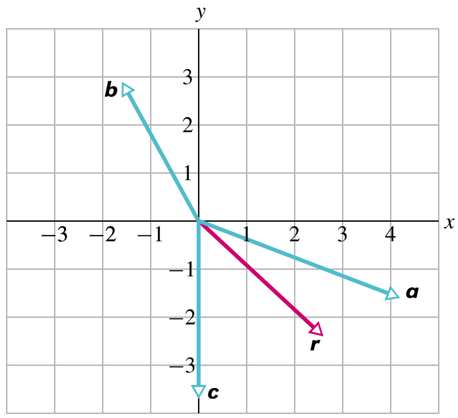
a

$$r_z = a_z + b_z + c_z = 0 + 0 + 0 = 0,$$

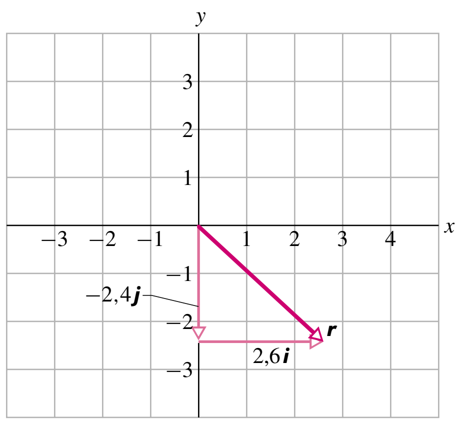
tj.

$$\boldsymbol{r} = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \\ = 2{,}6\boldsymbol{i} - 2{,}4\boldsymbol{j}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Zadání příkladu i jeho výsledek vidíme na obr. 3.17a. Rozklad vektoru $\boldsymbol{r}$ do složek je na obr. 3.17b.

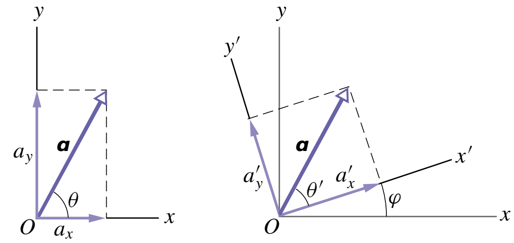


(a)



(b)

Obr. 3.17 Příklad 3.5. Vektor $\boldsymbol{r}$ je součtem tří vektorů



(a) (b)

Obr. 3.18 (a) Vektor $\boldsymbol{a}$ a jeho složky ve zvolené soustavě souřadnic. (b) Složky téhož vektoru v soustavě souřadnic otočené o úhel φ.

3.6 VEKTORY A FYZIKÁLNÍ ZÁKONY

Ve všech obrázcích jsme doposud kreslili osy soustavy souřadnic rovnoběžně s okraji stránky. Složky a_x a a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ byly tedy rovněž měřeny podél těchto okrajů (například obr. 3.18a). Tato volba však nemá žádné hlubší matematické či fyzikální opodstatnění, jedinou její předností je pěkný vzhled obrázků. Klidně bychom mohli soustavu souřadnic otočit o úhel φ podle obr. 3.18b (vektor $\boldsymbol{a}$ neotáčet!). V nové soustavě souřadnic budou mít složky vektoru pochopitelně jiné hodnoty. Označme je a'_x a a'_y. Různých otočení soustavy souřadnic φ je ovšem nekonečně mnoho, a tak může být jeden a týž vektor $\boldsymbol{a}$ zadán nekonečným počtem různých dvojic svých složek.

Která z nich je ta pravá? Odpověď je jednoduchá: Všechna zadání jsou rovnocenná, neboť reprezentují týž vektor v různých soustavách souřadnic. Každou dvojici údajů (a_x, a_y) je však třeba spojit s informací, k *jaké soustavě souřadnic* jsou údaje vztaženy. Výpočet velikosti a směru vektoru pomocí kterékoli z rovnocenných dvojic složek vede ke stejnému výsledku (obr. 3.18):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}, \qquad (3.13)$$

$$\theta = \theta' + \varphi. \qquad (3.14)$$

Předchozí úvahy jsou dokladem značné libovůle při výběru soustavy souřadnic. Vztahy pro vektory i vektorové součty (rov. (3.1)), jsou totiž nezávislé jak na poloze jejího počátku, tak na orientaci souřadnicových os. Totéž platí i pro fyzikální vztahy a zákony: jsou nezávislé na volbě soustavy souřadnic. Připojme k tomu jednoduchost a bohatost vektorové algebry a pochopíme, proč je řada fyzikálních zákonů vyjádřena vektorovými rovnicemi: jediná vektorová rovnice (3.9) zastupuje hned tři rovnice skalární, (3.10), (3.11) a (3.12).

3.7 NÁSOBENÍ VEKTORŮ*

Existuje více různých způsobů násobení vektorů.

Násobení vektoru skalárem

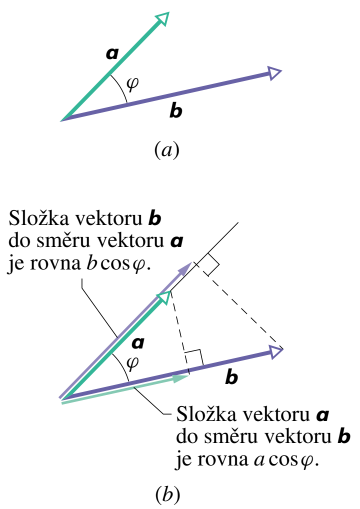
Výsledkem násobení vektoru $\boldsymbol{a}$ skalárem s je opět vektor. Jeho velikost je součinem velikosti vektoru $\boldsymbol{a}$ a absolutní hodnoty skaláru s. Je-li hodnota s kladná, je směr výsledného vektoru shodný se směrem vektoru $\boldsymbol{a}$, pro zápornou hodnotu s je opačný. Dělením vektoru $\boldsymbol{a}$ nenulovým skalárem s rozumíme násobení jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalárem s může být jak číslo (fyzikálně bezrozměrová konstanta), tak fyzikální veličina. V druhém případě je výsledkem násobení vektorová fyzikální veličina jiné povahy než $\boldsymbol{a}$.

* Pojmy vyložené v tomto článku budeme potřebovat až v pozdějších kapitolách (skalární součin v kapitole 7 a vektorový součin v kapitole 12). Studium článku lze v tuto chvíli ještě odložit.

Skalární součin vektorů

V matematice jsou definovány dvě různé operace, které mohou být nazývány násobením dvou vektorů. Výsledkem prvé z nich je skalár, výsledkem druhé je další vektor. Studenti tyto operace často zaměňují, a tak je budeme od prvopočátku pečlivě rozlišovat.



Obr. 3.19 (a) Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ svírají úhel φ. (b) Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{b}$ je $a\cos\varphi$, složka vektoru $\boldsymbol{b}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{a}$ je $b\cos\varphi$.

Skalární součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (zapisujeme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je definován vztahem (obr. 3.19a)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.15}$$

kde a a b jsou velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, φ je úhel mezi nimi.* Všimněme si, že na pravé straně rovnice (3.15) vystupují pouze skaláry (a, b a $\cos\varphi$). Výraz $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ na levé straně je tedy rovněž *skalární* veličinou. Přepíšeme-li definiční rovnici (3.15) do tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a\cos\varphi)(b) = (a)(b\cos\varphi), \tag{3.16}$$

vidíme, že skalární součin je možné interpretovat i jako součin (1) velikosti prvého z obou vektorů a (2) složky druhého z nich ve směru prvého. Výsledek je samozřejmě na pořadí vektorů nezávislý. Na obr. 3.19b jsou znázorněny obě možnosti: Složka vektoru $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{b}$ má hodnotu $a\cos\varphi$. Určíme ji tak, že koncovým bodem vektoru $\boldsymbol{a}$ vedeme kolmici k přímce určující směr vektoru $\boldsymbol{b}$. Podobně lze zjistit, že složka vektoru $\boldsymbol{b}$ do směru $\boldsymbol{a}$ má hodnotu $b\cos\varphi$. Pro $\varphi = 0^\circ$ (resp. $\varphi = 180^\circ$) má průmět kteréhokoli z obou vektorů do směru druhého největší možnou velikost a skalární součin nabývá své největší (resp. nejmenší) hodnoty.

Pro $\varphi = 90^\circ$ jsou oba průměty nulové a odpovídající hodnota skalárního součinu je tedy rovněž nulová. Pro skalární součin platí komutativní zákon

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.$$

Při zápisu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ pomocí jednotkových vektorů můžeme skalární součin vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \tag{3.17}$$

a při další úpravě použít distributivního zákona: každý sčítanec v prvé závorce skalárně vynásobíme postupně všemi sčítanci ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Dostaneme poměrně složitý výraz s devíti sčítanci, který však vzápětí dokážeme opět zjednodušit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_x\boldsymbol{i})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) + \\ & + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) + (a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Uvažujme například první z těchto devíti skalárních součinů. Vektory $(a_x\boldsymbol{i})$ a $(b_x\boldsymbol{i})$ mají stejný směr. V souhlasu s obr. 3.19 má jejich skalární součin hodnotu a_xb_x. Obdobně je $(a_y\boldsymbol{j})\cdot(b_y\boldsymbol{j}) = a_yb_y$ a $(a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_z\boldsymbol{k}) = a_zb_z$. V ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů, který je nulový. Skalární součin vektorů lze tedy pomocí jejich složek v *kartézské* soustavě souřadnic vyjádřit vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

KONTROLA 4: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky, vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, má-li jejich skalární součin $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$ hodnotu (a) nulovou, (b) 12 jednotek, (c) -12 jednotek?

* Úhlem mezi dvěma vektory rozumíme úhel mezi jejich *orientovanými* směry. V případě vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ na obr. 3.18 je jím úhel φ, nikoli $360^\circ - \varphi$.

* Zatímco komutativnost skalárního součinu je okamžitě zřejmá hned z definičního vztahu (3.15), u distributivního zákona tomu tak není. Pomocí přímých, i když poměrně pracných výpočtů využívajících elementárních vztahů z trigonometrie by však bylo schůdné jeho platnost dokázat (dobří počtáři se o to mohou pokusit).

PŘÍKLAD 3.6

Jaký úhel svírají vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}$?

ŘEŠENÍ: Podle vztahu (3.15) má skalární součin zadaných vektorů hodnotu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= ab\cos\varphi = \\ &= \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2}\sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2}\cos\varphi = \\ &= 18{,}0\cos\varphi. \qquad (3.18)\end{aligned}$$

Podle rov. (3.17) je současně

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0\boldsymbol{i} - 4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{k}).$$

Užitím distributivního zákona dostaneme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = {} & (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (3{,}0\boldsymbol{i})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}) + \\ & + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(-2{,}0\boldsymbol{i}) + (-4{,}0\boldsymbol{j})\cdot(3{,}0\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Každý ze skalárních součinů na pravé straně předchozí rovnosti vyčíslíme pomocí rov. (3.15). Vektory $3{,}0\boldsymbol{i}$ a $-2{,}0\boldsymbol{i}$ v prvém z nich svírají úhel 0°, ve všech ostatních případech jde o skalární součin kolmých vektorů. Dostáváme

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0) = \\ &= -6{,}0. \qquad (3.19)\end{aligned}$$

Výsledek můžeme ověřit vyjádřením skalárního součinu vektorů pomocí jejich složek:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (3{,}0)(-2{,}0) + (-4{,}0)(0) + (0)(3{,}0) = -6{,}0.$$

Získaná hodnota se ovšem musí shodovat s pravou stranou rovnice (3.18), tj.

$$18{,}0\cos\varphi = -6{,}0$$

a odtud

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-6{,}0}{18{,}0} = -0{,}333, \\ \varphi &= 109^\circ \doteq 110^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Vektorový součin

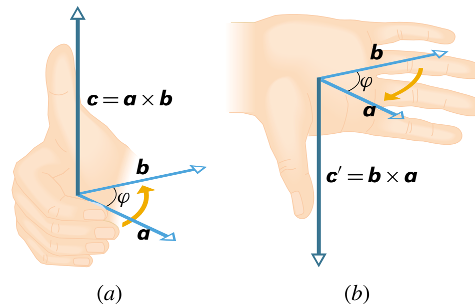
Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Výsledkem je vektor $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$. Jeho velikost je definována vztahem

$$c = ab\sin\varphi, \qquad (3.20)$$

kde a a b jsou opět velikosti vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a φ je úhel mezi nimi. Jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnoběžné, ať již souhlasně či nesouhlasně, je $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Velikost vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ (píšeme $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$) nabývá největší možné hodnoty, jsou-li vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ kolmé.

Výsledný vektor $\boldsymbol{c}$ je definován jako vektor kolmý k rovině určené vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Jeho orientace je určena tzv. pravidlem pravé ruky, které je znázorněno na obr. 3.20a:

Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ umístíme do společného počátečního bodu. Zachováme přitom jejich směry. Společným počátkem vedeme kolmici k rovině určené oběma vektory. Kolmici „uchopíme“ *pravou* rukou tak, aby prsty ukazovaly od vektoru $\boldsymbol{a}$ k $\boldsymbol{b}$ „cestou“ menšího z obou úhlů (úhel φ v obr. 3.20). Vztyčený palec ukazuje správně orientovaný směr vektoru $\boldsymbol{c}$.



Obr. 3.20 Pravidlo pravé ruky pro vektorový součin. (a) Natočte pravou ruku tak, aby vektor $\boldsymbol{a}$ byl ve směru ukazováčku a $\boldsymbol{b}$ ve směru prostředníku. Pak palec ukazuje směr $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. (b) Vidíme, že $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

Na rozdíl od skalárního součinu je pořadí činitelů při vektorovém násobení důležité. Obr. 3.20b ukazuje použití pravidla pravé ruky při určení směru vektoru $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Prsty nyní směřují od $\boldsymbol{b}$ k $\boldsymbol{a}$ a palec ukazuje opačným směrem, než na obr. 3.20a. Vektor $\boldsymbol{c}'$ je tedy opačný k vektoru $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}' = -\boldsymbol{c}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \qquad (3.21)$$

Pro vektorový součin neplatí komutativní zákon.

Pomocí jednotkových vektorů můžeme psát

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = {} & (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times \\ & \times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}). \qquad (3.22)\end{aligned}$$

Při úpravě opět použijeme distributivní zákon: každý člen první závorky vektorově vynásobíme každým sčítancem ve druhé závorce a výsledky sečteme.* Roznásobte závorky na pravé straně rov. (3.22) a porovnejte výsledek se vztahy v dod. E.

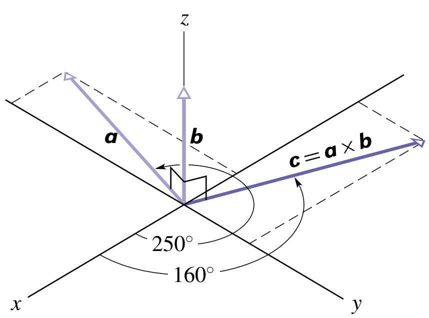
Pomocí vektorového součinu lze snadno rozhodnout, zda je zvolená soustava souřadnic pravotočivá. V kladném případě musí být splněna rovnost $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$. Ověřte její platnost pro souřadnicovou soustavu na obr. 3.14.

* Platnost distributivního zákona pro vektorový součin lze opět dokázat užitím pravidel elementární geometrie a užitím skalárního součinu.

KONTROLA 5: Vektor $\boldsymbol{C}$ má velikost 3 jednotky a vektor $\boldsymbol{D}$ 4 jednotky. Jaký úhel tyto vektory svírají, (a) je-li vektor $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}$ nulový, (b) má-li vektor $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}$ velikost 12 jednotek?

PŘÍKLAD 3.7

Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy (obr. 3.21). Má velikost 18 jednotek a s kladným směrem osy x svírá úhel 250°. Vektor $\boldsymbol{b}$ má velikost 12 jednotek a je souhlasně rovnoběžný s kladným směrem osy z.



Obr. 3.21 Příklad 3.7. Vektorové násobení

(a) Vypočtěte skalární součin zadaných vektorů.

ŘEŠENÍ: Vektory svírají úhel $\varphi = 90°$. Podle rov. (3.15) tedy platí

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi = (18)(12)(\cos 90°) = 0. \quad \text{(Odpověď)}$$

Skalární součin kolmých vektorů má vždy nulovou hodnotu. Odpovídá to skutečnosti, že průmět kteréhokoli z nich do směru druhého je nulový.

(b) Vypočtěte vektorový součin $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

ŘEŠENÍ: Velikost vektorového součinu určíme z definičního vztahu (3.20).

$$ab\sin\varphi = (18)(12)(\sin 90°) = 216. \quad \text{(Odpověď)}$$

Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Je tedy kolmý k ose z, neboť vektor $\boldsymbol{b}$ v ní leží. Vektor $\boldsymbol{c}$ tedy leží v souřadnicové rovině (xy). Pomocí obr. 3.21 určíme ještě jeho směr: Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý i k vektoru $\boldsymbol{a}$. S kladným směrem osy x tedy svírá úhel buď $250° - 90° = 160°$, nebo $250° + 90° = 340°$. Užitím pravidla pravé ruky se snadno přesvědčíme, že správná je první možnost (obr. 3.21).

PŘÍKLAD 3.8

Určete $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$.

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (3.22) dostaneme výraz

$$\boldsymbol{c} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})\times(-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}),$$

který rozepíšeme pomocí distributivního zákona:

$$\boldsymbol{c} = -(3\boldsymbol{i}\times 2\boldsymbol{i}) + (3\boldsymbol{i}\times 3\boldsymbol{k}) + (4\boldsymbol{j}\times 2\boldsymbol{i}) - (4\boldsymbol{j}\times 3\boldsymbol{k}).$$

Pro každý z těchto čtyř vektorových součinů vypočteme podle rov. (3.20) jeho velikost a užitím pravidla pravé ruky určíme jeho směr. U prvého z nich je $\varphi = 0°$, u ostatních $\varphi = 90°$. Nakonec dostaneme

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k} - 12\boldsymbol{i} = \\ = -12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}. \quad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 3.5: *Časté chyby při výpočtu vektorového součinu*

Při výpočtu vektorového součinu se můžeme snadno dopustit některé z následujících chyb. (1) Je-li grafické zadání úlohy nevhodné pro výpočet vektorového součinu (vektory jsou zakresleny například tak, že počáteční bod jednoho z nich splývá s koncovým bodem druhého) potřebujeme umístit vektory do společného počátečního bodu. Někdy přitom zapomeneme, že nesmíme změnit směr vektorů. (2) Stane se, že chybně použijeme pravidlo pravé ruky, třeba když v ní současně držíme kalkulačku nebo pero. (3) K omylu může snadno dojít i tehdy, je-li potřeba při použití pravidla pravé ruky ruku nepřirozeně zkroutit, nebo když se snažíme směr výsledného vektoru jen odhadnout. (4) Výsledek bude chybný, nepracujeme-li v pravotočivé soustavě souřadnic (obr. 3.14).

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Skaláry a vektory
Skaláry (skalární veličiny) jsou jednoznačně určeny jediným číslem a příslušnou jednotkou (například teplota 82 °C). Při počítání se skaláry používáme běžných pravidel aritmetiky a algebry čísel. *Vektory* mají velikost a směr (například posunutí 5 m severně). Při výpočtech platí zvláštní pravidla vektorové algebry.

Grafická metoda sčítání vektorů
Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ narýsujeme ve vhodném měřítku tak, že počáteční bod kteréhokoli z nich umístíme do koncového bodu druhého. Jejich součtem je vektor $\boldsymbol{s}$ spojující počáteční bod prvého vektoru s koncovým bodem druhého (obr. 3.3). Tvoří úhlopříčku v rovnoběžníku určeném vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ podle obr. 3.4. Při odečítání vektoru $\boldsymbol{b}$ od vektoru $\boldsymbol{a}$ změníme směr vektoru $\boldsymbol{b}$ a získáme tak vektor opačný $-\boldsymbol{b}$, který přičteme k $\boldsymbol{a}$ (obr. 3.7). Pro vektorové sčítání platí komutativní a asociativní zákon.

Složky vektoru
Složky vektoru v rovině jsou určeny jeho kolmými průměty do směrů souřadnicových os x a y. Složky a_x a a_y vektoru $\boldsymbol{a}$ jsou dány vztahy

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{a} \quad a_y = a\sin\theta, \tag{3.5}$$

kde θ je úhel vektoru $\boldsymbol{a}$ s kladným směrem osy x. Znaménko složky určuje orientaci odpovídajícího průmětu vektoru vzhledem ke kladnému směru souřadnicové osy. Pomocí složek vektoru můžeme určit jeho velikost i směr

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{a} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}. \tag{3.6}$$

Jednotkové vektory
Vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou definovány jako navzájem kolmé vektory jednotkové velikosti, jejichž směry jsou souhlasně rovnoběžné s osami x, y a z pravotočivé soustavy souřadnic. Libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ můžeme pomocí nich zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{3.7}$$

kde $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ a $a_z\boldsymbol{k}$ jsou kolmé průměty vektoru $\boldsymbol{a}$ do souřadnicových os a a_x, a_y a a_z jsou jeho složky.

Algebraická metoda sčítání vektorů
Algebraická metoda výpočtu součtu $\boldsymbol{r}$ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ je založena na použití pravidla „sčítání po složkách“:

$$r_x = a_x + b_x, \tag{3.10}$$
$$r_y = a_y + b_y, \tag{3.11}$$
$$r_z = a_z + b_z. \tag{3.12}$$

Vektory a fyzikální zákony
Při řešení fyzikálních problémů vyžadujících vektorový popis lze použít kteroukoli z mnoha přípustných souřadnicových soustav. Její výběr většinou podřizujeme požadavku co největšího zjednodušení formulace a řešení dané úlohy. Vztahy mezi vektorovými veličinami i fyzikální zákony samy jsou na volbě soustavy souřadnic nezávislé.

Násobení vektoru skalárem
Výsledkem násobení vektoru $\boldsymbol{v}$ skalárem s je vektor o velikosti $|s|\,|\boldsymbol{v}|$. Pro $s > 0$ je jeho směr souhlasný se směrem vektoru $\boldsymbol{v}$, pro $s < 0$ je opačný. Vektor $\boldsymbol{v}$ dělíme skalárem $s \neq 0$, násobíme-li jej jeho převrácenou hodnotou $1/s$.

Skalární součin
Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (značíme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$) je *skalární* veličina, definovaná vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\varphi, \tag{3.15}$$

kde φ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. V závislosti na hodnotě φ může být skalární součin kladný, záporný nebo nulový. Z obr. 3.19b je zřejmé, že skalární součin vektorů lze získat vynásobením velikosti kteréhokoli z nich složkou druhého vektoru ve směru vektoru prvého. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů píšeme

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \tag{3.17}$$

a při úpravě použijeme distributivního zákona. Skalární součin je komutativní, tj. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Vektorový součin
Vektorový součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ značíme $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. Je to vektor $\boldsymbol{c}$ o velikosti

$$c = ab\sin\varphi, \tag{3.20}$$

kde φ je úhel vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (menší z obou úhlů sevřených přímkami, v nichž vektory leží). Vektor $\boldsymbol{c}$ je kolmý na rovinu určenou vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a jeho směr je dán pravidlem pravé ruky (obr. 3.20). Platí $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Při zápisu pomocí jednotkových vektorů je vektorový součin dán výrazem

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}), \tag{3.22}$$

který lze ještě upravit užitím distributivního zákona, viz úlohu 49.

OTÁZKY

1. Vektor posunutí $\boldsymbol{N}$ ležící v rovině xy spojuje body o souřadnicích (5 m, 3 m) (počáteční bod) a (7 m, 6 m) (koncový bod). Z následujících posunutí vyberte ta, která jsou ekvivalentní vektoru $\boldsymbol{N}$: vektor $\boldsymbol{A}$ směřující z bodu (−6 m, −5 m) do bodu (−4 m, −2 m); vektor $\boldsymbol{B}$ z bodu (−6 m, 1 m) do bodu (−4 m, 4 m); vektor $\boldsymbol{C}$ z bodu (−8 m, −6 m) do bodu (−10 m, −9 m).

2. Vektor $\boldsymbol{d}$ je definován vztahem $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})$. Rozhodněte, zda platí i následující vztahy (a) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

3. Rovnost (3.2) je vyjádřením komutativního zákona pro sčítání vektorů. Rozhodněte, zda je komutativní i odečítání vektorů, tj. platí-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$.

4. Ve hře s trojrozměrným bludištěm je třeba přesunout hrací kámen z výchozího bodu o souřadnicích $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ do cílového bodu (−2 cm, 4 cm, −4 cm). Pro pohyb kamene povolují pravidla hry pouze posunutí $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$,

$$\boldsymbol{p} = -7\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{s} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}.$$

Souřadnice jsou uváděny v centimetrech. Ocitne-li se kámen při hře v polohách (−5 cm, −1 cm, −1 cm) nebo (5 cm, 2 cm, −1 cm), je hra prohraná. Jaký výběr přípustných vektorů posunutí a jejich pořadí vede k výhře?

5. Co dokážeme říci o vektorech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, pro něž platí
(a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a + b = c$,
(b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$,
(c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ a $a^2 + b^2 = c^2$?

6. (a) Může mít vektor současně nulovou velikost a nenulovou některou ze svých složek? (b) Můžeme sečtením dvou vektorů různé velikosti dostat nulový vektor? Může být součet tří vektorů nulový, jestliže tyto vektory (c) leží, (d) neleží v jedné rovině?

7. Může být velikost rozdílu dvou vektorů větší než (a) velikost některého z nich, (b) velikost každého z nich, (c) velikost jejich součtu?

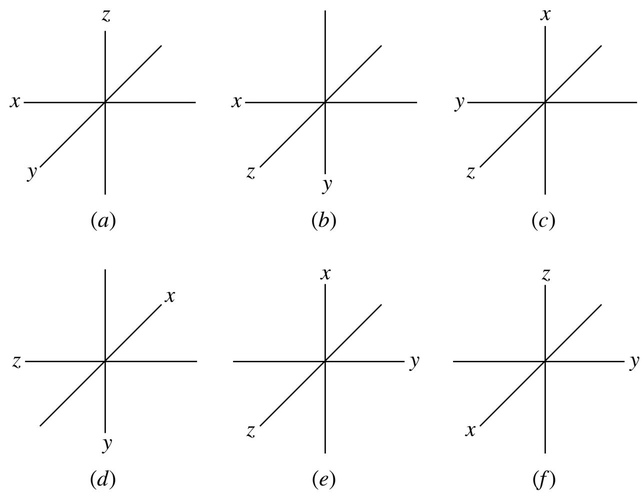
8. Může být součet velikostí dvou vektorů roven velikosti jejich součtu? Pokud ne, proč? Pokud ano, kdy?

9. Která ze souřadnicových soustav na obr. 3.22 je pravotočivá? Kladný směr každé souřadnicové osy je označen jejím popisem.

10. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ jsou zadány svými složkami:

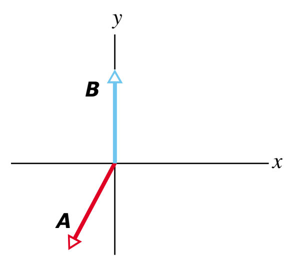
$$a_x = 3; \quad a_y = 3; \quad c_x = -3; \quad c_y = -3;$$
$$b_x = -3; \quad b_y = 3; \quad d_x = 3; \quad d_y = -3.$$

K výpočtu úhlu θ mezi každým z nich a osou x používáme vztah (3.6). Výpočty provádíme na kalkulačce. Pro které ze zadaných vektorů se na displeji kalkulačky přímo objeví správný výsledek? K odpovědi použijte nejprve obr. 3.13 a teprve pak ověřte její správnost výpočtem na kalkulačce.



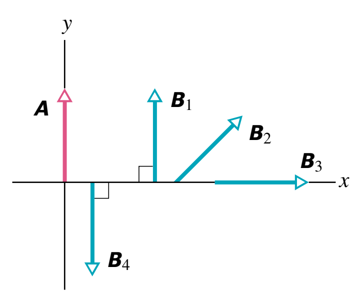
Obr. 3.22 Otázka 9

11. Vektory $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou zadány na obr. 3.23. Jaká jsou znaménka x-ových a y-ových složek vektorů (a) $\boldsymbol{A}$ a (b) $\boldsymbol{D}$, kde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$?



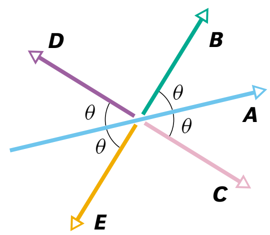
Obr. 3.23 Otázka 11

12. Na obr. 3.24 je nakreslen vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři různé možnosti volby vektoru $\boldsymbol{B}$, lišící se pouze směrem. Seřaďte vektory $\boldsymbol{B}$ podle velikosti absolutní hodnoty součinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$. (Zvolte sestupné řazení.)



Obr. 3.24 Otázka 12

13. Na obr. 3.25 je zadán vektor $\boldsymbol{A}$ a čtyři další vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ a $\boldsymbol{E}$ shodných velikostí. (a) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ stejný? (b) Pro které z vektorů $\boldsymbol{B}$ až $\boldsymbol{E}$ je jejich skalární součin s vektorem $\boldsymbol{A}$ záporný?

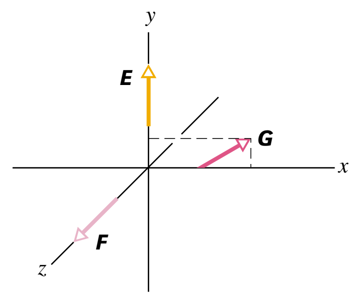


Obr. 3.25 Otázka 13

14. Jsou dány vektory $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{B} = 7\boldsymbol{k}$. Určete $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

15. Předpokládejme, že platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Znamená to, že jsou vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ stejné?

16. Vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ jsou zadány na obr. 3.26. Vektor $\boldsymbol{G}$ leží v rovině xy. Určete směry vektorů (a) $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{F}$, (b) $\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{E}$ a (c) $\boldsymbol{G} \times \boldsymbol{E}$. Změní se odpověď na otázku (c), posuneme-li vektor $\boldsymbol{G}$ rovnoběžně s osou z beze změny jeho směru?



Obr. 3.26 Otázka 16

17. Je dán vektor $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$. Určete $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, je-li (a) $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}$ a (b) $\boldsymbol{B} = -8\boldsymbol{i} - 16\boldsymbol{j}$. (Odpovědi lze vyslovit i bez výpočtu.)

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 3.2 Sčítání vektorů: grafická metoda

1C. Dva vektory posunutí mají velikosti 3 m a 4 m. Jak je třeba volit jejich směry, má-li mít výsledné posunutí velikost (a) 7 m, (b) 1 m a (c) 5 m?

2C. Žena ušla 250 m severovýchodním směrem svírajícím s místním poledníkem úhel 30°. Poté zamířila přímo na východ a ušla dalších 175 m. (a) Grafickou metodou určete její celkové posunutí. (b) Porovnejte velikost tohoto posunutí se skutečnou délkou chůze.

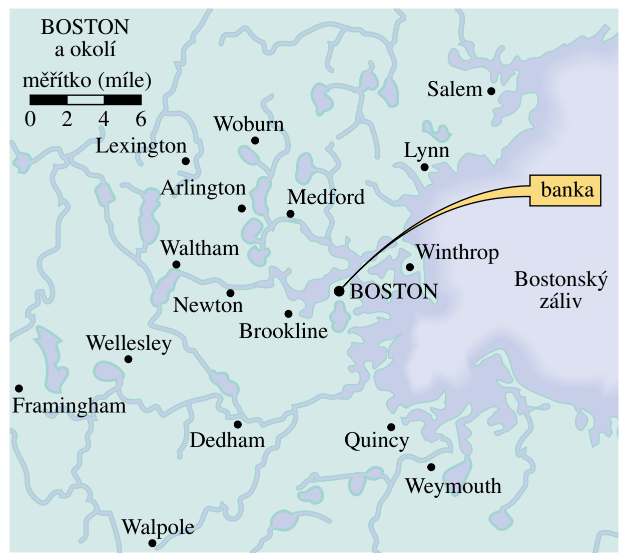
3C. Turista ušel 3,1 km na sever, pak 2,4 km na západ a nakonec 5,2 km na jih. (a) Sestrojte vektorový diagram popisující jeho pohyb. (b) Jak daleko a v jakém směru by musel letět pták, aby ze stejného výchozího místa doletěl do stejného cíle? Let ptáka je přímočarý.

4C. Automobil jede 50 km východním směrem, poté 30 km severně a dále 25 km na severovýchod pod úhlem 30° vzhledem k místnímu poledníku. Sestrojte vektorový diagram pohybu a určete celkové posunutí automobilu.

5Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ má velikost 5,0 jednotek a směřuje přímo na východ. Vektor $\boldsymbol{b}$ je odkloněn od severního směru na západ o 35° a jeho velikost činí 4,0 jednotky. Určete graficky $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$. Z nákresu odhadněte velikosti a směry výsledných vektorů.

6Ú. V jedné z bostonských bank došlo k loupeži (mapka na obr. 3.27). Při útěku použili lupiči vrtulník a letěli po trase tvořené třemi po sobě následujícími přímými úseky: 20 mil přesně na jihovýchod, 33 mil na severozápad, 26° od místní rovnoběžky, 16 mil na jihovýchod, 18° od místního poledníku. Při posledním přistání byli dopadeni. Ve kterém městě to bylo? (Vektory posunutí sčítejte grafickou metodou přímo v mapě.)

7Ú. Tři vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ mají stejnou velikost 50 jednotek a leží v rovině xy. S kladnou částí osy x svírají postupně úhly 30°, 195° a 315°. Určete graficky velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ a (c) vektor $\boldsymbol{d}$ tak, aby $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{0}$.



Obr. 3.27 Úloha 6

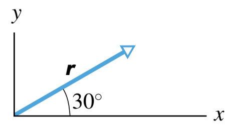
ODST. 3.3 Složky vektorů

8C. (a) Převeďte úhly 20,0°, 50,0° a 100° na radiány. (b) Převeďte úhly 0,330 rad, 2,10 rad a 7,70 rad na stupně.

9C. Určete x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{a}$, který leží v rovině xy a svírá s kladnou částí osy x úhel 250° měřený proti směru otáčení hodinových ručiček. Velikost vektoru je 7,3 jednotek.

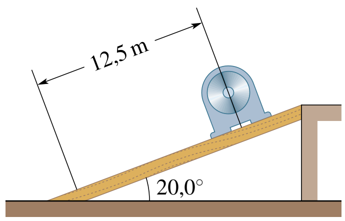
10C. Vektor v rovině xy má složky $a_x = -25{,}0$ jednotek a $a_y = +40{,}0$ jednotek. (a) Jakou má velikost? (b) Jaký úhel svírá s kladným směrem osy x?

11C. Vektor posunutí $\boldsymbol{r}$ leží v rovině xy a má velikost 15 m (obr. 3.28). Určete jeho složky.



Obr. 3.28 Cvičení 11

12C. Těžkou strojní součástku zvedali v dílně tak, že ji vlekli vzhůru po desce odkloněné od vodorovné roviny o úhel 20,0° (obr. 3.29). Součástku se podařilo posunout po desce o 12,5 m. (a) Jak vysoko se při tom zvedla? (b) Jaké bylo její posunutí ve vodorovném směru?



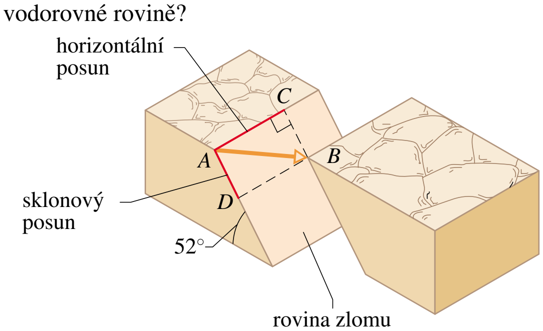
Obr. 3.29 Cvičení 12

13C. Minutová ručička nástěnných hodin měří od osy otáčení po špičku 10 cm. Jaký je vektor posunutí špičky (a) od čtvrt na čtyři do půl čtvrté, (b) za další půlhodinu a (c) za další hodinu?

14C. Loď se chystá na cestu dlouhou 120 km severním směrem. Náhlá bouře ji zanese 100 km východně od výchozího bodu. Jak musí kapitán změnit pokyny k plavbě (vzdálenost a směr), aby loď dosáhla původně plánovaného cíle?

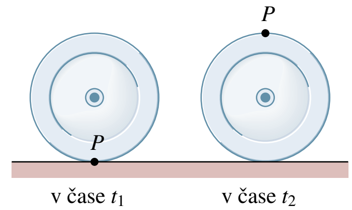
15Ú. Dvě kontrolní stanoviště A a B orientačního běhu jsou od sebe vzdálena 3,40 km. Stanoviště B leží severovýchodně od A ve směru svírajícím s místní rovnoběžkou úhel 35,0°. Pravidla závodu dovolují postupovat pouze severojižním nebo východo-západním směrem. Jakou nejmenší vzdálenost musí závodník uběhnout ze stanoviště A do B?

16Ú. Tektonickým zlomem se nazývá vzájemné posunutí dvou sousedních skalních bloků (obr. 3.30). Před skluzem body A a B splývaly. Celkové posunutí AB leží v rovině zlomu. Vodorovný průmět AC celkového posunutí se nazývá *horizontální posun*, průmět směřující dolů podél roviny zlomu AD je tzv. *sklonový posun*. (a) Jaká je celková délka posunutí AB, je-li horizontální posun 22,0 m a sklonový posun 17,0 m? (b) Jak velká je svislá složka posunutí AB, je-li rovina zlomu skloněna o 52° vzhledem k vodorovné rovině?



Obr. 3.30 Úloha 16

17Ú. Kolo o poloměru 45,0 cm se valí bez prokluzu po vodorovné podlaze (obr. 3.31). Na obvodu kola označíme bod P, který se v okamžiku t_1 právě dotkne podlahy. V pozdějším okamžiku t_2 je kolo otočeno o polovinu otáčky. Jaké je posunutí bodu P za dobu od t_1 do t_2?



Obr. 3.31 Úloha 17

18Ú. Místnost má půdorysné rozměry 3,7 m × 4,3 m a výšku 3,3 m. Moucha vyletí z jednoho rohu místnosti, chvíli poletuje a skončí v protilehlém rohu. (a) Jaká je velikost s jejího posunutí? (b) Může být dráha jejího letu kratší než s? Může být delší? Může být stejná? (c) Zaveďte vhodnou soustavu souřadnic a vyjádřete v ní složky vektoru posunutí. (d) Jakou nejkratší dráhu by moucha musela urazit, kdyby jen lezla po zdi? (Na tuto otázku lze odpovědět i bez výpočtu).

ODST. 3.5 Sčítání vektorů: algebraická metoda

19C. Určete složky vektoru $\boldsymbol{r}$, který je součtem dvou posunutí $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ se složkami $c_x = 7{,}4\,\mathrm{m}$, $c_y = -3{,}8\,\mathrm{m}$, $c_z = -6{,}1\,\mathrm{m}$, $d_x = 4{,}4\,\mathrm{m}$, $d_y = -2{,}0\,\mathrm{m}$, $d_z = 3{,}3\,\mathrm{m}$.

20C. (a) Pomocí jednotkových vektorů zapište součet vektorů $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = -13\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. (b) Určete jeho velikost a směr.

21C. Určete složky, velikost a směr vektorů (a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ a (b) $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, je-li $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 5{,}0\boldsymbol{i} - 2{,}0\boldsymbol{j}$.

22C. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. (c) Najděte vektor $\boldsymbol{c}$, pro který je $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

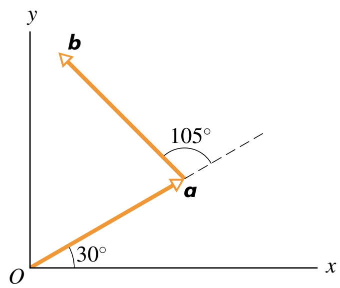
23C. Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 6{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$. Určete velikosti a směry vektorů (a) $\boldsymbol{a}$, (b) $\boldsymbol{b}$, (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (d) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ (e) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$. Jaký je vztah mezi vektory vypočtenými v části (d) a (e)?

24Ú. Určete vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$.

25Ú. Přičteme-li vektor $\boldsymbol{B}$ k vektoru $\boldsymbol{A}$, dostaneme vektor $6{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j}$. Pokud vektor $\boldsymbol{B}$ od vektoru $\boldsymbol{A}$ odečteme, je výsledkem vektor $-4{,}0\boldsymbol{i} + 7{,}0\boldsymbol{j}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{A}$?

26Ú. Součet vektorů $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ je $3{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$ má směr souhlasný s osou y a velikost shodnou s vektorem $\boldsymbol{C}$. Jaká je velikost vektoru $\boldsymbol{B}$?

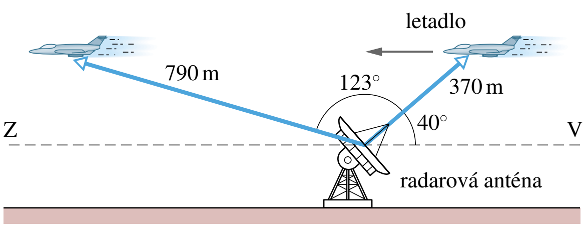
27Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají stejnou velikost 10,0 jednotek. Jejich směry jsou zakresleny v obr. 3.32. Označme jejich součet symbolem $\boldsymbol{r}$. Určete (a) x-ovou a y-ovou složku vektoru $\boldsymbol{r}$, (b) jeho velikost a (c) úhel, který svírá s kladným směrem osy x.



Obr. 3.32 Úloha 27

28Ú. Golfista umístil míček do jamky třemi údery. První směřoval na sever a měřil 3,7 m, druhý byl dlouhý 1,8 m a byl veden jihovýchodním směrem, třetí mířil na jihozápad a měl délku 0,9 m. Kterým směrem a do jaké vzdálenosti by hráč musel vyslat míček, aby trefil jamku napoprvé?

29Ú. Radarová stanice zaznamenala letoun, který se k ní blížil přesně z východu. V té chvíli byl letoun ve vzdálenosti 370 m od stanice a byl vidět pod elevačním úhlem 40° (nad vodorovnou rovinou). Radar sledoval letoun až do okamžiku, kdy byl od stanice vzdálen 790 m na západ a velikost pozorovacího úhlu činila 123° (obr. 3.33). Určete posunutí letounu během doby sledování.



Obr. 3.33 Úloha 29

30Ú. (a) Turista šel ze stanového tábora nejprve 1000 m na východ a pak 2 000 m na sever. Při krátkém odpočinku na skalním útesu vysokém 500 m vyndal z kapsy minci a pohrával si s ní. Ve chvíli nepozornosti mu mince upadla a letěla s útesu svisle dolů. Zvolte vhodnou kartézskou soustavu souřadnic a pomocí jejích jednotkových vektorů $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ vyjádřete vektor výsledného posunutí mince od výchozího stanoviště turisty až k místu jejího dopadu pod útesem. (b) Turista se vrátil do tábora jinou cestou. Určete jeho celkové posunutí během výletu.

31Ú. Částice vykoná tři následující přesuny: 4,00 m jihozápadně, 5,00 m východně a 6,00 m severovýchodním směrem svírajícím úhel 60° s místní rovnoběžkou. Souřadnicovou soustavu zvolíme tak, aby osa y směřovala na sever a osa x na východ. Určete (a) složky každého ze tří uvedených posunutí, (b) složky celkového posunutí částice, (c) velikost a směr celkového posunutí a (d) velikost a směr vektoru posunutí, při kterém by se částice vrátila do výchozího bodu.

32Ú. Ověřte následující tvrzení: Je-li součet dvou vektorů kolmý na jejich rozdíl, mají oba vektory stejnou velikost.

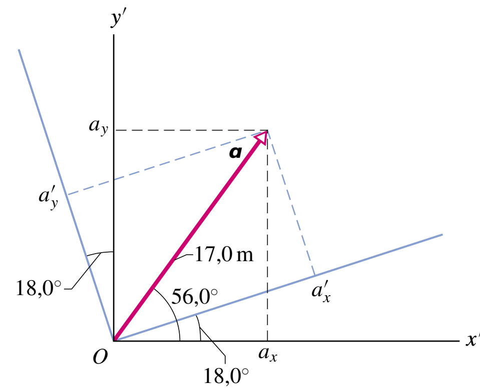
33Ú. Dva vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ s velikostmi a a b jsou umístěny tak, že jejich počáteční body splývají. Vektory svírají úhel θ. Rozkladem vektorů do složek ukažte, že jejich součet $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ má velikost

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

34Ú. (a) Pomocí jednotkových vektorů vyjádřete tělesovou úhlopříčku krychle v závislosti na velikosti její strany a. (b) Určete úhly, které svírá tělesová úhlopříčka s hranami krychle, které ji protínají. (c) Určete délku tělesové úhlopříčky.

ODST. 3.6 Vektory a fyzikální zákony

35C. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině xy, má velikost 17,0 m a od osy x je odkloněn proti směru otáčení hodinových ručiček o 56,0° (obr. 3.34). (a) Určete jeho složky a_x a a_y. Druhá (čárkovaná) soustava souřadnic je vzhledem k první (nečárkované) otočena o úhel 18,0°. Určete složky a'_x a a'_y vektoru $\boldsymbol{a}$ v čárkované soustavě souřadnic.



Obr. 3.34 Cvičení 35

ODST. 3.7 Násobení vektorů

36C. Vektor $\boldsymbol{d}$ má velikost 2,5 m a směřuje na sever. Určete velikost a směr vektorů (a) $4{,}0\boldsymbol{d}$ a (b) $-3{,}0\boldsymbol{d}$.

37C. Vektor $\boldsymbol{a}$ je souhlasně rovnoběžný s osou x soustavy souřadnic, vektor $\boldsymbol{b}$ s osou y. Dále je zadán skalár d. Jaký směr má vektor $\boldsymbol{b}/d$ je-li hodnota d (a) kladná, (b) záporná? Vypočtěte (c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ a (d) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/d$. Určete směr vektoru (e) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ a (f) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. (g) Určete velikosti vektorových součinů z části (e) a (f)? (h) Určete velikost a směr vektoru $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}/d$.

38C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

39C. Ukažte, že v pravotočivé soustavě souřadnic platí

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}.$$

Změnily by se předchozí vztahy, kdyby soustava souřadnic nebyla pravotočivá?

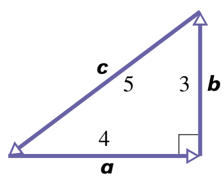
40C. Ukažte, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{a}$ platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2$ a $\boldsymbol{a} \times \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

41C. Určete následující součiny jednotkových vektorů: (a) „sever × západ“, (b) „dolů · jih“, (c) „východ × nahoru“, (d) „západ · · západ“ a (e) „jih × jih“.

42C. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ mají velikosti $a = 10$ jednotek, $b = 6{,}0$ jednotek a svírají úhel 60°. Určete (a) jejich skalární součin a (b) velikost jejich vektorového součinu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

43C. Vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$ leží v rovině xy. Vektor $\boldsymbol{r}$ má velikost 4,50 jednotek a svírá s kladným směrem osy x úhel 320° (měřeno proti směru otáčení hodinových ručiček). Vektor $\boldsymbol{s}$ má velikost 7,30 jednotek a je od kladného směru osy x odkloněn o úhel 85,0°. Určete (a) $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}$ a (b) $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}$.

44C. Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ jsou zadány podle obr. 3.35. Vypočtěte (a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$.



Obr. 3.35 Cvičení 44 a 45

45C. Pro vektory z obr. 3.35 určete součiny (a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ a (c) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$.

46Ú. *Výpočet skalárního součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro skalární součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

47Ú. (a) Určete složky a velikost vektoru $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, je-li $\boldsymbol{a} = 5{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j} - 6{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 4{,}0\boldsymbol{i} + +3{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$. (b) Vypočtěte úhel, který svírá vektor $\boldsymbol{r}$ s kladným směrem osy z.

48Ú. Užitím definice skalárního součinu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\theta$ a vztahu $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (úloha 46) vypočtěte úhel mezi vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j} + 3{,}0\boldsymbol{k}$.

49Ú. *Výpočet vektorového součinu vektorů pomocí složek.* Ukažte, že pro vektorový součin vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

platí

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k}.$$

50Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 5{,}0\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{b} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 4{,}0\boldsymbol{j}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ a (c) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$.

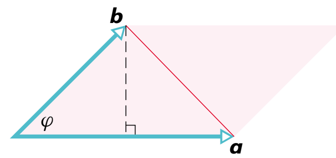
51Ú. Vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou zadány svými složkami (v libovolných jednotkách): $a_x = 3{,}2$, $a_y = 1{,}6$, $b_x = 0{,}50$, $b_y = 4{,}5$. (a) Určete úhel těchto vektorů. (b) Vypočtěte složky vektoru $\boldsymbol{c}$, který je kolmý k $\boldsymbol{a}$, leží v rovině xy a má velikost 5,0 jednotek.

52Ú. Vektor $\boldsymbol{a}$ leží v rovině yz, svírá s kladným směrem osy y úhel 63°, má kladnou z-ovou složku a jeho velikost je 3,20 jednotek. Vektor $\boldsymbol{b}$ leží v rovině xz, svírá s kladným směrem osy x úhel 48°, má kladnou z-ovou složku a velikost 1,40 jednotek. Určete (a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ a (c) úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$.

53Ú. Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = 3{,}0\boldsymbol{i} + 3{,}0\boldsymbol{j} - 2{,}0\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -1{,}0\boldsymbol{i} - - 4{,}0\boldsymbol{j} + 2{,}0\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{c} = 2{,}0\boldsymbol{i} + 2{,}0\boldsymbol{j} + 1{,}0\boldsymbol{k}$. Určete (a) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$, (b) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ a (c) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$.

54Ú. Vypočtěte úhly mezi tělesovými úhlopříčkami krychle s délkou hrany a (úloha 34).

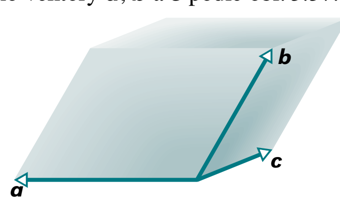
55Ú. Ukažte, že trojúhelník určený vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ (obr. 3.36) má obsah $\frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$.



Obr. 3.36 Úloha 55

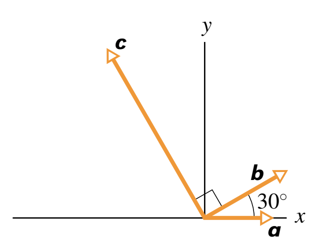
56Ú. (a) Ukažte, že výraz $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ je nulový pro libovolné vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. (b) Označte φ úhel mezi vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a určete $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$.

57Ú. Ukažte, že výraz $|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ určuje objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ podle obr. 3.37.



Obr. 3.37 Úloha 57

58Ú. Vektory na obr. 3.38 mají velikosti $a = 3{,}00$, $b = 4{,}00$ a $c = 10{,}0$. (a) Vypočtěte jejich x-ové a y-ové složky. (b) Určete čísla p a q tak, aby platilo $\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$.



Obr. 3.38 Úloha 58