

AKADEMIE VĚD ČESKÉ REPUBLIKY

*Recenzent:*

doc. RNDr. Vladimír Šíma, CSc.

*Tato publikace vyšla s podporou Akademie věd České republiky*

Bedřich Sedlák

Ivan Štoll

# Elektrina a magnetismus

ACADEMIA

## OBSAH

Z předmluvy k prvnímu vydání .....	13
Předmluva k druhému vydání .....	15
<b>1 Elektrostatika.....</b>	<b>17</b>
1.1 Elektrický náboj.....	17
1.1.1 Vlastnosti elektrického náboje .....	17
1.1.2 Coulombův zákon .....	19
1.1.3 Velikost elektrického náboje.....	22
1.1.4 Hustota elektrického náboje.....	25
1.1.5 Potenciální energie soustavy nábojů .....	27
1.1.6 Řešené příklady.....	28
a) Rovnováha soustavy statických nábojů.....	28
b) Elektrostatická energie iontového krystalu .....	30
1.2 Elektrostatické pole ve vakuu .....	31
1.2.1 Vektor intenzity elektrostatického pole bodových nábojů .....	31
1.2.2 Tok intenzity elektrostatického pole bodových nábojů .....	34
1.2.3 Potenciál elektrostatického pole bodových nábojů .....	38
1.2.4 Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů.....	43
1.2.5 Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole.....	46
1.2.6 Nabitá plocha v elektrostatickém poli .....	48
1.2.7 Poissonova a Laplaceova rovnice.....	50
1.2.8 Hustota energie elektrostatického pole.....	51
1.2.9 Řešené příklady.....	52
a) Nabitá přímka.....	53
b) Nabitá rovina .....	54
c) Dvojice rovnoběžných nabitých rovin .....	56
d) Nabitá rovinná vrstva.....	57
e) Nabitá kulová slupka.....	58
f) Nabitá koule .....	59
g) Nabitá nekonečná válcová plocha a válec.....	61
h) Pole a potenciál na ose nabitě kružnice.....	61
i) Elektrostatické pole na ose válcové elektrody .....	62
j) Elektrostatické pole na ose kulového pásu.....	63
k) Elektrostatická energie nabitě koule .....	64
1.3 Elektrický dipól.....	65
1.3.1 Vlastnosti elektrického dipólu.....	65
1.3.2 Multipólový rozvoj elektrostatického pole.....	71
1.3.3 Elektrická dvojvrstva .....	75
1.3.4 Objemové rozložení elektrických dipólů.....	77
1.3.5 Řešené příklady.....	80
a) Síla působící mezi dvěma elektrickými dipóly.....	80
b) Elektrický kvadrupólový moment elipsoidu .....	81
c) Polarizovaný válec a rovinná vrstva.....	82
d) Polarizovaná koule.....	84
1.4 Elektrostatické pole nabitých vodičů .....	86
1.4.1 Vodiče a nevodíče .....	86
1.4.2 Chování vodičů v elektrostatickém poli.....	88

1.4.3	Nepřímé ověření Coulombova zákona	92
1.4.4	Základní úloha elektrostatiky	96
1.4.5	Kapacita a kondenzátor	98
1.4.6	Énergie soustavy nabitých vodičů	105
1.4.7	Řešené příklady	109
	a) Bodový náboj a vodivá rovina	109
	b) Kulové elektrostatické zobrazení	111
	c) Vodivá koule v homogenním elektrostatickém poli	113
	d) Kapacita kulového kondenzátoru	114
	e) Kapacita válcového kondenzátoru	114
	f) Kapacita dvoulinky	115
	g) Mechanické napětí nabitých vodičů	115
	h) Elektrostatické měřicí přístroje	116
1.5	Elektrostatické pole v dielektrikách	118
1.5.1	Dielektrika v elektrostatickém poli	118
1.5.2	Polarizace dielektrika	120
1.5.3	Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku	122
1.5.4	Materiálové vztahy, elektrická susceptibilita a permitivita	125
1.5.5	Énergie elektrostatického pole v dielektriku	127
1.5.6	Řešené příklady	131
	a) Volné náboje a nabité vodiče v dielektriku	131
	b) Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik	131
	c) Dielektrická koule a elipsoid v homogenním elektrostatickém poli	132
	d) Pole v dutině vytvořené v homogenním dielektriku	134
	Úlohy ke kapitole 1	135
<b>2</b>	<b>*Silové působení mezi pohybujícími se náboji</b>	139
2.1	Základní vztahy relativistické mechaniky	139
2.1.1	Einsteinův princip relativity	139
2.1.2	Lorentzova transformace	142
2.1.3	Relativistická dynamika	145
2.2	Pole pohybujících se nábojů	147
2.2.1	Pohybující se bodový náboj	147
2.2.2	Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně malou rychlostí	150
2.2.3	Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně libovolnou rychlostí	154
2.2.4	Pole náboje pohybujícího se libovolným způsobem	163
2.2.5	Řešené příklady	166
	a) Pole přímého nábojového paprsku	166
	b) Pole roviny vytvořené rovnoběžnými nábojovými paprsky	167
	c) Síly působící mezi nábojovými paprsky	168
	d) Transformace složek elektrického a magnetického pole	170
<b>3</b>	<b>Stacionární pole</b>	173
3.1	Elektrický proud	173
3.1.1	Pojem elektrického proudu, hustota proudu	173
3.1.2	Mechanismy vedení proudu	176
3.1.3	Rovnice kontinuity proudu	178
3.2	Stacionární elektrické pole a elektrický obvod	180
3.2.1	Základní vlastnosti stacionárního elektrického pole	180
3.2.2	Ohmův zákon pro homogenní vodiče	182
3.2.3	Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče	185
3.2.4	Kirchhoffova pravidla pro stacionární obvod	190

3.2.5	Práce a výkon v elektrickém obvodu, Jouleův zákon	192
3.2.6	Řešené příklady	194
	a) Podobnost elektrostatického a stacionárního elektrického pole	194
	b) Řazcí odporů	196
	c) Transformace hvězda trojúhelník	197
	d) Výkonové přízpůsobení spotřebiče	198
3.3	Stacionární magnetické pole	198
3.3.1	Vektor magnetické indukce	199
3.3.2	Ampèreův zákon pro magnetické pole ve vakuu	201
3.3.3	Vektorový potenciál, Biotův-Savartův vzorec	205
3.3.4	Magnetické pole v místech s nenulovou hustotou proudu, pole plošných proudů	210
3.3.5	Řešené příklady	213
	a) Magnetické pole přímého vodiče	213
	b) Magnetická indukce na ose kruhového závitu	216
	c) Magnetická indukce na ose solenoidu	216
	d) Magnetická indukce toroidu	218
	e) Vektorový potenciál homogenního pole a nekonečně dlouhého solenoidu	219
3.4	Magnetický dipól	221
3.4.1	Magnetický dipólový moment rovinné proudové smyčky	221
3.4.2	Potenciální energie a silové účinky magnetického pole na magnetický dipól	223
3.4.3	Multipólový rozvoj magnetického pole	224
3.4.4	Objemové rozložení magnetických dipólů	225
3.4.5	Magnetická dvojvrstva	227
3.4.6	Řešené příklady	229
	a) Magnetický dipólový moment nabitě částice konající rovnoměrný kruhový pohyb	229
	b) Magnetický dipólový moment rotující nabitě koule	230
3.5	Magnetické pole v látkách	231
3.5.1	Chování látek v magnetickém poli	231
3.5.2	Magnetická polarizace (magnetizace) látek, magnetizační proudy	233
3.5.3	Ampèreův zákon v látkovém prostředí	237
3.5.4	Materiálové vztahy, magnetická susceptibilita a permeabilita	239
3.5.5	Magnetický obvod	244
3.5.6	Magnetostatické pole	248
3.5.7	Řešené příklady	249
	a) Magnetické pole na rozhraní dvou prostředí	249
	b) Toroidní jádro se vzduchovou mezerou	250
	c) Koule v homogenním magnetickém poli	252
	d) Elipsoid magnetovaný ve směru hlavní osy	253
	Úlohy ke kapitole 3	255
<b>4</b>	<b>Kvazistacionární elektrické a magnetické pole</b>	258
4.1	Elektromagnetická indukce	258
4.1.1	Zákon elektromagnetické indukce	258
4.1.2	Souvislost mezi elektromagnetickou indukcí a silovými účinky magnetického pole	262
	a) Pohyb přímého vodiče v homogenním magnetickém poli	262
	b) Princip elektrického stroje	263
	c) Princip fluxmetru	266
4.1.3	Obecné vlastnosti kvazistacionárního pole	268

4.1.4 Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů.....	271
4.1.5 Řešené příklady.....	274
a) Demonstrace platnosti Ampèrova zákona (měřicí transformátor).....	274
b) Vlastní indukčnost přímých vodičů.....	275
c) Vlastní indukčnost kruhové smyčky.....	277
d) Vlastní indukčnost solenoidu.....	278
e) Vlastní indukčnost toroidu.....	278
f) Vzájemná indukčnost dvou sousých smyček.....	279
g) Vzájemná indukčnost dvojice sousých válcových cívek.....	280
4.2 Kvizistacionární elektrický obvod.....	281
4.2.1 Kirchhoffova pravidla pro kvazistacionární obvod.....	281
4.2.2 Generace střídavého harmonického napětí, střídavé obvody.....	286
4.2.3 Indukčně vázané obvody, transformátor.....	291
4.2.4 Řešené příklady.....	295
a) Neustálený stav v obvodech s indukčností a kapacitou.....	295
b) Sériový rezonanční obvod.....	297
c) Vlastní kmity indukčně vázaných oscilačních obvodů.....	301
4.3 Energie kvazistacionárního pole.....	302
4.3.1 Zákon zachování energie v kvazistacionárních soustavách.....	302
4.3.2 Obecné vyjádření energie magnetického pole.....	305
4.3.3 Obecné vyjádření sil v magnetickém poli.....	309
4.3.4 Řešené příklady.....	311
a) Síly působící mezi póly elektromagnetu.....	311
b) Hysterezní ztráty ve feromagnetiku.....	312
c) Střední hodnota výkonu ve střídavém obvodu.....	313
d) Magnetoelektrický měřicí přístroj.....	314
Úlohy ke kapitole 4.....	319
<b>5 Elektromagnetické pole.....</b>	<b>321</b>
5.1 Maxwellovy rovnice.....	322
5.1.1 Indukované elektrické pole.....	323
5.1.2 Magnetické pole posuvného proudu.....	327
5.1.3 Úplná soustava Maxwellových rovnic.....	330
5.1.4 Potenciály elektromagnetického pole.....	333
5.2 Energie a hybnost elektromagnetického pole.....	336
5.2.1 Poyntingova věta.....	336
5.2.2 Hybnost elektromagnetického pole.....	340
5.2.3 *Termodynamické vztahy v přítomnosti elektromagnetického pole.....	343
5.3 Elektromagnetické vlny.....	347
5.3.1 Rovinná elektromagnetická vlna.....	347
5.3.2 Monochromatická rovinná vlna.....	351
5.3.3 Vyzařování elektromagnetických vln.....	354
5.3.4 Řešené příklady.....	358
a) Odraz a lom elektromagnetických vln.....	358
b) Tlak záření.....	361
c) Povrchový jev (skinefekt).....	362
5.4 *Lorentzovy rovnice.....	364
5.4.1 Mikroskopický popis elektromagnetického pole.....	365
5.4.2 Odvození Maxwellových rovnic z rovnic Lorentzových.....	367
Úlohy ke kapitole 5.....	370

<b>6 Pohyb částice v elektromagnetickém poli.....</b>	<b>372</b>
6.1 Nabitá částice v elektromagnetickém poli.....	372
6.1.1 Pohybová rovnice.....	372
6.1.2 Energie a hybnost částice.....	373
6.1.3 Pohyb v časově neproměnném homogenním poli.....	377
a) Homogenní elektrické pole.....	377
b) Homogenní magnetické pole.....	378
c) Vzájemně kolmé elektrické a magnetické pole.....	380
6.1.4 Pohyb v nehomogenním osově symetrickém magnetickém poli.....	382
6.2 Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli.....	384
6.2.1 Pohybová rovnice.....	384
6.2.2 Larmorova precese.....	385
6.3 Příklady použití.....	386
6.3.1 Principy částicové optiky.....	386
6.3.2 Urychlovače nabitých částic.....	390
a) Elektrostatické urychlovače.....	391
b) Lineární (rezonanční) urychlovač.....	392
c) Cyklotron.....	393
d) Betatron.....	394
6.3.3 Hmotnostní spektroskopie.....	395
6.3.4 Magnetická rezonance.....	396
Úlohy ke kapitole 6.....	399
<b>7 Elektrické a magnetické vlastnosti látek.....</b>	<b>400</b>
7.1 *Elektronová struktura látek.....	401
7.1.1 Energie elektronů v atomech a molekulách.....	401
7.1.2 Energie elektronů v kondenzovaných látkách.....	407
7.1.3 Elektronový plyn.....	409
7.1.4 Elektrické a magnetické momenty atomů a molekul.....	413
7.2 Dielektrická a magnetická polarizace.....	415
7.2.1 Dielektrika.....	416
7.2.2 Diamagnetismus a paramagnetismus.....	421
7.2.3 Magneticky uspořádané látky.....	424
7.3 Vedení proudu v pevných látkách.....	429
7.3.1 Obecné charakteristiky vedení proudu v pevných látkách.....	429
7.3.2 Vodivost kovů.....	433
7.3.3 Kontaktní napětí a termoelektrické jevy v kovech.....	437
7.3.4 Vlastní a příměšová vodivost polovodičů, vlastnosti přechodu $p-n$ .....	441
7.3.5 Supravodivost.....	448
7.3.6 Elektronová emise.....	453
7.3.7 Nenasyčený emisní proud, princip elektronky.....	456
7.4 Vedení proudu v kapalinách.....	458
7.4.1 Měrná a molární vodivost roztoků.....	458
7.4.2 Elektrolyza, Faradayovy zákony.....	461
7.4.3 Elektrochemické procesy na elektrodách – elektrodové potenciály, galvanické články.....	462
a) Primární články.....	466
b) Sekundární články.....	467
c) Palivové články.....	469
7.4.4 Polarografie.....	469
7.5 Vedení proudu v plynech.....	471
7.5.1 Nesamostatná vodivost.....	471

7.5.2	Doutnavý a obloukový výboj .....	472
7.6	Základy teorie materiálových konstant .....	476
7.6.1	Permitivita nepolárních látek (Clausiiův–Mosottiův vztah) .....	476
7.6.2	Langevinova teorie diamagnetismu atomů a molekul .....	479
7.6.3	Susceptibilita nekovových paramagnetik, permitivita polárních látek (Langevinova teorie) .....	480
	a) Magnetická susceptibilita paramagnetik .....	481
	b) Permitivita polárních látek .....	483
7.6.4	Obecné podmínky platnosti Ohmova zákona, fyzikální podstata Hallova jevu ..	484
7.6.5	Drudeho teorie vodivosti kovů .....	486
7.6.6	Výklad vodivosti roztoků .....	488
7.6.7	Výklad nesamostatné vodivosti plynů, podmínky pro vznik samostatného výboje .....	492
	Úlohy ke kapitole 7 .....	494
<b>8</b>	<b>Základy teorie elektrických obvodů .....</b>	<b>497</b>
8.1	Základní pojmy .....	497
8.1.1	Klasifikace elektrických obvodů a jejich prvků .....	497
8.1.2	Základní vlastnosti elektrických dvojpólů a čtyřpólů .....	499
	a) Dvojpól .....	500
	b) Čtyřpól .....	502
8.2	Steady-state a střídavé lineární obvody v ustáleném stavu .....	504
8.2.1	Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla v komplexní symbolice .....	504
8.2.2	Vlastnosti reálných dvojpólů .....	508
	a) Náhradní schéma lineárního zdroje .....	510
	b) Náhradní schéma kondenzátoru .....	511
	c) Náhradní schéma cívky .....	513
8.2.3	Věta o superpozici .....	514
8.2.4	Obecné metody analýzy lineárních obvodů v ustáleném stavu .....	515
	a) Přímá aplikace Kirchhoffových pravidel .....	516
	b) Metoda smyčkových proudů .....	518
	c) Metoda uzlových napětí .....	521
8.2.5	Théveninova věta .....	522
8.2.6	Obvody se vzájemnou indukčností .....	524
8.2.7	Řešené příklady .....	528
	a) Sériové a paralelní rezonanční obvody .....	528
	b) Wheatstonův můstek .....	531
	c) Thomsonův dvojnosit .....	534
	d) Měření napětí a proudů v obvodech .....	536
8.3	Vybrané typy obecnějších obvodů .....	538
8.3.1	Nesinusové střídavé lineární obvody v ustáleném stavu .....	538
8.3.2	Neustálený stav v lineárních obvodech .....	542
8.3.3	Příklady řešení nelineárních obvodů .....	543
	a) Stabilizace napětí Zenerovou diodou .....	544
	b) Stanovení pracovního bodu tranzistoru .....	546
	c) Náhradní schéma linearizovaného čtyřpólu .....	548
	Úlohy ke kapitole 8 .....	549
<b>Dodatek 1</b>	<b>Přehled vektorové analýzy .....</b>	<b>553</b>
	a) Skalární a vektorové veličiny .....	553
	b) Součiny vektorů .....	555

c)	Transformační vlastnosti vektorů .....	557
d)	Skalární a vektorové pole .....	558
e)	Gradient skalárního pole .....	561
f)	Divergence vektorového pole .....	563
g)	Rotace vektorového pole .....	567
h)	Operátory ( $\nabla$ ) a $\Delta$ .....	570
i)	Vektorové pole potenciální a solenoidální .....	571
j)	Některé integrální věty vektorové analýzy .....	574
k)	Úlohy k Dodatku 1 .....	575
<b>Dodatek 2</b>	<b>Soustavy fyzikálních jednotek .....</b>	<b>576</b>
a)	Charakteristiky soustav jednotek .....	576
b)	Vývoj elektrických a magnetických jednotek .....	579
c)	Přehled rovnic elektromagnetického pole v Gaussově soustavě .....	584
d)	Převodní vztahy jednotek elektrických a magnetických veličin v Mezinárodní a Gaussově soustavě .....	585
e)	Vybrané základní fyzikální konstanty .....	587
<b>Historický přehled .....</b>	<b>594</b>	
	Od Thalety ke Gilbertovi .....	594
	Od Gilberta ke Coulombovi .....	595
	Od Coulomba k Ampèrovi .....	599
	Od Ampèra k Maxwellovi .....	601
	Od Maxwella k Einsteinovi .....	606
	Od Einsteina k dnešku .....	610
	Výzkum elektřiny a magnetismu v našich zemích .....	615
<b>Výsledky a návody řešení úloh .....</b>	<b>617</b>	
<b>Literatura .....</b>	<b>625</b>	
<b>Rejstřík .....</b>	<b>626</b>	

# 1 Elektrostatika

## 1.1 Elektrický náboj

### 1.1.1 Vlastnosti elektrického náboje

Na základě pokusů s elektřinou víme, že některá tělesa (například skleněná či ebonitová tyč po předchozím tření) mohou za určitých podmínek silově působit na jiná tělesa. Toto silové působení si vysvětlujeme přítomností *elektrických nábojů*. Elektrický náboj představuje pro nás výchozí fyzikální veličinu, přičemž mírou jejího množství a rozložení na příslušných tělesech je právě silové působení mezi nimi. Elektrický náboj je veličinou skalární, podobně jako hmotnost, a k jeho určení stačí jediná (reálná) číselná hodnota. Skutečnost, že síly elektrického působení mezi tělesy mohou být jak přitažlivé, tak odpudivé, vysvětlujeme tím, že elektrický náboj může nabývat kladných i záporných hodnot – tělesa se souhlasným znaméním náboje se přitom odpuzují, tělesa s nesouhlasným znaméním náboje se přitahují. Tělesa, která nesou elektrický náboj, nazýváme *kladně či záporně nabitá*, tělesa o nulovém náboji jsou elektricky *neutrální*, nenabitá. Často se setkáváme s případem, kdy na tělesech jsou odděleně rozloženy kladné a záporné elektrické náboje o téže absolutní hodnotě. Taková tělesa budou také elektricky silově působit, přestože jejich celkový elektrický náboj je nulový. Říkáme jim *polarizovaná*.

O přítomnosti elektrického náboje se přesvědčujeme pouze na základě jeho silového působení. Znamená to, že existenci jednoho jediného náboje bychom nemohli nijak odhalit. Kdyby existovaly pouze dva náboje, mohli bychom určit, zda jsou souhlasného či nesouhlasného znamení; nemohli bychom však rozhodnout ani o znamení, ani o velikosti těchto nábojů. Teprve jsou-li k dispozici alespoň tři náboje, můžeme jeden z nich vybrat jako jednotkový a kladný a ze silového působení určit velikost a znamení druhých dvou nábojů.

Co je vlastní podstatou elektrického náboje nevíme. Na základě poznatků současné mikrofyziky jej můžeme považovat za jednu z *v l a s t n o s t í* některých elementárních částic, která podmiňuje jejich vzájemné působení. Rozlišujeme čtyři základní typy vzájemného působení (interakce) mezi elementárními částicemi: gravitační, slabé, elektromagnetické a silné. *Gravitační interakce* je univerzální a týká se všech částic. Setkali jsme se s ní v mechanice, její velikost udává Newtonův gravitační zákon a její podstatu se snaží objasnit obecná teorie relativity. *Slabá interakce* se projevuje u některých typů radioaktivního rozpadu za účasti neutrina. Podobně *elektromagnetická interakce* se uplatňuje mezi elementárními částicemi a jednou z jejich charakteristik je elektrický náboj. *Silná interakce* existuje mezi částicemi, které nazýváme hadrony, a drží pohromadě atomové jádro, které by se jinak odpudivými elektrickými silami působícími mezi protony muselo rozletět.

Současný rozvoj mikrofyziky naznačuje, že hadrony, které jsme dříve považovali za elementární, mají svoji strukturu a komponenty. Předpokládáme o nich, že jsou tvořeny tzv. *kvarky*. Na současně úrovni vystupují tedy jako elementární kvarky a leptony (k nim patří elektron, mion, tauon a odpovídající neutrina), jejich antičástice a dále pak částice, které zprostředkují interakci mezi nimi. U gravitační interakce jsou to dosud hypotetické gravitony, u slabé nedávno objevené intermediaální bosony, u elektromagnetické fotonu a u silné gluony [1].

Elementární částice vytvářejí složitější struktury, atomová jádra, atomy, molekuly, jejichž vzájemné působení nabývá rovněž složitějšího charakteru. V denním životě se setkáváme s projevy působení gravitačního a elektromagnetického, které je ze všech nejlépe prozkoumáno. Nejen síly elektrostatické a elektrodynamické, ale i magnetické, optické, chemické a biologické jevy, chemické vazby a uvolňování chemické energie, mezimolekulární síly podmiňující soudržnost těles, přilnavost a tření, síly svalové kontrakce, tepelné působení slunečního záření a mnoho dalších jevů má svůj původ ve vzájemném působení elektrických nábojů.

Síly elektromagnetického působení mohou být přitažlivé i odpuzivé, mohou složitým způsobem záviset na vzdálenosti, směru v prostoru a vzájemné poloze těles, na rychlosti jejich pohybu, vlastnostech prostředí, obecně nemusí působit ve směru spojnice interagujících těles, a dokonce nemusí ani splňovat Newtonův zákon akce a reakce.

Elektrický náboj má některé základní vlastnosti, které vyplývají z experimentálních pozorování a uplatňují se i při vzájemné interakci nabitých částic. Tyto vlastnosti vyjadřuje:

1. **Zákon zachování náboje.** *Elektrický náboj je nestvořitelný a nezničitelný.* Jinak řečeno, celkové množství elektrického náboje v elektricky izolované soustavě (jejíž hranici nemohou procházet náboje) zůstává neměnné. Dochází-li ke srážkám částic, je celkový náboj před reakcí roven celkovému náboji po reakci. První experimentální důkaz tohoto zákona podal Faraday v r. 1843 elektrometrickým měřením náboje nabitě koule v izolovaném prostoru. Matematické vyjádření tohoto zákona je dáno tzv. rovnicí continuity proudu, kterou uvedeme v článku 3.1.3.

2. **Zákon invariantnosti náboje.** *Velikost elektrického náboje se při pohybu nemění.* Jinak řečeno, při všech transformacích vztažné soustavy zůstává velikost náboje invariantní. Takovou vlastnost má jen málo fyzikálních veličin; například hmotnost částice roste jak známo s rychlostí.

Jedním z experimentálních argumentů svědčících o invariantnosti náboje je skutečnost, že atomy a molekuly jsou elektricky neutrální. Atom helia a molekula těžkého vodíku  $D_2$  jsou tvořeny týmiž částicemi – dvěma protony, dvěma neutrony a dvěma elektrony. Pohyb nabitých částic v těchto dvou soustavách je jistě podstatně odlišný a přitom obě zůstávají elektricky neutrální. V šedesátých letech 20. století byly prováděny přesné pokusy s odchylováním svazků atomů cesia a molekul vodíku v silném elektrickém poli, které prokázaly, že atomy jsou elektricky neutrální s přesností na dvacet desetinných míst velikosti elementárního náboje<sup>1</sup>.

3. **Zákon kvantování náboje.** *Existuje nejmenší, dále nedělitelný elektrický náboj, který nazýváme elementárním, a všechny elektrické náboje mají velikost, která je jeho celistvým násobkem.* Tento atomismus elektriny souvisí s tím, že elektrický náboj je vlastností částic látky. Velikost elementárního ná-

<sup>1</sup> J. C. Zorn a j. Phys. Rev. 129 (1963), str. 2566, J. G. King, Phys. Rev. Lett. 5 (1960), str. 562.

boje je možné určit pomocí celé řady experimentů, např. klasického Millikanov pokusu (1911), viz článek 1.1.3.

Kladný elementární náboj má například proton, který patří mezi hadrony. Kvarky jako komponenty hadronů mají podle předpokladů náboje o velikosti jedné třetiny a dvou třetin elementárního náboje. Tato okolnost však nemění ni na faktu kvantování náboje.

Pokud jde o vlastnosti nabitých částic, jsou pozoruhodné ještě dvě okolnosti. Jednou z nich je existence *částic a antičástic*. Ke každé částici existuje antičástice, které se vzájemně liší znamením elektrického náboje.<sup>2</sup> Protože elektrické síly závisejí pouze na souhlasnosti či nesouhlasnosti znamení náboje, mohla by existovat antilátka, kde by nukleony v atomových jádrech byly nahrazeny anti nukleony a elektrony atomových obalů svými antičásticemi – pozitrony. Tyto úvahy mají velký význam i pro kosmologii a vyjadřují jednu ze základních symetrií přírody.

Druhá ze zmíněných okolností je *nábojová kvazineutralita* vesmíru. V dostatečně velkých objemech se celkový počet kladných i záporných nábojů vždy vyrovnává a látka, jak se s ní běžně setkáváme v tuhém, kapalném a plynném skupenství, se jeví elektricky neutrální. Odchyly od elektrické neutrality v makroskopických měřících se projevují elektrickými silami, které se opět snaží elektrickou neutralitu obnovit.

### 1.1.2 Coulombův zákon

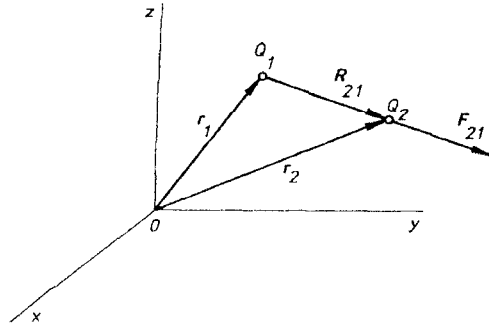
Při kvantitativním popisu silového působení mezi makroskopickými nabitými tělesy je výhodné v prvním přiblížení abstrahovat od způsobu rozložení náboje v objemu tělesa. Můžeme zavést pojem *bodového náboje*, který je analogický pojmu hmotného bodu v mechanice. Za bodový náboj můžeme tedy považovat nabitě těleso, jehož rozměry jsou zanedbatelně malé ve srovnání se vzdálenostmi, na nichž silové působení uvažujeme.

Dvojice bodových nábojů o velikostech,  $Q_1$ ,  $Q_2$ , které jsou umístěny ve vakuu v bodech o polohových vektorech  $r_1$ ,  $r_2$  a které jsou nehybné v dané inerciální soustavě souřadnic (obr. 1.1), tvoří nejjednodušší makroskopickou soustavu, na níž je možné silové působení mezi náboji studovat. Experimenty tohoto druhu provedl r. 1785 Ch. A. Coulomb s použitím torzních vah, které představují jeden z nejcitlivějších fyzikálních přístrojů.

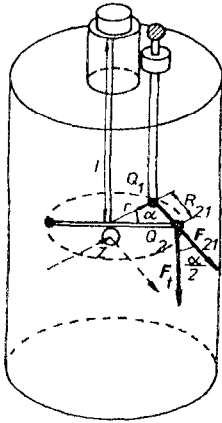
Sílu působící mezi dvěma malými nabitými kuličkami lze měřit z úhlu zkrutu  $\alpha$  dlouhého a tenkého vlákna délky  $l$  a poloměru průřezu  $R$ . Úhel  $\alpha$  se zjišťuje odrazem světelného paprsku od zrcátka  $Z$  spojeného s vláknem. Na konci vlákna je zavěšeno vodorovné vahadélko s malými stejnými kuličkami na koncích.

<sup>2</sup> Částice a antičástice se liší též znaménkem magnetického momentu a některých dalších tzv. kvantových čísel (leptonový a baryonový náboj, podivnost, půvab aj.), která charakterizují jejich vzájemné interakce. Existuje několik částic, které jsou se svými antičásticemi totožné (například foton) [1].

Jedna z těchto pohyblivých kuliček nesoucí elektrický náboj  $Q_2$  se ustálí v rovnovážné poloze vůči nehybné kuličce o náboji  $Q_1$  ve vzdálenosti  $R_{21}$  (viz obr. 1.2). Jak uvidíme později, nabitá kulička se navenek chová tak, jakoby elektrický náboj byl umístěn v jejím středu a popsané uspořádání tedy umožňuje měřit síly působící mezi bodovými náboji. Moment tangenciální síly  $F_t$  se musí rovnat torznímu momentu  $D$  takže platí



Obr. 1.1 K vzájemnému silovému působení dvou bodových nábojů.



Obr. 1.2 Coulombovy torzní váhy.

$$rF_t = D = \frac{\pi GR^4}{2l} \alpha \quad (1.1)$$

( $r$  je délka ramene torzních vah,  $G$  modul smyku materiálu vlákna), a tedy

$$F_{21} = \frac{F_t}{\cos \alpha / 2} = \frac{D}{r \cos \alpha / 2} \quad (1.2)$$

Na základě výsledků těchto experimentů lze formulovat vztah vyjadřující sílu  $F_{21}$ , kterou náboj  $Q_1$  působí na náboj  $Q_2$ . Tento vztah, vyjadřující *Coulombův zákon*, lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2} \mathbf{R}_{21}, \quad (1.3)$$

v němž  $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  a  $R_{21}$  je velikost vektoru  $\mathbf{R}_{21}$ . Obráceně sílu  $\mathbf{F}_{12}$ , kterou působí náboj  $Q_2$  na náboj  $Q_1$ , dostaneme záměnou indexů 1 a 2 ve vztahu (1.3). Platí tedy  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  v souladu s Newtonovým principem akce a reakce. Síly mezi bodovými náboji působí podél jejich spojnice – takové síly nazývají *centrálními*. Změní-li se znaménko součinu  $Q_1 Q_2$ , změní se pouze směr síly nikoli její velikost. Kladné znaménko tohoto součinu odpovídá přítomnosti odpudivé, záporné znaménko síle přitažlivé.

Velikost síly působící mezi dvojicí bodových nábojů je rovna

$$F = |\mathbf{F}_{21}| = |\mathbf{F}_{12}| = k \frac{|Q_1 Q_2|}{R_{21}^2}. \quad (1.4)$$

Tato velikost klesá se čtvercem vzdálenosti obou nábojů (stejně jako gravitační působení dvou hmotných bodů) a nezávisí na směru v prostoru. Coulombovy síly jsou tedy *izotropní*.

Všimneme si nyní poněkud obecnější úlohy. Předpokládejme, že v bodech o polohových vektorech  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  jsou rozloženy bodové náboje  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Nechť dále v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  je umístěn bodový náboj  $Q$ . Ptáme se, jaká síla  $\mathbf{F}$  bude na náboj  $Q$  působit. Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, musíme vědět, jak se změní silové působení mezi dvojicí bodových nábojů, budou-li v prostoru rozmístěny ještě náboje další.

Experimentální zkušenost ukazuje, že silové působení mezi danou dvojicí nábojů je na přítomnosti dalších nábojů nezávislé. Podle věty o skládání síly známé z mechaniky, můžeme proto celkovou sílu  $\mathbf{F}$  působící na náboj  $Q$  vyjádřit jako vektorový součet sil  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) vyvolaných jednotlivými náboji  $Q_1$  a  $Q_N$ . Podle (1.3) bude tedy platit

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = k Q \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^2} \mathbf{R}_i, \quad (1.5)$$

přičemž  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ .

Elektrostatické síly působící mezi dvojicemi bodových nábojů jsou tedy nezávisle aditivní. Toto tvrzení je obsahem *principu superpozice*, podle něhož se jednotlivé síly (popř. jiné fyzikální veličiny) vzájemně neovlivňují, superponují se a lze je počítat. Jde o neobyčejně významný princip, s nímž se setkáváme



i v jiných oblastech fyziky u tzv. lineárních jevů. Umožňuje nám určovat silové působení těles s libovolným rozložením elektrických nábojů. Je vlastně součástí formulace Coulombova zákona, neboť umožňuje použít vztah (1.3) i za přítomnosti nábojů dalších.

Přesnost Coulombových měření byla řádově několik procent. Existují však další, mnohem přesnější nepřímé metody experimentálního ověření platnosti Coulombova zákona, založené na vlastnostech rozložení elektrických nábojů na vodičích. Těto metody využil již H. Cavendish r. 1772, své výsledky však nepublikoval a upozornil na ně teprve J. C. Maxwell r. 1879. Podrobněji bude o této metodě zmínka v článku 1.4.3.

V pozemském makroskopickém měřítku je platnost Coulombova zákona experimentálně potvrzena mimo pochybnost. Vzniká samozřejmě otázka o mezích platnosti tohoto zákona, budou-li elektrostatické síly a vzdálenosti nábojů příliš velké nebo příliš malé. Pokusy s rozptylem nabitých částic prokázaly platnost Coulombova zákona až na vzdálenostech odpovídajících rozměrům  $10^{-17}$  m. Astrofyzikální poznatky, především skutečnost, že elektromagnetické vlnění neprojevuje disperzi při šíření ve vakuu a že foton má nulovou klidovou hmotnost, svědčí o tom, že platnost Coulombova zákona není omezena ani velkými vzdálenostmi dostupnými našemu pozorování.

Coulombův zákon spolu s principem superpozice má pro elektrostatiku charakter základního zákona a v jistém smyslu vyčerpává její obsah. Umožňuje určit silové působení libovolně rozložených elektrických nábojů a spolu se zákony mechaniky též podmínky rovnováhy nabitých těles. Centrální a izotropní charakter Coulombových sil je důsledkem obecného *principu symetrie* – nehybný bodový náboj v prostoru můžeme považovat za střed kulové symetrie, dvojice bodových nábojů udává jediný význačný směr daný jejich spojnicí. Vlastním fyzikálním obsahem Coulombova zákona je tedy především závislost poklesu velikosti síly na vzdálenosti podle zákona převráceného čtverce.

Stojí za zmínku, že Coulomb prováděl analogické experimenty též s dlouhými tenkými tyčovými magnety a našel tak analogický „Coulombův zákon pro magnetické náboje“. Později se však ukázalo, že samostatné „magnetické náboje“ neexistují. K této otázce se vrátíme v kapitole 3.

### 1.1.3 Velikost elektrického náboje

Coulombův zákon slouží zároveň jako definiční vztah nové fyzikální veličiny, elektrického náboje, i jeho míry. Z hlediska formální logiky by se mohlo zdát, že tak ztrácí charakter zákona. Nesmíme však zapomenout na to, že fyzika, na rozdíl od matematiky, pracuje se základními pojmy, které jsou vlastnostmi reálných objektů a jejichž existence není otázkou logiky, nýbrž experimentální zkušeností. Chápeme-li zavedení elektrického náboje tímto způsobem, můžeme dále rozvíjet fyzikální teorii pomocí matematického a logického formalismu.

Volbou konstanty úměrnosti  $k$  v Coulombově zákoně (1.3) nebo (1.4) stanovíme jednotku velikosti elektrického náboje. V dalším výkladu budeme mluvit

pouze o elektrickém náboji a ze souvislosti bude zřejmé, zda jde o fyzikální vlastnost nebo její kvantitativní určení, velikost.

Fyzikální jednotky tvoří, jak známo, koherentní soustavy založené na několika jednotkách základních, z nichž jsou ostatní odvozovány. Dnes je u nás uzákoněna Mezinárodní soustava jednotek SI, která se stále více uplatňuje ve vědě i v praxi (viz Dodatek 2). Mezi základními jednotkami této soustavy je jednotka elektrického proudu *ampér*. Jednotkou elektrického náboje je pak *ampérsekunda* zvaná též *coulomb* (C). Abychom zachovali soulad se základními jednotkami Mezinárodní soustavy, musíme v Coulombově zákonu položit

$$k = c^2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \doteq 0,8988 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}. \quad (1.6)$$

Zdůvodnění této volby podáváme v článku 3.3.2, kde uvidíme, jak souvisí s volbou základních jednotek Mezinárodní soustavy. Všimněme si, že námi zvolená konstanta  $k$  je vyjádřena prostřednictvím univerzální konstanty  $c$  (rychlost světla ve vakuu). Konstanta  $k$  se obvykle zapisuje ve tvaru

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

kde (srov. Dodatek 2)

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (1.8)$$

Nově zavedená konstanta  $\epsilon_0$  (epsilon nula) má tedy rovněž charakter univerzální fyzikální konstanty a nazývá se *permítivita vakua*. Její fyzikální význam bude objasněn později. Rovněž jednotka *farad*  $\text{F} = \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  bude zavedena později jako jednotka kapacity.

Nyní se můžeme zeptat, jakou velikost má *elementární náboj*. Přímou metodou byla změřena R. A. Millikanem r. 1911; Millikanův experiment je zároveň i důkazem atomismu elektřiny (kvantování náboje).

Velikost elementárního náboje  $e$  lze určit porovnáním sil, kterými působí elektrostatické a gravitační pole na malá nabitá tělíska. Mezi desky kondenzátoru jsou vstříkovány olejové kapičky a mikroskopem je sledován jejich vertikální pohyb v přítomnosti elektrického pole a bez něho. Uspořádání experimentu je patrné z obr. 1.3.

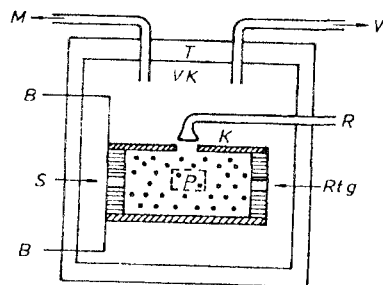
Označme  $r$  poloměr kapky,  $q$  náboj kapky,  $\sigma$  hustotu oleje,  $\rho$  hustotu vzduchu při daném tlaku,  $\eta$  dynamickou viskozitu vzduchu,  $v_e$ ,  $v_E$  vertikální rychlosti kapek při vypnutém a zapnutém napětí na kondenzátoru. Síla tření při pohybu kulových kapiček ve zředěném plynu je dána Stokesovým vzorcem  $F_S = 6\pi\eta r v$  a roste se stoupající rychlostí tak dlouho, až se pohyb kapky stane rovnoměrným. Potom máme pro celkovou sílu působící na kapku při vypnutém kondenzátoru

$$F_g = mg - m'g - 6\pi\eta r v_g = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{kde } m = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma, \quad m' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Při zapnutém kondenzátoru působí na tutéž kapku síla

$$F_E = qE - mg - m'g - 6\pi\eta r v_E = qE - 6\pi\eta r (v_g + v_E) = 0. \quad (1.10)$$



Obr. 1.3 Uspořádání Millikanova pokusu:  $T$  – termostat,  $VK$  – vakuová komora,  $K$  – kondenzátor,  $S$  – osvětlení,  $P$  – pozorovací okénko,  $Rt$  – zdroj ionizujícího záření,  $R$  – rozprašovač olejových kapiček,  $B$  – baterie,  $V$  – vývěva,  $M$  – manometr.

Z těchto dvou rovnic určíme poloměr kapky (obtěžně měřitelný) a velikost náboje

$$r = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta v_g}{(\sigma - \rho)}}, \quad q = \frac{6\pi\eta r}{E} (v_g + v_E). \quad (1.11)$$

Proměřováním rychlosti pohybu mnoha kapek zjistíme, že jejich náboje jsou malými násobky určitého minimálního, elementárního náboje, který tak můžeme určit.

Jsou-li rozměry kapek srovnatelné s délkou volné dráhy molekul  $\lambda$ , je třeba Stokesovu sílu  $F_S$  dělit výrazem  $1 + A(\lambda/r) = 1 + (B/pr)$ , kde  $p$  je tlak plynu a  $A, B$  neznámé konstanty. Znalost těchto konstant není však nutná. Určíme-li elementární náboj pro různé hodnoty tlaku  $p$  a vynášíme-li lineární závislosti mezi  $q^{2/3}$  a  $1/pr$ , můžeme opravenou hodnotu určit extrapolací.

Millikanův experiment byl mnohokrát opakován; A. F. Ioffe změřil r. 1912 obdobným způsobem náboj elektronů uvolňovaných při fotoelektrickém jevu.

Přesněji lze určovat měrný náboj částic  $q/m$  ( $q$  je náboj,  $m$  klidová hmotnost částice). Lze k tomu použít například vlastností pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích (viz kapitola 6).

Známe-li velikost náboje, který při elektrolyze vyloučí jeden mol jednovazných iontů nesoucích po jednom elementárním náboji (tj. Faradayův náboj  $F$  – viz článek 7.4.2), a počet těchto iontů v jednom molu (tj. Avogadrova konstanta  $N_0$ ), najdeme velikost elementárního náboje  $e$  jako poměr dvou konstant:

$$F = 9,649 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad N_0 \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

$$e = \frac{F}{N_0} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (1.12)$$

Poznamenejme, že klidová hmotnost elektronu je  $m_e \doteq 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , a jeho měrný náboj tedy  $-e/m_e \doteq -1,759 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ . (Podrobněji o metodách určování elementárního náboje viz [2].)

### 1.1.4 Hustota elektrického náboje

Při zkoumání elektrických sil nemáme zpravidla co činit s jednotlivými bodovými či elementárními náboji, ale s nabitými makroskopickými tělesy. Jde tedy o velké soubory nabitých částic, které jsou rozloženy v objemu, popř. na povrchu tělesa, s velkou hustotou tak, že toto rozložení můžeme považovat za spojité. Nejde zde ovšem o spojitost v matematickém smyslu, nýbrž ve smyslu fyzikálním: zvolíme-li „nekonečně malý“ (diferenciální) objem nabitého tělesa, budeme stále předpokládat, že obsahuje velké množství elementárních nábojů, takže se neprojeví kvantování náboje.

Podobně, jako jsme zaváděli pojem hustoty v souvislosti s rozložením hmotnosti v mechanice, můžeme zavést pojem *objemové hustoty náboje*  $\rho$ . Uvažujme těleso libovolného tvaru o objemu  $V$ , které je v klidu vůči dané inerciální soustavě. Předpokládejme, že toto těleso nese náboj  $Q$ , jehož rozložení po celém objemu tělesa je časově neproměnné. Okamžitě můžeme definovat střední objemovou hustotu náboje jako poměr

$$\bar{\rho} = \frac{Q}{V}. \quad (1.13)$$

Zvolme nyní v objemu tělesa bod  $A$  polohy  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  a obklopte tento bod objemem  $\Delta V$ . Objem  $\Delta V$  nese náboj  $\Delta Q$ . Objem  $\Delta V$  budeme libovolným způsobem zmenšovat tak, aby stále obsahoval bod  $A$ , a budeme předpokládat, že existuje limita nezávislá na způsobu zmenšování objemu  $\Delta V$

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \quad (1.14)$$

Funkci  $\rho(\mathbf{r})$  nazveme objemovou hustotou náboje v daném bodě. Náboj tělesa objemu  $V$  charakterizovaného objemovou hustotou náboje  $\rho$  najdeme jako

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.15)$$

Naopak vztah (1.15) můžeme též považovat za definici objemové hustoty náboje  $\rho$ . Náboj malého objemu  $\Delta V$  můžeme přibližně vyjádřit vztahem

$$\Delta Q \doteq \rho(\mathbf{r}')\Delta V, \quad (1.16)$$

kde  $\mathbf{r}'$  je polohový vektor libovolného bodu objemu  $\Delta V$ ; pro nekonečně malý (diferenciální) objem bude vztah (1.16) platit přesně. Ve zvláštním případě rovnoměrného rozložení náboje je  $\rho$  konstanta a integrál (1.15) se redukuje na vztah<sup>3</sup>

$$Q = \rho V. \quad (1.17)$$

Kromě uvažovaného rozložení náboje v objemu je myslitelné uvažovat rozložení náboje na geometrických útvarech jiného typu. Pro náboje rozložené na dané ploše  $S$  dospějeme obdobným limítním přechodem k pojmu *plošné hustoty náboje*  $\sigma(\mathbf{r})$ . Náboj na ploše  $S$  charakterizované plošnou hustotou náboje  $\sigma$  je pak

$$Q = \int_S \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad (1.18)$$

ve zvláštním případě rovnoměrného rozdělení náboje

$$Q = \sigma S. \quad (1.19)$$

Podobně je možné uvažovat rozložení náboje na křivce. V tomto případě zavedeme pojem *lineární hustoty náboje*. Náboj na křivce délky  $l$  charakterizované lineární hustotou náboje  $\tau$  je

$$Q = \int_l \tau(\mathbf{r}) dl, \quad (1.20)$$

v případě rovnoměrného rozložení náboje

$$Q = \tau l. \quad (1.21)$$

Názorný význam všech zavedených hustot náboje je zřejmý. Každá z nich vyjadřuje velikost náboje, který v okolí daného bodu připadá na jednotkovou míru daného útvaru. Pro jednotky těchto veličin v Mezinárodní soustavě máme  $(\rho) = \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $(\sigma) = \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $(\tau) = \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ . Jde tedy o fyzikálně různé veličiny, které jak uvidíme mají též různé vlastnosti, zejména v oblastech přechodu od nulových k nenulovým hustotám. Je ovšem třeba vidět, že ve skutečnosti rozložení nábojů nemůže být nikdy dvojrozměrné či jednorozměrné v matematickém

<sup>3</sup> Poznámka o diferenciálních a integrálních veličinách. Při popisu fyzikálních jevů a formulaci fyzikálních zákonů budeme používat jednak diferenciálního a jednak integrálního tvaru. Diferenciální veličiny jsou přitom definovány jako funkce daného bodu prostoru, zatímco integrální veličiny jsou vázány na předem zadané těleso (plochu, křivku). Náboj  $Q$  je tedy veličinou integrální, objemová hustota náboje  $\rho$  veličinou diferenciální.

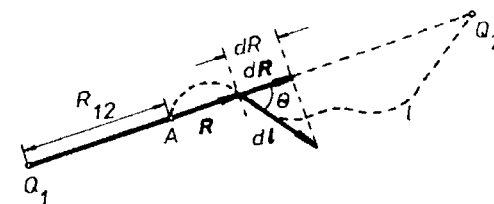
smyslu. Pro účely makroskopického popisu je však výhodné mikrofyzikální strukturu rozložení nábojů pominout.

### 1.1.5 Potenciální energie soustavy nábojů

Vraťme se k obecné soustavě bodových nehybných nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  rozmístěných ve vakuu v bodech  $\mathbf{r}_1$  až  $\mathbf{r}_N$ . Tyto náboje na sebe působí Coulombovými elektrostatickými silami a mají-li zůstat nehybné, musí být na svých místech nějakým způsobem udržovány. Dále je zřejmé, že při vytváření takové soustavy musí vnější síly překonávat síly Coulombovy, a musí tedy konat práci. Práce vnějších sil (která je rovna záporně vzaté práci vykonané Coulombovými silami) odpovídá *elektrostatické potenciální energii soustavy nábojů*. Nezbytným předpokladem ovšem je, aby tato energie nebyla závislá na způsobu vytváření soustavy, tj. na pořadí a způsobu pohybu nábojů z počátečních do konečných poloh. Potenciální energie pak může být považována za charakteristiku této soustavy. Přesvědčíme se nyní o této důležité vlastnosti.

Začneme s jedním izolovaným bodovým nábojem  $Q_1$ . Je-li druhý bodový náboj  $Q_2$  nekonečně vzdálen, bude síla mezi nimi působící nekonečně malá a potenciální energii takové dvojice nábojů můžeme položit rovnu nule. Budeme nyní přibližovat náboj  $Q_2$  nejkratší cestou po přímce směřující k náboji  $Q_1$ , až se náboj  $Q_2$  zastaví v bodě  $A$  ve vzdálenosti  $R_{12}$  od náboje  $Q_1$ . Přitom jsme vykonali práci při překonávání Coulombovy síly (1.1) rovnou

$$W = - \int_{\infty}^{R_{12}} F_{21} dR = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{R_{12}} \frac{dR}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}}. \quad (1.22)$$



Obr. 1.4 K odvození energie soustavy dvou bodových nábojů.

Budeme-li náboj  $Q_2$  přibližovat po libovolné dráze  $l$  (obr. 1.4), dostaneme

$$W = - \int_l \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}}{R^3} = - \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{R \cos \theta dl}{R^3} \quad (1.23)$$

s tímž výsledkem jako v předchozím případě, neboť  $dR = \cos \theta dl$ .

Výsledná práce tedy nezávisí na způsobu sblížování nábojů. Přiblíží-li se k této dvojici třetí náboj  $Q_3$ , bude podle principu superpozice výsledná potenciální energie rovna

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right). \quad (1.24)$$

Obecně pro soustavu  $N$  bodových nábojů můžeme napsat

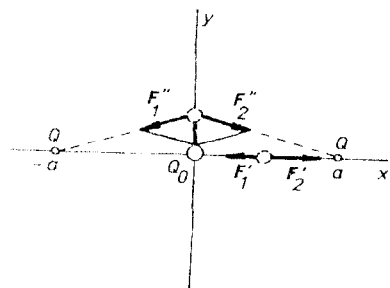
$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}}. \quad (1.25)$$

Sčítáme přes všechna vzájemně různá  $i$  a  $j$ , takže se každá dvojice nábojů uvažuje dvakrát, a proto je třeba doplnit navíc činitel  $1/2$ . Samozřejmě platí  $R_{ij} = R_{ji} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Získaná potenciální energie charakterizuje výsledný stav soustavy bodových nábojů a může být kladná, záporná i nulová.

### 1.1.6 Řešené příklady

#### a) Rovnováha soustavy statických nábojů

Snadno se přesvědčíme, že existují taková uspořádání kladných a záporných elektrických nábojů v prostoru, kdy na každý z nábojů působí nulová výslednice Coulombových sil. Mějme například kladný bodový náboj  $Q_0$  umístěn v počátku kartézské soustavy souřadnic a dva záporné bodové stejně velké náboje  $Q$  na ose  $x$  v bodech o souřadnicích  $x = a$  a  $x = -a$  (obr. 1.5). Na centrálně umístěný náboj  $Q_0$  působí ze strany druhých dvou nábojů zřejmě nulová výslednice sil. Zvolíme-li  $Q_0 = -Q/4$ , budou i výsledné síly působící na náboje  $Q$  nulové. Všechny tři náboje jsou tedy v rovnováze.

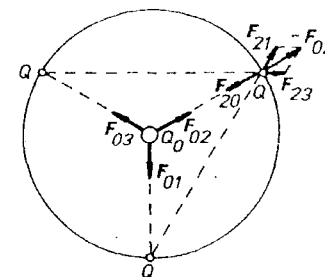


Obr. 1.5 Rovnováha soustavy nábojů rozložených na přímce.

Podobně uvažujeme náboj  $Q_0$  umístěný ve středu kružnice o poloměru  $R$  a  $n$  bodových nábojů  $Q$  rozmístěných symetricky po obvodu této kružnice. Případ  $n = 3$  je znázorněn na obr. 1.6. Opět je zřejmé, že síly  $\mathbf{F}_{01}$ ,  $\mathbf{F}_{02}$ ,  $\mathbf{F}_{03}$  působící na centrální náboj se z důvodu symetrie vyruší a vhodnou volbou velikostí nábojů lze dosáhnout toho, že i síly působící na náboje  $Q$  budou nulové. Přirovnáme-li velikost výslednice odpuzivých sil působící na náboj  $Q$  ze strany ostatních obvodových nábojů a přitažlivé síly centrálního náboje, snadno najdeme, že pro

$n = 2$  musí platit  $Q_0 = -Q/4$ , pro  $n = 3$  dostaneme  $Q_0 = -Q/\sqrt{3}$ , pro  $n = 4$  obdržíme  $Q_0 = -\frac{1}{4}(2\sqrt{2} + 1)Q$  atd.

Můžeme si položit otázku, jak to bude v případě  $n \rightarrow \infty$ , tj. je-li možno udržovat náboje spojitě a rovnoměrně rozložené po obvodu kružnice v rovnováze s centrálním nábojem  $Q_0$ . Označíme-li lineární hustotu nábojů rozložených po obvodu kružnice jako  $\tau$  a budeme hledat odpuzivou sílu, kterou působí tyto náboje na malý element náboje kružnice  $\Delta Q$ , dostaneme divergující integrál. Centrální náboj, který by měl tuto sílu kompenzovat, by tedy musel mít nekonečnou velikost. Fyzikálně to ovšem znamená pouze to, že idealizace v podobě spojitě rozloženého na nekonečně tenké kružnici není v tomto případě oprávněná.



Obr. 1.6 Stabilita soustavy nábojů rozložených na obvodu kružnice.

Vraťme se nyní k otázce charakteru rovnováhy bodových nábojů na obr. 1.5. Podle (1.24) snadno zjistíme, že potenciální energie této soustavy nábojů je rovna nule (a podobně pro případ  $n = 3, 4, \dots$ ). Předpokládejme nyní, že se centrální náboj  $Q_0$  mírně vychýlí z rovnovážné polohy v kladném směru osy  $x$ . Síla, která naň bude v této poloze působit

$$\mathbf{F}' = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2} \right] \mathbf{x}_0 \quad (1.26)$$

( $\mathbf{x}_0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x$ ), bude výchylku dále zvětšovat – rovnováha tedy byla labilní. Snadno se přesvědčíme, že potenciální energie jako funkce souřadnice  $x$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{2(a+x)} - \frac{1}{2(a-x)} \right] \quad (1.27)$$

má pro  $x = 0$  maximum.

Vychýlíme-li nyní náboj  $Q_0$  z rovnovážné polohy ve směru osy  $y$ , bude zřejmě výsledná síla

$$\mathbf{F} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{Y}_0 \quad (1.28)$$

( $\mathbf{Y}_0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $y$ ) vracet tento náboj do rovnovážné polohy – vzhledem k proměnné  $y$  je rovnováha stabilní. Opět můžeme ověřit, že potenciální energie

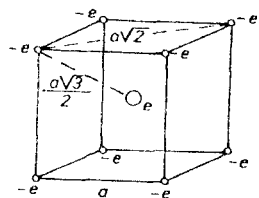
$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] \quad (1.29)$$

má jako funkce  $y$  minimum.

Z uvedeného příkladu jsme viděli, že rovnováha statických bodových nábojů nebyla stabilní. Přesvědčili bychom se o tom i v dalších, složitějších případech. Skutečně platí obecná věta (*Earnshawova*) o tom, že náboje nelze udržovat ve stabilní rovnováze výhradně elektrostatickými silami (viz články 1.2.5 a 1.4.6).

### b) Elektrostatická energie iontového krystalu

Určeme elektrostatickou potenciální energii prostorového uspořádání kladných a záporných bodových nábojů, s jakými se setkáváme například u iontových krystalů. Mějme krychli o hraně  $a$  jako element kubické mřížky. Ve vrcholech krychle nechť jsou umístěny ionty o náboji  $-e$ , ve středu krychle iont o náboji  $+e$  (obr. 1.7). Vyčíslíme-li elektrostatickou potenciální energii (1.25) krychle dostaneme



Obr. 1.7 Elektrostatická energie elementární kubické mřížky iontového krystalu.

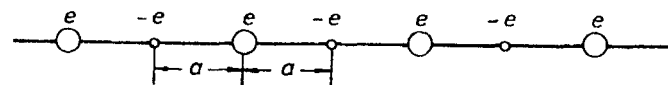
$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left( 12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{16}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3,09 \cdot 10^{-27}}{a} \text{ (J)}. \quad (1.30)$$

Protože typické vzdálenosti iontů v krystalech jsou v řádu  $10^{-10}$  m, vidíme že zjištěná energie je v řádu  $10^{-17}$  J, tj. asi 100 elektronvoltů (eV) – 1 elektronvolt =  $1,602 \cdot 10^{-19}$  J. K určení elektrostatické energie celého krystalu, respektive jeho jednotkového objemu, bychom museli sčítat příspěvky od sousedních a dalších elementů krystalové mřížky, tj. sčítat nekonečné znakproměnné řady. Provedme to pro tzv. *lineární krystal*, tj. rozložení střídavě klad-

ných a záporných nábojů  $\pm e$  ve stejných vzdálenostech  $a$  podél přímky (obr. 1.8). Zjistíme, že potenciální energie připadající na jeden náboj je

$$W = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \right) = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} = -2,30 \cdot 10^{-28} \frac{\alpha}{a} \text{ (J)}, \quad (1.31)$$

kde veličina  $\alpha = 2 \ln 2 = 1,386 \dots$  se nazývá *Madelungova konstanta*.



Obr. 1.8 Elektrostatická energie lineárního krystalu.

V případě reálného trojrozměrného iontového krystalu je výpočet numericky obtížný a provádí se na počítačích. Přesto však se výsledné hodnoty elektrostatické energie připadající na jeden iont řádově neliší od hodnoty uvedené ve vzorci (1.31). Odpovídá to energiím kolem 10 eV typickým pro chemické procesy.

Tak pro krystal chloridu sodného činí Madelungova konstanta 1,747 ..., pro oxid zinečnatý 1,638 ... apod. Všimněme si, že hodnota energie daná výrazem (1.31) je záporná, při zmenšení mřížkové konstanty  $a$  klesá, a mělo by proto dojít ke zhroucení krystalu. Neděje se to proto, že v důsledku působení kvantových sil odpuzování na malých vzdálenostech je třeba výraz (1.31) vynásobit faktorem  $(1 - \rho/a)$ , kde  $\rho$  je experimentálně určovaná kladná konstanta.

## 1.2 Elektrostatické pole ve vakuu

### 1.2.1 Vektor intenzity elektrostatického pole bodových nábojů

Uvažujme soustavu statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  ve vakuu. Silové působení na další náboj  $Q$  je dáno vztahem (1.5) a lze je vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

kde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.33)$$

Veličina  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , kterou jsme formálně zavedli vztahy (1.32) a (1.33), představuje vektorové pole, nazývá se *intenzitou elektrostatického pole* a je to vlastně síla, která působí v daném bodě na jednotkový kladný elektrický náboj. Vektor  $\mathbf{E}$  je

definován v každém bodě prostoru s výjimkou těch, v nichž se nacházejí náboje  $Q_i$  (pro ně  $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = 0$ ). Tato potíž je důsledkem předpokladu o bodovém, diskretním charakteru nábojů. V článku 1.2.4 uvidíme, že pro náboje spojitě rozložené v prostoru lze definovat intenzitu pole, která má smysl i v bodech s nenulovou hustotou náboje.

Zavedením intenzity elektrostatického pole jsme rozdělili problém silového působení mezi náboji do dvou kroků. Za prvé jsme bodu  $\mathbf{r}$  přiřadili určitou hodnotu veličiny  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  (intenzity pole) podmíněnou a určenou přítomností nábojů  $Q_i$  až  $Q_N$  v bodech  $\mathbf{r}_i$  až  $\mathbf{r}_N$ . Za druhé jsme vyjádřili sílu působící na náboj  $Q$  umístěný v bodě  $\mathbf{r}$  jako součin tohoto náboje a intenzity pole v daném bodě. Intenzita pole byla tak zavedena čistě formálně jako vektorové pole v matematickém smyslu. Tento postup je výhodný zejména při vyšetřování elektrostatického působení vodičů nebo v látkovém prostředí, kde není možno sledovat konkrétní rozložení nábojů v prostoru.

Elektrostatické pole reprezentované svojí intenzitou (pro soustavu bodových nábojů vyjádřenou vztahem (1.33)), má některé pozoruhodné rysy, které zůstávají v platnosti i pro jiné obecnější typy polí. Je to především sama skutečnost, že síla působící na náboj v kterémkoliv bodě prostoru je *úměrná hodnotě tohoto náboje*. Druhá, ještě pozoruhodnější, je vlastnost nazývaná *lokálnost pole*. K určení síly působící na bodový náboj stačí znát pouze vektor intenzity pole v daném bodě a neuplatňuje se zde vliv okolí.

Znalost rozložení a hodnot nábojů vytvářejících elektrostatické pole a znalost intenzity pole jako funkce prostorových souřadnic jsou ekvivalentní. Vše, co lze vyjádřit pomocí poloh a hodnot nábojů, lze vyjádřit i pomocí intenzity pole; druhý způsob je přitom elegantnější a mnohem pohodlnější. Díky tomuto dualismu v možnosti popisu vzniká otázka, zda je třeba za prvotní fyzikální realitu považovat náboje či pole. Odpověď na tuto principiální otázku má dva pohledy. Tím, že jsme výraz pro sílu působící na náboj  $Q$  upravili na tvar (1.32) a zavedli intenzitu elektrostatického pole, jsme nikterak neovlivnili fyzikální obsah. Zatímco elektrický náboj a jeho silové účinky na jiné náboje jsou experimentálně prokázány, neexistuje žádný elektrostatický experiment, který by dokazoval existenci elektrostatického pole jako reálné fyzikální substance.

Na druhé straně však v kapitole 5, ve které budeme studovat vlastnosti nestacionárního elektromagnetického pole, uvidíme, že toto pole nemusí být vázáno na náboje, má vlastní hybnost a energii, která se může šířit prostorem, a řadu dalších reálných vlastností. *Nestacionární elektromagnetické pole* je jednou z forem hmoty, stejně reálnou jako látka. *Makroskopické elektrostatické pole* je pak jeho speciálním případem v situaci, kdy nositelé náboje v dané soustavě souřadnic  $n, e, k, o, n, a, j, i$  *makroskopický pohyb*. Intenzitu pole ve smyslu vztahu (1.32) je třeba považovat za časovou a prostorovou střední hodnotu polí, která jsou v daném místě buzena jednotlivými mikroskopickými nositeli náboje. V tomto smyslu je elektrostatické pole fyzikálně reálným, adekvátním popisem elektromagnetické interakce v uvedené situaci.

Jednotku pro intenzitu elektrostatického pole lze odvodit z definičního vztahu (1.32) jako  $N \cdot C^{-1}$ . V mezinárodní soustavě jednotek je však jednotka intenzity elektrostatického pole odvozena od jednotky potenciálu *volt* (V) – viz odstavec 1.2.3. Pro intenzitu pole pak plyne jednotka  $V \cdot m^{-1}$ ; obě jednotky jsou však ekvivalentní.

Na základě principu superpozice lze intenzitu pole vyjádřenou vztahem (1.33) chápat jako vektorový součet intenzit vytvořených v daném bodě  $\mathbf{r}$  jednotlivými náboji  $Q_1$  až  $Q_N$ . Lze tedy psát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

kde

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.35)$$

Speciálně intenzita elektrostatického pole jediného bodového náboje  $Q$  umístěného v počátku soustavy souřadnic je dána vztahem

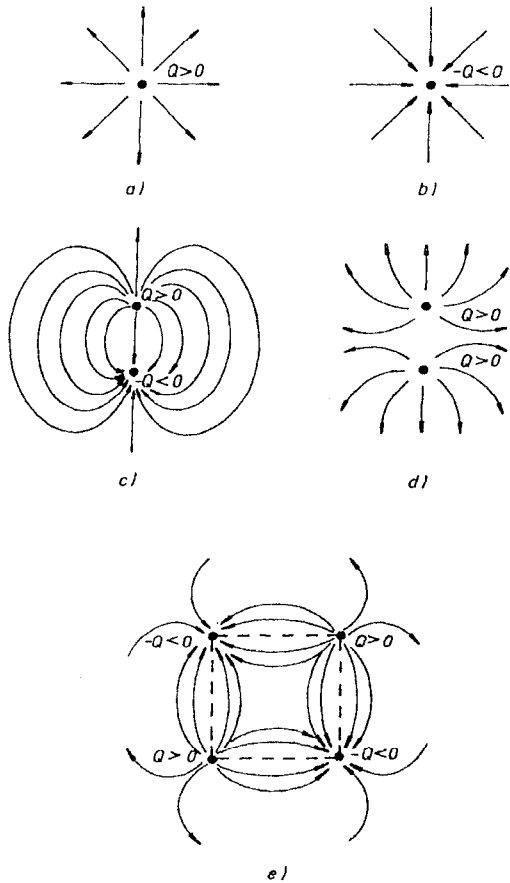
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.36)$$

Velikost intenzity elektrostatického pole bodového náboje ubývá tedy se čtvercem vzdálenosti.

Pro získání představy o průběhu pole dané soustavy nábojů je výhodné jeho grafické znázornění. K tomu účelu se nejčastěji užívá pojmu *siločáry*. Siločára je definována v bodech s nenulovou intenzitou pole jako orientovaná křivka mající tu vlastnost, že vektor intenzity v daném jejím bodě leží ve směru tečny, přičemž orientace vektoru intenzity souhlasí se směrem orientace křivky. Siločáry vždy vycházejí z kladných nábojů a vstupují do nábojů záporných; mohou též počínat a končit v nekonečnu. Protože vektor intenzity pole je v každém bodě definován jednoznačně, nemohou se siločáry vzájemně protínat. Hustotou siločar je možné vyjádřit velikost intenzity pole v dané části prostoru, podobně jako lze na mapě vyjádřit příkrost svahu hustotou vrstevnic. Pro získání názoru o průběhu pole obvykle stačí zobrazit soustavu siločar v některých význačných rovinách symetrie soustavy.

Na obrázku 1.9 je uvedeno několik příkladů. Obrázek 1.9a (1.9b) zobrazuje pole izolovaného kladného (záporného) bodového náboje v rovině procházející tímto nábojem. Na obrázku 1.9c vidíme pole dvojice bodových nábojů téže velikosti a opačného znaménka (takzvaný *elektrický dipól*) v rovině, v níž oba náboje leží. Podobně na obr. 1.9d je znázorněno analogickým způsobem pole dvojice kladných bodových nábojů téže velikosti. Konečně obr. 1.9e zobrazuje elektrostatické pole čtveřice bodových nábojů stejné velikosti umístěných ve vrcholech čtverce tak, že náboje stejného znamení leží na úhlopříčných vrcholech. Útvar uvedeného typu představuje takzvaný *elektrický kvadrupól*. Celkový náboj kvadrupólu je, podobně jako u elektrického dipólu, nulový. Jak uvidíme v oddílu 1.3, elektrický dipól a kvadrupól představují první členy řady

takzvaných *elektrických multipólů*, které mají velký význam při aproximativním popisu elektrostatických polí nabitých těles s obecným rozložением nábojů.



Obr. 1.9 Znárodnění elektrického pole siločarami: a) kladného bodového náboje, b) záporného bodového náboje, c) konečného elektrického dipólu, d) soustavy dvou kladných bodových nábojů, e) konečného elektrického kvadrupólu.

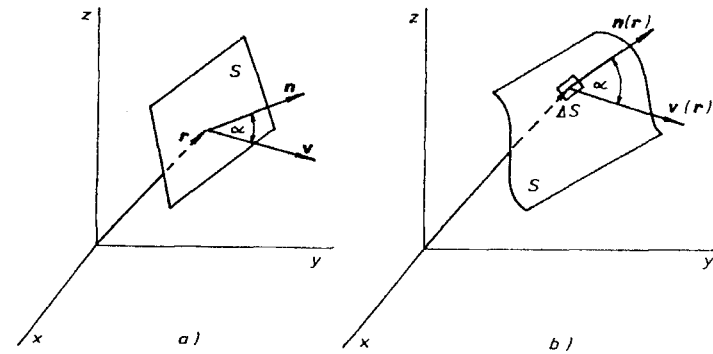
### 1.2.2 Tok intenzity elektrostatického pole bodových nábojů

Zavedeme nyní důležitý pojem *tok intenzity elektrostatického pole*. Pro názornost se přitom obrátíme k hydrodynamické analogii. Uvažujme proudící kapalinu.

Ptáme se, jaké její množství proteče danou plochou  $S$  za jednotku času. K řešení této úlohy zřejmě stačí znát rychlost kapaliny  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  v každém bodě plochy  $S$ , tedy tzv. pole rychlostí. Ve speciálním případě podle obr. 1.10a, kdy plocha  $S$  je rovinná a rychlost kapaliny  $\mathbf{v}$  ve všech jejích bodech je konstantní, platí pro hledaný průtok kapaliny  $\Phi$  zřejmě

$$\Phi = vS \cos \alpha \quad (1.37)$$

Jestliže je rovinná plocha  $S$  orientována, tj. je-li rozhodnuto, která ze dvou možných orientací vektoru normály je kladná, je možné zapsat výraz (1.37) ve vektorovém tvaru. Orientaci ohraničené rovinné plochy můžeme stanovit například tak, že rozhodneme, který z možných dvou směrů oběhu po její hranici



Obr. 1.10 K definici toku vektorové veličiny: a) rovinnou plochou, b) obecnou plochou.

je kladný, a požadujeme, aby kladný směr vektoru normály spolu se zvoleným kladným oběhem tvořily pravotočivou soustavu. Označíme-li jednotkový kladný vektor normály jako  $\mathbf{n}$  a položíme-li vektor plochy  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ , můžeme (1.37) zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$\Phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \quad (1.38)$$

V obecném případě podle obr. 1.10b, kdy má plocha  $S$  libovolný tvar a vektor rychlosti je funkcí polohy, nemůžeme definovat směr normály platný pro plochu  $S$  jako celek. Tok  $\Phi$  však můžeme vypočítat jako součet toků  $\Delta\Phi_i$ , přes dostatečně malé plošky  $\Delta S_i$ , které je možno s požadovanou přesností považovat za rovinné a jejichž sjednocení zcela vyplní plochu  $S$ . Pro každou plošku  $\Delta S_i$  lze alespoň přibližně zavést kladný jednotkový vektor normály  $\mathbf{n}_i$  a psát  $\Delta\mathbf{S}_i = \Delta S_i \mathbf{n}_i$ , takže  $\Delta\Phi_i = \mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{S}_i$ . Z uvedené úvahy je patrné, jak je třeba zobecnit definici toku vektorového pole obecnou plochou, aby si tento pojem zachoval svůj fyzikální smysl. Tok intenzity elektrostatického pole budeme definovat jako plošný integrál

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.39)$$

Pro tok malou ploškou  $\Delta S$  máme

$$\Delta\Phi = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}. \quad (1.40)$$

Má-li vektor  $\mathbf{E}$  směr kladné normály k plošce  $\Delta S$ , bude tok touto ploškou maximální a můžeme psát

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (1.41)$$

Vidíme, že vektor intenzity elektrostatického pole můžeme považovat za vektor *lustoty toku* intenzity tohoto pole (srov. analogický vztah mezi proudem a hustotou proudu – odst. 3.1.1). Je zřejmé, že jednotkou toku intenzity elektrostatického pole bude volt metr (V, m).

Této okolnosti se využívá při normování počtu siločar procházejících kolmo danou plochou. Můžeme totiž požadovat, aby počet takových siločar připadajících na jednotku plochy byl právě roven velikosti vektoru intenzity elektrostatického pole.

Určíme nyní počet siločar vycházejících z kladného bodového náboje  $Q$  umístěného v počátku souřadnic. Jak víme, vycházejí siločáry z tohoto náboje radiálně a jsou rozloženy sféricky symetricky. Obklopíme náboj  $Q$  koncentrickou kulovou plochou poloměru  $r$ . Celkový počet siločar vycházejících z náboje  $Q$  je  $N = \Phi$ . Počet siločar ve vzdálenosti  $r$  připadající na jednotku plochy přirovnáme velikosti vektoru  $\mathbf{E}$  (1.36)

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{N}{4\pi r^2} = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.42)$$

Odtud dostáváme

$$\Phi = N = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.43)$$

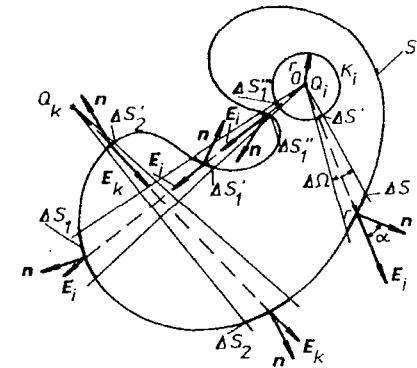
Počet siločar vycházejících z bodového náboje a velikost tohoto náboje jsou tedy vázány vztahem úměrnosti. Tato skutečnost má závažný význam. Později uvidíme, že i při pohybu náboje zůstává jeho velikost a počet siločar s ním spojených neměnný.<sup>4</sup>

Zjistili jsme, že tok intenzity elektrostatického pole uzavřenou kulovou plochou, v jejímž středu je umístěn náboj  $Q$ , je roven (1.43). Ukážeme nyní, že

<sup>4</sup> Uvažujte, jak by se změnilo znázornění elektrostatického pole siločarami v případě, že by v Coulombově zákonu neplatila závislost převrácených čtverců.

tento vztah platí obecně pro uzavřenou plochu libovolného tvaru a celkový náboj v prostoru ohraničeném touto plochou.

Uvažujme opět soustavu statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$ . Zvolme uzavřenou plochu  $S$ , v níž jsou obsaženy některé z těchto nábojů; necht' žádný z nich na ní neleží. Uzavřenou plochu budeme orientovat tak, že vektor normály  $\mathbf{n}$  míříci na její vnější stranu budeme považovat za kladný. Najdeme celkový tok intenzity elektrického pole  $\Phi$  touto plochou. S ohledem na princip superpozice a aditivnost toku můžeme vyšetřovat příspěvek každého náboje zvlášť.



Obr. 1.11 K formulaci Gaussova zákona.

Necht' náboj  $Q_i$  leží uvnitř prostoru ohraničeného plochou  $S$ . Opišme kolem něj kouli  $K_i$  o poloměru  $r_0$  a veďme kuželovou plochu o prostorovém vrcholovém úhlu  $\Delta\Omega$  (viz obr. 1.11). Tato plocha vytíná na kouli  $K_i$  malou plošku  $\Delta S' = r_0^2 \Delta\Omega$  a na ploše  $S$  plošku  $\Delta S = r^2 \Delta\Omega / \cos \alpha$ . Platí

$$\mathbf{E}_i(r_0) \cdot \Delta\mathbf{S}' = \mathbf{E}_i(r) \cdot \Delta\mathbf{S}, \quad (1.44)$$

neboť

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_0^2} r_0^2 \Delta\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r^2} \frac{r^2 \Delta\Omega}{\cos \alpha} \cos \alpha.$$

Tok intenzity vzbuzené nábojem  $Q_i$  je tedy stejný pro obě plošky  $\Delta S$ ,  $\Delta S'$ . Jak plyne z obrázku, nezmění se situace ani tehdy, protne-li kuželová plocha plochu  $S$  několikrát. Toky všemi ploškami  $\Delta S$ ,  $\Delta S'_1$ ,  $\Delta S'_2$  jsou v absolutní hodnotě stejné a rovné toku příslušnou ploškou  $\Delta S'_i$  vylíčenou na kouli. Tok ploškou  $\Delta S'_i$  je však záporný, takže platí opět  $\Phi_i'' = \Phi_i + \Phi'_1 + \Phi'_2$ . Tok  $\Phi_i$ , kterým náboj  $Q_i$  přispívá k celkovému toku plochou  $S$ , je tedy roven toku vektoru  $\mathbf{E}_i$  kulovou plochou  $K_i$ .



$$\Phi_i = \int_{K_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_i \int_{4\pi} d\Omega = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

v souladu s (1.43).

Na základě analogických úvah zjistíme, že náboje ležící vně plochy  $S$  nepřispívají k celkovému toku (viz příklad náboje  $Q_k$  na obrázku). Použijeme-li nyní princip superpozice, můžeme formulovat *Gaussův zákon elektrostatiky pro soustavu bodových nábojů*:

*Celkový tok  $\Phi$  intenzity elektrostatického pole soustavy bodových nábojů libovolnou uzavřenou plochou  $S$  je roven celkovému náboji  $Q_c$  uzavřenému uvnitř této plochy dělenému konstantou  $\epsilon_0$ .*

Platí

$$\Phi = \sum_i \Phi_i, \quad (1.46)$$

přičemž index  $i$  probíhá pouze náboje umístěné uvnitř plochy  $S$ . Označíme-li celkový náboj uvnitř této plochy jako  $Q_c = \sum_i Q_i$  můžeme Gaussův zákon zapsat

ve tvaru

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_c}{\epsilon_0} \quad (1.47)$$

(značka  $\oint$  vyjadřuje, že plošný integrál je brán přes uzavřenou plochu).

Gaussův zákon hraje v nauce o elektřině fundamentální úlohu. V dalším výkladu uvidíme, že platí pro libovolné elektrostatické pole a je možno jej zobecnit i na případ pohybujících se nábojů. Jak je patrné z průběhu odvození, je Gaussův zákon přímým důsledkem Coulombova zákona, resp. zákona převrácených čtverců a principu superpozice. Přitom Gaussův zákon a z něj plynoucí důsledky je možno ověřit dalšími experimenty, např. s rozložením nábojů na vodičích, a tím nepřímo dokázat i platnost Coulombova zákona (viz článek 1.4.2). Při odvozování Gaussova zákona jsme nevyužili předpokladu o kulové symetrii pole bodového náboje a v tomto smyslu je Gaussův zákon obecnější než zákon Coulombův. Doplníme-li k platnosti Gaussova zákona předpoklad kulové symetrie, dostaneme snadno vztah (1.36) a přes (1.32) Coulombův zákon.

### 1.2.3 Potenciál elektrostatického pole bodových nábojů

Zmínili jsme se o tom, že silové působení soustavy statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  na náboj  $Q$  umístěný v bodě  $\mathbf{r}$  lze popsat zavedením vektorového pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  daného výrazem (1.33). V bodech  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  není vektorová funkce  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  defi-

nována, má zde singularitu řádu  $1/x^2$ . Uvažme nyní skalární funkci (skalární pole)  $\varphi(\mathbf{r})$  definovanou vztahem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C, \quad (1.48)$$

kde  $C$  je libovolná konstanta. Tato funkce má rovněž singularitu v bodech  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  (řádů  $1/x$ ); všude jinde má partiální derivace všech řádů. Pro případ jednoho bodového náboje umístěného v počátku souřadnic definujeme podle (1.48)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C. \quad (1.49)$$

Vypočítáme-li nyní partiální derivace prvního řádu funkce  $\varphi(\mathbf{r})$  dané vztahem (1.48), popř. (1.49), zjistíme, že pro  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  dané vztahem (1.33), popř. (1.36), platí

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}), \quad (1.50)$$

kde symbol  $\text{grad } \varphi$  značí vektor  $\text{grad } \varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$  nazývaný gradientem funkce  $\varphi$  (podrobněji viz Dodatek I).

Skalární funkci  $\varphi(\mathbf{r})$  nazýváme *potenciálem elektrostatického pole*. Vzhledem k platnosti vztahu (1.50) je možné potenciál použít k popisu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů stejně tak jako intenzitu pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ; popis pomocí potenciálu je dokonce jednodušší (je to skalár a při sčítání potenciálů se nemusíme starat o směr této veličiny). Přítomnost volitelné konstanty  $C$  v definičním vztahu (1.48) pro potenciál ukazuje na to, že potenciál není definován jednoznačně. Jak uvidíme, tato skutečnost nemá však fyzikální důležitost.

Existence potenciálu obecného vektorového pole není samozřejmá a pole, která je možno vyjádřit vztahem (1.50), nazýváme *potenciálními*. Možnost popisu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů pomocí potenciálu jsme dokázali tím, že jsme zkonstruovali funkci (1.48) vyhovující vztahu (1.50). Vzniká ovšem otázka, jaký má potenciál fyzikální význam a jakou vlastnost elektrostatického pole vyjadřuje.

V uvažovaném poli soustavy bodových nábojů zvolme pevný bod  $\mathbf{r}_0$  různý od všech bodů  $\mathbf{r}_1$  až  $\mathbf{r}_N$  ve kterých sídlí bodové náboje. Zvolme dále libovolný bod  $\mathbf{r}$  téže vlastnosti a oba body spojíme křivkou  $l$ , která je orientována od bodu  $\mathbf{r}_0$  k  $\mathbf{r}$  a která neprochází žádným z bodů  $\mathbf{r}_0$  až  $\mathbf{r}_N$ . Bude nás zajímat práce  $W_{r,r_0}$  kterou musí vnější síly vykonat, má-li být bodový náboj  $Q$  přenesen z výchozího bodu  $\mathbf{r}_0$  po křivce  $l$  do bodu  $\mathbf{r}$ . Platí (srov. vztah (1.23))

$$W_{r,r_0} = - \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.51)$$

kde  $\mathbf{F}$  značí sílu podle (1.32), která musí být při přenášení náboje  $Q$  překonávána. Využitím rovnice (1.50) dostaneme dále

$$W_{r,r_0} = -Q \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_l \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.52)$$

Výraz

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi \quad (1.53)$$

však představuje totální diferenciál potenciálu. Odtud vyplývá důležitý výsledek

$$W_{r,r_0} = Q \int_{r_0}^r d\varphi = Q[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)]. \quad (1.54)$$

Práce  $W_{r,r_0}$  závisí jen na potenciálu koncových bodů dráhy  $l$  a nezávisí na jejím průběhu. Má tedy význam potenciální energie náboje  $Q$  v bodě  $\mathbf{r}$  vzhledem k bodu  $\mathbf{r}_0$ .

Potenciál elektrostatického pole v daném bodě zde tedy představuje potenciální energii vztaženou k jednotkovému náboji. Je určen vzhledem k referenčnímu bodu, jehož potenciál i polohu můžeme volit libovolně. Pokud jsou všechny náboje rozloženy v konečné části prostoru, volíme obvykle referenční bod v nekonečnu a klademe tam potenciál roven nule. Potom podle rovnic (1.50) a (1.53) máme

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.55)$$

Fyzikální smysl má tedy jen *rozdíl potenciálů* ve dvou bodech  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , který můžeme měřit, tedy

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.56)$$

Práci, kterou vykoná elektrostatické pole při přemísťování bodového jednotkového kladného náboje z bodu  $\mathbf{r}_1$  do bodu  $\mathbf{r}_2$ , nazýváme *napětím* mezi těmito body:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.57)$$

Napětí je tedy rovno záporně vzatému rozdílu potenciálů a je kladné, má-li výchozí bod vyšší potenciál než bod koncový. Elektrostatické pole vykoná v takovém případě při přemísťování kladného náboje kladnou práci  $A = Q U_{12}$ .

Ze vztahu (1.54) snadno stanovíme jednotku pro měření potenciálu, resp. napětí. V Mezinárodní soustavě je jí *volt* (V). Mezi dvěma body je napětí jednoho voltu, jestliže elektrické pole při přenesení náboje jednoho coulombu vykoná práci jednoho joulu. Ze vztahu (1.57) pak plyne jednotka intenzity elektrostatického pole  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Nyní použijeme potenciál k vyjádření potenciální energie soustavy bodových nábojů, kterou jsme odvodili v článku 1.1.5. Mějme nejprve dvojici nábojů  $Q_1, Q_2$  ve vzájemné vzdálenosti  $R_{12}$ . Náboj  $Q_1$  vyvolává v bodě, kde je umístěn druhý náboj  $Q_2$ , potenciál  $\varphi_2$  daný vztahem tvaru (1.49) s  $C = 0$ . Analogicky náboj  $Q_2$  vyvolává potenciál  $\varphi_1$  v bodě, v němž je umístěn náboj  $Q_1$ . Potenciální energii soustavy těchto dvou nábojů můžeme pak zapsat jako

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} = Q_1 \varphi_1 = Q_2 \varphi_2, \quad (1.58)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_{12}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_{12}}.$$

Víme, že tato energie nezávisí na tom, po jaké trajektorii se náboj  $Q_1(Q_2)$  přibližoval z nekonečna do bodu o vzdálenosti  $R_{12}$  od náboje  $Q_2(Q_1)$ .

Mějme nyní soustavu nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$ . Potenciální energii náboje  $Q_j$  v poli ostatních nábojů  $Q_{i \neq j}$  můžeme vyjádřit pomocí potenciálu s uvážením principu superpozice jako

$$W_j = Q_j \varphi_j, \quad \varphi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{R_{ij}}, \quad (1.59)$$

takže výsledná potenciální energie soustavy (1.25) bude mít tvar

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_j \varphi_j. \quad (1.60)$$

Ze skutečnosti, že práce vykonaná při přenesení náboje mezi dvěma body v elektrostatickém poli nezávisí na trajektorii, přímo vyplývá, že práce vykonaná po uzavřené křivce je vždy rovna nule. Přenášíme-li po takové trajektorii jednotkový náboj, na nějž působí síla rovná intenzitě pole  $\mathbf{E}$ , dostaneme obecný integrální vztah

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.61)$$

(symbol  $\oint_l$  vyjadřuje, že integrál je brán podél uzavřené křivky  $l$ ; nazýváme ho cirkulace vektoru  $\mathbf{E}$  podél této křivky). Podle Stokesovy věty vektorové analýzy (viz D 1.45)

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.62)$$

kde  $S$  je libovolná plocha, která má za svou hranici křivku  $l$ . Připomeňme, že vektorové pole  $\text{rot } \mathbf{E}$  nazývané rotace  $\mathbf{E}$  je v kartézských souřadnicích definováno jako

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

(viz Dodatek I).

Vzhledem k tomu, že křivka  $l$  je libovolná, bude vztah (1.62) platit i pro diferenciálně malou plošku  $dS$ . Pak dostaneme diferenciální obdobu vztahu (1.61) jako

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (1.63)$$

Mohli jsme též použít identity vektorové analýzy (viz D 1.64)

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \varphi = \mathbf{0}.} \quad (1.64)$$

Rovnice (1.61), resp. (1.63) jsou přímým důsledkem existence potenciálu. Použitý postup lze ovšem i obrátit a z platnosti těchto rovnic existenci potenciálu vyvodit. Vztah (1.61), resp. (1.63) platí tedy právě tehdy, existuje-li skalární funkce splňující podmínku (1.50). Znamená to, že elektrostatické pole soustavy bodových nábojů je *potenciální* a *konzervativní* (energie náboje se po návratu do výchozího bodu zachová).

Pro grafické znázornění elektrostatického pole lze vedle siločar použít též tzv. *ekvipotenciálních ploch*. Jsou definovány jako geometrické místo bodů, v nichž má potenciál předepsanou konstantní hodnotu  $\varphi_i$ . Snadno lze dokázat, že siločáry jsou vždy k ekvipotenciálním plochám kolmé. Diferencujeme-li totiž rovnici

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_i = \text{konst.}, \quad (1.65)$$

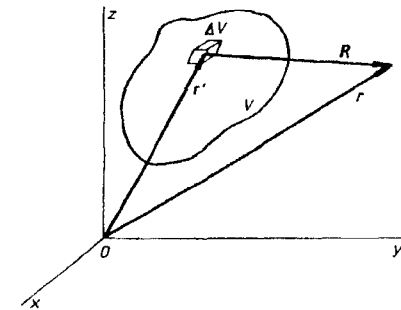
dostaneme

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.66)$$

Jelikož vektor  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  leží v rovině tečné k ekvipotenciální ploše, je dokazované tvrzení zřejmé. Pro posouzení průběhu pole opět stačí vyšetřovat pouze průsečnice ekvipotenciálních ploch s některými význačnými rovinami symetrie soustavy.

### 1.2.4 Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů

Dosud jsme se zabývali elektrostatickým polem vytvářeným soustavou bodových nábojů. Nyní přejdeme k obecnému rozložení elektrických nábojů, které jsme popsali v článku 1.1.4 pomocí pojmu objemové (plošné, lineární) hustoty náboje. Hustotu náboje budeme pokládat za známou funkci polohového vektoru, nezávislou na čase. Nebudeme se přitom starat o fyzikální vlastnosti objektů nesoucích tyto náboje, ani nebudeme brát v úvahu jejich vliv na vyšetřované elektrostatické pole. Jinými slovy řečeno, budeme předpokládat určité známé rozložení nábojů v prostoru a jimi vytvořené elektrostatické pole budeme považovat za pole ve vakuu.



Obr. 1.12 K výpočtu elektrického pole objemově rozloženého náboje pomocí principu superpozice.

Uvažujme náboj  $Q$  objemově rozložený v oblasti o objemu  $V$  s hustotou  $\rho(\mathbf{r}')$  (obr. 1.12). Pro přibližný výpočet intenzity pole vzbuzeného tímto nábojem v libovolném bodě  $\mathbf{r}$  ležícím mimo oblast  $V$  použijeme Coulombův zákon a princip superpozice; rozdíl vektorů  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  označíme jako  $\mathbf{R}$ . Nejdříve určíme příspěvek náboje  $\Delta Q$  rozloženého v malém objemu  $\Delta V$ , který obsahuje bod  $\mathbf{r}'$ . Zvolíme-li tento objem dostatečně malý, můžeme náboj  $\Delta Q \doteq \rho(\mathbf{r}') \Delta V$  vzhledem ke vzdálenosti k bodu  $\mathbf{r}$  považovat s potřebnou přesností za bodový. Jeho příspěvek  $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}')$  k celkové intenzitě pole můžeme podle (1.35) vyjádřit ve tvaru

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') \Delta V}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.67)$$

Analogicky pro příspěvek  $\Delta \varphi(\mathbf{r})$  k potenciálu v daném bodě dostaneme podle (1.49) (klademe  $C = 0$ )

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')\Delta V}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \quad (1.68)$$

Celkovou intenzitu pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , resp. potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  můžeme podle principu superpozice s požadovanou přesností vyjádřit jako součet výrazů typu (1.67), popř. (1.68). Sčítání provádíme přes všechny elementární objemy, jejichž sjednocení zcela vyplní uvažovanou oblast  $V$ . Přesnost vyjádření bude samozřejmě tím větší, čím jemnější dělení oblasti  $V$  bude zvoleno.

Podle právě provedené úvahy lze očekávat, že objemové integrály (přes  $\mathbf{r}'$ )

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathbf{R}}{R^3} dV, \quad (1.69a)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')dV}{R} \quad (1.70a)$$

budou přesně vyjadřovat hledanou intenzitu pole a potenciál ve všech bodech  $\mathbf{r}$  mimo objem  $V$ . Zmíněnou úvahu není ovšem možno ve smyslu formální logiky považovat za důkaz těchto vztahů. Kdybychom požadovali, aby naše teorie byla formálně konzistentní, museli bychom jejich platnost vedle Coulombova zákona rovněž postulovat. Fyzikální smysl výrazů (1.69a) a (1.33) je týž, rozdíl je pouze ve způsobu nazírání. Elektrostatické pole reálného tělesa nesoucího náboj je možno buď podle (1.33) vyjádřit jako pole vhodně zvolených diskretně rozložených bodových nábojů, nebo podle (1.69a) jako pole spojitě rozloženého náboje.

Intenzita pole a potenciál vyjádřené vztahy (1.69a) a (1.70a) vyhovují definiční podmínce potenciálu (1.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \text{grad} \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') dV. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Funkce  $\rho$  popisující reálná rozložení náboje takovou záměnu pořadí derivování (podle  $\mathbf{r}$ ) a integrování (podle  $\mathbf{r}'$ ) vždy umožňuje. Stačí tedy určit pouze jednu z funkcí  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\varphi(\mathbf{r})$  a druhou najít pomocí vztahu (1.50).

Všechny úvahy, které jsme dosud prováděli pro prostorově rozložené náboje můžeme reprodukovat i pro náboje rozložené plošně a lineárně. Je-li náboj  $Q$  rozložen na ploše  $S$  s plošnou hustotou  $\sigma(\mathbf{r}')$ , je možné intenzitu a potenciál jím

vytvořeného elektrostatického pole v libovolném bodě neležícím na této ploše vyjádřit ve tvaru plošných integrálů

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') dS, \quad (1.69b)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS. \quad (1.70b)$$

Analogicky, je-li náboj  $Q$  rozložen na křivce  $l$  s lineární hustotou  $\tau(\mathbf{r}')$ , je možno intenzitu a potenciál jím vytvořeného elektrostatického pole v libovolném bodě neležícím na této křivce vyjádřit ve tvaru křivkových integrálů

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r}-\mathbf{r}') dl, \quad (1.69c)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl. \quad (1.70c)$$

Na základě toho, co bylo dosud řečeno, umíme tedy obecně vyjádřit intenzitu a potenciál elektrostatického pole ve všech bodech, v nichž neleží bodové náboje a v nichž je hustota nábojů nulová. Vzniká nyní otázka, zda je možné rozšířit pojem elektrostatického pole také na body s nenulovou hustotou náboje. Pro vyřešení tohoto problému je třeba vyšetřit, za jakých podmínek mají výrazy (1.69) a (1.70) smysl i v uvedených bodech. Problém spočívá v tom, že jestliže bod  $\mathbf{r}$  leží v oblasti, přes níž se integruje, může integrační proměnná nabývat hodnoty  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . Integrovaná funkce roste při  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  do nekonečna. Mají-li být intenzita pole, resp. potenciál v tomto bodě konečné, budou mít charakter nevlastních hodnot příslušných integrálů. Existence těchto nevlastních hodnot pak závisí na průběhu hustoty náboje, tj. na tvaru funkcí  $\rho(\mathbf{r}')$ ,  $\sigma(\mathbf{r}')$ ,  $\tau(\mathbf{r}')$ .

Detailní rozbor této problematiky je záležitostí teorie elektromagnetického pole, resp. teorie potenciálu (viz např. [3]). Uvedeme proto jen hlavní závěry týkající se v praxi důležitých případů. Omezíme se přitom pouze na objemové a plošné rozložení nábojů. O funkcích  $\rho(\mathbf{r}')$  a  $\sigma(\mathbf{r}')$  vyjadřujících objemovou a plošnou hustotu náboje budeme prostě předpokládat, že jsou ve všech vnitřních bodech uvažované oblasti konečné a dostatečně hladké.

O elektrostatickém poli prostorově rozložených nábojů lze za uvedených předpokladů říci:

1. Výraz (1.70a) vyjadřuje konečný potenciál ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech oblasti  $V$ , kdy je hustota náboje  $\rho$  různá od nuly.

2. Tento potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu.

3. Výraz (1.69a) je roven  $-\text{grad } \varphi$  ve všech bodech prostoru. Vyjadřuje tedy správně intenzitu pole i uvnitř oblasti  $V$ , kde je hustota náboje různá od nuly.

4. Intenzita pole daná vztahem (1.69a) je všude spojitá.

O elektrostatickém poli plošně rozložených nábojů platí za analogických podmínek:

1. Výraz (1.70b) vyjadřuje konečný potenciál ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech plochy  $S$ , kde je plošná hustota náboje  $\sigma$  různá od nuly.

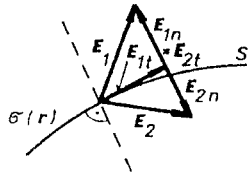
2. Tento potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu ve všech bodech s výjimkou bodů plochy  $S$ .

3. Výraz (1.69b) je roven  $-\text{grad } \varphi$  ve všech bodech s výjimkou bodů plochy  $S$ . Na této ploše nemá intenzita pole smysl.

4. Intenzita pole daná vztahem (1.69b) je všude spojitá s výjimkou bodů plochy  $S$ . Při průchodu touto plochou zůstávají spojitě pouze její tečné složky. Její normálové složky se mění skokem o hodnotu  $\sigma/\epsilon_0$ . Platí tedy vztahy (viz obr. 1.13)

$$E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.72)$$

Ke zdůvodnění těchto vztahů se vrátíme v článku 1.2.6.



Obr. 1.13 Chování normálových a tečných složek elektrického pole při průchodu nabitou plochou.

### 1.2.5 Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole

S ohledem na princip superpozice lze očekávat, že Gaussův zákon formulovaný pro soustavu bodových nábojů rovnicí (1.47) bude platit také v případě spojitě rozložených nábojů. Abychom se o tom přesvědčili, museli bychom zkoumat výraz pro tok intenzity elektrostatického pole (1.39) a dosadit v něm za vektorovou funkci  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  výrazy typu (1.69). Aniž bychom platnost takové obecnější formulace Gaussova zákona exaktně zdůvodňovali, uvedeme přímo jeho znění:

*Budíž dána libovolná uzavřená plocha  $S$  ohraničující těleso objemu  $V$  a orientovaná tak, že kladný vektor normály míří ven z tohoto tělesa. Necht' uvnitř této plochy je uzavřen náboj  $Q_c$ , který může být tvořen jednak bodovými náboji, jednak náboji spojitě rozloženými libovolným způsobem. Potom, existuje-*

*li plošný integrál  $\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  vyjadřující tok intenzity elektrostatického pole touto plochou, platí*

$$\Phi = \frac{Q_c}{\epsilon_0}. \quad (1.73)$$

Jak plyne z formulace Gaussova zákona, existuje pouze jediné omezení na volbu plochy  $S$ , a to aby přímo neprocházela takovými singularitami pole, které by znemožnily určit tok  $\Phi$ . Toto omezení má však pouze teoretický význam, neboť v přírodě žádné singularit pole neexistují. Uvedené singularit mají svůj původ v tom, že k popisu pole používáme výhodných abstraktních pojmů jako bodový náboj, plošná hustota náboje apod. Kteroukoliv konkrétní skutečnou soustavu však můžeme s libovolnou přesností popsat objemovým rozložením nábojů tak, že pole je všude konečné a spojitě.

Ve speciálním případě, kdy uvnitř plochy  $S$  jsou nejvýše objemově rozložené náboje, lze rovnicí (1.73) vyjadřující Gaussův zákon v integrálním tvaru přepsat do tvaru diferenciálního. Náboj  $Q_c$  můžeme totiž vyjádřit objemovým integrálem

$$Q_c = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (1.74)$$

(na rozdíl od integrálů (1.69) a (1.70) nyní integrujeme přes proměnnou  $\mathbf{r}$ ).

Dostaneme tak

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.75)$$

Podle Gaussovy věty vektorové analýzy (viz Dodatek I, vztah (D 1.32)) lze však plošný integrál funkce  $\mathbf{E}$  na levé straně (1.75) vyjádřit pomocí objemového integrálu funkce  $\text{div } \mathbf{E}$  přes objem ohraničený plochou  $S$ . Platí tedy

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.76)$$

Protože plocha  $S$ , a tudíž i objem  $V$  jsou voleny libovolně, musí poslední rovnice platit i pro diferenciálně malé objemy  $dV$ . To je možné pouze tehdy, jsou-li si identicky rovny integrované funkce. Musí proto platit v každém bodě

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (1.77)$$

Rovnice (1.77) představuje parciální diferenciální rovnici prvního řádu a vyjadřuje tutéž vlastnost elektrostatického pole jako Gaussův zákon (1.73)

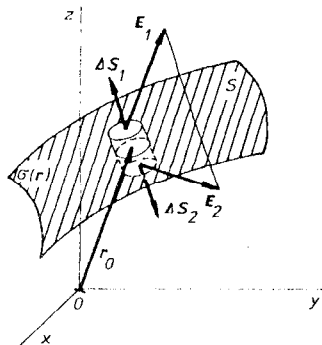
(a zahrnuje tedy v sobě i Coulombův zákon). Není však vázána na zadanou plochu či objem, a je to tedy *Gaussův zákon v diferenciálním tvaru*. V kartézských souřadnicích ji můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.78)$$

Vzhledem ke geometrickému významu pojmu divergence (viz Dodatek I) vyjadřuje tato věta skutečnost, že náboje jsou zdrojem siločar elektrostatičkého pole. Je-li v nějakém bodě hustota náboje  $\rho$ , a tedy i  $\text{div} \mathbf{E}$  kladná, znamená to, že siločáry z tohoto bodu vycházejí; naopak, jsou-li  $\rho$  a  $\text{div} \mathbf{E}$  záporné, siločáry do takového bodu vstupují. Naproti tomu v daném bodě prostoru, v němž není elektrický náboj ( $\rho = 0$ ), nelze vytvořit takovou konfiguraci elektrického pole, aby všechny okolní siločáry do tohoto bodu směřovaly. Odtud plyne tzv. *Earnshawova věta*, podle níž nelze elektrický náboj udržovat v prostoru ve stabilní rovnováze pouze silami elektrostatičkého pole (srov. příklad 1.1.6a).

### 1.2.6 Nabitá plocha v elektrostatičském poli

Gaussův zákon v diferenciálním tvaru jsme odvodili pro případ objemově rozložených nábojů. Nyní budeme aplikovat Gaussův zákon (1.73) na případ plošně rozložených nábojů (obr. 1.14).



Obr. 1.14 K odvození hraničního vztahu pro normálové složky elektrického pole.

Mějme nabitou plochu  $S$  s plošnou hustotou náboje  $\sigma$  a na ní bod  $r_0$ . Obklopíme tento bod válcovou plochou tak, že osa válce bude kolmá k ploše  $S$ , obsah podstavy válce roven  $\Delta S$  a dostatečně malý. Určíme tok intenzity elektrostatičkého pole touto válcovou plochou. K toku podstavami válce budou zřejmě přispívat pouze normálové složky pole  $\mathbf{E}_{1n}$ ,  $\mathbf{E}_{2n}$ ; vektory plošek obou podstav  $\Delta \mathbf{S}_1$ ,  $\Delta \mathbf{S}_2$  jsou přitom orientovány na opačné strany. Výšku válce můžeme učinit natolik malou, aby tok pláštěm byl zanedbatelný. Celkový tok válcovou plochou

se pak zredukuje v limitě na  $\Phi = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = (E_{1n} - E_{2n}) \Delta S$ . Podle Gaussova zákona má být tento tok roven náboji uvnitř válcové plochy  $\sigma \Delta S$  dělenému  $\epsilon_0$ :

$$(E_{1n} - E_{2n}) \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}. \quad (1.79)$$

Po vykrácení  $\Delta S$  dostaneme druhou z podmínek (1.72)

$$\text{Div} \mathbf{E} = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.80)$$

Takzvaná plošná divergence  $\text{Div} \mathbf{E}$  zavedená formálně vztahem (D 1.39), která se někdy používá, umožňuje vyjádřit podmínku pro normálové složky elektrostatičkého pole při průchodu danou plochou ve tvaru analogického Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (1.77).

V předchozím textu jsme zavedli potenciál elektrostatičkého pole vytvářené soustavou bodových nábojů, ukázali, že takové pole je konzervativní, a odvodili integrální vztah (1.61). Tento integrální vztah, a tedy i vlastnost konzervativnosti, bude zřejmě platit i pro obecné elektrostatičké pole buzené libovolně uspořádanými náboji. Jediným požadavkem je, aby integrál  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  měl smysl, což je v reálné fyzikální situaci (podobně jako v případě Gaussova zákona) vždy splněno.

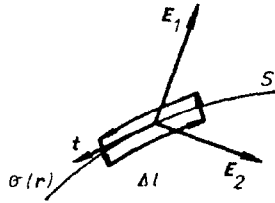
Dále jsme pomocí Stokesovy věty vektorové analýzy odvodili parciální diferenciální rovnici (1.63). Použití Stokesovy věty je přesně vzato omezeno pouze na případ, když vektor intenzity pole  $\mathbf{E}$  je spojitý a má spojitě parciální derivace ve všech bodech křivky  $l$  a jí ohraničené plochy  $S$ . V případě bodových, lineárních a plošných nábojů (což jsou všechno fyzikální abstrakce) nebude tedy Stokesova věta obecně použitelná. Obecná definice operace rotace (viz Dodatek I, vztah (D 1.43)) však není závislá na volbě souřadnic, na existenci a na vlastnostech příslušných parciálních derivací. Takto definovaná veličina  $\text{rot} \mathbf{E}$  má smysl i v bodech, kde jsou rozmístěny bodové lineární či plošné náboje a parciální diferenciální rovnice (1.63) nabývá obecnou platnost ve všech bodech prostoru pro libovolné elektrostatičké pole.

Dokažme nyní platnost prvního z hraničních vztahů (1.72) pro tečné složky elektrostatičkého pole (viz obr. 1.15). Mějme opět nabitou plochu  $S$  a veďme kolem uvažovaného bodu této plochy obdélníček tak, aby jeho delší strany  $\Delta l$  procházely rovnoběžně s libovolným tečným jednotkovým vektorem  $\mathbf{t}$  po protějších stranách plochy  $S$ . K cirkulaci vektoru intenzity podél stran  $\Delta l$  obdélníčku budou zřejmě přispívat pouze tečné složky pole  $\mathbf{E}_{1t}$ ,  $\mathbf{E}_{2t}$ . Strany kolmé k ploše  $S$  můžeme učinit tak krátkými, aby jejich příspěvek k cirkulaci byl zanedbatelný. Ze vztahu (1.61) v limitě dostáváme  $\Gamma = (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}) \Delta l = 0$ , a tedy

$$(E_{1t} - E_{2t})\Delta l = 0, \quad (1.81)$$

a po vykrácení  $\Delta l$  máme první ze vztahů (1.72). Použijeme-li tzv. plošné rotace definované pomocí (D 1.52), můžeme psát analogicky k (1.63)

$$\text{Rot } \mathbf{E} = 0. \quad (1.82)$$



Obr. 1.15 K odvození hraničního vztahu pro tečné složky elektrického pole.

### 1.2.7 Poissonova a Laplaceova rovnice

Vraťme se nyní k obecnému případu, kdy rozložení nábojů můžeme popsat pomocí objemové hustoty náboje  $\rho(\mathbf{r})$ . Vlastností elektrostatického pole jsou pak vyjádřeny parciálními diferenciálními rovnicemi

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.83)$$

Řešení této soustavy čtyř rovnic (jedné vektorové dvojice rovnic a jedné skalární dvojice rovnic) je usnadněno zavedením potenciálu. Možnost jeho zavedení plyne právě z první z rovnic (1.83) a přejdeme-li od vektoru  $\mathbf{E}$  ke skalární funkci  $\varphi$  vztahem (1.50), bude tato první rovnice splněna automaticky. Zbývá pak řešit druhou z rovnic (1.83). Využijeme přitom vztahu (D 1.56), jímž byl zaveden tzv. Laplaceův operátor. V kartézských souřadnicích máme

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.84)$$

Pro potenciál dostáváme tzv. *Poissonovu rovnici*

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.85)$$

platnou všude tam, kde platí Gaussův zákon v diferenciálním tvaru. V bodech, kde je objemová hustota nábojů nulová, redukuje se Poissonova rovnice na *rovnici Laplaceovu*

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.86)$$

nebo v kartézských souřadnicích

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.86a)$$

Poissonova a Laplaceova rovnice představují podmínky, kterým musí potenciál elektrostatického pole vždy vyhovovat. Ze známého rozložení nábojů umožňují určit potenciál (a tím i intenzitu pole) a naopak ze známého průběhu potenciálu dovolují určit soustavu nábojů tvořících zdroje tohoto potenciálu. Řešení těchto rovnic mají přitom určité obecné vlastnosti, které zkoumá matematická fyzika a které usnadňují nalézt příslušné fyzikální řešení. Protože jde o parciální diferenciální rovnice, neurčují řešení jednoznačně. Abychom dostali jednoznačné fyzikální výsledky, musíme zadat ještě další, například tzv. *hraniční podmínky*.

Jednou ze zmíněných obecných vlastností potenciálu je to, že elektrostatický potenciál nemůže mít lokální extrém v bodech, v nichž nesídlí žádné náboje. Předpokládejme například, že uvažovaný potenciál má v bodě  $\mathbf{r}_0$  lokální maximum. Pak jistě existuje kulová plocha  $K$  se středem v bodě  $\mathbf{r}_0$  v jejíchž všech bodech má potenciál hodnotu menší než  $\varphi(\mathbf{r}_0)$  a vektor  $\text{grad } \varphi$  míří *dovnitř* objemu ohraničeného touto plochou. Intenzita pole  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  míří tudíž ven z plochy  $K$ , což znamená, že

$\oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} > 0$ . Tato podmínka může být s ohledem na Gaussův zákon splněna jen tehdy, je-li uvnitř plochy  $K$  přítomen kladný náboj, jehož siločáry směřují *ven* z plochy  $K$ . Vidíme tedy, že řešení Laplaceovy rovnice nemůže mít lokální extrém v žádném vnitřním bodě uvažované oblasti. Řešení Poissonovy rovnice naopak takový extrém mít může, má-li hustota náboje v uvažované bodě a jeho okolí vhodný průběh.

Nemožnost existence lokálního extrému v prázdném prostoru je přímo patrná i z tvaru Laplaceovy rovnice (1.86a). V bodě extrému by musely být všechny první parciální derivace potenciálu nulové a všechny tři druhé parciální derivace buď kladné, nebo záporné, což rovnice (1.86a) vylučuje.

### 1.2.8 Hustota energie elektrostatického pole

Nakonec vyjádříme ještě energii obecného elektrostatického pole. Viděli jsme že interakční energie soustavy bodových nábojů může být vyjádřena pomocí potenciálu vztahem (1.60). Zobecníme-li tento výsledek pro případ spojitě rozloženého náboje umístěného v konečnu, můžeme napsat

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.87)$$

Integrovaní přitom probíhá v celém prostoru. Použijeme-li Poissonovu rovnici, dostaneme

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int \varphi \Delta \varphi dV. \quad (1.88)$$

Integrál na pravé straně (1.88) vzatý v konečném objemu  $V$  ohraničeném plochou  $S$  lze pomocí Greenovy věty vektorové analýzy (D 1.69) upravit na tvar

$$\int_V \varphi \Delta \varphi dV = - \int_V |\text{grad } \varphi|^2 dV + \oint_S (\varphi \text{ grad } \varphi) dS. \quad (1.89)$$

Bude-li se nyní plocha  $S$  rozpínat do nekonečna, bude tok vektoru  $\varphi \text{ grad } \varphi$  touto plochou konvergovat k nule (výraz  $\varphi \text{ grad } \varphi$  bude klesat jako  $1/r^3$ , element plochy poroste jako  $r^2$ ). Objemové integrování se tak rozprostře po celém prostoru a my dostaneme

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV = \int w_e dV. \quad (1.90)$$

Výsledek lze interpretovat tak, že elektrostatické pole je charakterizováno objemovou hustotou energie

$$w_e = \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} \quad (1.91)$$

a interakční energii obecně rozloženého náboje můžeme najít zintegrováním této hustoty v celém objemu, kde je elektrostatické pole nenulové.

Je užitečné si ověřit, že výraz (1.91) má skutečně fyzikální rozměr objemové hustoty energie  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ . Fyzikální význam hustoty energie  $w_e$  ovšem vynikne až po zavedení obecně nestacionárního pole elektromagnetického, v němž dochází k proudění energie v prostoru a čase. Zůstáváme-li v rámci elektrostatiky, potom výrazy typu (1.60), respektive (1.87) na jedné straně a výraz typu (1.90) na straně druhé představují pouze alternativní matematické vyjádření téže skutečnosti, tj. celkové energie potřebné k vytvoření daného elektrostatického pole.

### 1.2.9 Řešené příklady

V tomto článku shrneme obecné zásady pro výpočet intenzity elektrostatického pole (popř. jeho potenciálu), buzené známým rozložením elektrických nábojů. Obecný výklad doplníme několika typickými a z praktického hlediska užitečnými příklady.

1. Je-li zadána objemová hustota náboje  $\rho(\mathbf{r})$ , plošná hustota náboje  $\sigma(\mathbf{r})$  nebo lineární hustota náboje  $\tau(\mathbf{r})$ , je vždy možné vypočítat intenzitu  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  a potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  elektrostatického pole v explicitní formě vzorců typu (1.69) a (1.70). Přitom můžeme počítat  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  i  $\varphi(\mathbf{r})$  nezávisle na sobě nebo integrovat příslušný vzorec pro  $\varphi(\mathbf{r})$  (což bývá v některých případech snazší) a pak určit intenzitu elektrostatického pole podle (1.50). O volbě konkrétního postupu rozhodne obtížnost výpočtu jednotlivých integrálů. Přitom může nastat situace, že integrál pro  $\varphi(\mathbf{r})$  diverguje, zatímco integrál pro  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  konverguje.

2. Pokud je prostorové rozložení nábojů symetrické, je nejvýhodnější použít Gaussův zákon v integrálním tvaru (1.73). Stačí najít uzavřenou plochu procházející daným bodem a obklopující zadané náboje tak, aby vektor intenzity elektrostatického pole měl na této ploše konstantní velikost a vhodný směr. Bude-li například k této ploše kolmý, platí

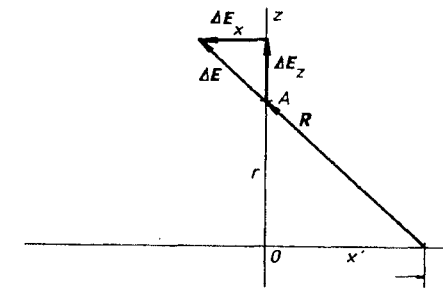
$$E = \frac{Q_e}{\epsilon_0 S}. \quad (1.92)$$

Směr vektoru  $\mathbf{E}$  je ovšem třeba určit z úvahy o symetrii soustavy.

3. Jde-li o geometricky nepravidelné nebo komplikované rozložení nábojů, mohou se předchozí způsoby ukázat nepoužitelné nebo příliš pracné. Jak bude ukázáno v článku 1.3.1, lze pak na vzdálenostech mnohem větších, než je rozměr oblasti s nenulovou hustotou náboje, určovat průběh elektrostatického pole a potenciálu přibližně pomocí tzv. multipólového rozvoje. Přitom je obvykle možné vystačit s dipólovým, nejvýše kvadrupólovým členem.

#### a) Nabitá přímka

Nechť je na přímce, kterou ztotožníme s osou  $x$ , rovnoměrně rozložen náboj s lineární hustotou  $\tau$  (viz obr. 1.16). Vyšetříme elektrostatické pole v obecném bodě  $A$  ve vzdálenosti  $r$  od přímky. Bez újmy na obecnosti můžeme bodem  $A$  vést osu  $z$ ; bod  $A$  má pak souřadnice  $(0, 0, r)$ . Intenzitu pole můžeme vypočítat integrací podle vztahu (1.69c). Vektor  $\mathbf{R}$  směřující od vybraného elementu



Obr. 1.16 K odvození elektrického pole lineárního náboje.

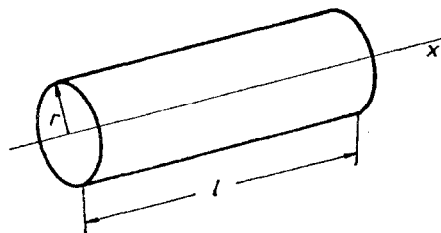
přímky  $\Delta x'$  do bodu  $A$  má přitom složky  $(-x', 0, r)$ . Složka  $E_y = 0$  a pro  $E_x$  a  $E_z$  dostáváme

$$E_x = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{R^3} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(r^2 + x'^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.93a)$$



$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx'}{R^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx'}{(r^2 + x'^2)^{3/2}} = \left[ \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{\sqrt{r^2 + x'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.93b)$$

Od nuly je tedy různá jen složka  $z$  intenzity, jak bylo možné ihned usoudit ze symetrie soustavy.



Obr. 1.17 Použití Gaussova zákona k určení elektrostatického pole nekonečné nabité přímky.

Výrazy (1.93) pro intenzitu pole lze získat podstatně jednodušeji pomocí Gaussova zákona. Zvolíme-li totiž Gaussovu plochu ve tvaru válcové plochy sousedí s nabitou přímkou (obr. 1.17) a uvážíme-li, že z důvodů symetrie může být od nuly různá pouze složka intenzity kolmá k této přímce, dostaneme z Gaussova zákona

$$\Phi = 2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon_0},$$

odkud okamžitě plyne výsledek (1.93). Gaussův zákon můžeme ovšem použít pouze pro nekonečnou přímku, kdy nám symetrie zaručuje, že vektor intenzity bude k přímce kolmý a jeho velikost bude pouze funkcí vzdálenosti od přímky. V případě nabitě úsečky bychom museli použít přímého integrování v příslušných mezích a složka  $E_r$  by již nebyla obecně nulová.

Rozložení potenciálu lze vypočítat podle vztahů (1.50) a (1.53) jako

$$\varphi = - \int E(r) dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C. \quad (1.94)$$

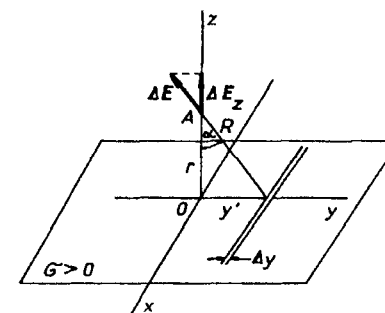
Všimněte si, že konstantu  $C$  nemůžeme určit z podmínky, aby potenciál byl roven nule při  $r \rightarrow \infty$ . Je to opět způsobeno abstrakcí, kdy předpokládáme, že přímka je nekonečná a náboje jsou tudíž rozloženi i v nekonečnu.

### b) Nabitá rovina

Vyšetříme elektrostatické pole rovnoměrně nabitě nekonečné rovinné plochy s plošnou hustotou náboje  $\sigma$  (viz obr. 1.18). Pro řešení tohoto problému bychom opět mohli použít vztahů (1.69b), popř. (1.70b). Počítání plošných integrálů se však můžeme vyhnout, použijeme-li výsledku předchozího příkladu. Můžeme si totiž

představit uvažovanou plochu rozdělenou na úzké proužky, jejichž lineární hustota náboje  $\tau = \sigma \Delta y'$  a každý z nich přispívá v bodě  $A$  intenzitou danou vztahy (1.93). Celkovou intenzitu pak získáme integrací příspěvků těchto proužků přes jedinou souřadnici  $y'$ . Z důvodu symetrie stačí uvažovat pouze složky  $E$  kolmé k rovině, které označíme  $E_z$ ; vodorovné příspěvky symetricky položených proužků se vzájemně vyruší. Platí

$$\Delta E_z = \frac{\sigma \Delta y'}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha = \frac{\sigma r \Delta y'}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + y'^2)}. \quad (1.95)$$



Obr. 1.18 K odvození elektrostatického pole rovinného náboje.

Celkovou intenzitu pak vyjádříme integrálem

$$E_z = \frac{\sigma r}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{r^2 + y'^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[ \arctg \frac{y'}{r} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.96)$$

K výsledku (1.96) dojdeme opět použitím Gaussova zákona. Uvážíme-li, že vzhledem k symetrii soustavy musí být vektor intenzity kolmý k nabitě rovině, můžeme s výhodou zvolit Gaussovu plochu ve tvaru válce, jehož osa je k ní také kolmá. Celkový tok povrchem válce bude pak zřejmě dán pouze tokem jeho podstavami  $\Delta S$ . Z Gaussova zákona dostáváme tedy podmínku

$$\Phi = 2\Delta S E = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0},$$

ze které ihned plyne vztah (1.96).

Průběh potenciálu dostaneme integrací (1.96) podle  $r$ . Platí proto

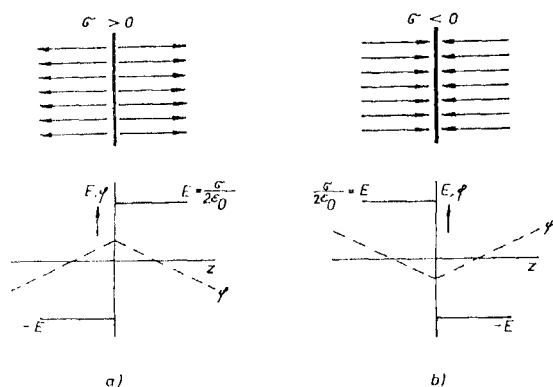
$$\varphi = - \int E(r) dr = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + C. \quad (1.97)$$

Je zajímavé si všimnout, že výsledky (1.96) a (1.97) mají skutečně vlastnosti, které jsme pro pole plošně rozložených nábojů formulovali v předešlém výkladu. Zatímco potenciál je při průchodu nabitou plochou spojitý (nemá zde však derivaci), má intenzita pole nespojitost  $\sigma/\epsilon_0$ . Průběh intenzity pole a potenciálu kladně a záporně nabitých rovin jsou znázorněny na obr. 1.19, kde  $E$  má hodnotu  $\sigma/2\epsilon_0$ .

Z výsledků vidíme, že zatímco pole bodového náboje klesá se vzdáleností jako  $1/r^2$ , klesá pole přímkového náboje pomaleji podle zákona  $1/r$  a pole nabitě roviny je homogenní a na vzdálenosti od roviny nezávisí. To se může zdát překvapivé, je to však důsledkem předpokladu, že nabitá rovina je nekonečná. Může být užitečné porovnat získané výrazy pro pole a potenciály bodového náboje, nabitě přímky a roviny:

$$\begin{aligned} \text{bod:} \quad E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C, \\ \text{přímka:} \quad E &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}, & \varphi &= -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C, \\ \text{rovina:} \quad E &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma, & \varphi &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + C \end{aligned} \quad (1.98)$$

( $r$  je vzdálenost daného bodu od bodového náboje, přímky, roviny).

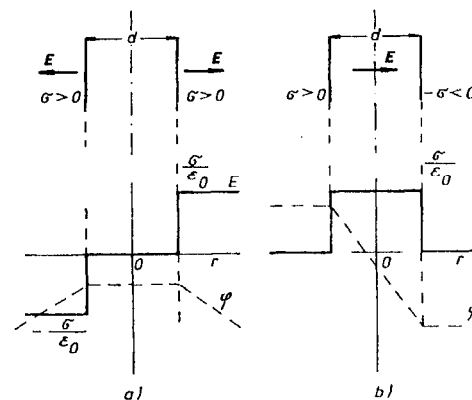


Obr. 1.19 Průběh elektrostatičkého pole roviny nabitě: a) kladným nábojem, b) záporným nábojem.

### c) Dvojice rovnoběžných nabitých rovin

Pomocí principu superpozice můžeme snadno určit průběh pole a potenciálu dvojice rovnoběžných nabitých rovin. Vzdálenost mezi nimi označíme  $d$ . Před-

pokládejme, že obě roviny jsou rovnoměrně nabitě a že mají plošnou hustotu náboje téže velikosti, a to v jednom případě souhlasného, ve druhém nesouhlasného znamení. Pole obou rovin se superponují, takže vznikne situace znázorněná na obr. 1.20a, b.



Obr. 1.20 Superpozice elektrostatičkých polí rovin nabitých: a) souhlasně, b) nesouhlasně.

Zvláště zajímavý je druhý případ nesouhlasně nabitých rovin, kdy homogenní elektrostatičké pole velikosti

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.99)$$

je soustředěno v prostoru mezi oběma rovinami a mimo tuto oblast je pole nulové. S takovým uspořádáním se setkáváme u deskového kondenzátoru, viz článek 1.4.5. Superponujeme-li potenciál, zjistíme, že napětí mezi deskami je rovno

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = E d \quad (1.100)$$

a průběh potenciálu v prostoru mezi deskami je lineární

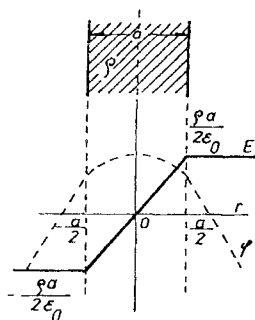
$$\varphi(r) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} r + C. \quad (1.101)$$

### d) Nabitá rovinná vrstva

Jak víme, je představa nekonečně tenké nabitě plochy fyzikální idealizací. Ve skutečnosti reálná nabitá plocha, např. rovinná, má konečnou tloušťku a může být popsána pomocí objemové hustoty náboje  $\rho$ . Uvažme proto rovinnou vrstvu

tloušťky  $a$  rovnoměrně nabitou s objemovou hustotou náboje  $\rho$  (obr. 1.21). Určíme intenzitu pole a potenciál v závislosti na vzdálenosti od osové roviny. Při výpočtu pole vně vrstvy budeme počítat příspěvky tenkých rovinných vrstev, které budeme považovat za plošně nabitě s hustotou  $\Delta\sigma = \rho\Delta r$ . Pak dostaneme:

$$E = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\rho dr}{2\epsilon_0} = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}, \quad \varphi = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0} r + C_1. \quad (1.102)$$



Obr. 1.21 Průběh elektrostatičkého pole rovnoměrně nabitě rovinné vrstvy.

Vidíme, že při průchodu vrstvou se intenzita pole změní z  $-\rho a/2\epsilon_0$  na  $+\rho a/2\epsilon_0$ , kde  $\sigma = \rho a$ . Na hranici vrstvy musí být intenzita pole spojitá (nemusí zde však mít derivaci!) a potenciál musí být spojitý a musí mít derivaci. Skutečně, v libovolném vnitřním bodě vrstvy můžeme spočítat pole a potenciál jako superpozici pole dvou rovinných vrstev tloušťek  $(a/2) + r$ ,  $(a/2) - r$  s tímto výsledkem:

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \left( \frac{a}{2} + r \right) - \left( \frac{a}{2} - r \right) \right] = \frac{\rho}{\epsilon_0} r, \quad \varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r^2 + C_2. \quad (1.103)$$

Snadno ověříme, že za podmínky  $C_1 - C_2 = \rho a^2/8\epsilon_0$  řešení (1.102) a (1.103) mají při  $r = a/2$  požadované vlastnosti. Průběh intenzity pole a potenciálu jsou znázorněny na obrázku 1.21.

### e) Nabitá kulová slupka

Uvažujme kulovou plochu  $K$  o poloměru  $r_0$  rovnoměrně nabitou s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ ; celkový náboj slupky označíme  $Q$ . Vyšetříme elektrostatičké pole vně i uvnitř této plochy. Integrovaní podle vztahů (1.69b), (1.70b) je v tomto případě obtížné, avšak sférická symetrie úlohy nám umožňuje použít Gaussův zákon. Jako Gaussovu plochu zvolíme nejprve soustřednou kulovou plochu o poloměru  $r > r_0$ . Vzhledem k symetrii soustavy je nutné předpokládat, že

vektor intenzity má v každém bodě Gaussovy plochy stejnou velikost a radiální směr, takže je k této ploše vždy kolmý. Podle Gaussova zákona dostaneme pro hledanou intenzitu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad Q = 4\pi r_0^2 \sigma. \quad (1.104)$$

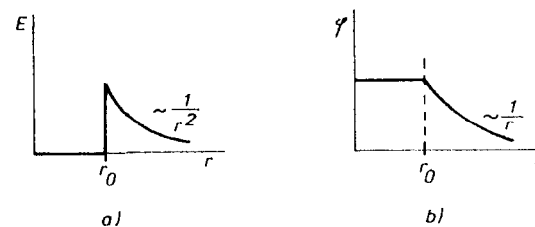
Bude-li poloměr Gaussovy plochy  $r < r_0$ , nebude v ní uzavřen žádný náboj, z čehož nutně vyplývá, že intenzita pole uvnitř plochy  $K$  je nulová.

Výraz pro průběh potenciálu vně koule dostaneme integrací vztahu (1.104); pro  $r \rightarrow \infty$  klademe  $\varphi \rightarrow 0$ , odkud vyplývá integrační konstanta  $C = 0$ , takže dostáváme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (1.105)$$

Uvnitř koule bude potenciál zřejmě konstantní. S ohledem na jeho fyzikální smysl je třeba požadovat spojitý průběh při průchodu plochou  $K$ . Celkový průběh intenzity pole a potenciálu v závislosti na vzdálenosti od středu je znázorněn na obr. 1.22.

Všimněme si, že nespojitost intenzity při průchodu nabitou plochou má hodnotu  $\sigma/\epsilon_0$  (jde o normálovou složku!). Z výrazů (1.104) a (1.105) je vidět, že vně koule  $K$  má elektrostatičké pole stejný průběh jako pole bodového náboje  $Q$  umístěného v jejím středu, a to bez ohledu na vzdálenost od kulové plochy!



Obr. 1.22 Elektrostatičké pole nabitě kulové slupky: a) průběh intenzity, b) průběh potenciálu.

### f) Nabitá koule

Nyní budeme uvažovat kouli poloměru  $r_0$  nesoucí náboj  $Q$  rovnoměrně rozložený po celém jejím objemu. Pro vyšetřování elektrostatičkého pole lze opět s výhodou použít Gaussův zákon. Pro body vně koule je možné přesně reprodukovat postup použitý v případě kulové slupky. Intenzita a potenciál budou tedy dány vztahy (1.104) a (1.105) s tím, že náboj  $Q$  označuje nyní celkový náboj koule objemově nabitě s hustotou náboje  $\rho$ :

$$Q = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho. \quad (1.106)$$

Pro vyšetření intenzity uvnitř koule zvolíme, podobně jako v předchozím případě, soustřednou Gaussovu plochu o poloměru  $r < r_0$ . Náboj  $Q'$  v ní uzavřený má velikost  $(4/3)\pi r^3 \rho$ . Podle Gaussova zákona tedy platí

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho,$$

odkud

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r. \quad (1.107)$$

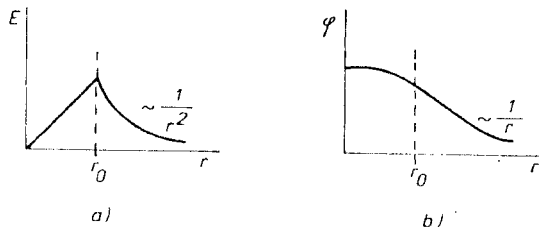
Potenciál uvnitř koule dostaneme integrací vztahu (1.107) ve tvaru

$$\varphi = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C. \quad (1.108)$$

Z požadavku spojitosti potenciálu pro  $r = r_0$  určíme hodnotu konstanty  $C$  a jako výsledek obdržíme

$$\varphi = \frac{r_0^2}{6\epsilon_0} \rho \left( 3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} \left( 3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (1.109)$$

Snadno se přesvědčíme, že potenciál má v bodě  $r = r_0$  spojitě i derivace. Celkový průběh intenzity a potenciálu nabitě koule v závislosti na vzdálenosti od středu je znázorněn na obr. 1.23.



Obr. 1.23 Elektrostatické pole homogenně nabitě koule: a) průběh intenzity, b) průběh potenciálu.

Obecně můžeme zřejmě usoudit, že jakékoliv sféricky symetrické uspořádání náboje (např. v koncentrických kulových vrstvách) v konečné oblasti prostoru se bude navenek chovat tak, jako by všechny náboj byl soustředěn ve středu této symetrie. Tato okolnost umožňuje nahradit pole nabitých koulí bodovými náboji

umístěnými v jejich středu, podobně jako v případě gravitačního pole můžeme považovat sféricky symetrická nebeská tělesa za hmotné body. Naopak odchylka od pole bodového náboje (v případě gravitace od pole hmotného bodu) svědčí o narušení sférické symetrie, což má velký praktický význam. K tomuto poznatku dospěl již I. Newton pracným integrováním, nemaje po ruce Gaussův zákon.

### g) Nabitá nekonečná válcová plocha a válec

Při výpočtu intenzity pole a potenciálu plošně nebo objemově nabitěho nekonečného válce můžeme opět využít Gaussův zákon a postupovat obdobně jako u náboje s kulovou symetrií. Vektor intenzity pole bude zřejmě kolmý k válcové ploše a Gaussovu plochu můžeme volit jako koaxiální válcovou plochu libovolné délky  $l$ , procházející daným bodem ve vzdálenosti  $r$  od osy válce. Je-li poloměr válcové plochy  $r_0$ , můžeme zkoumat pole uvnitř válce ( $r \leq r_0$ ) a vně válce ( $r > r_0$ ). Lze očekávat, že v případě cylindricky symetrického rozdělení náboje bude pole vně válce ekvivalentní poli nabitě přímky totožné s osou válce. Pro úplnost uvedeme získané výsledky; tak dostáváme pro válec povrchově nabitý s hustotou náboje  $\sigma$

$$\begin{aligned} r \leq r_0: & \quad E = 0, & \quad \varphi = C_1, \\ r > r_0: & \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r_0}{r}, & \quad \varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} r_0 \ln r + C_2 \end{aligned} \quad (1.110)$$

a pro válec objemově nabitý s hustotou náboje  $\rho$

$$\begin{aligned} r \leq r_0: & \quad E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r, & \quad \varphi = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C_3, \\ r > r_0: & \quad E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r_0^2}{r}, & \quad \varphi = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r_0^2 \ln r + C_4. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Integrační konstanty nemůžeme tentokrát určit z podmínky  $\varphi \rightarrow 0$  při  $r \rightarrow \infty$  podobně jako u nabitě koule. Je to důsledek přijaté idealizace nekonečného válce s náboji v nekonečnu. Tato okolnost však není na závadu, neboť volba konstanty ve výrazu pro potenciál neovlivní fyzikální výsledek.

### h) Pole a potenciál na ose nabitě kružnice

Určíme intenzitu elektrostatického pole a potenciál na ose kružnice poloměru  $R$ , na níž je rovnoměrně rozložen náboj lineární hustoty  $\tau$ . Budeme sčítat příspěvky k vektoru intenzity pole vždy od dvojice protilehlých malých lineárních nábojů

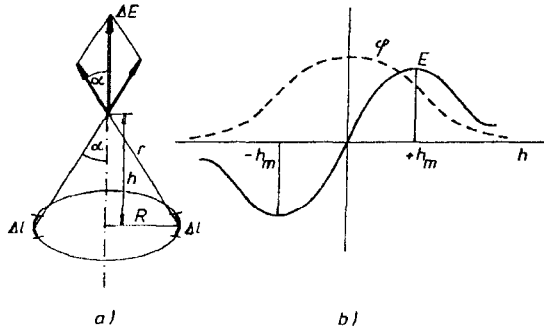
$\tau \Delta l$  na kružnici (viz obr. 1.24a). Vektor intenzity bude zřejmě ležet v ose kružnice a pro jeho velikost v bodě o výšce  $h$  nad rovinou kružnice dostaneme

$$E = \int_0^{\pi R} 2 \cos \alpha \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{h^2 + R^2} = \frac{\tau R h}{2\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.112)$$

Integrací získáme potenciál

$$\varphi = \frac{\tau R}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}}. \quad (1.113)$$

Průběh veličin  $E$  a  $\varphi$  v závislosti na výšce  $h$  je znázorněn na obr. 1.24b. Všimněme si změny orientace pole při průchodu rovinou kružnice a extrémů ve vzdálenostech  $h_m = R/\sqrt{2}$ .

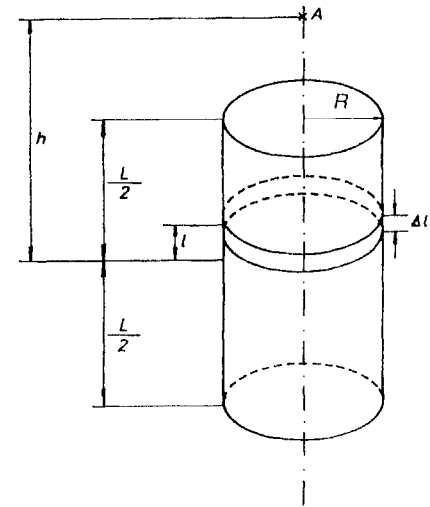


Obr. 1.24 a) K odvození elektrostatického pole na ose nabitě kruhové smyčky, b) průběh intenzity elektrostatického pole a potenciálu na ose nabitě kruhové smyčky.

#### i) Elektrostatické pole na ose válcové elektrody

Výsledek získaný v předchozím příkladu můžeme uplatnit například při výpočtu pole na ose válce konečné délky. Mějme válcovou plochu délky  $L$  a poloměru  $R$  plošně nabitou s hustotou náboje  $\sigma$  (obr. 1.25). Označme vzdálenost bodu na ose této plochy od středu válce jako  $h$ . Válcovou plochu můžeme rozřezat na koaxiální pásy výšky  $\Delta l$  a považovat je za nabitě kružnice o lineární hustotě náboje  $\sigma \Delta l$ . Použitím vztahu (1.113) a jeho integrací pak dostaneme

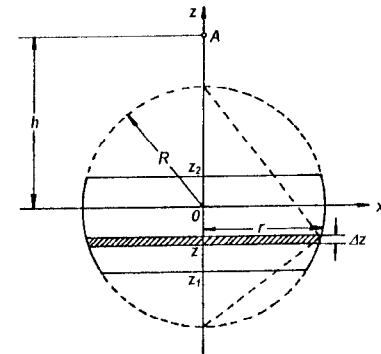
$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dl}{\sqrt{R^2 + (h-l)^2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \ln \frac{h + L/2 + \sqrt{R^2 + (h + L/2)^2}}{h - L/2 + \sqrt{R^2 + (h - L/2)^2}}. \quad (1.114)$$



Obr. 1.25 K výpočtu elektrostatického pole na ose povrchově nabitě válce.

Intenzitu pole určíme snadno jako  $E(h) = -d\varphi/dh$  a ověříme, že ve středu válce je pole nulové a potenciál maximální.

#### j) Elektrostatické pole na ose kulového pásu



Obr. 1.26 K výpočtu elektrostatického pole na ose kulového pásu.

Mějme kulovou plochu poloměru  $R$  nabitou s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Vyřízneme z ní kulový pás vymezený souřadnicemi  $z_1, z_2$  (obr. 1.26). Určíme potenciál na ose pásu ve výšce  $h$  měřené od středu kulové plochy. Uvažovaný kulový pás rozřezáme na použky velmi malé výšky  $\Delta z$  o souřadnici  $z$  a poloměru  $R$ . Vezmeme v úvahu, že obsah plochy takového kulového proužku je roven

$\Delta S = 2\pi R \Delta z$ . Opět použijeme výraz pro potenciál na ose nabitě kružnice (1.113), kam dosadíme za lineární hustotu  $\tau$

$$\Delta \tau = \frac{2\pi R \sigma \Delta z}{2\pi r} = \frac{R \sigma \Delta z}{r}$$

Dále použijeme Euklidovu větu, podle níž  $r^2 = (R+z)(R-z)$ . Hledaný potenciál se pak rovná vztahu

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz}} \\ &= \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 h} \left( \sqrt{R^2 + h^2 - 2hz_1} - \sqrt{R^2 + h^2 - 2hz_2} \right). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Intenzitu pole stanovíme opět jako  $E(h) = -d\varphi/dh$ .

Jako zvláštní případ můžeme určit například potenciál vytvářený polokulovou slupkou ( $z_1 = -R, z_2 = 0$ ) ve středu kulové plochy ( $h = 0$ ) a ve vrcholu kulové plochy ( $h = R$ ). Po pečlivém limitování (1.115) a výrazu pro intenzitu pole dostaneme

$$\varphi(0) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}, \quad E(0) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}, \quad \varphi(R) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}(2 - \sqrt{2}), \quad E(R) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}(2 - \sqrt{2}). \quad (1.116)$$

Bude-li kulová plocha uzavřena ( $z_1 = -R, z_2 = R$ ), dostaneme uvnitř koule nulové pole a konstantní potenciál  $\varphi = \sigma R/\epsilon_0$ , vně koule potenciál klesající s  $h$  jako  $\varphi = \sigma R^2/\epsilon_0 h$  a intenzitu pole  $E = \sigma R^2/\epsilon_0 h^2$ .

### k) Elektrostatická energie nabitě koule

Určíme elektrostatickou interakční energii spojitěho uspořádání náboje, jaké představují plošně nabitá kulová slupka a objemově nabitá koule poloměru  $R$ . V případě plošně nabitě kulové slupky využijeme znalosti potenciálu na jejím povrchu, který je roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

a dále vztahu (1.87) upraveného na plošné integrování. Potom

$$W = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (1.117)$$

V případě objemově nabitě koule si připomeneme definici, podle níž je energie soustavy nábojů dána prací potřebnou k vytvoření této soustavy, přičemž nezáleží na pořadí sblížení nábojů. Můžeme proto například předpokládat, že objemově nabitá koule vznikla tak, že postupně přibírala koncentrické vrstvy náboje, podobně jako se vytváří velká sněhová koule. Dosáhne-li koule poloměru  $r$  a náboje  $q$  a přibere další vrstvu náboje tloušťky  $dr$ , zvýší se její energie o

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{r}. \quad (1.118)$$

S kulovým nábojem  $q = (4/3)\pi r^3 \rho$  a přírůstkem náboje  $dq = 4\pi r^2 \rho dr$  zacházíme jako se dvěma bodovými náboji. Integrací výrazu (1.118) v mezích  $0 \rightarrow R$  dostaneme

$$W = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (1.119)$$

Kdybychom považovali elementární nabitou částici (například elektron) za kulový náboj a přirovnali její celkovou energii danou relativistickým vztahem (2.18)  $W = mc^2$  ( $m$  je hmotnost částice,  $c$  rychlost světla ve vakuu) k energii elektrostatické (1.119), mohli bychom odhadnout rozměry této částice. Při tomto řádovém odhadu se koeficient  $3/5$  zpravidla neuvažuje; potom dostáváme tak zvaný klasický poloměr elektronu rovný

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (1.120)$$

Je ovšem třeba podotknout, že zřejmě nejde o skutečný poloměr elektronu, nýbrž pouze o kombinaci základních konstant, která má rozměr délky a může hrát určitou roli ve fyzice elementárních částic. Podle výsledků dosud provedených experimentů se elektron chová jako bodová částice i při rozměrech značně menších, než je tento „klasický poloměr“. Na druhé straně je zřejmé, že kdyby se rozměry částice zmenšovaly k nule, její elektrostatická energie by musela narůstat do nekonečna.

## 1.3 Elektrický dipól

### 1.3.1 Vlastnosti elektrického dipólu

Elektrickým dipólem se obvykle rozumí soustava dvou bodových nábojů  $Q_- < 0, Q_+ > 0$  stejné velikosti  $Q$ , ale opačného znamení, umístěných v bodech  $\mathbf{r}_-$ ,  $\mathbf{r}_+$  ve vzájemné vzdálenosti  $l$ . Pokud chceme vyšetřit elektrické pole dipólu, označíme k tomu účelu vektor  $\mathbf{l} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$  a zavedeme *elektrický dipólový moment* vztahem

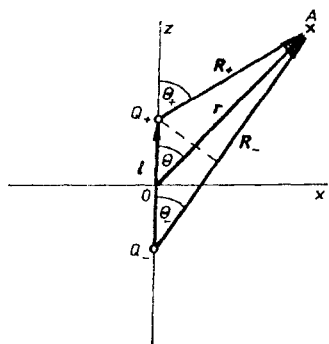
$$\mathbf{p} = Q \mathbf{l}. \quad (1.121)$$

Dipól umístíme v počátku soustavy souřadnic tak, že vektor  $\mathbf{l}$ , který míří od záporného náboje ke kladnému, bude orientován v kladném směru osy  $z$  a počátek bude půlit délku  $l$ .

Osa  $z$  je osou symetrie dipólu. Jeho elektrostatické pole bude tedy také osově symetrické se stejnou osou symetrie. Stačí tedy vyšetřit potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  v libovolném bodě  $A$  roviny  $xz$  (viz obr. 1.27). Podle vztahu (1.48), položíme-li  $C = 0$ , platí

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_+ R_-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{R_+ R_-}, \quad (1.122)$$

kde  $\theta$ ,  $\theta_+$  a  $\theta_-$  jsou úhly mezi osou  $z$  a vektory  $\mathbf{R}_-$ ,  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{R}_+$ .



Obr. 1.27 K výpočtu elektrostatického pole konečného elektrického dipólu.

Předpokládejme nyní, že vzdálenost bodu  $A$  od dipólu je mnohem větší než jeho rozměr, tj.  $r \gg l$ . Potom zřejmě platí přibližné vztahy

$$R_- \approx r \approx R_+, \quad \theta_- \approx \theta \approx \theta_+, \quad (1.123)$$

a tedy

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q l \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.124)$$

Přitom poslední tvar platí obecně pro dipól v počátku soustavy souřadnic, nezávisle na orientaci  $\mathbf{p}$  vůči osám.

V limitě, kdy  $l \rightarrow 0$  a  $\mathbf{p}$  zůstává konečný, vznikne bodový útvar, jehož elektrostatické pole je přesně dáno vztahem (1.124). Nazýváme jej *bodovým elektrickým dipólem*. Vedle bodového náboje představuje tento dipól další velmi důležitý bodový, ovšem v prostoru orientovaný, útvar používaný k charakteristice reálných soustav nábojů. Dipólový moment měříme v jednotkách coulomb metr [C.m]. Zatímco potenciál bodového náboje klesá s první mocninou

vzdálenosti, potenciál bodového dipólu klesá podle (1.124) s její druhou mocninou.

Intenzitu pole bodového dipólu určíme ze vztahu (1.124) podle rov. (1.50). Použijeme-li výraz (D 1.55) pro gradient skalárního součinu, dostaneme přímým výpočtem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{3\mathbf{r}}{r^5} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r^3} (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{r} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right]. \end{aligned} \quad (1.125)$$

V konfiguraci podle obr. 1.27 platí pro bodový dipól  $\mathbf{p} = (0, 0, p)$ ,  $\mathbf{r} = (x, 0, z)$ ,  $\cos \theta = z/r$ ,  $\sin \theta = x/r$  a složky intenzity v rovině  $xy$  můžeme explicitně vyjádřit ve tvaru

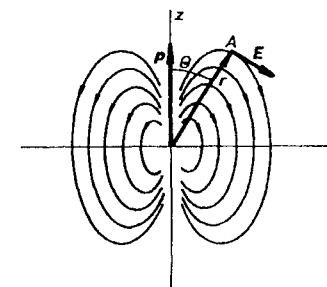
$$\begin{aligned} E_x &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{r^5}, \\ E_z &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (1.126)$$

Siločáry tohoto pole jsou znázorněny na obr. 1.28. Snadno ověříme, že pro body na ose  $z$  ( $\theta = 0$ ) platí

$$E_x = 0, \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \quad (1.127a)$$

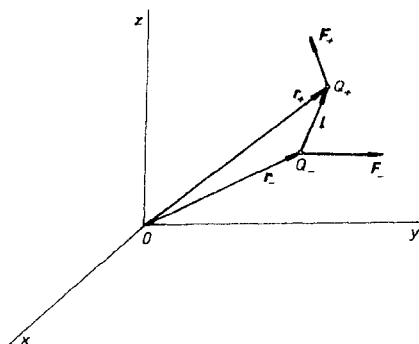
a pro body na ose  $x$  ( $\theta = \pi/2$ )

$$E_x = 0, \quad E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}. \quad (1.127b)$$



Obr. 1.28 Průběh siločar elektrostatického pole dipólu.

Nyní vyšetříme síly působící v elektrostatickém poli na elektrický dipól. Díky tomu, že vzdálenost  $l$  je neměnná, můžeme na dipól pohlížet jako na tuhou soustavu. V již zavedeném označení (viz, obr. 1.29) můžeme vyjádřit síly působící na jednotlivé náboje ve tvaru  $\mathbf{F}_+ = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}_+)$ ,  $\mathbf{F}_- = -Q \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)$ . Podle pravidel známých z mechaniky tuhého tělesa můžeme obě tyto síly přenést do jednoho bodu, vektorově je složit a jejich výslednici doplnit dvojicí sil vhodného momentu.



Obr. 1.29 K určení sil působících na elektrický dipól v elektrostatickém poli.

Přeneseme-li sílu  $\mathbf{F}_+$  do bodu  $\mathbf{r}_-$ , dostaneme pro výslednici

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = Q [\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)] \approx Q \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} l_z + \dots \right)$$

neboli (viz (D 1.54))

$$\mathbf{F} \approx Q (\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)) = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}_-). \quad (1.128)$$

Dynamický účinek výslednice  $\mathbf{F}$  je podle zmíněných pravidel mechaniky třeba doplnit silovou dvojicí momentu

$$\mathcal{M} = (\mathbf{r}_- - \mathbf{r}_+) \times \mathbf{F}_+ = Q [\mathbf{l} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_+)] = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_+). \quad (1.129)$$

Podobně můžeme určit i potenciální energii elektrického dipólu ve vnějším elektrostatickém poli. Potenciální energii obou bodových nábojů  $Q_+$ ,  $Q_-$  ve vnějším poli můžeme podle (1.56) zapsat jako

$$W_+ = Q \varphi(\mathbf{r}_+), \quad W_- = -Q \varphi(\mathbf{r}_-). \quad (1.130)$$

Potenciální energie dipólu pak bude

$$W = Q [\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-)] = Q \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z \right) = \mathbf{p} \cdot \text{grad} \varphi = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.131)$$

Přitom jsme neuvažovali vzájemnou interakční energii obou nábojů tvořících dipól, neboť jej bereme jako tuhý celek, bez možnosti deformace.

Pro bodový elektrický dipól popsaný pouze vektorem  $\mathbf{p}$  zůstávají všechny tři vztahy (1.128), (1.129), (1.131) samozřejmě v platnosti, a to přesně:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}, \quad \mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.132)$$

Potenciální energie mechanické soustavy je dána její geometrickou konfigurací, kterou můžeme popsat geometrickými parametry zvanými obecně souřadnice. Speciálně, nachází-li se bodový elektrický dipól ve vnějším elektrostatickém poli, bude jeho poloha popsána například polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  (tj. třemi kartézskými souřadnicemi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) a úhlem  $\theta$ , který svírá vektor  $\mathbf{p}$  s vektorem intenzity pole  $\mathbf{E}$ . (Důsledně vzato, měli bychom udat ještě azimutální úhel  $\varphi$  v rovině kolmé k  $\mathbf{E}$ ; vzhledem k osové symetrii potenciální energie dipólu však na tomto úhlu nezávisí.)

Derivaci potenciální energie podle obecných souřadnic  $q_i$  dostáváme tak zvané obecné síly

$$G_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}. \quad (1.133)$$

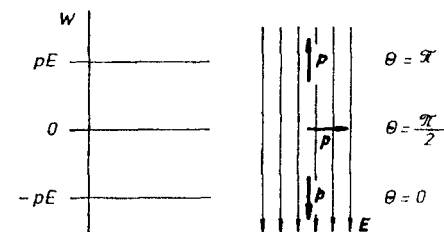
Obecnými silami mohou být například složky obyčejných sil, složky momentu síly apod. Tak pro bodový náboj  $Q$  máme

$$W = Q \varphi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla W = -Q \nabla \varphi(\mathbf{r}) = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.134)$$

Pro bodový dipól pak užitím potenciální energie  $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$  dostaneme pomocí vztahu (D 1.55)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\nabla W = -\nabla(-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}, \\ \mathcal{M}_\theta &= -\frac{\partial W}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(-p E \cos \theta) = -p E \sin \theta \end{aligned} \quad (1.135)$$

v souladu s prvními výrazy (1.132). Záporné znaménko silového momentu vyjadřuje fakt, že tento moment působí ve směru klesajícího úhlu.



Obr. 1.30 Potenciální energie elektrického dipólu v elektrostatickém poli v závislosti na vzájemné orientaci.

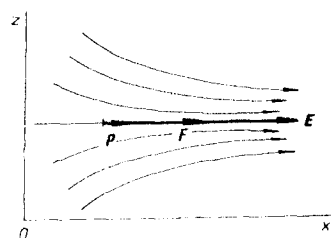
Výrazy pro sílu a moment síly působící na dipól ve vnějším elektrostatickém poli ukazují, že v homogenním poli, kdy  $\mathbf{E} = \text{konst}$ , je síla působící na dipól nulová a uplatní se pouze moment síly. Tento moment se snaží zmenšit úhel  $\theta$  mezi směrem dipólu a směrem siločar pole. Potenciální energie dipólu je v tomto



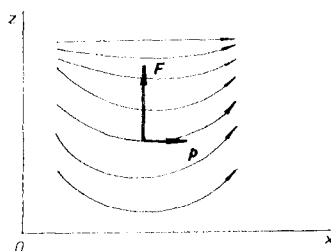
případě čistě orientační. Necht' úhlu  $\theta = \pi/2$  odpovídá například nulová potenciální energie. Budeme-li natáčet dipól vzhledem k siločarám, budeme konat práci

$$A = \int_{\pi/2}^{\theta} p E \sin \theta d\theta = -p E \cos \theta; \quad (1.136)$$

tato práce (kladná či záporná) se bude měnit v potenciální energii dipólu. Tak úhlu  $\theta = \pi$  bude odpovídat maximální potenciální energie  $W = pE$ , úhlu  $\theta = 0$  minimální potenciální energie  $W = -pE$  (viz obr. 1.30), a tedy stav stabilní rovnováhy.



a)



b)

Obr. 1.31 Síla působící na elektrický dipól v nehomogenním elektrostatickém poli:  
a) gradient pole rovnoběžný s vektorem intenzity,  
b) gradient pole kolmý k vektoru intenzity.

V nehomogenním elektrostatickém poli působí na elektrický dipól nenulová síla. Pro ilustraci charakteru této síly uvažme zvláštní případ nehomogenního pole, jehož siločáry původně rovnoběžné s osou  $x$  se v tomtéž směru sbíhají a zhušťují kolem osové siločáry (viz obr. 1.31a). Vektor gradientu pole míří tedy rovněž ve směru osy  $x$ . Umístíme-li na osové siločáře elektrický dipól orientovaný ve směru siločar, bude na něj působit síla

$$F_x = p \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (1.137)$$

v kladném směru osy  $x$ . Bude-li mít dipól opačnou orientaci, změní se i směr síly na opačný. Jiný případ nehomogenního pole je znázorněn na obr. 1.31b. Směr pole a jeho gradient jsou v tomto případě vzájemně kolmé. Na dipól orientovaný ve směru siločar bude tentokrát působit síla

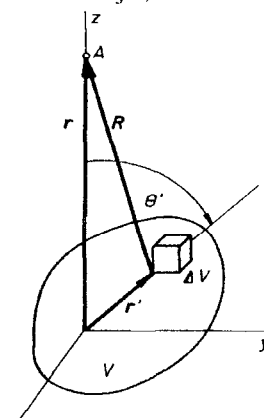
$$F_z = p \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (1.138)$$

v kladném směru osy  $z$ , při změně orientace dipólu se změní i směr síly.

Souhrnně je tedy možné říci, že elektrický dipól orientovaný souhlasně se směrem intenzity elektrostatického pole je vtahován do oblasti o větší intenzitě pole, dipól orientovaný nesouhlasně je z této oblasti vytlačován. Volný obecně orientovaný dipól se působením silového momentu nejprve natočí do směru pole a pak bude vtahován do oblasti o větší intenzitě.

### 1.3.2 Multipólový rozvoj elektrostatického pole

Vraťme se nyní k úloze zkoumané v článku 1.2.4, tj. určit elektrostatické pole a potenciál libovolně rozložených nábojů. Na obrázku 1.32 je znázorněn objem  $V$ , v němž je rozložen elektrický náboj s objemovou hustotou  $\rho(\mathbf{r}')$ . Máme určit například potenciál vytvářený objemem  $V$  v bodě  $A$ , který pro zjednodušení postupu umístíme na ose  $z$  ve vzdálenosti  $r$  od počátku. Víme již, že k určení po-



Obr. 1.32 K přibližnému výpočtu elektrostatického pole ve velké vzdálenosti od nabitého objemu.

tenciálu  $\varphi_A = \varphi(\mathbf{r})$  musíme integrovat přes objem  $V$  podle výrazu (1.70a). Body o polohovém vektoru  $\mathbf{r}'$  přitom probíhají objem  $V$ ; rozdíl vektorů  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  označíme jako  $\mathbf{R}$ , úhel mezi vektorem  $\mathbf{r}'$  a vektorem  $\mathbf{r}$  (osou  $z$ ) jako  $\theta$ . Pro velikost  $R$  podle kosinové věty platí

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2}, \quad (1.139)$$

a tedy

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{r} (1 + \alpha)^{-1/2}, \quad (1.140)$$

kde

$$\alpha = \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta. \quad (1.141)$$

V případě obecně, tj. nepravidelně, rozloženého náboje může integrování výrazu pro potenciál činit potíže. Někdy navíc ani neznáme přesné rozložení náboje v prostoru  $\rho(\mathbf{r}')$ . Naproti tomu se často můžeme spokojit s nalezením potenciálu a intenzity pole ve vzdálenostech, které značně převyšují rozměry objemu  $V$ , tedy pro něž platí  $r'/r \ll 1$ ,  $\alpha \ll 1$ . Takový případ nastává například, zkoumáme-li elektrostatické pole molekul, atomů, atomových jader.

Výraz  $1/R$ , který vystupuje v integrálu (1.70a), můžeme pak rozvinout podle binomické věty do řady s členy o postupně klesající velikosti

$$(1 + \alpha)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 - \frac{15}{48}\alpha^3 + \dots \quad (1.142)$$

Vyjádříme-li explicitně členy této řady a zachováme-li pouze veličiny do druhého řádu vzhledem k podílu  $r'/r$ , dostaneme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right]. \quad (1.143)$$

Potenciál  $\varphi_A$  můžeme také napsat ve tvaru nekonečné řady

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} + \varphi_A^{(2)} + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right). \quad (1.144)$$

Veličiny  $K_i$  jsou dány odpovídajícími integrály přes objem  $V$  a závisí pouze na způsobu rozložení náboje v tomto objemu. Nazývají se *elektrickými multipólovými momenty* a řada (1.144) představuje multipólový rozvoj elektrostatického pole. Multipólové momenty jsou konečné a jejich příspěvek k potenciálu  $\varphi_A$  klesá s odpovídající mocninou vzdálenosti  $r$ . Lze dokázat, že uvedený rozvoj potenciálu konverguje a že elektrostatické pole libovolné ohraničené soustavy nábojů ve velkých vzdálenostech lze vždy jednoznačně rozložit na příspěvky jednotlivých multipólových momentů. Tyto momenty představují elektrické charakteristiky daného nabitého objemu (molekuly, atomu, atomového jádra

apod.) a je možné je určovat též experimentálně. Tím je dána možnost porovnávat vypočtené hodnoty těchto charakteristik se změřenými.

Uvedeme explicitně první tři multipólové momenty a ukážeme jejich fyzikální význam:

$$K_0 = \int_V \rho(\mathbf{r}') dV, \quad K_1 = \int_V r' \cos \theta \rho(\mathbf{r}') dV = \int_V z' \rho(\mathbf{r}') dV, \quad (1.145)$$

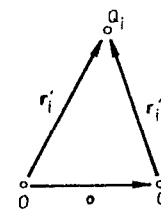
$$K_2 = \frac{1}{2} \int_V r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho(\mathbf{r}') dV.$$

Integrál  $K_0$  představuje zřejmě celkový elektrický náboj soustavy  $Q$ ; tento náboj můžeme tedy považovat za elektrický „monopól“. Je-li tento integrál, a tedy celkový náboj, nenulový, bude pole ve velkých vzdálenostech od nabitého objemu v prvním přiblížení totožné s polem bodového náboje  $Q$ . Tento triviální závěr vyjadřuje vlastně definici pojmu bodového náboje.

Integrál  $K_1$  můžeme považovat za složku  $p_z$  vektorové veličiny  $\mathbf{p}$ , kterou nazveme *elektrický dipólový moment*. Definujeme jej podle toho, zda jsou náboje rozloženy spojitě či nespojitě jako

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV, \quad \mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}'_i Q_i \quad (1.146)$$

( $\mathbf{r}'_i$  jsou polohové vektory bodových nábojů  $Q_i$ ; srov. vztah (1.121)).



Obr. 1.33 K nezávislosti elektrického dipólového momentu na volbě počátku souřadnic.

Vzniká otázka, zda takto definovaná veličina bude invariantní vůči změně počátku souřadnic či nikoli. Změníme-li počátek souřadnic z  $O$  na  $O'$  tak, že polohové vektory  $\mathbf{r}'_i$  budou nahrazeny polohovými vektory  $\mathbf{r}''_i = \mathbf{r}'_i - \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{o} = \vec{OO'}$  (viz obr. 1.33), dostaneme

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{r}'_i Q_i = \sum_i \mathbf{r}''_i Q_i + \mathbf{o} \sum_i Q_i. \quad (1.147)$$

Vidíme tedy, že elektrický dipólový moment soustavy bude invariantní veličinou pouze v tom případě, bude-li celkový náboj soustavy roven nule, tj. bude-li sou-

stava jako celek elektricky neutrální. V takovém případě bude potenciál ve velkých vzdálenostech v prvním přiblížení roven

$$\varphi_A \approx \varphi_A^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_0}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.148)$$

( $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r$  je jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{r}$ ), což je výsledek totožný se vztahem (1.124).

Můžeme si státn, že jak celkový náboj soustavy, tak i její elektrický dipólový moment budou nulové. V tom případě bude pole v prvním přiblížení určeno dalším členem multipólového rozvoje, tj. členem  $K_2$ , viz vztahy (1.145). Veličinu  $2K_2$  můžeme považovat za komponentu nějaké tenzorové veličiny, kterou nazýváme elektrický kvadrupólový moment soustavy. Můžeme ji vyjádřit symetrickou maticí

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_V (3x^2 - r^2) \rho dV & \int_V 3xy \rho dV & \int_V 3xz \rho dV \\ \int_V 3xy \rho dV & \int_V (3y^2 - r^2) \rho dV & \int_V 3yz \rho dV \\ \int_V 3xz \rho dV & \int_V 3yz \rho dV & \int_V (3z^2 - r^2) \rho dV \end{pmatrix} \quad (1.149)$$

Potom zřejmá

$$\varphi_A \approx \varphi_A^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \frac{Q_{zz}}{r^3} \quad (1.150)$$

Také pro elektrický kvadrupólový moment lze dokázat, že je invariantní vůči změně počátku soustavy souřadnic, pokud  $Q = 0$  a  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ .

Označíme-li  $x' = x_1$ ,  $y' = x_2$ ,  $z' = x_3$  a použijeme-li tzv. Kroneckerův symbol  $\delta_{ij}$ , kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{při } i = j \\ 0 & \text{při } i \neq j, \end{cases} \quad (1.151)$$

můžeme složky kvadrupólového momentu pro spojitě rozložené nábojů s hustotou  $\rho$  a nespojitě rozložené  $N$  nábojů  $Q_\alpha$  vyjádřit jako

$$Q_{ij} = \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho dV, \quad Q_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N (3x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} - \delta_{ij} r_{\alpha}^2) Q_\alpha \quad (1.152)$$

Ze vztahů (1.152) snadno zjistíme, že součet diagonálních složek  $Q_{ij}$  (tzv. stopa tenzoru) je roven nule. Zvolíme-li kromě toho osy soustavy souřadnic tak, aby všechny nediagonální složky  $Q_{ij}$  byly rovny nule (tzv. hlavní osy), a je-li například osa  $z$  osou rotační symetrie daného rozložení náboje, dostaneme

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz} \quad (1.153)$$

a jediná složka  $Q_{zz}$  pak plně charakterizuje kvadrupólový moment soustavy.

Jsou-li všechny tři první integrály  $K_0$ ,  $K_1$ , a  $K_2$ , tedy celkový náboj, dipólový i kvadrupólový moment, nulové, musíme přejít k dalším multipólovým momentům – oktopólovému, popř. vyšším.

Tato pole vyšších multipólů se však uplatní jen ve speciálních případech a kromě toho velmi rychle ubývají se vzdáleností.

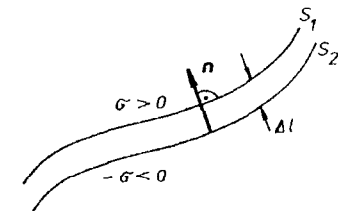
Rozklad pole na příspěvky jednotlivých multipólů má úzký vztah k symetrii rozložení náboje. Při přechodu k vyšší symetrii mizí postupně stále větší počet nižších multipólových momentů. Nejvyšší symetrii vykazuje koule poloměru  $R$  rovnoměrně nabitá celkovým nábojem  $Q$ . Z důvodů této symetrie jsou její dipólové a všechny ostatní multipólové momenty nulové a její pole v libovolné vzdálenosti  $r > R$  je přesně totožné s polem bodového náboje  $Q$  umístěného ve středu koule. Tento výsledek jsme již zjistili v příkladu 1.2.9f.

### 1.3.3 Elektrická dvojrivrsta

Podobně jako jsme zaváděli plošnou a objemovou hustotu elektrického náboje, můžeme uvažovat i bodové elektrické dipóly spojitě rozložené na dané ploše  $S$  či v objemu  $V$ . Plošné rozložení elektrických dipólů nazýváme elektrickou dvojrivrstvou. Jednotce takové plochy pak můžeme přisoudit určitý elektrický dipólový moment a zavést tak plošnou hustotu dipólového momentu  $\mathbf{p}_S(\mathbf{r})$ . Je-li tato plošná hustota co do velikosti konstantní a má všude směr normály k ploše  $S$ , nazýváme takovou elektrickou dvojrivrstvu homogenní.

K pojmu homogenní elektrické dvojrivrstvy můžeme opět dospět limitním přechodem podobně, jako jsme dospěli k pojmu bodového elektrického dipólu. Uvažujme velmi tenkou desku konstantní tloušťky  $\Delta l$  vymezenou dvojicí ploch  $S_1$ ,  $S_2$  (viz obr. 1.34). Nechť plocha  $S_1$  je nabitá kladným nábojem rozloženým s konstantní plošnou hustotou  $\sigma > 0$  a podobně plocha  $S_2$  záporným nábojem s plošnou hustotou  $-\sigma$ . Nechť dále  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor normály plochy  $S_2$  v daném bodě orientovaný směrem k ploše  $S_1$ . Potom zřejmě můžeme v každém bodě plochy  $S_2$  definovat veličinu

$$\mathbf{p}_S = \sigma \Delta l \mathbf{n}, \quad (1.154)$$



Obr. 1.34 Elektrická dvojrivrsta.

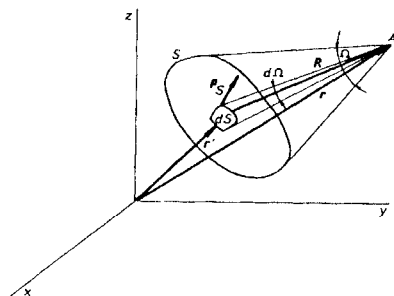
ktou nazveme *plošnou hustotou dipólového momentu*. Limitním přechodem, při němž  $\Delta l \rightarrow 0$ , obě plochy  $S_1$  a  $S_2$  splynou v jedinou plochu  $S$  a vektor  $\mathbf{p}_S$  si zachová v každém bodě plochy svou původní hodnotu, dospějeme k pojmu homogenní elektrické dvojrivrstvy. Tato dvojrivrsta představuje tedy elektricky neutrální plochu, jejíž jedinou charakteristikou je vektor  $\mathbf{p}_S$ .

Elektrostatický potenciál dvojrstvy v libovolném bodě prostoru neležícím na ploše dvojrstvy můžeme získat analogickým postupem, jako jsme dospěli k výrazu (1.70b). Protože potenciál bodového dipólu je dán (přesně) vztahem (1.124), bude potenciál vyvolaný celou dvojrstvou v bodě  $A$  dán integrálem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{p}_S \cdot \mathbf{R}}{R^3} dS; \quad (1.155)$$

vektor  $\mathbf{R}$  míří z elementu dvojrstvy  $dS$  do bodu  $A$ , vektor  $\mathbf{r}'$  je polohový vektor elementu  $dS$  a  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . V případě homogenní dvojrstvy máme (platí  $\mathbf{p}_S = p_S \mathbf{n}$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ )

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{p_S}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3}. \quad (1.156)$$



Obr. 1.35 Pozorování elektrické dvojrstvy pod daným prostorovým úhlem.

Integrál na pravé straně (1.156) má čistě geometrický význam a vyjadřuje prostorový úhel  $\Omega$ , pod nímž je vidět plocha dvojrstvy z bodu  $A$ . Skutečně pro plošku  $dS$  a element prostorového úhlu  $d\Omega$  platí vztah

$$d\Omega = \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3} \quad (1.157)$$

a integrací přes celou plochu  $S$  dostaneme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{p_S}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega = \frac{p_S}{4\pi\epsilon_0} \Omega \quad (1.158)$$

(viz obr. 1.35).

Získaný výsledek vyjadřuje podivuhodnou vlastnost dvojrstvy: elektrostatické pole jí vytvářené v daném bodě prostoru se nezmění při libovolných deformacích dvojrstvy, pokud přitom zůstane zachován celkový zorný úhel  $\Omega$ .

Z výrazu (1.155) plyne, že potenciál dvojrstvy je spojitý všude s výjimkou plochy  $S$ . Při průchodu touto plochou se mění prostorový zorný úhel libovolně její části  $dS$  nespojitě o hodnotu  $4\pi$ . Potenciál má zde tedy nespojitost  $p_S/\epsilon_0$ .

Může nastat i složitější situace, kdy plocha dvojrstvy je z daného bodu vidět částečně z jedné a částečně z druhé strany. Plochu  $S$  přitom můžeme orientovat tím, že směr vektoru  $\mathbf{p}_S$  prohlásíme za kladný. Abychom zachovali vlastnost potenciálu dvojrstvy vyjádřené vztahem (1.158), musíme potom zornému úhlu té části plochy, která je vidět z kladné strany, připsat kladné znaménko a té části, která je vidět ze záporné strany, znaménko záporné. Tvoří-li elektrická dvojrstva uzavřenou plochu, pak pro body vně dvojrstvy bude zřejmě  $\Omega = 0$ , pro body uvnitř  $\Omega = 4\pi$ . Potenciál vně uzavřené dvojrstvy je tedy roven nule, potenciál uvnitř uzavřené dvojrstvy je konstantní a roven  $p_S/\epsilon_0$ .

Intenzitu elektrostatického pole vytvářené dvojrstvou můžeme určit buď jako záporně vzaty gradient potenciálu (1.155), popř. (1.156), nebo přímo integrací výrazu (1.125):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \left[ \frac{3(\mathbf{p}_S \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{p}_S}{R^3} \right] dS. \quad (1.159)$$

I pro intenzitu pole musí platit, že závisí pouze na celkovém zorném úhlu  $\Omega$ , pod nímž je vidět plochu dvojrstvy, a tedy pouze na tvaru hranice této plochy. Podrobnější rozbor, který nebudeme provádět (viz např. [4]), ukazuje, že integrál po ploše dvojrstvy lze skutečně převést na integrál podél uzavřené hraniční křivky a lze psát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p_S}{4\pi\epsilon_0} \oint_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (1.160)$$

Smysl oběhu křivky  $l$  při integraci je dán orientací plochy  $S$ . Ze vztahu (1.160) plyne, že intenzita je spojitá všude s výjimkou hranice  $l$ , tedy i v bodech plochy dvojrstvy  $S$ .

### 1.3.4 Objemové rozložení elektrických dipólů

Uvažujme objem  $V$ , v němž jsou spojitě rozloženy elektrické dipóly. Opět můžeme zřejmě zavést vektorovou funkci  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ , která bude vyjadřovat objemovou hustotu elektrických dipólů, resp. elektrický dipólový moment jednotky objemu v daném bodě. Této vektorové funkci říkáme vektor polarizace. Podle fyzikálního smyslu tohoto vektoru bude elektrický dipólový moment malého objemu  $\Delta V$  roven

$$\mathbf{p}_{\Delta V} = \mathbf{P} \Delta V. \quad (1.161)$$

Jsou-li v objemu  $V$  stejné bodové dipóly  $\mathbf{p}$  rozloženy s koncentrací  $N(\mathbf{r}')$  a všechny orientovány souhlasně, bude platit

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') = N(\mathbf{r}') \mathbf{p}. \quad (1.162)$$

Vektor  $\mathbf{P}$  můžeme ovšem zavést i v případě, když dipólové momenty nebudou souhlasně orientovány. Kdyby byly dipóly rozloženy co do orientace dokonale chaoticky, vzájemně by se kompenzovaly a výsledný vektor polarizace by byl nulový.

Vznik objemového rozložení elektrického dipólového momentu si můžeme představit též tímto způsobem. Nechť jsou v objemu  $V$  současně rozloženy kladné náboje s objemovou hustotou  $\rho(\mathbf{r}')$  a záporné náboje s objemovou hustotou  $-\rho(\mathbf{r}')$  o stejné absolutní hodnotě v každém bodě. Posune-li se nyní všechen kladný náboj vůči zápornému o malou vzdálenost  $\Delta l$ , můžeme v každém bodě  $\mathbf{r}'$  definovat veličinu  $\mathbf{P}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') \Delta l$ , která má zřejmě význam objemové hustoty elektrického dipólového momentu. Situace zřejmě odpovídá již zmíněnému případu souhlasně orientovaných bodových dipólů, kdy vektor  $\mathbf{P}$  má v celém objemu též směr.

Všimněme si ještě zajímavé okolnosti, že polarizace má fyzikální rozměr shodný s rozměrem plošné hustoty elektrického náboje a měří se tedy v jednotkách coulomb na čtverečný metr.

Určíme nyní potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  vytvářený polarizovaným objemem  $V$  v libovolném bodě  $\mathbf{r}$ . Potenciál opět vyjádříme integrálem analogickým k výrazu (1.70a) s využitím vztahu (1.124). Vektor  $\mathbf{r}'$  bude opět probíhat integrovaným objemem  $V$ , a označíme  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Dostaneme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{R^3} dV. \quad (1.163)$$

Integrovanou funkci můžeme upravit použitím známých vztahů vektorové analýzy. Platí jednak

$$\text{grad}' \left( \frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad (1.164)$$

jednak vztah pro divergenci součinu skalární a vektorové funkce (D 1.37), s jehož pomocí dostáváme

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \text{grad}' \left( \frac{1}{R} \right) = \text{div}' \left[ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right] - \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \quad (1.165)$$

(čárka u symbolů grad a div označuje, že derivování se zde provádí podle souřadnic vektoru  $\mathbf{r}'$ ; vektor  $\mathbf{r}$  považujeme za konstantní).

Provedený rozklad nám umožní vyjádřit potenciál polarizovaného objemu ve velmi názorné podobě. Máme

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \text{div}' \left[ \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right] dV - \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} dV \right\} \quad (1.166)$$

a upravíme-li první integrál podle Gaussovy věty vektorové analýzy (jako  $S$  označíme uzavřenou plochu omezující objem  $V$ ), dostaneme konečný výsledek

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{R} - \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}') dV}{R} \right\}. \quad (1.167)$$

Zavedme plošnou hustotu náboje  $\sigma(\mathbf{r}')$  na povrchu objemu  $V$  ( $\mathbf{n}$  budiž jednotkový vektor normály k ploše  $S$  orientovaný směrem ven) a objemovou hustotu náboje vztahy

$$\sigma(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}, \quad \rho(\mathbf{r}') = -\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}'). \quad (1.168)$$

Potom můžeme (1.167) zapsat jako

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{R} + \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{R} \right\}. \quad (1.169)$$

Integrály na pravé straně však vyjadřují potenciál vytvářený plošně a objemově rozloženými náboji s hustotami, danými vztahy (1.168).

Můžeme tedy celkově říci: Elektrostatické pole dipólů objemově rozložených v objemu  $V$  s hustotou  $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$  lze formálně popsat jako superpozici elektrostatického pole nábojů objemově rozložených v tomto objemu s hustotou  $\rho = -\text{div}' \mathbf{P}$  a elektrostatického pole nábojů plošně rozložených na povrchu  $S$  uvažovaného objemu  $V$  s hustotou  $\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ , kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor kladné normály. V článku 1.3.5 uvedeme některé konkrétní příklady demonstrující tuto možnost.

Ve speciálním případě homogenního rozložení, kdy hustota  $\mathbf{P}$  je v celém objemu  $V$  konstantní, je zřejmě  $\text{div}' \mathbf{P} = 0$ . Potenciál je pak dán jen plošným integrálem z pravé strany vztahu (1.169) a pole vytvářené polarizovaným objemem je pak ekvivalentní poli uvedeného plošného náboje.

Důležitá je též ta okolnost, že potenciál (1.163) a z něho odvozená intenzita pole jsou definovány nejen ve vnějším prostoru, ale i uvnitř polarizovaného objemu, všude, kde je nulová plošná hustota náboje, viz (1.168).

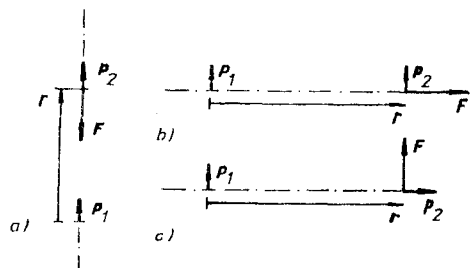
## 1.3.5 Řešené příklady

## a) Síla působící mezi dvěma elektrickými dipóly

Mějme dva elektrické dipóly o momentech  $\mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{p}_2$  ve vzdálenosti  $r$ . Určeme sílu vzájemného působení mezi nimi. Dipól  $\mathbf{p}_1$  vytváří elektrostatické pole dané výrazem (1.125). Dipól  $\mathbf{p}_2$  se nachází v tomto poli a podle vztahů (1.132) naň tedy působí síla

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{p}_2 \nabla) \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{p}_2 \nabla) \left[ \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3[(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p}_1 + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p}_2 + (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) \mathbf{r}]}{r^5} - \frac{15(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^7} \right\} \end{aligned} \quad (1.170)$$

(vektor  $\mathbf{r}$  míří od  $\mathbf{p}_1$  k  $\mathbf{p}_2$ ).



Obr. 1.36 Zvláštní případy vzájemné polohy dvou elektrických dipólů k určení jejich silového působení.

Tento obecný vzorec pro sílu působící ze strany dipólu  $\mathbf{p}_1$  na dipól  $\mathbf{p}_2$  není dosti názorný. Všimněme si proto tří speciálních případů, kdy jsou oba dipóly orientovány určitým způsobem vůči sobě navzájem a vůči vektoru  $\mathbf{r}$  (viz obr. 1.36):

1. Oba dipóly leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány (obr. 1.36a). Podle výrazu (1.170) bude síla, kterou působí dipól  $\mathbf{p}_1$  na dipól  $\mathbf{p}_2$ , přitažlivá o velikosti

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6 p_1 p_2}{r^4}. \quad (1.171)$$

(Znaménko minus vyjadřuje přitažlivý charakter síly.)

2. Oba dipóly jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém ke spojnici, tj. k vektoru  $\mathbf{r}$  (obr. 1.36b). V tomto případě bude síla působící na dipól  $\mathbf{p}_2$  odpuzivá a její velikost bude rovna

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 p_1 p_2}{r^4}. \quad (1.172)$$

3. Dipól  $\mathbf{p}_1$  je orientován kolmo ke spojnici, vektor  $\mathbf{p}_2$  rovnoběžně s ní (obr. 1.36c). Síla působící na dipól  $\mathbf{p}_2$  není v tomto případě centrální, míří kolmo ke spojnici a má velikost

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 p_1 p_2}{r^4}. \quad (1.173)$$

Síla mezi bodovými elektrickými dipóly je tedy prvním příkladem necentrálních sil, s nimiž jsme se setkali. Tato okolnost má zajímavý důsledek. Budeme-li dipóly  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  vzájemně orientované jako ve třetím uvažovaném případě přibližovat k sobě z nekonečna, nebudeme přitom konat práci (síla a dráha jsou vzájemně kolmé!). Potenciální energie soustavy dvou dipólů bude pak pouze výsledkem práce konané při vzájemném natáčení dipólů v jejich konečných polohách. Tuto energii můžeme určit podle vztahů (1.132) a (1.125) jako

$$\begin{aligned} W &= -(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p}_2 \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right]. \end{aligned} \quad (1.174)$$

## b) Elektrický kvadrupólový moment elipsoidu

Víme, že elektrický dipólový, kvadrupólový a všechny vyšší multipólové momenty objemově nabitě koule s konstantní objemovou hustotou  $\rho$  jsou nulové. Situace se může změnit, dojde-li k deformaci koule, tj. k odchylce od sférické symetrie. Uvažme proto elipsoid, jehož povrch je dán rovnicí

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1, \quad (1.175)$$

nabitý objemově s hustotou náboje  $\rho$ . Osy souřadnic necht' mají počátek ve středu elipsoidu a jsou totožné s jeho hlavními osami. Určeme nejprve elektrický dipólový moment elipsoidu, jehož složky podle (1.146) jsou dány integrály

$$p_x = \rho \int_V x' dV, \quad p_y = \rho \int_V y' dV, \quad p_z = \rho \int_V z' dV \quad (1.176)$$

přes objem elipsoidu. Pro usnadnění integrování přejdeme k souřadnicím  $x = x'/a$ ,  $y = y'/b$ ,  $z = z'/c$ , a tím k integrování přes objem koule o jednotkovém poloměru. Přitom se používá sférických souřadnic  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , které jsou vázány s kartézskými souřadnicemi vztahy  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Souřadnice  $\theta$  je úhel, který svírá průvodič daného bodu s osou  $z$  a  $\varphi$  je azimu-







tální úhel průvodiče v rovině  $x y$ . Element objemu vyjádřený ve sférických souřadnicích má tvar

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (1.177)$$

Pak dostáváme

$$p_z = abc^2 \rho \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{\pi a \rho}{4} \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta = 0, \quad (1.178)$$

podobné výrazy získáme pro další složky. Zjišťujeme, že elektrický dipólový moment elipsoidu je nulový.

Nenulovými složkami kvadrupólového momentu při zvolených osách mohou být pouze složky diagonální. Tak dostaneme například

$$Q_{zz} = abc \rho \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2c^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \cdot r^4 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{Q}{5} (2c^2 - b^2 - a^2), \quad (1.179)$$

kde  $Q = (4/3)\pi abc \rho$  je celkový náboj elipsoidu. Cyklickou záměnou  $a, b, c$  dostaneme i ostatní nenulové složky  $Q_{xx}, Q_{yy}$ .

Jde-li o rotační elipsoid s osou rotační symetrie  $z$ , potom  $a = b$  a jedinou nezávislou složkou elektrického kvadrupólového momentu je

$$Q_{zz} = \frac{2}{5} Q (c^2 - a^2). \quad (1.179a)$$

Tato veličina se používá například k vyjádření elektrické nesféricity atomových jader. Jinak otázka dipólového, popř. kvadrupólového, momentu elementárních částic a systémů z nich složených je velmi závažná a souvisí s experimentálním i teoretickým studiem jejich struktury.

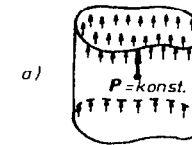
### c) Polarizovaný válec a rovinná vrstva

Mějme objem v podobě kolmého válce o obecném tvaru podstavy spojitě zaplněný bodovými elektrickými dipóly tak, že vektor polarizace  $\mathbf{P}$  je konstantní a rovnoběžný s osou válce. Podle vztahů (1.168) a (1.169) bude elektrostatické pole vytvářené takovým objemem totožné s polem dvou plošných nábojů představovaných horní podstavou válce nabitou nábojem o plošné hustotě  $\sigma_+ = P$  a dolní podstavou válce nabitou nábojem o plošné hustotě  $\sigma_- = -P$  (obr. 1.37).

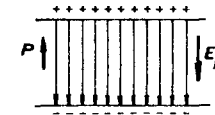
Mějme nyní nekonečnou rovinnou polarizovanou vrstvu s konstantním vektorem polarizace  $\mathbf{P}$  kolmým k rovinám ohraničujícími vrstvu. Analogicky jako v případě válce zjišťujeme, že výsledné elektrostatické pole takové vrstvy

v celém prostoru (včetně objemu vrstvy) s výjimkou bodů na hraničních rovinách bude ekvivalentní poli dvojice rovin nabitých náboji s plošnými hustotami  $\sigma_+ = P$  a  $\sigma_- = -P$  (obr. 1.38). Takové pole jsme již zkoumali v příkladu 1.2.9c. Z výsledku plyne, že elektrostatické pole polarizované vrstvy je v prostoru mimo vrstvu nulové, uvnitř vrstvy homogenní, přičemž vektor  $\mathbf{E}_p$  míří od kladně nabitě podstavy k záporně nabitě, kdežto vektor polarizace  $\mathbf{P}$  naopak. Platí tedy

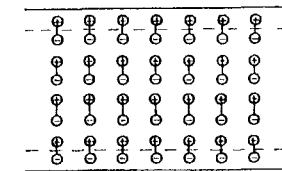
$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (1.180)$$



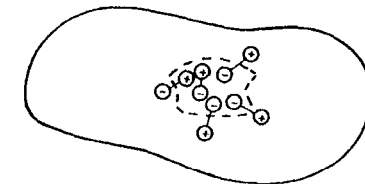
Obr. 1.37 a) Válec s homogenní objemovou polarizací, b) ekvivalentní rozložení plošných nábojů.



Obr. 1.38 Rovinná vrstva s homogenní polarizací.



Obr. 1.39 Vznik povrchových polarizačních nábojů.



Obr. 1.40 Vznik objemových polarizačních nábojů.

Situaci si můžeme též názorně představit tak, že kladné a záporné náboje dipólu se v objemu vrstvy vzájemně vykompenzují a uplatní se pouze kladné náboje dipólů tvořících horní hraniční rovinu a záporné náboje dipólů tvořících dolní hraniční rovinu (obr. 1.39).

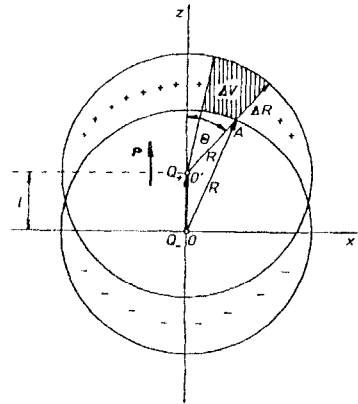
Zatím jsme uvažovali pouze případ  $\mathbf{P} = \text{konst.}$ , tedy homogenní polarizaci. Pokud by v některém bodě prostoru platilo  $\text{div } \mathbf{P} \neq 0$ , projevila by se tato skutečnost vznikem objemového náboje s hustotou, viz vztahy (1.168). Názorně si můžeme tuto situaci představit pomocí modelu znázorněném na obr. 1.40.

#### d) Polarizovaná koule

Mějme objem kulového tvaru s poloměrem  $R$  spojitě zaplněný bodovými elektrickými dipóly s konstantní polarizací. Osu  $z$  vedeme středem koule souhlasně s vektorem polarizace  $\mathbf{P}$ . Podle výrazů (1.168) a (1.169) bude elektrostatické pole vytvářené takovou polarizovanou koulí totožné s polem plošně nabitě kulové slupky s proměnnou plošnou hustotou náboje

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = P \cos \theta \quad (1.181)$$

( $\theta$  je úhel mezi vektorem polarizace a normálou ke kulové ploše).



Obr. 1.41 Vznik povrchového náboje polarizované koule.

K takovému rozložení plošného náboje na povrchu koule můžeme dojít i jinak. Mějme dvě objemově nabitě koule poloměru  $R$  s opačnými náboji  $Q_- < 0$ ,  $Q_+ > 0$  a hustotami  $\rho_-$ ,  $\rho_+$ , jejichž středy jsou vzájemně nepatrně posunuty ve směru osy  $z$  o  $l \ll R$ . Nevykompenzované náboje na povrchu vytvoří přibližně plošné uspořádání s hustotou  $\sigma = \rho l \cos \theta$ , jak se lze snadno přesvědčit z obr. 1.41. Zde  $\sigma = \rho \Delta R$ , z trojúhelníku  $OO'A$  o stranách  $l$ ,  $R$ ,  $R - \Delta R$  pomocí kosinové věty najdeme  $\Delta R = l \cos \theta$ . Velikost polarizace odpovídá tedy  $P = \rho l$ .

Jak víme, chová se rovnoměrně nabitá koule navenek tak, jako kdyby celý její náboj  $Q$  byl soustředěn v centru. Podle provedené úvahy se bude tedy rovnoměrně polarizovaná koule chovat navenek tak, jako kdyby v jejím centru byl umístěn bodový elektrický dipól o momentu

$$\mathbf{p}_k = Q \mathbf{l} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \mathbf{l} = V \mathbf{P} \quad (1.182)$$

Potenciál vně koule bude tedy dán vztahem (1.124). Potenciál na povrchu polarizované koule bude pak roven

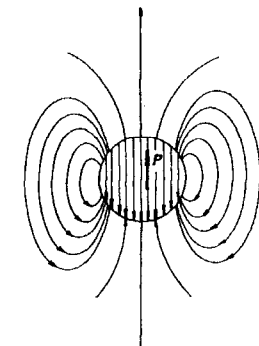
$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_k \cos \theta}{R^2} = \frac{1}{3\epsilon_0} P R \cos \theta = \frac{1}{3\epsilon_0} P z \quad (1.183)$$

a musí zůstat při přechodu přes povrch spojitým.

Uvnitř polarizované koule, kde hustota nábojů  $\rho = 0$ , musí být splněna Laplaceova rovnice (1.86) spolu s hraniční podmínkou  $\varphi = \varphi_k$ . Potenciál tvaru (1.183), přímo úměrný souřadnici  $z$ , Laplaceovu rovnici splňuje pro libovolné  $z$ , neboť všechny jeho druhé parciální rovnice jsou rovny nule. Jak však uvidíme v článku 1.4.4, je hraniční podmínkou určeno řešení Laplaceovy rovnice jednoznačně (srov. též příklad 1.4.7c). Vzorec (1.183) tedy udává potenciál v celém objemu koule. Pro pole uvnitř koule máme

$$\varphi = \frac{1}{3\epsilon_0} P z, \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad (1.184)$$

Získaný výsledek můžeme porovnat s výrazem pro pole uvnitř polarizované vrstvy (1.180): polarizovaná koule vytváří navenek elektrostatické pole ekvivalentní s polem elektrického dipólu umístěného v jejím středu, uvnitř je její elektrostatické pole homogenní, orientované opačně k vektoru polarizace a třikrát slabší než pole rovinné vrstvy o téže polarizaci.



Obr. 1.42 Siločáry elektrostatického pole polarizované koule.

Snadno ověříme, že při přechodu povrchem koule zůstává tečná složka intenzity elektrického pole  $E_t = -(P/3\epsilon_0) \sin\theta$  spojitá, zatímco normálová složka se mění skokem z hodnoty  $E_{ni} = -(P/3\epsilon_0) \cos\theta$  uvnitř koule na  $E_{ne} = (2P/3\epsilon_0) \cos\theta$  vně koule, tedy o veličinu  $P/3\epsilon_0 \cos\theta$  v souladu se vztahem (1.80). Siločáry pole polarizované koule jsou znázorněny na obr. 1.42.

Na závěr tohoto příkladu podotkneme, že homogenní elektrostatické pole vzniká i uvnitř polarizovaného objemu tvaru elipsoidu. Této okolnosti se využívá při sondování intenzity elektrostatického pole dielektrickými tělisky a měření relativní permitivity dielektrik (viz odst. 1.5.6c).

## 1.4 Elektrostatické pole nabitých vodičů

### 1.4.1 Vodiče a nevodíče

V dosavadních úvahách o elektrostatickém poli jsme používali pojem elektrického náboje, respektive jeho hustoty. Předpokládali jsme, že náboj může být určitým způsobem rozložen v prostoru, toto rozložení jsme považovali za známé a nestarali jsme se o konkrétní fyzikální podmínky, za kterých k němu dochází. Byli jsme si přitom vědomi, že stabilní rozložení elektrických nábojů v prostoru není možno realizovat výhradně silami elektrostatického pole a že náboje musí být proto podrobeny i působení dalších sil, které jsme však blíže nespecifikovali.

Makroskopické náboje, které jsou dostupné našemu přímému pozorování a měření, jsou vždy ve skutečnosti vázány na své mikrofyzikální nositele, jako jsou elektrony, ionty apod. Chování těchto nábojů pak ovšem závisí na konkrétních fyzikálních podmínkách, jimž jsou tyto mikrofyzikální útvary vystaveny. Elektrony mohou být například vázány k atomovým jádrům jako součást elektronového obalu atomu, mohou vytvářet kvantový elektronový plyn ve vodičích, při teplotách blízkých absolutní nule mohou být ve formě tzv. Cooperových párů a generovat jev nazývaný supravodivostí, mohou vytvářet elektronový mrak nebo svazek letící ve vakuu a vyvolávat například luminiscenci televizní obrazovky nebo generovat elektromagnetické vlny. Otázkami tohoto druhu se budeme podrobněji zabývat v kapitole 7. Avšak chceme-li popsat reálné chování a účinky elektrických nábojů, musíme vzít některé tyto konkrétní fyzikální podmínky v úvahu i v elektrostatice.

Již v počátcích experimentálního studia elektrických jevů bylo známo, že různé látky mají různou schopnost být zelektrizovány a udrženy v tomto zelektrizovaném stavu. Například skleněnou nebo chonitovou tyč je možno snadno zelektrizovat třením a udržet ji v tomto stavu, zatímco uzemněnou kovovou tyč tímto způsobem zelektrizovat nelze. Dále bylo zjištěno, že elektrický náboj lze dotykem přenášet z jednoho tělesa na druhé, přičemž různé látky se i v tomto směru chovají různě. Můžeme například zjistit, že skleněnou kouli lze vždy nabít

dotykem s nabitými tělesy, zatímco kovovou kouli nabijeme tímto způsobem jen tehdy, leží-li na podložce z vhodného materiálu, například skla. Spojíme-li dvě osamocené kovové koule kovovou tyčí a nabijeme-li jednu z nich dotykem s nabitým tělesem, objeví se náboj ihned na druhé kouli. Provedeme-li stejný pokus s dvojicí kovových koulí spojených skleněnou tyčí, zjistíme, že náboj zůstal pouze na první kouli. Tedy zatímco kovová tyč převedla elektrický náboj z jedné koule na druhou, skleněná tyč toho schopna nebyla.

Látky, které jsou schopny převádět elektrický náboj, se nazývají elektrickými vodiči; látky, které tuto schopnost nemají, se nazývají nevodíči (dielektriky, izolanty). Všimněme si ještě podrobněji rozdílu mezi těmito dvěma druhy látek. Je-li zelektrizovaný vodič spojen vodivě se zemí (například tím, že jej držíme v ruce nebo že leží na kovovém stolku), odvádí se jeho náboj ihned do země a vodič se stále jeví neelektrickým. Chceme-li na vodiči náboj udržet, musí být ze všech stran obklopen nevodíči; jak říkáme, musí být izolován. Proto, jak jsme viděli, může být kovová koule nabita jen tehdy, leží-li na podložce z nevodivého materiálu. Dále, dotkneme-li se izolovaného vodiče na některém místě nabitým tělesem, stane se ihned nabitým po celém povrchu. Dotkneme-li se naopak nabitého izolovaného vodiče v kterémkoli místě vodičem spojeným se zemí, odvedeme ihned všechen náboj do země. Na druhé straně, jestliže se dotkneme tímto vodičem nabitého nevodivého tělesa, odvedeme do země jen náboj z místa dotyku.

Na základě uvedeného chování vodičů soudíme, že nositelé elektrických nábojů se mohou volně pohybovat v celém jejich objemu. Typickými představiteli vodičů jsou kovy, dále roztoky elektrolytů a ionizované plyny (plazma).

V kovech se mohou volně pohybovat některé elektrony (tzv. volné, vodičové), ve vodivých kapalinách nebo plynech jsou pohyblivými nositeli náboje atomární nebo molekulární ionty.

U nevodíčů pak soudíme, že všichni nositelé náboje jsou v nich vázání určitými silami, takže k přenosu náboje objemem nevodíče nemůže snadno docházet. Typickými představiteli nevodíčů jsou sklo, slída, guma, většina umělých hmot (polymerů) apod. Kromě toho existují látky, které jsou podstatně hůře vodivé než jmenované vodiče, avšak podstatně lépe vodivé než jmenované nevodíče. Navíc jejich schopnost přenášet elektrický náboj je silně závislá na jejich chemické čistotě a vnějších podmínkách (teplotě, osvětlení, ozáření apod.). Tyto látky nazýváme *polovodiči*. Patří mezi ně některé prvky jako křemík, germanium, selen, dále krystaly GaAs, Cu<sub>2</sub>O, CdS, PbS a další.

V elektrostatice se zabýváme studiem fyzikálních projevů nepohyblivých se elektrických nábojů. Nebudeme nás proto příliš zajímat kvantitativní rozdíly v hodnotách vodivosti jednotlivých látek, poněvadž mohou pouze ovlivnit rychlost, s jakou bude dosaženo rovnovážného rozložení nábojů. Z tohoto důvodu budeme prozatím rozlišovat pouze dvě kategorie látek – vodiče a nevodíče (dielektrika). Do prvně jmenované kategorie zařadíme ty látky, v nichž se za

dobu podstatně kratší, než je doba prováděného pozorování, ustaví rovnovážné, časově neproměnné, rozdělení náboje podmíněné konkrétním uspořádáním soustavy. Naopak do druhé kategorie zařadíme ty látky, v nichž můžeme principiálně rozložit náboj libovolným způsobem, přičemž toto rozložení zůstane v podstatě nezměněné po celou dobu pozorování.

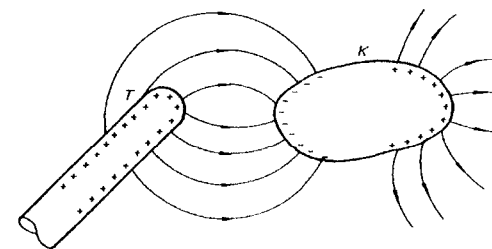
Uspořádání elektrických nábojů bude tedy vázáno na určitá tělesa charakterizovaná příslušnou geometrií (tvarem, velikostí, polohou) a vedle sil elektrostatického pole budou na nositele elektrických nábojů působit další síly, které znemožňují těmto nositelům těleso opustit a zaručují stabilitu rovnovážného rozdělení nábojů v tělese. V případě vodivého tělesa tyto síly neovlivní v konečném důsledku rovnovážné rozdělení náboje v objemu tělesa, neboť nositelům náboje je zde dovolen volný pohyb. Zaručují pouze, že náboje nebudou těleso opouštět (nedojde k emisi nositelů náboje). V případě dielektrického tělesa budou tyto síly udržovat dané rozložení náboje v celém objemu tělesa. Později (v kapitole 3) uvidíme, že v nehomogenních vodičích (kovech, roztocích) mohou existovat síly chemické povahy (tzv. vtištěné síly), které vyvolávají pohyb nositelů náboje; v našem modelu tyto síly prozatím vyloučíme a za jedinou sílu, jejímž vlivem se elektrické náboje pohybují, budeme považovat sílu elektrostatického pole.

Zdůrazněme ještě jednu závažnou okolnost. Experimentální skutečnosti, na něž jsme se odvolávali, se týkají pozorování *makroskopických nábojů* a *makroskopických polí*. Děláme-li na základě těchto pozorování například závěry o intenzitě elektrostatického pole v objemu vodiče nebo dielektrika, týkají se tyto závěry vlastně středních hodnot intenzity pole, které působí na nositele náboje a vyvolává jejich uspořádaný pohyb. Víme totiž, že látka, ať již vodič či dielektrikum, je tvořena molekulami a atomy, atomy opět atomovými jádry a elektrony, tedy nabitými elementárními částicemi. Uvnitř molekul, atomů a jader dochází ke komplikovaným pohybům elektrických nábojů, vznikají rychle proměnná elektrická pole o velké intenzitě. Tato *mikroskopická pole* není však možné postihnout ani přímým pozorováním, ani metodami výpočtů, které jsme uváděli v předchozím výkladu; k tomu účelu bychom museli znát hustotu elektrického náboje jako funkci souřadnic a času v každém bodě a každém okamžiku, nehledě na komplikovanost takových výpočtů. Budeme proto vyšetřovat *makroskopická pole*, která představují časovou a prostorovou střední hodnotu zmíněných polí mikroskopických. (Zákonitosti přechodu od mikroskopického pole k poli makroskopickému budou podrobněji vyšetřovány v kapitole 5.) V této souvislosti je třeba si uvědomit, že o elektrostatickém poli má smysl hovořit jen jako o poli makroskopickém; mikroskopické elektrostatické pole v přírodě neexistuje!

#### 1.4.2 Chování vodičů v elektrostatickém poli

V tomto článku budeme studovat vlastnosti elektrostatického pole v okolí nábojů, jejichž nositeli jsou vodivá tělesa. Umístíme-li takové těleso do elektrosta-

tického pole jiného nabitého tělesa, zjistíme, že se na tomto vodivém tělese rovněž objeví makroskopické elektrické náboje, které pozmění průběh původního elektrostatického pole. Na obrázku 1.43 je schematicky znázorněna konkrétní situace. Do blízkosti kladně nabitě tyče  $T$  je umístěno vodivé těleso  $K$ . Po ustavení rovnovážného stavu budou jeho části bližší tyči  $T$  nabitы záporně, zatímco části vzdálenější budou nabitы kladně. Celková velikost náboje izolovaného, původně nenabitého, vodivého tělesa  $K$  zůstane ovšem nulová – vzniklý kladný a záporný makroskopický náboj mají touž velikost. Uvedený jev spočívající v tom, že elektrostatické pole vyvolává existenci makroskopických nábojů na povrchu vodičů původně nenabitých, se nazývá *elektrostatická indukce*.



Obr. 1.43 Elektrostatická indukce.

Jev elektrostatické indukce snadno pochopíme na základě představy o existenci volných nositelů náboje na vodiči. Vložíme-li totiž vodič do elektrostatického pole, bude na každou částici nesoucí elektrický náboj působit síla daná vztahem (1.32), jejímž účinkem se počnou volní nositelé náboje přemísťovat. Je zřejmé, že tímto způsobem dojde k separaci kladných a záporných nábojů v tělese. Za předpokladu, že na nositele náboje nepůsobí v objemu tělesa žádné další síly, musí být rovnovážné rozdělení nábojů v tělese takové, aby výsledná intenzita pole byla všude uvnitř nulová. Kdyby totiž bylo v některé části vodiče pole nenulové, museli by se volní nositelé náboje účinkem tohoto pole přemísťovat; dané rozložení náboje by tedy nemohlo být rovnovážné.

Z Gaussova zákona elektrostatiky dále plyne, že uvnitř vodiče nemohou v rovnovážném stavu existovat makroskopické náboje. Tok libovolnou uzavřenou plochou ležící uvnitř vodiče musí být totiž vzhledem k nulovosti intenzity pole vždy nulový. Z Gaussova zákona pak ihned plyne, že musí být nulovým i náboj uzavřený v libovolné ploše ležící uvnitř vodiče. V rovnovážném stavu mohou být tedy náboje rozloženy jen na povrchu vodiče. Lze je proto považovat za náboje plošně rozložené, charakterizované plošnou hustotou  $\sigma(r)$ .

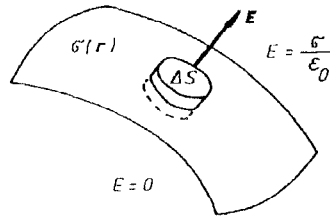
Můžeme tedy shrnout:

Vložíme-li vodivé těleso do vnějšího elektrostatického pole, dojde k přeskupení jeho volných nositelů náboje tak, aby jejich vlastní pole vykompenzovalo všude

v objemu vodiče původní pole vnější, takže intenzita výsledného pole  $E = 0$ . Makroskopické náboje se přitom soustředí na povrchu vodiče.<sup>5</sup> Jak uvidíme v článku 1.4.4, je vzniklé rozložení plošného náboje jednoznačné.

Z nulovosti intenzity pole uvnitř vodiče plyne, že elektrostatický potenciál bude v celém objemu konstantní. Celý objem vodiče tedy tvoří ekvipotenciální objem, jeho povrch tvoří ekvipotenciální plochu. Jelikož intenzita pole je vždy kolmá k ekvipotenciální ploše (viz rov. (1.66)), bude v blízkosti vodiče vektor intenzity elektrostatického pole vždy kolmý k jeho povrchu.

Určeme nyní hodnotu intenzity elektrostatického pole v blízkosti povrchu vodiče. Zvolíme uzavřenou plochu ve tvaru velmi nízkého válce a malých podstav  $\Delta S$  libovolného tvaru, jehož osa je kolmá k povrchu vodiče a jehož jedna podstava je umístěna vně vodiče, druhá uvnitř (obr. 1.44). Vzhledem k rozměrům válce můžeme zanedbat nehomogenitu pole a nehomogenitu rozložení povrchového náboje. Uvnitř této válcové plochy je tedy uzavřen celkový náboj rovný  $\Delta Q = \sigma \Delta S$ , kde  $\sigma$  je hodnota povrchové hustoty náboje v místě válce.



Obr. 1.44 Použití Gaussova zákona k určení intenzity elektrostatického pole na povrchu vodiče.

Tok intenzity pole podstavou uvnitř vodiče je samozřejmě nulový, tok pláštěm rovněž, neboť siločáry jsou rovnoběžné s osou válce. Zbývá tedy tok podstavou přimykající k povrchu vodiče zevně rovný  $\Delta \Phi = E \Delta S$ . Z Gaussova zákona pak okamžitě dostáváme

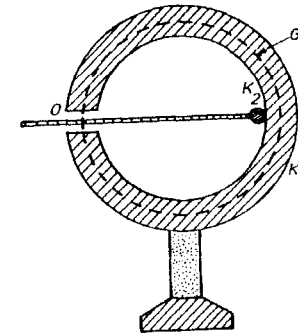
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.185)$$

Uvedené tvrzení se někdy nazývá *Coulombovou větou*. Pozoruhodné na něm je zejména to, že ačkoliv elektrostatické pole vně vodiče je vytvářeno celkovým rozložením nábojů na povrchu vodiče a dalších těles, je v blízkosti povrchu plně určeno lokální hodnotou hustoty v daném bodě povrchu. (Všimněme si, že z výrazu (1.185) vyplývá opět nespojitost normálové složky intenzity  $\sigma \epsilon_0$ .) Siločáry elektrostatického pole dopadají zvnějšku kolmo k povrchu vodiče tam,

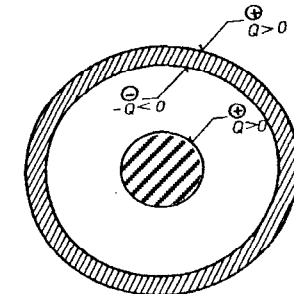
<sup>5</sup> Neznamená to samozřejmě, že by se všichni volní nositelé náboje soustředili na povrchu; jakmile je dosaženo nulové intenzity pole v objemu vodiče, uspořádaný pohyb nositelů náboje ustane. Při vzrůstu intenzity vnějšího pole dají se do pohybu další mikroskopičtí nositelé náboje, aby posílili makroskopický povrchový náboj vodiče. Domyšlení této situace vede k hlubšímu pochopení rozdílu mezi makroskopickými a mikroskopickými náboji a poli.

kde je soustředěn záporný plošný náboj, a vycházejí opět kolmo k povrchu tam, kde je soustředěn kladný plošný náboj.

Toto chování vodičů ve vnějším elektrostatickém poli má závažné praktické důsledky. Jsou-li na povrchu vodiče ostré výstupky nebo hroty, vzniká v jejich blízkosti silně nehomogenní elektrostatické pole. Elektrické siločáry, které stále zůstávají kolmé k povrchu, zde prudce mění směr a u povrchu se zhušťují. Tím rostou podle vztahu (1.50) i hodnoty gradientu potenciálu a vznikají zde mezi blízkými body vysoká napětí.<sup>6</sup>



Obr. 1.45 Nabíjení duté vodivé koule.



Obr. 1.46 Rozložení nábojů na povrchu koncentrických vodivých koulí.

Vytvoříme-li uvnitř vodiče dutinu, bude i v této dutině zůstat intenzita pole nulová (pokud v ní nebudou přítomny izolované makroskopické náboje). Hovoříme proto někdy poněkud nepřesně o „stínícím účinku vodičů“. Pole v dutině obklopené vodičem není totiž v pravém slova smyslu odstíněno, nýbrž vykompenzováno polem povrchových nábojů. Důležité je, že tento stav zůstane nezměněn i při změnách celkového náboje vodiče a průběhu vnějšího pole.

Dalším důsledkem této vlastnosti vodičů je možnost postupně zvětšovat povrchový náboj dutého vodiče, a tím i jeho potenciál tak, že náboj přivádíme na jeho vnitřní povrch. Na obrázku 1.45 je znázorněna dutá vodivá koule  $K_1$

<sup>6</sup> Tato okolnost může vést ke známému „sršení elektřiny z hrotů“ nebo naopak slouží jako princip bleskosvodu.

s malým otvorem  $O$  upevněná na izolovaném podstavci. Vnášíme-li do dutiny koule náboj malé vodivé kuličky  $K_2$ , jíž se dotkneme vnitřního povrchu koule  $K_1$ , bude tento náboj okamžitě převeden na vnější povrch koule. V okamžiku doteku vytvoří totiž oba vodiče  $K_1, K_2$  jediné vodivé těleso, v jehož vnitřním objemu nemohou makroskopické náboje existovat. Vedeme-li Gaussovu plochu  $G$  stěnou duté koule  $K_1$ , bude tok touto plochou nulový a stejně tak makroskopický náboj uvnitř této plochy. Tímto způsobem můžeme kouli nabít teoreticky neomezeně velkým nábojem; praktické omezení je dáno průrazným napětím, které závisí na geometrickém uspořádání, na prostředí zaplňujícím kouli a jejím okolí. Na tomto jevu je například založen princip van de Graaffova generátoru (viz příklad 6.3.2a).

Tok uvedenou Gaussovou plochou  $G$  musí být nulový i v okamžiku vložení makroskopického náboje do dutiny koule před tím, než se dotkneme vnitřního povrchu. To je ovšem možné jen tak, že se na vnitřním povrchu koule bude indukovat stejně velký náboj opačného znamení. Po doteku tento náboj z vnitřního povrchu zmizí. Situace je znázorněna na obr. 1.46 pro případ, že dutá koule není elektricky nabitá. Bude-li mít koule elektrický náboj, budou se povrchové náboje na vnitřním a vnějším povrchu lišit, přičemž náboj na vnitřním povrchu musí vždy kompenzovat izolovaný náboj uvnitř dutiny. Uvedená úvaha zůstává samozřejmě v platnosti i pro vodiče libovolného tvaru, je-li jeden z nich obklopen vodičem druhým.

### 1.4.3 Nepřímé ověření Coulombova zákona

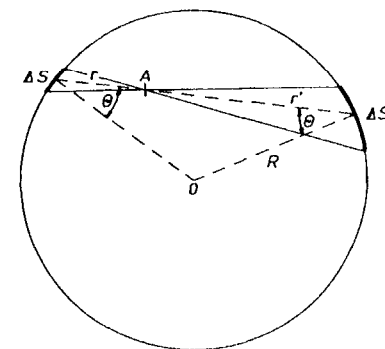
V předchozím článku jsme ukázali, že v důsledku přítomnosti dostatečného počtu volných nositelů náboje se ve vodiči vloženém do elektrostatického pole ustaví rovnovážný stav, při kterém je intenzita pole v celém jeho objemu nulová. Dále bylo pomocí Gaussova zákona ukázáno, že uvnitř vodičů nemohou v rovnovážném stavu existovat od nuly různé makroskopické náboje. Gaussov zákon představuje však zobecnění zákona Coulombova, přičemž podstatným tvrzením obsaženým v Coulombově zákoně, které jsme při odvozování Gaussova zákona využívali, je to, že síla působící mezi dvěma bodovými náboji ubývá se čtvercem vzdáleností. Skutečnost, že makroskopické náboje se nacházejí v rovnovážném stavu jen na povrchu vodičů, můžeme proto považovat za důsledek Coulombova zákona.

Obráceně lze ukázat, že jestliže náboje jsou v rovnovážném stavu jen na povrchu vodičů, musí intenzita pole bodového náboje ubývat se čtvercem vzdáleností. Obě tvrzení jsou tedy ekvivalentní. Víme, že Coulombov zákon byl experimentálně potvrzen metodou torzních vah, přičemž přesnost tohoto experimentu není příliš velká. S mnohem větší přesností je možné prokázat, že náboje ve vodičích se nacházejí v rovnovážném stavu na povrchu – tím je však vzhledem k ekvivalentnosti obou tvrzení experimentálně ověřen Coulombov zákon. Je zajímavé, že této skutečnosti si byl vědom již Cavendish a ten také

ještě před formulací Coulombova a Gaussova zákona zákon převrácených čtverců tímto způsobem experimentálně nepřímo ověřil. Provedeme nyní důkaz ekvivalence tvrzení.

1. „Intenzita pole bodového náboje ubývá se čtvercem vzdáleností“ a

2. „Makroskopické náboje na vodičích se mohou v rovnovážném stavu nacházet pouze na povrchu“ pro případ kulového vodiče. Z důvodu symetrie koule je totiž možné soudit i na symetrii rozložení náboje, což usnadňuje provedení důkazu. Důkaz je ovšem možné zobecnit i na vodič libovolného tvaru.



Obr. 1.47 K důkazu nulové střední hodnoty intenzity elektrostatického pole uvnitř nabitě vodivé koule.

Uvažujme tedy kulový vodič poloměru  $R$  nesoucí náboj  $Q$ . V rovnovážném stavu musí být intenzita pole uvnitř vodiče nulová, jinak by docházelo k pohybu volných nositelů náboje. Vycházíme-li z platnosti zákona převrácených čtverců, a tedy i zákona Coulombova a Gaussova, plyne odtud, že v objemu vodiče nemohou existovat makroskopické náboje, a musí tedy sídlit pouze na povrchu. Stačí totiž vést uvnitř vodiče libovolnou Gaussovou plochu, tok intenzity touto plochou bude nulový a nulový bude i náboj uvnitř libovolné uzavřené plochy v objemu vodiče. Tím jsme dokázali, že z tvrzení 1 plyne tvrzení 2.

Vyjďeme nyní ze skutečnosti, že náboj je rozprostřen na povrchu koule. Ze symetrie vyplývá, že hustota náboje bude na povrchu konstantní a bude rovna  $\sigma = Q/4\pi R^2$ . Budeme nyní počítat intenzitu pole pomocí této hustoty v libovolném bodě  $A$  uvnitř koule. Celý objem koule rozdělíme na dvojice souosých kuželů se společným vrcholem v bodě  $A$  a stejnými malými vrcholovými prostorovými úhly  $\Delta\Omega$  (viz obr. 1.47). Uvedené kuželové plochy rozdělí celý povrch vodiče na malé plošky  $\Delta S$  a  $\Delta S'$ . Výsledné pole v daném bodě  $A$  bude pak podle principu superpozice dáno sumou příspěvků od nábojů  $\Delta Q$  a  $\Delta Q'$  na všech těchto ploškách.

Budeme nyní předpokládat, že intenzita pole  $E(r)$  bodového náboje je úměrná jeho velikosti, míří ve směru průvodiče a ubývá monotónně se vzdávající vzdáleností  $r$ . Tento pokles nechť je popsán neznámou funkcí  $f(r)$ , takže podle uvedených předpokladů můžeme napsat

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = C_1 Q \frac{\mathbf{r}}{r^2} f(r), \quad (1.186)$$

kde  $C_1$  je konstanta.

Má-li být v bodě  $A$  celková intenzita pole nulová, musí se vyrušit příspěvky způsobené náboji  $\Delta Q, \Delta Q'$  na obou ploškách  $\Delta S, \Delta S'$  v každé dvojici, tj. musí platit vztahy

$$\Delta Q f(r) = \Delta Q' f(r'), \quad \sigma \Delta S f(r) = \sigma \Delta S' f(r'). \quad (1.187)$$

Kdyby totiž pro některou dvojici kuželů platilo například  $\Delta Q_1 f(r_1) > \Delta Q'_1 f(r'_1)$ , musela by být takto vzniklá složka intenzity pole vykompenzována jinými dvojicemi kuželů a pro ně by muselo platit  $f(r_2) < f(r'_2)$  při  $r_2 < r'_2$ . To však není možné vzhledem k monotónnosti funkce  $f(r)$ .

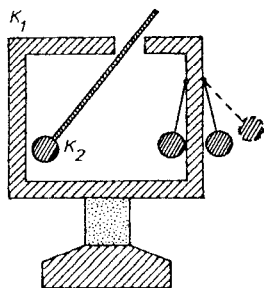
Z obrázku 1.47 je dále patrné, že  $\Delta Q = \sigma \Delta S = \sigma r^2 \Delta \Omega / \cos \theta$ ,  $\Delta Q' = \sigma r'^2 \Delta \Omega' / \cos \theta$ . Po dosazení do vztahů (1.187) dostaneme tudíž podmínku

$$r^2 f(r) = r'^2 f(r'). \quad (1.188)$$

Jelikož však jsou poloměr koule  $R$  i poloha bodu  $A$  uvnitř koule voleny libovolně, musí pro každou hodnotu vzdálenosti platit

$$r^2 f(r) = C_2, \quad (1.189)$$

kde  $C_2$  je konstanta. Funkce  $f(r)$  má tedy tvar  $f(r) = C_2 / r^2$ , takže po dosazení do vztahu (1.186) dostaneme tvar Coulombova zákona. Tím jsme dokázali, že i z tvrzení 2 plyne zpětně tvrzení 1.



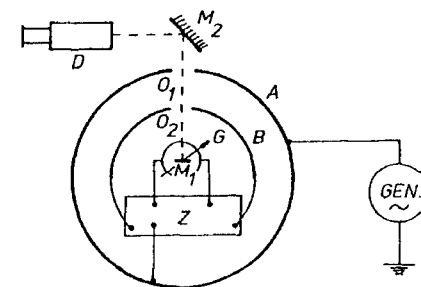
Obr. 1.48 Pokus s Faradayovou klecí.

Experimentální ověření skutečnosti, že náboje jsou rozmístěny v rovnovážném stavu pouze na povrchu vodičů, má tedy principiální význam. Kvalitativně se o něm přesvědčíme například pokusy s Faradayovou klecí. Uvažujme izolovaný dutý vodič  $K_1$ , s malým otvorem podle obr. 1.48. Nechť jsou podél stěn vodiče zavěšeny na nevodivých vlákních dvě velmi lehké vodivé kuličky.

Může jít například o kuličky bezové, či zhotovené z pěnového polystyrenu, na nichž je nanášena tenká vodivá, třeba grafitová vrstva. Vložíme-li nyní do dutiny izolovaný nabitý vodič  $K_2$  a dotkneme se jím vnitřní stěny dutiny, zjistíme dvě skutečnosti. Za prvé vodič  $K_2$  neponese po vyjmutí z dutiny žádný náboj. Za druhé vnější kulička se vychýlí ze své původní polohy do polohy čárkovaně vyznačené na obrázku, zatímco vnitřní kulička zůstane v původní poloze. Vodič  $K_2$  předal svůj náboj vodiči  $K_1$ , neboť v okamžiku doteku tvořily oba vodiče jediné vodivé těleso, přičemž vodič  $K_2$  byl umístěn v jeho vnitřním prostoru, kde nemůže existovat makroskopický náboj. Předaný náboj se pak okamžitě přemístil na vnější povrch vodiče  $K_1$ . Vnější kulička získala tedy náboj stejného znamení jako vodič  $K_1$  a v důsledku silového působení mezi těmito náboji zaujala novou polohu. Vnitřní kulička, vzhledem k tomu, že se dotýkala vnitřní stěny dutiny, žádný náboj získat nemohla, a proto zůstala ve své původní poloze.

Jeden z nejpřesnějších experimentů tohoto druhu byl proveden S. J. Plimptonem a W. E. Lawtonem v r. 1936.<sup>7</sup> Zmínění autoři použili kvazistatické metody, jejíž schematické uspořádání je uvedeno na obr. 1.49. Sestává z izolované kovové vnější koule  $A$  o průměru asi 1,5 m, která je periodicky nabíjena z generátoru na potenciál 3 000 V. Do této koule je izolovaně vložena vnitřní koule  $B$  o průměru asi 1,2 m. Součástí povrchu této koule je stínění elektronkového zesilovače  $Z$ , který je do ní vložen a kterým je možné detekovat případné změny napětí mezi oběma koulemi. Pro zvýšení citlivosti měření je na výstup zesilovače připojen galvanometr  $G$ , jehož frekvence vlastních kmitů měrného systému souhlasí s frekvencí generátoru nabíjecího vnější koule (asi 2 Hz). Výchylku galvanometru je možné pozorovat opticky pomocí dalekohledu  $D$  okénky  $O_1$  a  $O_2$ . Okénko  $O_1$  je přitom vyplněno vodivým průhledným roztokem, takže celistvost koule  $A$  zůstává neporušena. Uvedené kvazistatické uspořádání dovoluje dosáhnout velké citlivosti, neboť již velmi malé periodické změny napětí o frekvenci rovné vlastní frekvenci galvanometru jsou schopny vyvolat znatelné výchylky galvanometru. Kromě toho dovoluje střídavá metoda vyloučit některé parazitní vlivy, které by omezovaly přesnost výsledku při měření statickými metodami.

Citovaní autoři byli schopni detekovat změny napětí mezi koulemi  $A$  a  $B$  rovně  $10^{-6}$  V. Ani při této citlivosti však nebyly pozorovány žádné rozdíly v potenciálu obou koulí. Na základě uvedeného výsledku je exponent ve jmenovateli Coulombova zákona určen s přesností  $2 \cdot 10^{-7}$  procent, tedy o sedm řádů přesněji než u experimentu Coulombova.



Obr. 1.49 Kvazistatická metoda měření elektrostatického pole uvnitř duté nabitě koule.

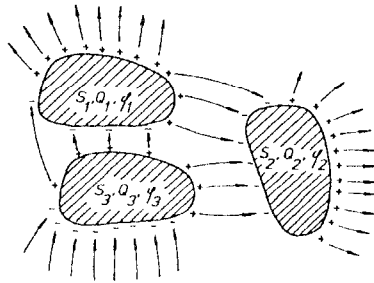
<sup>7</sup> S. J. Plimpton, W. E. Lawton: Phys. Rev. 50 (1936), 1066.

#### 1.4.4 Základní úloha elektrostatiky

Na začátku kapitoly o elektrostatice jsme se zabývali vlastnostmi soustavy bodových nábojů rozmístěných v prostoru. Nyní budeme uvažovat reálnější soustavu tvořenou  $N$  vodivými tělesy. Každé z těchto těles je charakterizováno určitou geometrií, tj. tvarem a polohou v prostoru; jeho povrch tvoří uzavřenou plochu  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Necht' jednotlivé vodiče nesou náboje  $Q_i$  (některé z těchto nábojů mohou být i nulové). Dále víme, že intenzita pole uvnitř každého z vodičů bude rovna nule, náboje budou rozloženy na povrchu s hustotou  $\sigma_i(\mathbf{r})$  a povrch vodiče bude představovat ekvipotenciální plochu o potenciálu  $\varphi_i$  (viz obr. 1.50). Intenzita pole u povrchu každého vodiče je vázána na povrchovou hustotu náboje vztahem (1.185) a splňuje podmínku, že tok intenzity pole Gaussovou plochou  $G$  těsně přimykající k povrchu vodiče je

$$\Phi_i = \oint_{G_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{G_i} \sigma dS = \frac{Q_i}{\epsilon_0}. \quad (1.190)$$

Z teoretického hlediska vznikají nyní dvě otázky. Za prvé, je-li pro libovolnou soustavu vodičů takové rozložení nábojů po jejich povrchu vždy možné, a za druhé, je-li uvedenými požadavky rozložení náboje jednoznačně určeno.



Obr. 1.50 Soustava nabitých vodičů.

Řešením první otázky se nebudeme zabývat. Spokojíme se s fyzikálním názorem, podle něhož lze očekávat, že libovolné náboje přivedené na libovolnou soustavu vodičů mají možnost rovnovážného statického rozložení. Odpověď na druhou otázku však již není tak zřejmá. Není například jasné, jestli při různém pořádku přivádění nábojů na jednotlivé vodiče není obecně možné jejich různé rovnovážné rozložení, které by ovšem mohlo vést k různému průběhu pole v okolním prostoru. Ukazuje se však, že tato nejednoznačnost není obecně možná,<sup>8</sup> neboť by vedla ke sporu s obecnými vlastnostmi potenciálu probranými v článku 1.2.7.

<sup>8</sup> Podrobněji je o těchto otázkách pojednáno například v knize Scott W. T.: The Physics of Electricity and Magnetism, J. Wiley, New York 1966.

Statické, rovnovážné rozložení nábojů na libovolné soustavě vodičů je tedy jednoznačně dáno velikostí těchto nábojů, velikostí, tvarem a rozmístěním vodičů v prostoru. Tímto rozložením je podle vztahu (1.70b) také až na aditivní konstantu jednoznačně určen průběh potenciálu ve všech bodech prostoru. Speciálně jsou velikosti nábojů určeny také potenciály všech vodičů. Problém nalezení elektrostatického pole soustavy nabitých vodičů je tedy principiálně plně rozřešen. Budeme-li znát hustoty nábojů na povrchu těchto vodičů, můžeme potenciál vždy vypočítat pomocí vztahu (1.70b).

Nalezení této hustoty pouze z podmínky konstantnosti potenciálu uvnitř vodičů je však velmi obtížné. Proto volíme jiný, schůdnější postup využívající toho, že potenciál musí ve všech bodech prázdného prostoru (tj. všude tam, kde hustota nábojů je nulová) splňovat Laplaceovu rovnici. Na základě toho, co o elektrostatickém poli vodičů již víme, můžeme totiž formulovat jednoduché podmínky, které určují jednoznačně hodnotu potenciálu ve všech bodech prostoru. Podaří-li se nám ukázat, že tyto podmínky také jednoznačně určují řešení Laplaceovy rovnice, bude problém hledání potenciálu soustavy vodičů převeden na problém hledání řešení Laplaceovy rovnice vyhovujícího určitým vedlejšími podmínkám. Úloha tohoto druhu se nazývá *základní úlohou elektrostatiky*.

Pokusíme se nyní formulovat uvedené podmínky. Především víme, že potenciál musí mít konstantní hodnotu v celém objemu každého vodiče. Protože potenciál je na povrchu vodiče spojitý (viz článek 1.2.4), stačí tedy znát hodnotu potenciálu  $(\varphi)_{S_i} = \varphi_i$  na povrchu každého vodiče. Pokud jsou zadány velikosti nábojů každého z vodičů, musí potenciál na povrchu každého vodiče vyhovovat podmínce (1.190), kde položíme  $E = -\text{grad } \varphi$

$$\epsilon_0 \int_{S_i} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = -Q_i \quad (1.191)$$

(vzhledem ke spojitosti potenciálu na povrchu vodiče můžeme integrovat přímo po povrchu  $S_i$ ). Zadáním velikosti nábojů všech vodičů je, jak víme, potenciál v celém prostoru určen až na aditivní konstantu. Jsou-li dále všechny vodiče v konečnu, můžeme vždy požadovat, aby platilo  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{r}) = 0$ .

V praxi se stává, že máme řešit elektrostatické pole vodičů rozmístěných v dutině vodivého tělesa. Průběh pole vně tohoto tělesa nás přitom nezajímá. Pak můžeme podmínku nulovosti potenciálu v nekonečnu nahradit podmínkou nulovosti potenciálu na vodivé obálce. Tím vyloučíme vnější prostor z našich úvah a jednoznačnost potenciálu bude opět zaručena zadáním nábojů, resp. potenciálů na povrchu jednotlivých vodičů.

Základní úlohu elektrostatiky můžeme nyní formulovat takto:



Najít elektrostatický potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  jako funkci definovanou a spojitou se svými derivacemi až do druhého řádu v daném uzavřeném objemu nebo v celém prostoru, která vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\Delta\varphi = 0$$

a okrajovým podmínkám

$$1. (\varphi)_{S_i} = \varphi_i, \text{ resp. } \varepsilon_0 \oint_{S_i} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{S} = -Q_i,$$

$$2. \varphi = 0 \text{ na hranici objemu, resp. } \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(\mathbf{r}) = 0. (\varphi_i, \text{ popř. } Q_i, \text{ jsou přitom zadané hodnoty.})$$

Zbývá ukázat, že existuje nejvýše jedno řešení Laplaceovy rovnice, které vyhovuje udaným okrajovým podmínkám. Toto jednoznačně určené řešení bude pak představovat skutečné rozložení elektrostatického potenciálu soustavy nabitých vodičů v prostoru. Důkaz jednoznačnosti provedeme sporem. Nechť existují dvě různá řešení základní úlohy elektrostatiky  $\varphi_1, \varphi_2$ . Potom funkce  $\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$  bude rovněž splňovat Laplaceovu rovnici (díky její linearitě). Na všech vodičích bude přitom platit okrajová podmínka  $(\varphi')_{S_i} = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$  a samozřejmě  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi'(\mathbf{r}) = 0$ . Protože řešení Laplaceovy rovnice nemůže mít lokální extrém v prázdném prostoru (viz článek 1.2.7), plyne odtud, že  $\varphi'$  musí být všude rovno nule, a tedy  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Řešení Laplaceovy rovnice hledáme obvykle metodami matematické fyziky, které zde nemůžeme podrobně rozebírat. Často přitom využíváme právě jednoznačnosti řešení této úlohy, tedy okolnosti, že řešení je okrajovými podmínkami plně určeno. Uvažme například libovolné elektrostatické pole. Vyplňme dále část prostoru vodivým prostředím tak, aby povrch vodivého tělesa byl totožný s některou ekvipotenciální plochou původního pole. Předpokládejme dále, že celý náboj, který byl původně uzavřen v uvažované ekvipotenciální ploše, přejde na naše vodivé těleso. Je zřejmé, že původní pole splňuje na tomto vodiči okrajovou podmínku 1. Z věty o jednoznačnosti potenciálu pak plyne, že původní pole ve vnějším prostoru zůstane zachováno i po zařazení vodiče.

Okrajovou podmínku 1 na určité vodivé ploše můžeme tedy někdy výhodně nahradit rozložením myšlených nábojů v té části prostoru, kde nás řešení základní úlohy elektrostatiky nezajímá. Tomuto přístupu se říká *metoda elektrostatického zobrazení*. (O jejím použití viz příklady 1.4.7a až c.)

#### 1.4.5 Kapacita a kondenzátor

Uvažujme izolované vodivé těleso nesoucí náboj  $Q$ . Potenciál vytvořený tímto tělesem v okolním prostoru označíme  $\varphi(\mathbf{r})$ . Ptáme se, jak se změní potenciál,

jestliže na uvažované těleso přivedeme nový náboj  $Q' = A Q$ , kde  $A$  je konstanta. Podle předchozího článku je hledaný potenciál určen vztahem  $\varphi'(\mathbf{r}) = A \varphi(\mathbf{r})$ , neboť zřejmě splňuje všechny požadované podmínky. Platí tedy vztah

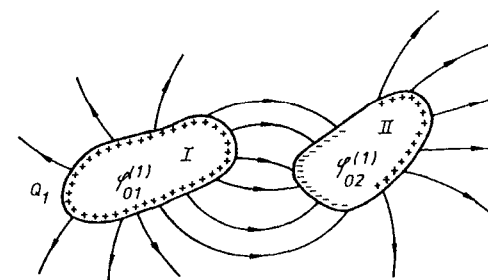
$$\frac{Q'}{\varphi'(\mathbf{r})} = \frac{Q}{\varphi(\mathbf{r})} = \text{konst.} \quad (1.192)$$

Poměr mezi velikostí náboje na uvažovaném tělese a hodnotou potenciálu v daném bodě je tedy funkcí pouze geometrických parametrů tělesa a daného bodu. Speciálně, označíme-li  $\varphi_0$  hodnotu potenciálu na povrchu tělesa odpovídající náboji  $Q$ , můžeme psát

$$C = \frac{Q}{\varphi_0} \quad (1.193)$$

Veličina  $C$ , která rovněž závisí pouze na geometrických parametrech daného izolovaného tělesa (jeho velikosti a tvaru), se nazývá jeho *kapacita*. Kapacita osamocené vodiče vyjadřuje tedy jeho schopnost shromažďovat elektrický náboj. Těleso o menší kapacitě bude daným nábojem přivedeno na vyšší potenciál než těleso o větší kapacitě.

V Mezinárodní soustavě jednotek bude mít jednotkovou kapacitu těleso, které se nábojem jednoho coulombu přivede na potenciál jednoho voltu. Tato jednotka se nazývá *farad* (F). Jelikož je pro praktické použití příliš velká, užívá se hlavně odvozených jednotek mikrofarad ( $\mu\text{F}$ ),  $1 \mu\text{F} = 10^{-6}$  F, popř. nanofarad (nF),  $1 \text{nF} = 10^{-9}$  F, či pikofarad (pF),  $1 \text{pF} = 10^{-12}$  F.



Obr. 1.51 Rozdělení povrchových nábojů v soustavě nabitého a nenabitého vodivého tělesa.

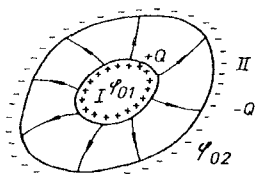
Nyní rozšíříme naše úvahy o vztahu mezi náboji a potenciály na soustavu nabitých vodičů. Uvažme nejdříve dvě vodivá tělesa, z nichž jedno nese náboj  $Q_1$  a druhé je nenabitě. Je-li první těleso v prostoru osamoceno, bude pro jeho potenciál platit  $Q_1 = C_{01} \varphi_{01}^{(0)}$ , kde  $C_{01}$  je jeho kapacita. Zaujme-li nyní druhé, nenabitě, těleso žádanou polohu v prostoru, nastane situace znázorněná na



přivedený na první vodič indukuje na vnitřní stěně druhého vodiče náboj  $-Q$ . Všechny siločáry, které vycházejí z kladných nábojů na jednom z vodičů končí u nábojů na druhém vodiči a elektrostatické pole je uzavřeno v dutině mezi oběma vodiči. Přitom nezáleží na nábojích na vnějším povrchu druhého vodiče či na vnějších polích. Mezi vodiči bude existovat nenulový rozdíl potenciálů, tedy napětí  $U = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ . Podle (1,199) můžeme psát

$$\begin{aligned} Q &= C_{11} \varphi_{01} + C_{12} \varphi_{02}, \\ -Q &= C_{21} \varphi_{01} + C_{22} \varphi_{02}. \end{aligned} \quad (1.200)$$

Ze čtyř neznámých  $C_{ik}$  jsou pouze tři nezávislé, neboť  $C_{12} = C_{21}$ . Bude-li náboj  $Q = 0$ , bude vnitřní vodič součástí ekvipotenciálního objemu tvořeného dutinou vnějšího vodiče a  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ . Tak dostáváme  $C_{11} = -C_{12} = -C_{21} = C_{22} = C$ .



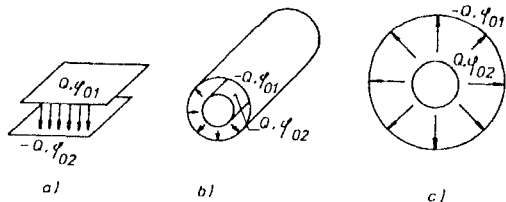
Obr. 1.52 Obecné uspořádání dvou vodivých těles vytvářejících kondenzátor.

Vidíme tedy, že všechny čtyři konstanty  $C_{ik}$  mohou být vyjádřeny pomocí jediné konstanty  $C$ , kterou nazveme *kapacita kondenzátoru*. Z rovnic (1.200) pak platí

$$C = \frac{Q}{\varphi_{01} - \varphi_{02}} = \frac{Q}{U}. \quad (1.201)$$

Příslušné dva vodiče je zvykem nazývat *elektrodami kondenzátoru*.

Hodnota kapacity kondenzátoru (měříme ji opět ve faradech) je určena rozměry, tvarem a vzájemnou polohou obou vodičů. Jak uvidíme dále, kapacitu kondenzátoru je možno zvětšit i tím, vyplníme-li prostor mezi elektrodami vhodnou nevodivou látkou (dielektrikem). V praxi se k uvedenému účelu používá například papír, slída, keramika, některé polymery a podobně.



Obr. 1.53 Kondenzátory: a) deskový, b) válcový, c) kulový.

Kapacita osamocené vodiče, kapacita kondenzátoru, kapacitní a influenční koeficienty jsou veličiny stejné fyzikální povahy a měří se v týchž jednotkách. Kondenzátor má kapacitu jednoho faradu, jestliže nábojem jednoho coulombu získají jeho elektrody napětí jednoho voltu.

Z hlediska praktického použití nelze ovšem dobře konstruovat kondenzátor tak, aby jedna elektroda zcela obklopovala druhou. Volí se proto různé konstrukce, u nichž je uvedená podmínka splněna pouze přibližně. Takové kondenzátory pak samozřejmě nejsou úplně nezávislé na vnějších polích a tam, kde siločáry opouštějí prostor mezi elektrodami, se projevují tzv. *okrajové efekty*. Na obrázku 1.53 jsou znázorněna nejtypičtější geometrická uspořádání elektrod kondenzátoru deskového, válcového a kulového.

Všimněme si blíže kondenzátoru deskového. V ideálním případě představuje soustavu dvou rovnoběžných vodivých rovin ve vzájemné vzdálenosti  $d$ . Jak víme z příkladu 1.2.9c, jsou-li takové roviny nabitý nesouhlasnými náboji s konstantní plošnou hustotou náboje  $\sigma$ , je pole soustředěno pouze v prostoru mezi nimi, je homogenní a má velikost  $E = \sigma / \epsilon_0$ . Je-li záporně nabitá deska uzemněna, bude potenciál kladně nabitě desky roven napětí mezi nimi  $U = Ed$ .

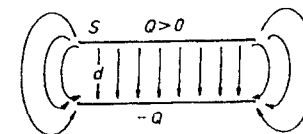
Ve skutečnosti nemohou mít desky kondenzátoru podobu nekonečných rovin, ale jsou omezeny na konečnou plochu  $S$ . Je-li vzdálenost  $d$  mezi deskami malá ve srovnání s rozměry desek, můžeme pole mezi nimi považovat přibližně za homogenní a použít výrazy pro dvojici nekonečných rovin. Uvážíme-li, že  $\sigma = Q/S$ , dostáváme

$$U = Ed = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{S} d. \quad (1.202)$$

Kapacita deskového kondenzátoru je tedy rovna

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (1.203)$$

a je tím větší, čím je větší plocha desek a čím je menší vzdálenost mezi nimi. Běžně používaný vzorec pro kapacitu (1.203) platí tím přesněji, čím menší je poměr mezi vzdáleností desek  $d$  a lineárním rozměrem  $l \sim \sqrt{S}$ , tj. čím menší roli hrají okrajové efekty. Přibližně lze odhadnout, že při poměru  $d/l = 0,1$  dává vzorec (1.203) chybu asi 20 %, při  $d/l = 0,01$  asi 2 % [5]. Na obrázku 1.54 je znázorněno pole deskového kondenzátoru a průběh siločar na jeho okrajích.



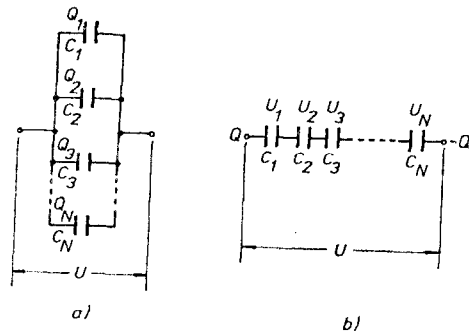
Obr. 1.54 Průběh siločar elektrostatického pole deskového kondenzátoru.

V praxi je často třeba vypočítat výslednou kapacitu několika kondenzátorů, jejichž elektrody jsou určitým způsobem spojeny. Všimněme si této úlohy pro dva speciální případy – pro tzv. *paralelní* a *sériové* spojení kondenzátorů. Na obrázku 1.55a je schematicky znázorněno paralelní spojení  $N$  kondenzátorů, které vznikne vzájemným propojením odpovídajících si elektrod všech kondenzátorů (kondenzátory jsou znázorněny obvyklou schematickou značkou). Elektrody výsledného kondenzátoru jsou tedy složeny z elektrod všech  $N$  kondenzátorů, na všech kondenzátorech je stejné napětí a náboje na deskách  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) se sčítají ve výsledný náboj  $Q$ :

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = U \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.204)$$

Výsledná kapacita je dána součtem kapacit jednotlivých kondenzátorů

$$C = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.205)$$



Obr. 1.55 Řazení kondenzátorů:  
a) paralelní, b) sériové.

Na obrázku 1.55b je schematicky znázorněno sériové zapojení  $N$  kondenzátorů. Toto spojení vznikne postupným propojením dvojic elektrod různých kondenzátorů tak, že všechny kondenzátory jsou uspořádány v řadě. Elektrody výsledného kondenzátoru jsou potom tvořeny volnými elektrodami prvního a posledního kondenzátoru. Je zřejmé, že napětí  $U$  na výsledném kondenzátoru je rovno součtu napětí  $U_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) na jednotlivých kondenzátorech. Předpokládejme, že kondenzátory nebyly před spojením nabitý. Potom náboj  $Q$  přivedený na volnou elektrodu prvního kondenzátoru indukuje na druhé elektrodě náboj  $-Q$ , čímž vznikne náboj  $Q$  na první elektrodě druhého kondenzátoru. Postupujeme-li tak celou řadou, dostáváme výsledný náboj  $-Q$  na volné elektrodě posledního kondenzátoru. Elektrody všech kondenzátorů nesou tedy náboj stejné velikosti. Proto platí

$$U = \sum_{i=1}^N U_i = Q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}, \quad (1.206)$$

takže pro výslednou kapacitu  $C$  dostaneme

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}. \quad (1.207)$$

Převrácená hodnota výsledné kapacity kondenzátorů v sériovém spojení je rovna součtu převrácených hodnot kapacity jednotlivých kondenzátorů.

#### 1.4.6 Energie soustavy nabitých vodičů

V článku 1.1.5 jsme odvodili výraz pro interakční energii soustavy bodových nábojů, v článku 1.2.8 jsme tento pojem zobecnili pro libovolně rozložené náboje a zjistili jsme, že tuto energii můžeme vyjádřit též jako prostorově rozloženou energii elektrostatického pole. Původ této energie jsme přitom spatřovali v práci, kterou bylo nutné vykonat k tomu, aby soustava nábojů vznikla, tedy aby náboje po překonání elektrostatických sil byly uvedeny do svých výsledných poloh.

Soustava nabitých vodičů může být rovněž charakterizována energií potřebnou k jejímu vytvoření. Určíme nejdříve práci, kterou vykonáme při nabíjení jednoho osamoceneného vodiče kapacity  $C$ . Předpokládejme, že vodič je již nabit určitým nábojem  $Q'$  na potenciál  $\varphi'_0$ . Přivedeme-li na vodič nějaký malý náboj  $\Delta Q'$ , vykonáme práci  $\varphi'_0 \Delta Q'$ . K nabití vodiče na celkový náboj  $Q$  je tedy nutné vynaložit práci

$$W = \int_0^Q \varphi'_0 dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} C \varphi_0^2 = \frac{1}{2} \varphi_0 Q. \quad (1.208)$$

Přejdeme nyní k obecnému případu soustavy  $N$  vodičů nesoucích náboje  $Q_i$ , a majících potenciály  $\varphi_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Mají-li vodiče v daném okamžiku potenciály  $\varphi'_{0i}$  a nabijíme-li je malými náboji  $\Delta Q'_i$ , konáme práci rovnou  $\sum_{i=1}^N \varphi'_{0i} \Delta Q'_i$ . Abychom mohli tento výraz snadněji integrovat, vyjdeme z předpokladu, že výsledná práce nebude záviset na postupu nabíjení jednotlivých vodičů (podobně jako u soustavy bodových nábojů nezávisela na postupu jejich sblížení). Potom můžeme předpokládat například, že všechny vodiče nabijeme od počátku současně, přičemž rychlost nabíjení jednotlivých vodičů je úměrná konečnému náboji  $Q_i$ , takže nabíjení bude i současně ukončeno. Matematicky můžeme tuto situaci vyjádřit tak, že okamžité potenciály a náboje jsou v každém okamžiku úměrný výsledným hodnotám:  $Q'_i = t Q_i$ ,  $\varphi'_{0i} = t \varphi_{0i}$ , kde  $t$  je bezrozměrný para-

metr  $0 \leq t \leq 1$ . Integrací pak najdeme výslednou práci, resp. energii elektrostatického pole jako

$$W = \sum_{i=1}^N \int_0^{Q_i} \varphi'_{0i} dQ'_i = \sum_{i=1}^N \varphi_{0i} Q_i \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{0i} Q_i,$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{0i} Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N B_{ik} Q_k Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ik} \varphi_{0k} \varphi_{0i}. \quad (1.209)$$

Obecný výraz (1.209) můžeme použít k důkazu symetrie matice potenciálových, respektive influenčních koeficientů. Při nabíjení soustavy vodičů počneme tím, že nabijeme nejprve  $i$ -tý vodič nábojem  $Q_i$ . Potom vykonáme práci

$$W_i = \frac{1}{2} Q_i \varphi_{0i} = \frac{1}{2} B_{ii} Q_i^2 \quad (1.210)$$

( $\varphi_{0i}$  představuje potenciál  $i$ -tého vodiče nabitého nábojem  $Q_i$  v přítomnosti ostatních, a to nenabitých vodičů). Potom nabijeme  $k$ -tý vodič celkovým nábojem  $Q_k$ . Tato práce bude rovna

$$W_{ki} = \int_0^{Q_k} \varphi'_{0k} dQ'_k = \int_0^{Q_k} (B_{ki} Q_i + B_{kk} Q'_k) dQ'_k = B_{ki} Q_i Q_k + \frac{1}{2} B_{kk} Q_k^2. \quad (1.211)$$

Výsledná energie  $W = W_i + W_{ki}$  nemůže záviset na pořadí, v němž vodiče nabíjíme, a musí být symetrická vůči záměně indexů  $i$  a  $k$

$$\frac{1}{2} B_{ii} Q_i^2 + B_{ki} Q_i Q_k + \frac{1}{2} B_{kk} Q_k^2 = \frac{1}{2} B_{kk} Q_k^2 + B_{ik} Q_k Q_i + \frac{1}{2} B_{ii} Q_i^2, \quad (1.212)$$

odkud plyne rovnost  $B_{ik} = B_{ki}$ .

Z obecného výrazu (1.209) plyne jak výraz pro energii osamocené vodiče (1.208), tak výraz pro energii kondenzátoru. Uvážíme-li, že náboje na elektrodách kondenzátoru mají touž velikost a opačné znamení, a použijeme-li definice napětí kondenzátoru  $U = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ , dostáváme z (1.209) okamžitě

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.213)$$

Pro deskový kondenzátor s homogenním polem se snadno přesvědčíme, že tato energie je rovna energii elektrostatického pole v prostoru mezi deskami kondenzátoru (viz 1.2.8). Dosadíme-li do (1.213) výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru (1.203) a nahradíme napětí  $U$  výrazem  $Ed$ , dostaneme po úpravě

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S d. \quad (1.214)$$

První část součinu na pravé straně (1.214)  $\epsilon_0 E^2/2$  představuje objemovou hustotu energie elektrostatického pole (1.91), druhá část  $Sd$  je objem mezi

deskami kondenzátoru. Podobný postup by bylo možné aplikovat i na obecnou soustavu vodičů. Energie soustavy nabitých vodičů je rovna energii elektrostatického pole v prostoru mezi vodiči (uvnitř vodičů je elektrostatické pole nulové).

Pro energii elektrostatického pole soustavy vodičů platí důležitá tzv. *Thomsova věta*, jejíž důkaz lze najít například v [6]:

*Náboje na soustavě pevných vodičů obklopených nevodivým prostředím jsou v rovnovážném stavu rozloženy po povrchu těchto vodičů vždy tak, aby energie výsledného elektrostatického pole byla minimální.*

Průběh elektrostatického pole soustavy pevných vodičů je jednoznačně určen buď hodnotami jejich celkových nábojů, nebo hodnotami potenciálů. Představme si nyní, že vodiče změni poněkud svou polohu, přičemž zůstanou zachovány buď jejich celkové náboje, nebo hodnoty potenciálů. Náboje zůstanou zachovány na izolovaných vodičích; zachování potenciálů by bylo možné dosáhnout například tak, že připojíme vodiče ke zdrojům elektromotorického napětí, které budou měnit náboje vodičů tak, aby potenciál zůstal zachován. V tomto druhém případě není soustava vodičů z energetického hlediska izolována. Při změně polohy vodičů dojde ke změně potenciálových koeficientů, resp. kapacitních a influenčních koeficientů (které ve vakuu představují geometrické charakteristiky!), přerozdělí se náboje ve vodičích a vznikne nové elektrostatické pole s obecně novou hodnotou energie, která je při daných polohách vodičů minimální. Z tohoto hlediska je tedy energie elektrostatického pole soustavy vodičů jednoznačnou funkcí jejich polohy. Lze proto soudit, že pro určení rovnovážné polohy vodičů má význam potenciální energie. Je ovšem třeba mít na paměti, že v případě, kdy udržujeme na vodičích konstantní potenciály, dochází k výměně energie s okolím a energii elektrostatického pole nelze ztotožnit s potenciální energií izolované fyzikální soustavy.

Také pro nabitě vodiče můžeme formulovat *Earnshawovu větu* (viz články 1.1.6 a 1.2.5), a to takto:

*Nabitě těleso nelze udržet v elektrostatickém poli ve stabilní rovnováze jen elektrickými silami.*

Lze ukázat, že připojíme-li k soustavě nabitých vodičů další vodič, nelze jej umístit tak, aby jeho poloha a rozložení nábojů na vodičích odpovídala minimu energie soustavy (viz například [6]).

Podobně lze ukázat, že připojíme-li k soustavě nabitých vodičů nenabitý vodič, energie elektrostatického pole soustavy poklesne. Odpovídá to i známé skutečnosti, že na nenabitěm vodiči dojde ve vnějším elektrostatickém poli k polarizaci nábojů a tento vodič bude k soustavě vodičů přitahován. Při jeho přibližování k soustavě konají tedy vnější síly zápornou práci a zmenšuje se celková energie.

Uvedené chování má své vyjádření i ve vlastnostech kapacitních a influenčních koeficientů (viz 1.4.5). Souvislost mezi změnou energie a změnami

kapacitních a influenčních koeficientů budeme demonstrovat na příkladu dvou vodičů.

Máme-li nejdříve jeden izolovaný vodič nabitý nábojem  $Q$ , je jeho elektrostatická energie rovna

$$W^{(0)} = \frac{1}{2} \varphi_{01}^{(0)} Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (1.215)$$

Přiblížíme-li k němu další vodič, jenž je nenabitý, bude nová energie soustavy rovna

$$W = \frac{1}{2} \varphi_{01} Q. \quad (1.216)$$

Zde  $\varphi_{01}$  představuje potenciál prvního vodiče v přítomnosti druhého vodiče, a to nenabitého. Z rovnic (1.199) pro dva vodiče, kde  $Q_1 = Q$ ,  $Q_2 = 0$ , najdeme  $\varphi_{01}$  a dosadíme do (1.216). Máme

$$W = \frac{1}{2} \frac{C_{22}}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} Q^2. \quad (1.217)$$

Můžeme-li předpokládat  $W < W^{(0)}$ , dostaneme srovnáním vztahů (1.215) a (1.217) nerovnost

$$C \geq \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{C_{22}}. \quad (1.218)$$

V článku 1.3.2 jsme se zmiňovali o tom, že derivováním potenciální energie podle obecných souřadnic můžeme určit odpovídající složky působící síly. Podle toho, co bylo již uvedeno, má energie elektrostatického pole soustavy nabitých vodičů charakter potenciální energie, a umožňuje tedy vypočítat síly působící na vodiče v elektrickém poli.

Uvažme nejdříve situaci, kdy se na vodičích udržují konstantní náboje. Soustavu můžeme v tom případě považovat za energeticky izolovanou (práce se koná pouze na úkor energie pole). Je-li poloha vodiče udána šesti obecnými souřadnicemi  $\xi_i$ , pak složky sil odpovídajících těmto souřadnicím najdeme jako

$$G_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_{\xi_j}. \quad (1.219)$$

Index  $Q_i$  u parciální derivace označuje, že derivování se provádí při konstantních nábojích.

Jsou-li naopak na vodičích udržovány konstantní potenciály, je to možné pouze tak, že vodiče jsou připojeny k vnějším zdrojům elektromotorického napětí, které zajišťují potřebné změny náboje vodičů. Soustava není již energeticky izolovaná a není zcela zřejmé, jak energie elektrostatického pole takové soustavy může sloužit k výpočtu sil působících na vodiče. Označme změny nábojů na vodičích jako  $dQ_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Vnější zdroje přitom dodávají soustavě energii  $dW_{ex} = \sum_{i=1}^N \varphi_{0i} dQ_i$ . Změní-li se poloha vodiče, bude změna energie soustavy za předpokladu

konstantních potenciálů podle (1.209) rovna  $dW = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{0i} dQ_i$ . Energie vnějších zdrojů se tedy změní jednak na energii elektrostatického pole soustavy, jednak vykonává práci spojenou se změnou polohy vodiče

$$dW_{ex} = dW + G_i d\xi_i. \quad (1.220)$$

Protože však  $dW_{ex} = 2 dW$ , bude  $dW = G_i d\xi_i$  a pro složky obecných sil dostaneme

$$G_i = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right)_{\varphi_{0i}}. \quad (1.221)$$

Index  $\varphi_{0i}$  značí derivování při konstantních potenciálech. Všimněte si změny znaménka ve srovnání s výrazem (1.219) platným v izolované soustavě.

Chceme-li například určit sílu, která působí na elektrodu kondenzátoru, můžeme vyjít z výrazu pro jeho energii (1.213). Předpokládejme přitom, že poloha elektrody je popsána souřadnicí  $\xi$  (například vzdáleností mezi deskami v případě deskového kondenzátoru) a kapacita  $C$  je funkcí této souřadnice  $C(\xi)$ . Pak dostáváme při konstantních nábojích

$$G = - \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \xi} \quad (1.222a)$$

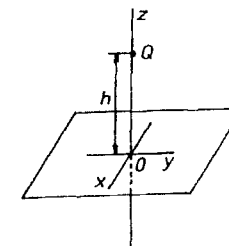
a při konstantním napětí

$$G = \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)_U = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial \xi}. \quad (1.222b)$$

Oba výrazy jsou samozřejmě stejné. Je z nich vidět, že síla  $G$  má totéž znaménko jako derivace kapacity a soustava má tedy tendenci svou kapacitu zvětšovat a energii zmenšovat. V případě deskového kondenzátoru přitahují se jeho desky silou o velikosti  $Q^2 / 2\epsilon_0 S$ .

## 1.4.7 Řešené příklady

### a) Bodový náboj a vodivá rovina

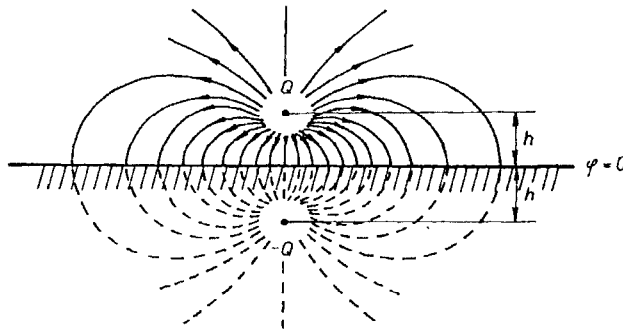


Obr. 1.56 Bodový náboj nad vodivou rovinou.

Všimněme si podrobněji vlastností jednoduché soustavy sestávající z nekonečné vodivé roviny a bodového elektrického náboje  $Q > 0$  ve vzdálenosti  $h$  od této roviny. Vodivá rovina necht' je uzemněna, a tedy na nulovém potenciálu.

Počátek kartézské soustavy souřadnic můžeme umístit do paty kolmice spuštěné z bodu  $Q$  na rovinu a osu  $z$  vést nábojem  $Q$  (viz obr. 1.56). Máme určit elektrostatické pole této soustavy v poloprostoru, kde leží náboj  $Q$ , rozložení indukovaného náboje na vodivé rovině, sílu, kterou je bodový náboj k rovině přitahován, a energii této soustavy.

Víme již, že jde o zvláštní případ základní úlohy elektrostatiky, která vyžaduje řešit Laplaceovu rovnici  $\Delta\varphi = 0$  s okrajovou podmínkou  $\varphi = 0$  ve všech bodech roviny. Pomocí metody elektrostatického zobrazení můžeme splnit okrajovou podmínku tak, že umístíme náboj  $-Q$  zrcadlově souměrně k rovině a budeme vyšetřovat pole této dvojice bodových nábojů. Víme, že jde o pole konečného elektrického dipólu. Průběh siločar v rovině vedené osou  $z$  je kvalitativně znázorněn na obr. 1.57.



Obr. 1.57 K metodě elektrostatického zobrazení.

Na vzdálenostech značně převyšujících výšku  $h$  lze pole přibližně popsat polem bodového dipólu umístěného v počátku (1.125), kde  $p = 2hQ$ . Dále můžeme snadno určit intenzitu elektrostatického pole na vodivé rovině (obr. 1.58). Vektor intenzity je k rovině kolmý a má velikost

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r^2+h^2} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Qh}{(r^2+h^2)^{3/2}}. \quad (1.223)$$

Pro  $r \gg h$  souhlasí tento výraz s (1.127). Plošnou hustotu náboje na vodivé rovině najdeme pomocí Coulombovy věty jako

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{Qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}. \quad (1.224)$$

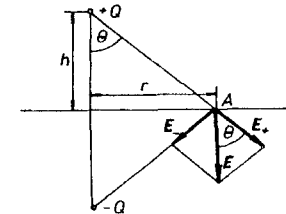
Integraci v polárních souřadnicích po celé rovině se snadno přesvědčíme, že celkový indukovaný náboj je roven právě  $-Q$ :

$$Q_{\text{ind}} = \int_0^\infty \sigma 2\pi r dr = -Q \int_0^\infty \frac{hr dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = -Q. \quad (1.225)$$

Konečně určíme složku síly, kterou je náboj  $Q$  k rovině přitahován a energii soustavy

$$F_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h^2}, \quad W = \int_{-\infty}^h \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2 dz}{4z^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4h}. \quad (1.226)$$

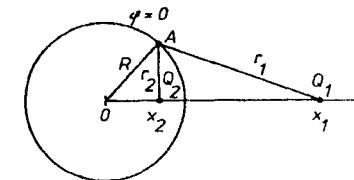
Znaménko minus u složky síly vyjadřuje, že jde o sílu přitažlivou. Všimněte si, že energie soustavy není totožná s interakční energií dvojice bodových nábojů  $Q$  a  $-Q$  ve vzdálenosti  $2h$ . Proč?



Obr. 1.58 K určení pole náboje indukovaného na vodivé rovině.

### b) Kulové elektrostatické zobrazení

Metodou elektrostatického zobrazení lze řešit například i úlohu s okrajovou podmínkou  $\varphi = 0$  na zadané uzemněné kulové ploše poloměru  $R$ . Střed této kulové plochy umístíme do počátku souřadnic. Dále mějme bodový náboj  $Q_1$  na ose  $x$  v bodě  $x_1 > R$  (obr. 1.59). Máme najít elektrostatické pole v celém prostoru vně kulové plochy.



Obr. 1.59 Kulové elektrostatické zobrazení.

Opět se pokusíme nahradit okrajovou podmínku umístěním fiktivního bodového náboje  $Q_2$  na ose  $x$  ve vzdálenosti  $x_2 < R$ , tj. uvnitř kulové plochy. V libovolném bodě na kulové ploše musí platit

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right) = 0,$$

odkud

$$Q_2 = -\frac{r_2}{r_1} Q_1.$$

Poměr  $r_2 / r_1$  musí být zachován konstantní pro všechny body na kulové ploše. Toho lze dosáhnout volbou vzdálenosti  $x_2$  tak, aby platilo

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{x_2}{R} = \frac{R}{x_1},$$

neboli aby vzdálenosti  $x_1, x_2$  splňovaly podmínku kulové inverze  $x_1 x_2 = R^2$ . Musíme tedy zvolit

$$x_2 = \frac{R^2}{x_1}, \quad Q_2 = -\frac{x_2}{R} Q_1 \quad (1.227)$$

a studovat pole této dvojice bodových nábojů.

Sílu, kterou bude náboj  $Q_1$  ke kouli přitahován, určíme jako

$$F_x = -\frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 R}{(x_1^2 - R^2)^2}. \quad (1.228)$$

Energie soustavy bude rovna záporné práci, kterou jsme vykonávali při přibližování náboje  $Q_1$  z nekonečna k uzemněné kouli:

$$W = -\int_{\infty}^x F_x dx = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^x \frac{R dx}{(x^2 - R^2)^2} = -\frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R}{x_1^2 - R^2}. \quad (1.229)$$

Pokud bude vodivá koule izolovaná a nikoli uzemněná, bude na jejím povrchu konstantní, obecně nenulový, potenciál a nulový celkový indukovaný náboj. Abychom tuto situaci vystihli, musíme do středu koule umístit další fiktivní náboj rovný právě  $-Q_2$ . Snadno ověříme, že náboj  $Q_1$  bude tentokrát ke kouli přitahován silou

$$F_x = -\frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^3}{x_1^3} \frac{2x_1^2 - R^2}{(x_1^2 - R^2)^2} \quad (1.230)$$

a soustava bude mít energii

$$W = -\frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R^3}{x_1^2 (x_1^2 - R^2)}. \quad (1.231)$$

### c) Vodivá koule v homogenním elektrostatickém poli

Metodu elektrostatického zobrazení použijeme ještě k určení elektrostatického pole v okolí vodivé koule o poloměru  $R$ , vložené do vnějšího homogenního pole  $E_0$  (o pole uvnitř koule se opět nemusíme zajímat, neboť víme, že je nulové).

Po vložení do vnějšího pole vzniknou na povrchu koule indukované náboje, jejichž pole se bude superponovat s polem  $E_0$ . Povrch koule přitom zůstane ekvipotenciální plochou a výsledné pole bude osově symetrické s osou symetrie procházející středem koule ve směru pole  $E_0$ .

Úloha jak nalézt výsledné pole bude zřejmě vyřešena, podaří-li se nám najít soustavu bodových nábojů, která po vložení do homogenního pole bude mít kulovou ekvipotenciální plochu o poloměru  $R$ . Ukážeme, že takovou soustavou je bodový elektrický dipól s dipólovým momentem  $p$  orientovaným ve směru  $E_0$ .

Umístíme-li dipól do počátku soustavy souřadnic, jejíž osa  $z$  má směr  $p$  i  $E_0$ , můžeme potenciál výsledného pole  $\varphi(r)$  vybrat ve tvaru

$$\varphi(\mathbf{r}) = -E_0 z + \frac{p z}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Zvolíme-li velikost indukovaného dipólového momentu

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0, \quad (1.232)$$

budeme mít

$$\varphi(\mathbf{r}) = E_0 \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) z, \quad \text{kde } z = r \cos \theta.$$

Odtud je zřejmé, že při  $r = R$  bude potenciál na kulové ploše konstantní, a to nulový. Vodivá koule se tedy v homogenním poli zpolarizuje a chová se jako dipól o momentu (1.232).

Na jejím povrchu musí platit hraniční podmínky pro normálové a tečné složky intenzity elektrického pole. Složky pole ve směru  $x$  a  $z$  tam jsou ve tvaru

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta \cos \theta}{R^3}, \quad E_z = E_0 + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{R^3}.$$

Normálové a tečné složky dostaneme jako  $E_n = E_x \sin \theta + E_z \cos \theta$ ,  $E_t = -E_x \cos \theta + E_z \sin \theta$  a hraniční podmínky nám dávají

$$\frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} + E_0 \cos \theta = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad -\frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} + E_0 \sin \theta = 0.$$

Druhá podmínka vyjadřuje opět vztah (1.232), z první podmínky můžeme určit rozložení hustoty indukovaného povrchového náboje:



$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (1.233)$$

Vidíme znovu, že kulová plocha s takto rozloženým povrchovým nábojem se chová navenek jako dipól (viz 1.3.5d). Celkový náboj indukovaný na každé z polokoulí je zřejmě  $Q = 3\pi\epsilon_0 E_0 R^2$  a jeho těžiště je ve vzdálenosti  $2R/3$  od středu koule.

#### d) Kapacita kulového kondenzátoru

Určeme kapacitu soustavy dvou koncentrických dutých vodivých koulí o poloměrech  $R_1 < R_2$ . Je-li vnitřní koule nabitá nábojem  $Q$ , bude pole mezi nimi dáno vztahem (1.104), jehož integrací dostáváme

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Kapacita takové soustavy vodičů je tedy

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.234)$$

Všimněme si, že při  $R_2 - R_1 \ll R_2$  můžeme považovat pole mezi oběma kulovými plochami za lokálně homogenní a výraz pro kapacitu (1.234) přechází ve výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru.

#### e) Kapacita válcového kondenzátoru

Určíme kapacitu soustavy dvou dlouhých koaxiálních vodivých válců délky  $l$  o poloměrech  $R_1 < R_2$ . Vnitřní válec je nabit nábojem  $Q$  a pro napětí mezi válci dostáváme podle (1.110)

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Tedy

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.235)$$

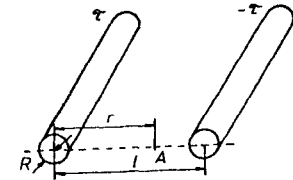
a kapacita připadající na jednotku délky koaxiálního vodiče je

$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.236)$$

#### f) Kapacita dvoulinky

Mějme dva přímé nabité rovnoběžné vodiče (dráty) konečného průřezu (poloměru  $R$ ) ve vzájemné vzdálenosti  $l \gg R$  s lineárními hustotami náboje  $\tau > 0, -\tau$ .

Díky této volbě náboje je vyšetřovaná soustava v jistém smyslu analogická s kondenzátorem a můžeme určit kapacitu délkové jednotky takového vedení (viz obr. 1.60).



Obr. 1.60 K určení kapacity dvoulinky.

Elektrické pole v bodě A mezi vodiči ve vzdálenosti  $r$  od osy prvního vodiče najdeme superpozicí polí dvou lineárních nábojů jako

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{l-r} \right).$$

Pro napětí pak obdržíme vztah

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_R^{l-R} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{l-r} \right) dr = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l-R}{R},$$

odkud dostaneme pro kapacitu na jednotku délky

$$C_l = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{l-R}{R}}. \quad (1.237)$$

Při integrování napětí v mezích od  $R$  do  $l-R$  bylo podstatné, že vodiče jsou konečného průřezu. Kdybychom chtěli počítat napětí pro idealizované, nekonečně tenké vodiče, dostali bychom divergující integrál.

#### g) Mechanické napětí nabitých vodičů

Elektrostatické pole působící na náboje rozložené na povrchu vodičů vyvolává v těchto vodičích silové účinky. Díky tomu, že intenzita elektrostatického pole je vždy kolmá k povrchu vodiče, mohou být tyto silové účinky popsány povrchovým napětím  $f_E$ , které vyjadřuje sílu působící na jednotku plochy vodiče ve směru normály.

Intenzita pole  $E$  při povrchu vodiče je s povrchovou hustotou náboje  $\sigma$  v daném místě vázána Coulombovou větou  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Pro výpočet síly  $\Delta F_E$

působící na malou část povrchu  $\Delta S$  však musíme z celkové intenzity  $E$  vyloučit vlastní příspěvek náboje  $\sigma\Delta S$  na uvažované plošce. Pomocí Gaussova zákona se snadno přesvědčíme, že tento příspěvek činí právě polovinu celkové intenzity  $E$ . Intenzita  $E'$  buzená ostatními povrchovými náboji má tedy hodnotu  $E' = \sigma/2\epsilon_0$  a pro sílu  $\Delta F_E$  dostáváme

$$\Delta F_E = E' \sigma \Delta S = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Delta S.$$

Povrchové napětí

$$f_E = \frac{\Delta F_E}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

můžeme užitím Coulombovy věty vyjádřit pomocí celkové intenzity pole  $E$  u povrchu vodiče

$$f_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.238)$$

Síla působící na povrch vodiče ze strany elektrostatického pole je vyrovnávána pružnými silami mechanického napětí v tělese.

Veličina  $f_E$  je podle (1.238) rovna objemové hustotě energie elektrostatického pole (1.91). Tuto souvislost si můžeme ozřejmit následujícím způsobem. Uvažme povrchově nabitou kouli poloměru  $R$ . Stlačíme-li tuto kouli na poloměr  $R - \Delta R$ , vykonáme práci proti silám povrchového napětí

$$\Delta A = 4\pi R^2 f_E \Delta R = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \Delta V = w \Delta V.$$

Po stlačení koule se objeví elektrostatické pole v objemu kulové slupky  $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ , kde byla dříve intenzita pole nulová. Vykonaná práce se pak rovná energii elektrostatického pole v tomto objemu.

#### h) Elektrostatické měřicí přístroje

Síly působící mezi nabitými vodiči mohou být využity k měření napětí. Přístroje založené na tomto principu se nazývají *elektrostatické měřicí přístroje* a jsou vždy uzpůsobeny tak, aby bylo možné srovnávat silové účinky elektrostatického pole se silami jiného druhu (gravitačními, elastickými či jinými). Podle způsobu konstrukce a použití rozeznáváme *elektroskopy*, určené především pro demonstrační účely, a dále *elektrometry* a *elektrostatické voltmetry*. První z nich jsou určeny pro měření malých napětí. Elektrostatické voltmetry mívají naopak robustnější konstrukci a jsou určeny pro měření napětí desítek až tisíců voltů. Historicky významné jsou tzv. *Thomsonovy váhy*, jejichž princip spočívá ve

srovnání elektrostatické síly mezi elektrodami deskového kondenzátoru pomocí závaží a které představují *absolutní měřidlo napětí*.

Konkrétním popisem konstrukce elektrostatických měřicích přístrojů se nebudeme zabývat; v této otázce odkazujeme na učebnici [5], v níž jsou rovněž uvedeny citace na další, speciálnější prameny. Všimneme si pouze obecných zákonitostí, určujících „průběh stupnice“ elektrostatických přístrojů, které jsou dány vlastnostmi sil působících na vodiče v elektrostatickém poli, a jsou tudíž pro všechny elektrostatické přístroje společné.

Měřicí systém elektrostatického přístroje je vždy tvořen soustavou několika elektrod, z nichž alespoň jedna je pohyblivá. Její uložení je takové, aby jí umožňovalo konat definovaný pohyb popsáný jedinou vhodnou souřadnicí  $g$ . Klidová poloha této elektrody  $g_0$  je dále jednoznačně vymezena jejím spojením s elasticky snadno deformovatelnými prvky (torzní vlákno, pružina apod.), které vytváří tzv. *direkční síly*. Přivedeme-li na elektrody přístroje napětí které chceme měřit, vychýlí se pohyblivé elektrody účinkem elektrostatické síly ze své klidové polohy. Tím se však deformují zmíněné elastické prvky a vzniklé direkční síly se snaží vrátit elektrody do výchozí polohy. Nový klidový stav je dán rovnováhou mezi elektrostatickými a direkčními silami a příslušná změna souřadnice  $g - g_0$  je mírou měřeného napětí.

Jednotlivé elektrody měřicího systému jsou ve většině případů propojeny tak, že tvoří kondenzátor ke kterému se připojuje měřené napětí, přičemž měrná pohyblivá elektroda je součástí jedné elektrody kondenzátoru. Jeho kapacita  $C$  je tedy funkcí souřadnice  $g$ ;  $C = C(g)$ . Je-li na svorky přístroje přivedeno konstantní napětí  $U$ , je zobecněná elektrostatická síla  $G_E$ , vychylující měrnou elektrodu, dána vztahem (1.222) a platí pro ni tedy

$$G_E = \left( \frac{\partial W_E}{\partial g} \right)_{U=\text{konst}} = \frac{1}{2} U^2 \frac{\partial C}{\partial g}.$$

O direkční síle, která je elastické povahy, můžeme předpokládat, že je úměrná výchylce s danou konstantou úměrnosti  $K_D$ :  $G_D = -K_D(g - g_0)$ . Podmínka rovnováhy bude mít tedy tvar

$$\frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial g} = K_D (g - g_0)$$

a pro výchylku přístroje  $(g - g_0)$  z ní dostaneme

$$g - g_0 = \frac{U^2}{2K_D} \frac{\partial C}{\partial g}. \quad (1.239)$$

Ze vztahu (1.239) vyplývá, že průběh stupnice přístroje je určen závislostí  $C(g)$ . Bude-li například kapacita  $C$  lineární funkcí souřadnice  $g$ , bude výchylka

úměrná čtverci napětí a průběh stupnice bude kvadratický. Vzhledem k tomu, že pro každý přístroj je žádoucí lineární průběh stupnice, pokusíme se najít odpovídající tvar funkce  $C(g)$ . Dosadíme-li požadovanou závislost  $g - g_0 = KU$  do (1.239), dostaneme podmínku

$$\frac{\partial C}{\partial g} = \frac{2K_D K^2}{g - g_0}$$

a z ní požadovaný tvar funkce

$$C = 2K_D K^2 \ln(g - g_0) + \text{konst.} \quad (1.240)$$

Přístroj bude mít tedy lineární stupnici, jestliže kapacita  $C$  bude logaritmickou funkcí souřadnice  $(g - g_0)$ . Je zřejmé, že v oboru malých výchylek nelze této podmínce z principiálních důvodů vyhovět žádnou realizovatelnou konstrukcí, neboť při  $g - g_0$  by kapacita musela vzrůstat do nekonečna jako funkce  $1/(g - g_0)$ . Stupnice každého elektrostatického přístroje je tedy v okolí počátku zhuštěna. To znamená, že citlivost přístroje s klesajícím napětím klesá, což přináší obtíže při měření malých napětí.

## 1.5 Elektrostatické pole v dielektrikách

### 1.5.1 Dielektrika v elektrostatickém poli

V úvodu oddílu 1.4 o elektrostatickém poli vodičů jsme rozřídili látky na vodiče, které mají schopnost převádět elektrický náboj, a nevodíče, dielektrika, která tuto schopnost nemají a mohou sloužit jako izolanty. To však neznamená, že by se dielektrikem a vnější elektrostatické pole vzájemně nijak neovlivňovaly.

O charakteru tohoto vlivu se můžeme přesvědčit jednoduchým experimentem. Vezměme například deskový kondenzátor, jehož vlastnosti jsme studovali v článku 1.4.5 a zaplníme prostor mezi jeho elektrodami homogenním izotropním dielektrikem. Experimentálně zjistíme, že při zachování náboje na elektrodách napětí mezi elektrodami po vložení dielektrika poklesne z původní hodnoty  $U_0$  na jistou hodnotu  $U$  a kapacita naopak vzroste z původní hodnoty  $C_0$  na hodnotu  $C$ . Označíme-li  $U_0/U = \epsilon_r$  bude podle (1.201) platit

$$\epsilon_r = \frac{U_0}{U} = \frac{C}{C_0}. \quad (1.241)$$

Bezrozměrná veličina  $\epsilon_r$  se nazývá *relativní permitivitou* daného dielektrika. Jak uvidíme v článku 1.5.4, je to parametr látky, který v určité aproximaci charakterizuje z makroskopického hlediska chování dielektrika v elektrostatickém poli. V kapitole 7 budou podrobněji studovány jeho vlastnosti, a to i z hlediska mik-

roskopické struktury látek. Uvidíme, že pro různá dielektrika může být značně rozdílný: od hodnot jen nepatrně větších než jedna až po hodnoty řádu  $10^4$  v případě tzv. *feroelektrik*.

Nabitý deskový kondenzátor, jehož prostor mezi elektrodami je zcela vyplněn dielektrikem, přináší novou, fyzikálně velmi závažnou otázku o charakteru elektrického pole v prostoru mezi elektrodami. Speciálně vzniká otázka, má-li fyzikální smysl hovořit o elektrostatickém poli v látkovém prostředí.

Již v článku 1.2.1 bylo zdůrazněno, že elektrostatické pole vůbec (tj. i elektrostatické pole ve vakuu) má přesně vzato smysl jen jako pole makroskopické, přičemž intenzitu pole  $E$  je nutné chápat jako výslednou střední hodnotu polí vytvořených jednotlivými nositeli náboje. V případě pole v dielektriku se navíc superponuje střední hodnota polí vytvořených náboji dielektrika v bezprostřední blízkosti vyšetřovaného bodu. Vlastností tohoto výsledného pole budou zkoumány v následujících článcích tohoto oddílu.

I když je v této kapitole naším úkolem budovat fenomenologický popis založený na experimentálních poznatcích makroskopického charakteru, je užitečné podat stručnou, alespoň kvalitativní charakteristiku situace z mikroskopického hlediska. Víme, že látka má atomární, přetržitou strukturu a že součástí atomů a molekul jsou elektricky nabitě částice – protony a elektrony. Z mikroskopického hlediska představuje tedy dielektrikum velmi složitou soustavu elektrických nábojů, které jsou navíc v neustálém pohybu. V jednom krychlovém centimetru pevné či kapalné látky se nachází  $10^{20}$ – $10^{22}$  molekul, popř. atomů, vzájemně vzdálených  $10^{-7}$ – $10^{-8}$  cm. Fyzikální studium vlastností atomů a molekul vychází přitom za rámec klasické fyziky, neboť pohyby a vlastnosti těchto částic se řídí zákony fyziky kvantové. Zákony kvantové fyziky je nutné respektovat především v případě velké koncentrace částic, jakou nacházíme u pevných a kapalných látek a v případě teplot blízkých absolutní nule.

Při makroskopickém popisu můžeme využít skutečnost, že atomy či molekuly jsou elektricky neutrální soustavy mikroskopických nábojů. Víme, že elektrostatické pole takové soustavy můžeme na vzdálenostech značně převyšujících její rozměry vyjádřit jako pole multipólových momentů různých řádů (článek 1.3.2). V prvním nenulovém přiblížení se tedy uplatní elektrický dipólový moment atomu či molekuly a jejich pole se bude jevit v dostatečné vzdálenosti jako pole *bodového elektrického dipólu*.

Vzniká samozřejmě otázka, zda atomy a molekuly mají vždy vlastní nenulový elektrický dipólový moment. Zde záleží na vlastnostech konkrétního látkového prostředí, daného atomu či molekuly. Dielektrika, jejichž molekuly mají náboje rozloženy takovým způsobem, že jako celek vykazují *vlastní* elektrický dipólový moment, patří ke skupině látek, které nazýváme *polárními dielektriky*. (Typickým příkladem polární molekuly je molekula vody, jejíž vlastní elektrický dipólový moment má velikost  $6,1 \cdot 10^{-30}$  coulomb metr, k dalším náleží kyselina chlorovodíková, amoniak, některé organické molekuly a jiné.)

Při vložení polárního dielektrika do vnějšího elektrostatického pole se elektrické dipólové momenty budou natáčet vlivem silového momentu pole do směru siločar a makroskopický, jednotkový objem látky můžeme pak charakterizovat celkovým dipólovým momentem. Protože tato polarizace vzniká v důsledku orientace pevných dipólových momentů, nazýváme ji *polarizací orientační*. Je zřejmé, že tato polarizace nebude nikdy úplná; chaotický tepelný pohyb molekul působí, že dipólové momenty se budou více nebo méně odchylovat od směru vnějšího elektrického pole.

Další důležitou okolností je to, že se atomy a molekuly nechovají jako tuhá tělesa, nýbrž podléhají deformaci. Ve vnějším elektrickém poli budou na náboje tvořící atomy a molekuly působit síly, které způsobují prostorové rozdělení těchto nábojů, a tedy vznik *indukovaných* elektrických dipólových momentů. Tyto indukované momenty jsou však ve srovnání s vlastními dipólovými momenty o několik řádů slabší ( $\sim 10^{-35}$  coulomb metr); atomy a molekuly se významně deformují až ve velmi silných elektrických polích. Dielektrika, jejichž atomy (molekuly) nemají vlastní elektrické dipólové momenty, získávají ve vnějším poli tedy jen momenty indukované, orientované rovněž ve směru siločar pole. Jde o látky, které nazýváme *nepolárními dielektriky*.

Uvedené představy, které budeme v kapitole 7 dále konkretizovat, platí ovšem pouze přibližně. Polarizace polárního dielektrika nebývá například nikdy pouze orientační, i zde se může uplatnit vliv indukovaných momentů. V ojedinělých případech dochází v dielektriku k ionizaci, kdy molekula či atom získává nenulový elektrický náboj, a jeho pole je pak významnější než pole elektrického dipólu. Kromě toho víme, že dipólové přiblížení popisuje elektrické chování atomů a molekul pouze s přesností na opravu vyvolanou polem vyšších multipólových momentů. Přesto však můžeme makroskopické chování dielektrika v elektrickém poli s dobrou přesností popsat na základě jednoduchého modelu spojitěho, bezstrukturního, rozložení elektrických dipólů.

### 1.5.2 Polarizace dielektrika

Na základě výsledků předchozího článku, které jsou v plném souhlasu s experimentální zkušeností, je možné stav daného objemu dielektrické látky charakterizovat výsledným elektrickým dipólovým momentem, který může být chápán jako střední hodnota vektorové sumy dipólových momentů jednotlivých atomů či molekul. Aplikujeme-li uvedený model spojitěho objemového rozložení elektrických dipólů, můžeme stav dielektrika popsat pomocí výsledků uvedených v článku 1.3.4, ve kterém byly studovány vlastnosti abstraktního objemového rozložení dipólových momentů.

Jak jsme viděli, jedinou charakteristikou uvedeného modelu je *vektor elektrické polarizace  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$* , který má význam *objemové hustoty dipólového momentu v daném bodě  $\mathbf{r}$* . Experimentálně pozorovaný výsledný dipólový moment  $\mathbf{p}_V$  libovolného objemu  $V$  studovaného dielektrika pak lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{p}_V = \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}) dV, \quad (1.242)$$

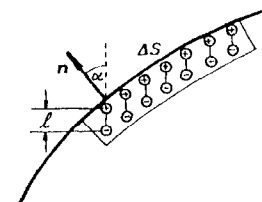
kteří může být považován za (implicitní) definici vektoru polarizace.

Elektrostatické pole vytvořené konečným objemem  $V$  spojitě rozložených elektrických dipólů je ekvivalentní elektrostatickému poli makroskopických nábojů rozložených na povrchu tohoto objemu s plošnou hustotou  $\sigma_p(\mathbf{r})$  a uvnitř tohoto objemu s objemovou hustotou  $\rho_p(\mathbf{r})$ . Plošná hustota  $\sigma_p$  závisí přitom pouze na průběhu vektoru elektrické polarizace  $\mathbf{P}$  a směru jednotkového vektoru normály  $\mathbf{n}$  na povrchu objemu, objemová hustota  $\rho_p$  je různá od nulové pouze v případě nehomogenní polarizace. Platí obdoba rovnic (1.168)

$$\sigma_p(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}).$$

Vztahy (1.168) byly odvozeny v článku 1.3.4. Lze je však získat i elementárním (i když méně rigorózním) postupem. Mysleme si malý objem  $\Delta V$  těsně přimykající k danému místu povrchu, a to tak, že na povrchu vyčleňuje plošku  $\Delta S$ . Výšku objemu  $\Delta V$  volíme tak, aby v něm ležela jen jedna vrstva elementárních dipólů. Předpokládáme, že tyto dipóly jsou orientovány vzájemně souhlasně, rovnoběžně a obecně pod úhlem  $\alpha$  k vektoru normály (obr. 1.61). Jsou-li  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  elementární dipólové momenty, dostaneme pro výsledný dipólový moment objemu  $\Delta V$  výraz  $\mathbf{p}_{\Delta V} = \mathbf{P}\Delta V = \mathbf{P}\Delta S l \cos\alpha = \mathbf{P}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})\Delta S = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n})\Delta S l$ . Zároveň platí  $\mathbf{p}_{\Delta V} = \sigma_p \Delta S l$ , odkud plyne, že

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}.$$



Obr. 1.61 K určení hustoty vázaných nábojů na povrchu zpolarizovaného tělesa.

Uvažme nyní uzavřenou plochu  $S$  ležící uvnitř objemu  $V$ . Potom tok vektoru  $\mathbf{P}$  touto plochou  $\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$  představuje celkový náboj, který při zpolarizování dielektrika plochou  $S$  vytekl. (Pro spojitě homogenní rozložení dipólů bude tento náboj jistě nulový.) Musí se tedy rovnat úbytku vázaného objemového náboje  $Q_p = \int_V \rho_p dV$  v objemu  $V$  a použitím Gaussovy věty snadno nahlédneme, že

$$\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Velmi důležitou je otázka, zda se polarizační náboje v dielektriku popsané hustotami  $\rho_p$  a  $\sigma_p$  nějak liší od dosud zkoumaných nábojů, například na povrchu

vodičů. Polarizační náboje se na rozdíl od nábojů ve vodičích nemohou v dielektriku přemísťovat na makroskopické vzdálenosti a nazýváme je proto *vázanými náboji*. Existence makroskopických vázaných nábojů ve zpolari-zovaném dielektriku je však fyzikálně reálná a může být experimentálně pro-kázána. Mechanismus jejich vzniku byl demonstrován názorně v příkladu 1.3.5c (viz obrázky 1.39 a 1.40).

Obecně vzato mohou v dielektriku existovat i *náboje volné* vznikající při zelektrizování dielektrika různým způsobem. Potom budeme rozlišovat celkovou objemovou hustotu makroskopických nábojů  $\rho_c$ , objemovou hustotu nábojů volných  $\rho$  a objemovou hustotu nábojů vázaných  $\rho_p$ :

$$\rho_c = \rho + \rho_p. \quad (1.243)$$

Pokud jde o náboje vázané, vzniklé zpolarizováním dielektrika, je zřejmé, že jejich úhrnný náboj je vždy roven nule a jejich rozložení v tělese je určeno přítomností vnějšího elektrostatického pole nebo sil jiné fyzikální povahy.

Elektrostatické pole v přítomnosti dielektrik můžeme tedy určit jako pole makroskopických elektrických nábojů, a to jednak volných, jednak vázaných. Je ovšem možné se ptát, zda intenzita elektrostatického pole vytvářená těmito dvěma druhy elektrických nábojů je téže fyzikální povahy a zda je možné tato dvě pole superponovat, abychom dostali výslednou sílu působící na bodový elektrický náboj v daném bodě prostoru. Již v oddílu 1.4, když jsme vyšetřovali chování vodičů v elektrostatickém poli, jsme zdůrazňovali, že v objemu vodiče se ustaví nulová hodnota intenzity elektrostatického pole působícího na makro-skopické náboje, tedy pole určitým způsobem vystředovaného. Neznamená to samozřejmě, že by v objemu vodiče přestaly existovat mikroskopické náboje, například uvnitř atomů a molekul, že by neexistovala prostorově i časově proměnná lokální, mikroskopická pole, dokonce značných intenzit.

Při makroskopickém popisu, který máme na mysli v této kapitole, se však zajímáme pouze o střední hodnoty intenzity elektrostatického pole v látkovém prostředí, které také můžeme experimentálně přímo pozorovat a měřit. To se vztahuje i na elektrostatické pole vázaných nábojů v dielektriku. Jakožto střední, makroskopická pole můžeme pak pole volných i vázaných nábojů superponovat a zavést výslednou intenzitu elektrostatického pole

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p. \quad (1.244)$$

Vektor  $\mathbf{E}_0$  značí intenzitu pole volných nábojů,  $\mathbf{E}_p$  vázaných.

### 1.5.3 Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku

Nyní budeme studovat obecné vlastnosti elektrostatického pole v přítomnosti dielektrika. Pro dielektrikum zvolíme přítom idealizovaný model spojitého prostředí, jehož elektrické vlastnosti jsou plně popsány zadáním vektoru polarizace

$\mathbf{P}(\mathbf{r})$ . Tento vektor souvisí s koncentrací objemových a plošných vázaných nábojů vztahy (1.168). Makroskopické hodnoty intenzity elektrostatického pole volných a vázaných nábojů budeme přitom superponovat (srov. (1.244)).

Především je zřejmé, že i v přítomnosti vázaných statických nábojů musí zůstat elektrostatické pole potenciálním, a bude tedy platit (1.62), respektive (1.63)

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Dále zůstane v platnosti Gaussův zákon pro libovolnou uzavřenou plochu  $S$ . Přitom musíme vzít v úvahu celkový elektrický náboj, volný i vázaný, uvnitř Gaussovy plochy. Máme tedy

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0} = \frac{Q_c}{\epsilon_0}. \quad (1.245)$$

Předpokládáme-li že uvnitř plochy  $S$  jsou pouze objemově rozložené vázané náboje, dostaneme s ohledem na (1.168)

$$Q_p = \int_V \rho_p dV = - \int_V \text{div } \mathbf{P} dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

a tedy

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

Poslední vztah se zjednoduší, zavedeme-li nový vektor

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (1.246)$$

nazývaný *vektorem elektrické indukce*. S jeho pomocí můžeme zapsat Gaussův zákon ve tvaru, v němž explicitně vystupují pouze volné náboje

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q. \quad (1.247)$$

Předpokládáme-li, že uvnitř plochy  $S$  nejsou ani volné plošné náboje, můžeme známým způsobem používajícím Gaussovy věty vektorové analýzy přejít k diferenciálnímu tvaru rovnice (1.247)

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,} \quad (1.248)$$

kde veličina  $\rho$  představuje objemovou hustotu volných nábojů

Vyšetříme nyní vlastnosti vektoru elektrické indukce v okolí plošných nábojů. Necht' jsou na ploše  $S$  rozloženy volné i vázané náboje s hustotami  $\sigma$  a  $\sigma_p$ . Necht' je prostor na jedné straně plochy vyplněn dielektrikem 1 o polarizaci  $\mathbf{P}_1$ , prostor na druhé straně plochy dielektrikem 2 o polarizaci  $\mathbf{P}_2$ .

Zapíšeme-li vztah (1.80) ve vektorovém tvaru, dostaneme pro sumární plošnou hustotu náboje

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{\sigma + \sigma_p}{\epsilon_0}, \quad (1.249)$$

kde  $\mathbf{n}_1$  je jednotkový vektor normály směřující do oblasti 1.

Můžeme předpokládat, že celková hustota vázaných nábojů je rovna součtu hustot  $\sigma_p^1$  a  $\sigma_p^2$ , z nichž první je dána polarizací samotného dielektrika 1 a druhá polarizací samotného dielektrika 2 podle vztahu (1.168). Potom platí

$$\sigma_p^1 = -\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_1, \quad \sigma_p^2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad (1.250)$$

a po dosazení do (1.249) dostaneme

$$(\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n}_1 - (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma, \quad (1.251)$$

neboli podle (1.246)

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = \sigma. \quad (1.252)$$

Nespojitost normálových složek vektoru elektrické indukce je dána pouze plošnou hustotou volných nábojů. Při průchodu plochou, na níž jsou pouze vázané náboje, zůstávají normálové složky vektoru elektrické indukce spojitě.

Pro elektrostatické pole v dielektriku můžeme tedy zapsat obecné rovnice, v nichž vystupují pouze objemové, resp. plošné hustoty volných nábojů. Pro objemové volné náboje<sup>9</sup> máme tedy

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0},} \quad (1.253)$$

pro plošné volné náboje

$$\boxed{\operatorname{Div} \mathbf{D} = \sigma, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (1.254)$$

Vektor elektrické indukce byl zaveden formálně vztahem (1.246) jako vektorový součet vektoru polarizace a veličiny  $\epsilon_0 \mathbf{E}$ . Jeho význam spočívá v tom, že

<sup>9</sup> Všimněme si, že zatímco rovnice  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , resp.  $\operatorname{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  mají obecnou platnost, nemůžeme udát obecně platné vztahy pro  $\operatorname{rot} \mathbf{D}$ , resp.  $\operatorname{Rot} \mathbf{D}$ .

zavedením vektoru elektrické indukce k popisu elektrického pole v dielektriku můžeme vyloučit z explicitních úvah vázané náboje. Pro bezprostřední vyjádření fyzikálních účinků elektrostatického pole zůstává ovšem i v dielektrickém prostředí rozhodující veličinou intenzita pole. Principiálně by bylo možné budovat teorii elektrostatického pole bez zavedení vektoru elektrické indukce. Při řešení úloh se zadaným rozložením volných nábojů v dielektriku je však tato veličina užitečná.

#### 1.5.4 Materiálové vztahy, elektrická susceptibilita a permitivita

Jak bylo ukázáno v předchozím článku, je elektrostatické pole za přítomnosti dielektrik úplně popsáno dvěma vektorovými funkcemi  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  a  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ . Tyto veličiny vyhovují integrálním podmínkám (1.62) a (1.247), které mohou být nahrazeny diferenciálními rovnicemi (1.253), doplněnými podmínkami (1.254) pro plochy nesoucí plošné náboje. Za zdroj elektrostatického pole můžeme obvykle považovat volné náboje, jejichž rozložení v prostoru známe. Uvedený popis, například rovnice (1.253), by měl pak umožňovat nalézt oba vektory  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{D}$ , je však nedostatečný pro určení šesti neznámých funkcí  $E_x, E_y, E_z, D_x, D_y, D_z$ . Uvedená soustava rovnic, která platí zcela obecně a přesně popisuje vlastnosti elektrostatického pole, musí být proto doplněna dalším vztahem mezi vektorem elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a intenzitou pole  $\mathbf{E}$ . Takový vztah je již závislý na konkrétních vlastnostech daného dielektrika a vyplývá z definice vektoru elektrické indukce (1.246), je-li udána souvislost vektorového pole  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  s intenzitou  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  v dielektriku. Nazývá se proto *materiálovým vztahem*.

Problematika materiálových vztahů může být značně komplikovaná a nemůže být v podstatě řešena zcela obecně. V kapitole 7 podrobněji uvidíme, že vztah mezi polarizací a intenzitou pole může záviset na značném počtu faktorů a nemusí být ani dán jednoznačnou funkcí. Je proto vždy zapotřebí vytvořit vhodný model daného dielektrika a materiálový vztah odpovídajícím způsobem aproximovat.

Pro obecné úvahy se často vystačí s velmi hrubou aproximací materiálových vztahů. V prvním přiblížení je možné vlastnosti reálných dielektrik aproximovat dvěma abstraktními typy dielektrických látek, vystihujícími extrémní situace. Jsou to pojmy ideálně tvrdého a ideálně měkkého dielektrika.

V případě *ideálně tvrdého dielektrika* předpokládáme určitou permanentní polarizaci  $\mathbf{P}_0(\mathbf{r})$  v daném bodě, která již na hodnotě intenzity pole nezávisí.

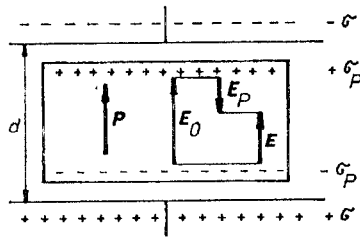
V případě *ideálně měkkého dielektrika* předpokládáme lineární závislost vektoru polarizace  $\mathbf{P}$  v daném bodě na výsledné intenzitě pole  $\mathbf{E}$  v tomto bodě. Pro izotropní a homogenní prostředí je možné tuto závislost zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.255)$$

Bezrozměrná veličina  $\chi_c$  charakterizuje vlastnosti dielektrika a nazývá se jeho *elektrickou susceptibilitou* (něco jako „vnímavost“). Je to vždy kladná veličina, která však pro různé materiály může nabývat značně rozmanitých hodnot. V kapitole 7 poznáme některé její konkrétní vlastnosti pro důležité typy dielektrik. Použitím definičního vztahu (1.246) snadno nalezneme vztah mezi elektrickou indukcí a intenzitou pole v měkkém dielektriku. Platí

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1 + \chi_c) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.256)$$

Vraťme se nyní k úloze diskutované v úvodu článku 1.5.1 a vypočítejme, jak se změní napětí na elektrodách deskového kondenzátoru, zaplníme-li prostor mezi nimi ideálně měkkým izotropním dielektrikem o susceptibilitě  $\chi_c$ . Aplikací Gaussova zákona pro elektrickou indukci (1.247) snadno zjistíme, že mezi elektrodami je homogenní pole, jehož elektrická indukce je dána plošnou hustotou volného náboje na elektrodách  $\sigma$ ,  $D = \sigma$ . V případě prázdného kondenzátoru platí pro intenzitu pole mezi elektrodami vztah (1.99),  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$ . Odtud pro napětí na elektrodách prázdného kondenzátoru dostáváme  $U_0 = E_0 d = \sigma d/\varepsilon_0$  (viz obr. 1.62). Pro napětí kondenzátoru s dielektrikem pak podle (1.256) dostáváme



Obr. 1.62 Vliv dielektrika na elektrostatické pole mezi deskami kondenzátoru.

$$U = E d = \frac{D d}{\varepsilon_0 (1 + \chi_c)} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 (1 + \chi_c)},$$

odkud plyne

$$\frac{U_0}{U} = 1 + \chi_c. \quad (1.257)$$

Podle (1.241) tedy máme vztah mezi dříve zavedenou relativní permitivitou  $\varepsilon_r$  a susceptibilitou  $\chi_c$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_c. \quad (1.258)$$

Z provedených úvah současně vidíme, že výsledek zmíněného experimentu (1.241) bude nezávislý na velikosti náboje na kondenzátoru jedině tehdy, bude-li mít použitý materiál vlastnosti ideálně měkkého lineárního dielektrika.

Použitím (1.258) můžeme vztah (1.256) přepsat na tvar

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (1.259)$$

Veličina

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad (1.260)$$

kteřá má rozměr permitivity vakua (tj. farad na metr), se nazývá *permitivitou* daného dielektrika.

Je-li dielektrikum nehomogenní, je permitivita funkcí souřadnic. V případě neizotropního dielektrika bude mít vztah mezi vektory  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$  tvar

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z, \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z, \end{aligned} \quad (1.261)$$

kde veličiny  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = x, y, z$ ) představují složky tenzoru permitivity. Vlastnosti složek tohoto tenzoru těsně souvisejí s charakterem symetrie krystalu či jiného anizotropního dielektrika. Tato symetrie vede k tomu, že pouze některé ze složek tenzoru jsou nezávislé. Na základě termodynamických úvah (viz např. [7]) lze ukázat, že tenzor (1.261) je obecně symetrický.

### 1.5.5 Energie elektrostatického pole v dielektriku

Zabývejme se nyní otázkou energie elektrostatického pole v dielektriku, která je analogická problematice energie soustavy nábojů rozložených ve vakuu (viz článek 1.2.8), respektive soustavy nabitých vodičů (viz článek 1.4.6). Připomeňme, že energii dané soustavy jsme definovali pomocí práce, kterou musely vykonat vnější síly při vytváření konečné konfigurace nábojů. Kromě toho bylo vždy možné vyjádřit tuto energii dvěma způsoby: jednak pomocí konečných hodnot nábojů a potenciálů, jednak ve tvaru integrálu typu (1.90) z veličiny  $w_e$ , kterou jsme interpretovali jako objemovou hustotu energie.

V dalších úvahách budeme opět používat oba způsoby, které jsou fyzikálně zcela ekvivalentní, neboť v elektrostatice má fyzikální význam jen celková energie soustavy. Opakujeme znovu, že v rámci elektrostatiky nelze představu o prostorovém rozložení energie ani dokázat, ani vyvrátit.<sup>10</sup>

Uvažujme dielektrické prostředí v elektrostatickém poli; dielektrikum může přitom zaujímat celý prostor nebo jen jeho část. Elektrostatické pole můžeme vyvolat pouze tak, že budeme přivádět do dielektrika volné náboje nebo nabíjet

<sup>10</sup> Vtipnou analogii autorů Masona a Weaverova uvádí Stratton v [6]. Kládou otázku, zda je možné tvrdit, že krása obrazu je rozprostřena po celé jeho ploše s danou plošnou hustotou. Odpověď není přitom zdaleka jednoduchá; půjde-li například o holografický záznam obrazu, víme, že každá jeho část obsahuje informaci o celém obrazu.

nějaký vodič. Zvětšíme-li náboj takového vodiče o  $\delta Q$  při potenciálu povrchu vodiče  $\varphi = \text{konst}$ , vykonáme práci  $\delta W = \varphi \delta Q$ . Podle (1.252) bude v dielektriku u povrchu vodiče platit  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \sigma$ , kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor normály k povrchu vodiče směřující ven do dielektrika. Potom volný náboj na povrchu vodiče bude

$$Q = \oint_S \sigma dS = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.262)$$

a práci  $\delta W$  můžeme vyjádřit jako

$$\delta W = \varphi \delta Q = \oint_S \varphi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.263)$$

Uvažujme nyní konečný objem  $V'$  ohraničený plochou  $\Sigma$  obklopující daný vodič a obsahující část okolního dielektrika (popř. vakua). V tomto objemu můžeme zavést vektorové pole  $\varphi \delta \mathbf{D}$  a aplikovat na něj Gaussovu větu vektorové analýzy. Na povrchu vodiče  $S$  je přitom potenciál  $\varphi$  konstantní a vektor  $\delta \mathbf{D}$  nespojitý. Při aplikaci Gaussovy věty na uzavřený objem musíme proto vyčlenit z objemu  $V'$  objem vodiče, integrovat přes takto vzniklý objem  $V$  a uvažovat celkový tok vektoru  $\varphi \delta \mathbf{D}$  povrchy  $\Sigma$  i  $S$ :

$$\int_{\Sigma} \varphi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{\Sigma} - \int_S \varphi \delta \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div}(\varphi \delta \mathbf{D}) dV. \quad (1.264)$$

Znaménko minus u druhého z integrálů na levé straně souvisí s tím, že normála  $d\mathbf{S}$  je orientována dovnitř objemu  $V$ .

V objemu  $V$  neexistují volné náboje a proto zde  $\text{div}(\delta \mathbf{D}) = 0$ . Můžeme proto upravit integrovanou funkci  $\text{div}(\varphi \delta \mathbf{D})$  na

$$\text{div}(\varphi \delta \mathbf{D}) = \varphi \text{div}(\delta \mathbf{D}) + \delta \mathbf{D} \cdot \text{grad} \varphi = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}.$$

Budeme-li nyní rozpínat plochu  $\Sigma$  do nekonečna, zaujme objem  $V$  celý prostor (s výjimkou objemu vodiče, kde je ovšem pole  $\delta \mathbf{D}$  nulové) a první z integrálů na levé straně (1.264) vymizí z obdobných důvodů, jaké byly uvedeny v článku 1.2.8. Použijeme-li vztah (1.263), dostaneme pro práci z rov. (1.264)

$$\delta W = \int_V \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} dV. \quad (1.265)$$

Abychom zjistili celkovou energii nahromaděnou v poli, je třeba integrovat přírůstek  $\delta W$  od počátečního stavu  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  do konečné hodnoty  $\mathbf{D}$ . Pro ideálně měkké, izotropní dielektrikum

$$\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{2} \delta |\mathbf{E}|^2,$$

takže celková energie

$$W = \frac{\varepsilon}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV. \quad (1.266)$$

Objemovou hustotu energie elektrostatického pole v takovém dielektriku můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$w_e = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2}{2} = \frac{|\mathbf{D}|^2}{2\varepsilon} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2}. \quad (1.267)$$

Pro pole ve vakuu se výraz pro hustotu energie redukuje na vztah (1.91).

Ještě vyšetříme otázku potenciální energie dielektrického tělesa vloženého do vnějšího elektrostatického pole. Tato energie je zřejmě rovna rozdílu energie celé vyšetřované soustavy (s dielektrickým tělesem) a energie této soustavy bez dielektrického tělesa. Označíme-li intenzitu pole bez přítomnosti tělesa symbolem  $\mathbf{E}_0$ , dostaneme podle (1.265) pro přírůstek hledané potenciální energie ve tvaru

$$\delta W = \int_V (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_0) dV, \quad (1.268)$$

přičemž integrujeme opět přes celý objem  $V$ , v němž je pole nenulové. Jak je ukázáno například v [6, 7], dá se výraz (1.268) zjednodušit. Provedeme-li totiž formální úpravu integrované funkce

$$\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_0 = (\varepsilon_0 \mathbf{E} - \mathbf{D}) \cdot \delta \mathbf{E}_0 + (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}_0) \cdot \delta \mathbf{E}_0 + (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}_0)$$

a integrujeme přes objem  $V$ , zjistíme, že poslední dva členy po integraci vymizí.<sup>11</sup>

Zbude tedy jen integrál členu prvního, který má ovšem nenulový příspěvek jen v objemu dielektrického tělesa  $V_d$ . Tedy

$$\delta W = - \int_{V_d} (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}_0) dV. \quad (1.269)$$

<sup>11</sup> Při integrování druhého členu vyjádříme  $\delta \mathbf{E}_0$  jako gradient potenciálu a integrujeme per partes, takže dostaneme součet plošného a objemového integrálu. Objemový integrál vymizí vzhledem k tomu, že v integrovaném objemu nejsou náboje a divergence  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{E}_0$  jsou tam nulové, plošný integrál se počítá jednak po nekonečně vzdálené ploše, jednak po povrchu vodičů vytvářejících pole  $\mathbf{E}_0$ , kde jsou konstantní potenciály. V obou případech dá výsledek integrování nulu. Podobně se lze vyrovnat i s integrálem třetího členu.



Hustota přírůstku potenciální energie pak bude

$$\delta w = - \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}_0. \quad (1.270)$$

Celkovou potenciální energii, respektive její hustotu můžeme spočítat jen v případě, známe-li závislost  $\mathbf{P}$  na  $\mathbf{E}_0$  pro dané konkrétní těleso. Situace bude jednoduchá v případě ideálně tvrdého a ideálně měkkého tělesa.

V případě ideálně tvrdého dielektrika vektor polarizace  $\mathbf{P}_0$  nezávisí na vnějším poli. Pro potenciální energii pak z výrazu (1.269) dostáváme

$$W = - \int_{V_0} (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{E}_0) dV. \quad (1.271)$$

Pro ideálně měkké dielektrikum je polarizace úměrná intenzitě pole v dielektriku podle (1.255). Lze snadno usoudit, že polarizace bude úměrná i vnějšímu poli  $\mathbf{E}_0$ , konstanta úměrnosti  $k$  však bude obecně záviset na tvaru tělesa. Předpokládáme-li tedy  $\mathbf{P} = k \mathbf{E}_0$ , můžeme provést integraci

$$w = - \int_0^{E_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E}_0 = -k \int_0^{E_0} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 \quad (1.272)$$

a pro potenciální energii vyjde výsledek

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_0} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0) dV. \quad (1.273)$$

V měkkém dielektriku je veličina  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0$  vždy kladná (indukované elektrické dipóly se orientují ve směru vnějšího elektrostatického pole). Ze vztahu (1.273) proto vyplývá, že potenciální energie tělesa z měkkého dielektrika vloženého do vnějšího pole je vždy záporná a klesá s růstem intenzity pole. Takové dielektrické těleso bude proto vtahováno do oblasti o větší intenzitě pole. Rozdíl v energii tělesa z ideálně tvrdého a ideálně měkkého dielektrika je zřejmě dán tím, že zatímco v tvrdém dielektriku je polarizace tělesa předem dána a nemění se, v měkkém dielektriku se teprve v poli utváří.

Můžeme též řešit úlohu o chování dielektrického tělesa charakterizovaného permitivitou  $\epsilon_1$  v jiném dielektrickém prostředí, například kapalném, o permitivitě  $\epsilon_2$ . Energie takového tělesa bude pak záviset na vzájemné relaci  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$ ; bude záporná pro  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . Naopak tato energie bude kladná při  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ , a v takovém případě bude těleso z pole vypuzováno.

## 1.5.6 Řešené příklady

### a) Volné náboje a nabitě vodiče v dielektriku

Uvažujme bodový náboj  $Q$  umístěný v nekonečném prostoru vyplněném homogenním izotropním dielektrikem. Průběh jím vytvořeného elektrostatického pole určíme snadno pomocí Gaussova zákona (1.247). Zvolíme-li jako Gaussovou plochu kulovou plochu o poloměru  $r$  se středem v místě bodového náboje, snadno usoudíme, že z důvodu symetrie musí mít vektor elektrické indukce  $\mathbf{D}$  ve všech bodech této plochy konstantní hodnotu a směr normály. Musí platit  $4\pi r^2 D = Q$ , takže

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.274)$$

Jde-li o ideálně měkké dielektrikum, platí (1.259) a pro intenzitu pole  $\mathbf{E}$  dostáváme  $\mathbf{E} = (1/4\pi\epsilon)(Q/r^3)\mathbf{r}$ . Pro velikost síly  $F$  působící mezi dvojicí bodových nábojů  $Q_1, Q_2$  vnořených v ideálně měkkém dielektriku pak zřejmě platí  $F = (1/4\pi\epsilon)Q_1 Q_2 / r^2$ . Intenzita elektrického pole a síla působící mezi bodovými náboji se tedy v takovém dielektriku zeslabí  $\epsilon$ -krát.

Uvažujme nyní elektrostatické pole soustavy  $N$  vodičů nesoucích náboje  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Bude nás zajímat, jak se změní toto pole, vyplníme-li prostor obklopující tyto vodiče homogenním, izotropním, měkkým dielektrikem o permitivitě  $\epsilon$ . Pro povrch každého vodiče platí ve vakuu

$$\int_{S_i} \mathbf{E}_v \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.275)$$

a v dielektriku

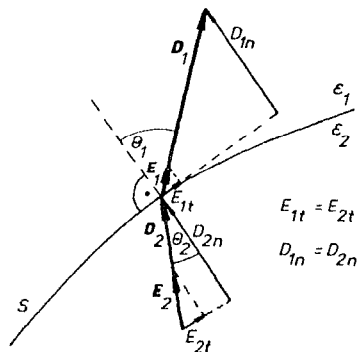
$$\int_{S_i} \mathbf{D}_d \cdot d\mathbf{S} = Q_i, \quad (1.276)$$

kde  $\mathbf{E}_v$  a  $\mathbf{D}_d$  jsou odpovídající vektory intenzity pole a elektrické indukce a  $S_i$  plocha těsně přímýkající k povrchu vodiče. Vektory  $\mathbf{D}_v = \epsilon_0 \mathbf{E}_v$  a  $\mathbf{D}_d$  mají tedy stejné okrajové podmínky na povrchu vodičů. Podle věty o jednoznačnosti řešení základní úlohy elektrostatiky musí tedy platit v každém bodě  $\mathbf{D}_d = \epsilon_0 \mathbf{E}_v$ . Při vyplnění celého prostoru dielektrikem zůstane tedy vektor elektrické indukce nezměněn. Protože však  $\mathbf{D}_d = \epsilon \mathbf{E}_d$ , zmenší se intenzita pole  $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon$ -krát:  $\mathbf{E}_d = (1/\epsilon) \mathbf{E}_v$  a stejně tak elektrostatické potenciály v prostoru a na povrchu vodičů.

### b) Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik

Nechť plocha  $S$  tvoří rozhraní dvou homogenních izotropních dielektrik o permitivitách  $\epsilon_1$  a  $\epsilon_2$  (viz obr. 1.63). Vyšetříme průběh elektrostatického pole

při přechodu tímto rozhraním. Podle obecného zákona (1.82) budou na ploše  $S$  spojité tečné složky intenzity pole. Dále, jelikož na této ploše nejsou volné náboje, budou zde podle (1.254) spojité i normálové složky vektoru elektrické indukce. Vektory  $\mathbf{E}_1$  a  $\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1$  mají též směr a jejich odklon od směru normály můžeme označit jako úhel  $\theta_1$ ; podobná úvaha platí pro vektory  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{D}_2$  a úhel  $\theta_2$ .



Obr. 1.63 Průběh elektrostatického pole na rozhraní dvou dielektrik.

Máme tedy  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $D_{n1} = D_{n2}$  neboli

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2, \quad D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2. \quad (1.277)$$

Pro vztah mezi úhlem „dopadu a lomu“ siločáry elektrostatického pole pak platí

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (1.278)$$

Porovnejte tento výraz se Snellovým zákonem pro úhel dopadu a lomu světla (elektromagnetického vlnění).

### c) Dielektrická koule a elipsoid v homogenním elektrostatickém poli

Mějme nekonečně rozlehlé homogenní dielektrikum o permitivitě  $\epsilon_1$ , v němž působí homogenní elektrické pole  $\mathbf{E}$ . Do tohoto dielektrika vložíme kouli poloměru  $R$  z dielektrika o permitivitě  $\epsilon_2$ . Určeme průběh intenzity výsledného pole uvnitř i vně dielektrické koule. Počátek sférické soustavy souřadnic umístíme do středu koule, osu  $z$  namíříme ve směru pole  $\mathbf{E}$  a úhel  $\theta$  budeme odečítat od tohoto směru.

Můžeme očekávat, že dielektrická koule se ve vnějším homogenním elektrickém poli zpolarizuje s konstantním vektorem polarizace  $\mathbf{P}$ . Na základě řešení úlohy 1.3.5d bude pole uvnitř koule homogenní a úměrné vnějšímu poli  $\mathbf{E}$ , pole vně koule bude superpozicí homogenního pole  $\mathbf{E}$  a pole dipólu  $\mathbf{p} = V\mathbf{P}$  ( $V$  je objem koule) sídlícího ve středu koule. Pro pole uvnitř a vně koule máme tedy

$$\mathbf{E}_i = C_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_e = \mathbf{E} + C_2 \left( \frac{3Ez\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{E}}{r^3} \right), \quad (1.279)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou konstanty, které máme určit z hraničních podmínek  $E_{t1} = E_{t2}$ ,  $D_{n1} = D_{n2}$  na povrchu koule. Z tohoto získáme vztahy

$$C_1 E \sin \theta = E \sin \theta - C_2 \frac{E \sin \theta}{R^3},$$

$$\epsilon_2 C_1 E \cos \theta = \epsilon_1 \left[ E \cos \theta + C_2 \left( \frac{3E \cos \theta}{R^3} - \frac{E \cos \theta}{R^3} \right) \right].$$

Z první podmínky dostaneme vztah mezi konstantami  $C_1$  a  $C_2$ :  $C_1 = 1 - C_2/R^3$  a z druhé podmínky po úpravě  $C_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_1)R^3/(\epsilon_2 + 2\epsilon_1)$ . Intenzita pole uvnitř dielektrické koule bude tedy

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \mathbf{E}. \quad (1.280)$$

Vložíme-li kouli z měkkého dielektrika o relativní permitivitě  $\epsilon_r$  do vnějšího elektrického pole  $\mathbf{E}$  ve vakuu, stačí dosadit do (1.280)  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_r \epsilon_0$ , pak pro pole uvnitř koule najdeme

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}. \quad (1.281)$$

K témuž výsledku dospějeme, budeme-li pole uvnitř koule považovat za superpozici původního pole  $\mathbf{E}$  a pole polarizované koule (1.184). Potom máme

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}_i, \quad (1.282)$$

odkud vyplývá

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}. \quad (1.283)$$

Celkový indukovaný dipólový moment koule z měkkého dielektrika je tedy

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P} = 4\pi \epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}$$

a v limitě  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  dává indukovaný moment vodivé koule (1.232).

Pole uvnitř dielektrické koule zůstává homogenní, ale je oslabeno ve srovnání s původním polem (viz obr. 1.64a). Je to obecná vlastnost dielektrických

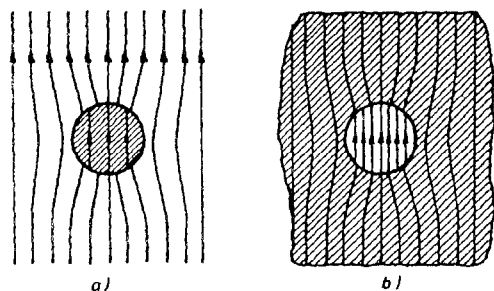
těles tvaru elipsoidu, včetně degenerovaných případů, k nimž patří například rovinná vrstva nebo válec (podrobněji viz [6], [7]). Obecně můžeme intenzitu pole v těchto tělesech vyjádřit jako

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E} - N \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad (1.284)$$

kde  $N$  označujeme jako *depolarizační faktor*. Potom

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{1 + N(\epsilon_r - 1)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{1 + N(\epsilon_r - 1)} \mathbf{E}. \quad (1.285)$$

V případě rovinné vrstvy kolmé k vnějšímu poli  $N = 1$ , pro válec v poli kolmém k jeho ose  $N = 1/2$ , pro kouli  $N = 1/3$ , pro válec s osou rovnoběžnou s polem  $N = 0$ . Je-li tedy těleso velmi protáhlé ve směru pole, jeho depolarizační faktor klesá a pole se neliší od pole bez dielektrika. Naopak v plochém tělese orientovaném kolmo k poli je depolarizační faktor blízký k jedné a pole je rovno  $\mathbf{E}/\epsilon_r$ .



Obr. 1.64 Kvalitativní průběh elektrostatického pole:  
a) v okolí dielektrické koule,  
b) v okolí dutiny v dielektriku.

#### d) Pole v dutině vytvořené v homogenním dielektriku

Chceme určit intenzitu elektrického pole v dutině, která se vytvořila v homogenním dielektriku o relativní permitivitě  $\epsilon_r$ , v němž působí elektrické pole  $\mathbf{E}$  (obr. 1.64b). Pro kulovou dutinu v měkkém dielektriku můžeme ve vztahu (1.280) položit  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$  a obdržíme

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} \mathbf{E}. \quad (1.286)$$

Pole v dutině se tedy zesílí, neboť na povrchu dutiny se vytvoří plošný vázaný náboj  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  opačného znamení než v případě dielektrické koule. Proto

$$E_i = E + \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = \frac{3\epsilon_r}{1 + 2\epsilon_r} E,$$

odkud

$$\sigma_0 = \frac{3\epsilon_0(\epsilon_r - 1)}{1 + 2\epsilon_r} E.$$

Opět můžeme ukázat, že bude-li mít dutina tvar protáhlý ve směru pole, bude intenzita pole v dutině přibližně rovna poli v dielektriku  $\mathbf{E}$ . V ploché dutině kolmé k vnějšímu poli bude pole přibližně rovno  $\epsilon_r \mathbf{E}$ .

V některých případech je třeba uvažovat myšlený kulový objem vyříznutý v homogenním zpolarizovaném dielektriku tak, že po odstranění dielektrika z tohoto objemu se směr siločar a polarizace vnějšího pole nenaruší. V tom případě zůstane na povrchu dutiny plošný vázaný náboj  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ , kde  $\sigma_0 = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) E$  a pole v myšlené dutině ve tvaru

$$E_d = E + \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r + 2}{3} E. \quad (1.287)$$

Porovnejte tento výraz se vztahem (1.286).

#### ÚLOHY KE KAPITOLE I

Ú 1.1: Určete, jakou silou se přitahují dva nesouhlasné náboje o velikosti  $e$  ve vzdálenosti  $l$  m. Totéž proveďte pro dva náboje o velikosti  $1$  C.

Ú 1.2: Kolikrát je elektrostatická odpuzivá síla mezi dvěma elektrony větší než přitažlivá síla gravitační?

Ú 1.3: Dvě kuličky nesoucí náboj  $q_1$  a  $q_2$  se ve vzdálenosti  $r$  přitahují silou o velikosti  $F_1$ . Po doteku se v téže vzdálenosti odpuzují silou o velikosti  $F_2$ . Určete náboje  $q_1$ ,  $q_2$  (pro určitost uvažujte  $q_1 > 0$ ).

Ú 1.4: Na dvou stejných vodních kapkách je po jednom přebytečném elektronu. Přitom síla elektrického odpuzování je stejně velká jako síla gravitačního přitahování. Určete poloměr kapek.

Ú 1.5: Tři stejné náboje  $q$  jsou rozmístěny symetricky po obvodu kružnice. Jaký náboj musíme umístit do středu kružnice, aby soustava byla v rovnováze? Bude tato rovnováha stabilní?

Ú 1.6: Tři náboje  $-e$ ,  $e$ ,  $-e$  jsou umístěny na přímce v uvedeném pořadí ve stejné vzdálenosti  $a = 10^{-10}$  m mezi sousedními náboji. Určete a) sílu působící na každý náboj, b) elektrostatickou potenciální energii soustavy.

Ú 1.7 Najděte takové geometrické uspořádání jednoho protonu a dvou elektronů na přímce, aby potenciální energie soustavy byla nulová.

Ú 1.8 Necht' jsou bodové náboje o velikosti elementárního náboje  $e$ , střídavě kladné a záporné, rozloženy podél přímky v rozestupech  $a = 10^{-10}$  m (tzv. lineární krystal). Jaká elektrostatická energie připadá na jeden náboj?

Ú 1.9: Atomové jádro těžkých prvků můžeme z hlediska elektrických vlastností považovat za objemově nabitou kouli s nábojovou hustotou  $\rho = 1,3 \cdot 10^{25}$  C. m<sup>-3</sup>.

Jak se změní elektrostatická energie při symetrickém rozštěpení jádra uranu na dvě stejná jádra atomů palladia?

Ú 1.10: Tenká tyč je umístěna na ose  $z$  mezi body  $z = -a$ ,  $z = a$ . Tyč nese náboj o lineární hustotě  $\tau$ . Určete elektrostatický potenciál pro všechny body na ose  $x$  pro  $x > 0$ .

Ú 1.11: Určete elektrostatické pole a potenciál nekonečně tenkého kruhového kotouče o poloměru  $R$  a plošné hustotě  $\sigma$  na ose kotouče ve výšce  $h$ .

Ú 1.12: Určete elektrostatický potenciál ve středu nekonečně tenké nabitě desky čtvercového tvaru o straně  $a$  s plošnou hustotou  $\sigma$ . Srovnajte jej s hodnotou potenciálu ve středu kruhového kotouče. (Návod: při integrování rozdělte desku pomocí úhlopříček na čtyři rovnoarmenné pravoúhlé trojúhelníky).

Ú 1.13: Z vodivé mýdlové bubliny poloměru 2 cm a nabitě na potenciál  $10^4$  V vznikne po prasknutí kapka vody o poloměru 0,05 cm. Jak velký bude potenciál kapky?

Ú 1.14: Uvažujte vodivou kouli velikostí Země a vypočítejte její náboj a potenciál, je-li intenzita elektrického pole u jejího povrchu  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ , směřuje-li vektor intenzity  $k$  povrchu.

Ú 1.15: Jaký maximální náboj se udrží na kovové kouli o poloměru 10 cm, je-li dielektrická pevnost suchého vzduchu  $30 \text{ kV}\cdot\text{cm}^{-1}$ ?

Ú 1.16: Bodové náboje jsou uspořádány takto: a) ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně  $a$  v pořadí  $q, q, -2q$ ; b) ve vrcholech čtverce o straně  $a$  v pořadí  $-q, q, q, -q$ ; c) ve vrcholech čtverce o straně  $a$  v pořadí  $-q, q, -q, q$ ; d) ve vrcholech čtverce o straně  $a$  v pořadí  $-q, 2q, q, -2q$ . Určete velikost a směr elektrického dipólového momentu těchto soustav.

Ú 1.17: Určete velikost elektrického dipólového momentu lineárního náboje (tenké tyče) délky  $a$ , jehož lineární hustota roste lineárně od  $-\tau$  na jednom konci k  $+\tau > 0$  na druhém konci.

Ú 1.18: Elektrický náboj je rozložen na povrchu koule o poloměru  $R$  tak, že na jedné polokouli je kladný náboj konstantní plošné hustoty  $\sigma$ , na druhé konstantní záporný náboj hustoty  $-\sigma$ . Určete dipólový moment koule.

Ú 1.19: Elektrický dipól  $p_1$  je umístěn v počátku souřadnic a je orientován směrem osy  $z$ . Dipól  $p_2$  leží ve vzdálenosti  $r$  na ose  $x$  a svírá s ní úhel  $\pi/4$ . Určete velikost a směr síly působící na dipól  $p_2$  a potenciální energii této soustavy.

Ú 1.20: Elektrický dipól o momentu  $p = (0, p, 0)$  leží v bodě  $(a, 0, 0)$  v elektrickém poli bodového náboje  $q$  umístěného v počátku. Určete sílu a moment silové dvojice, které budou na dipól působit.

Ú 1.21: Elektrický dipól  $p$  v počátku soustavy souřadnic je orientován pod úhlem  $\pi/4$  k ose  $x$ . V bodě  $A$  na ose  $x$  ve vzdálenosti  $a$  umístíme dipól  $p_1$ , který se může volně otáčet. Jaký úhel s osou  $x$  bude svírat v poli dipólu  $p$ ?

Ú 1.22: Mračno malých rozměrů nesoucí náboj 20 C je ve výšce 1 km nad povrchem Země. Určete intenzitu elektrostatického pole vzbuzeného tímto nábojem u povrchu Země ve vzdálenosti 3 km od místa, nad nímž se nachází mrak.

Ú 1.23: Kovová koule poloměru  $R$  je uzemněna. Ve vzdálenosti  $2R$  od středu koule je umístěn bodový náboj  $q$ . Určete náboj  $q'$ , který bude indukován na kouli.

Ú 1.24: Malá kulička nesoucí náboj  $1,67 \cdot 10^{-8}$  C je ve vzdálenosti 3 cm od rovinné kovové stěny, která je uzemněna. Jakou silou bude kulička ke stěně přitahována? Jakou práci vykonáme, vzdálíme-li tuto kuličku od stěny do nekonečna?

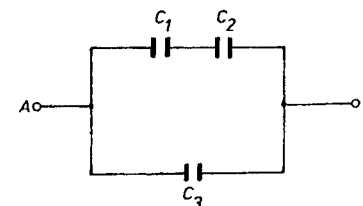
Ú 1.25: Čemu je rovna kapacita  $Z_{\text{cm}}?$

Ú 1.26: Kolik elektronů nese olejová kapička o hmotnosti  $10^{-11}$  g, jestliže je udržována v rovnováze v rovinném kondenzátoru, jehož desky jsou ve vzdálenosti 5 mm od sebe a jsou nabitý na potenciální rozdíl 76,5 V (Millikanův pokus)?

Ú 1.27: Kolik elektronů se shromáždí na povrchu elektrody kondenzátoru o kapacitě 1  $\mu\text{F}$  nabitého na napětí 1 000 V? Srovnajte řád této veličiny s celkovým počtem volných elektronů v  $1 \text{ cm}^3$  mědi.

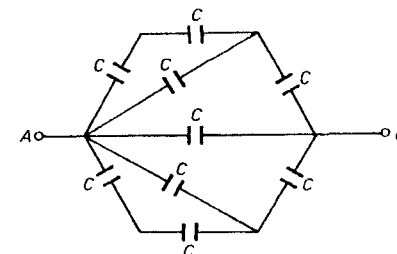
Ú 1.28: Deskový kondenzátor má kapacitu 600 pF. Jak se tato kapacita změní, vložíme-li mezi desky kondenzátoru rovnoběžně s nimi měděný plech o tloušťce rovné čtvrtině mezery? Má poloha plechu vliv na výsledek?

Ú 1.29: Kondenzátory jsou zapojeny podle obr. 1.65. Platí  $C_1 = C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 1 \mu\text{F}$ . Určete: a) výslednou kapacitu mezi body  $A$  a  $B$ , b) maximální dovolené napětí mezi body  $A$  a  $B$ , je-li kondenzátor  $C_3$  dimenzován na 1 000 V a  $C_1, C_2$  každý na 450 V.



Obr. 1.65 Schéma zapojení kondenzátorů k úloze Ú 1.29.

Ú 1.30: Kondenzátory o téže kapacitě  $C$  jsou zapojeny podle obr. 1.66. Určete výslednou kapacitu mezi body  $A$  a  $B$ .

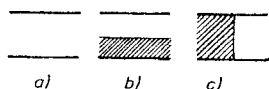


Obr. 1.66 Schéma zapojení kondenzátorů k úloze Ú 1.30.

Ú 1.31: Mějme válcový kondenzátor o poloměrech elektrod  $R_1 = 3$  cm,  $R_2 = 10$  cm nabitý na 450 V. Určete: a) náboj připadající na délkovou jednotku kondenzátoru, b) plošnou hustotu náboje na každém z válců, c) intenzitu elektrostatického pole ve středu vzdálenosti mezi válci.

Ú 1.32 Válcový kondenzátor (Geigerův–Müllerův počítač) je tvořen drátkem poloměru  $r_1 = 0,05$  mm v ose válce poloměru  $r_2 = 5$  mm. Jaká bude maximální intenzita elektrického pole v trubici, přiložíme-li ke kondenzátoru napětí  $U = 1000$  V?

Ú 1.33: Prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru plochy  $S$  je vyplněn dielektrikem, jehož relativní permitivita se mění lineárně od hodnoty  $\epsilon_1$  u jedné desky k hodnotě  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  u druhé desky. Vzdálenost desek je  $d$ . Určete kapacitu kondenzátoru.



Obr. 1.67 Deskový kondenzátor s dielektrikem k úloze Ú 1.33.

Ú 1.34: Deskový kondenzátor (obr. 1.67a) je zcela zaplněn dielektrikem o permitivitě  $\epsilon$  dvěma různými způsoby podle obr. 1.67b, c. Určete kapacity v obou případech, je-li kapacita nezaplňného kondenzátoru  $C_0$ .

Ú 1.35: Indukovaný elektrický dipólový moment kuličky z vosky ( $\epsilon_r = 3,0$ ) v elektrickém poli je 1,5krát menší než indukovaný moment stejně velké skleněné kuličky. Jaká je relativní permitivita skla?

Ú 1.36: Deskový kondenzátor je zaplněn transformátorovým olejem o relativní permitivitě  $\epsilon_r = 2,24$ . Intenzita elektrického pole v kondenzátoru je  $E = 9,0 \cdot 10^6$  V.m<sup>-1</sup>. V oleji vznikne vzduchová bublina. Jaká bude intenzita pole v bublině?

## 2 \*Silové působení mezi pohybujícími se náboji

### 2.1 Základní vztahy relativistické mechaniky

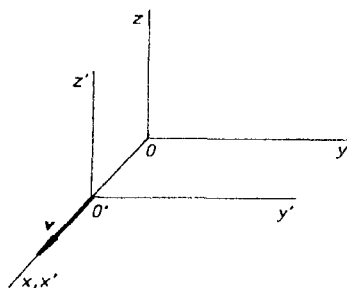
#### 2.1.1 Einsteinův princip relativity

V kapitole o elektrostatice jsme předpokládali, že elektrické náboje jsou nehybné a že silové působení mezi nimi vyjadřuje Coulombův zákon. V obecnějším případě musíme vzít v úvahu, že se elektrické náboje pohybují. Pohyb ve fyzice musíme vždy posuzovat vzhledem k určité vztažné soustavě, tedy jako pohyb relativní. Vztažnou soustavou rozumíme obecně soubor prostorových souřadnic (popisujících polohu sledovaných objektů v prostoru) a časové souřadnice (popisující časovou posloupnost probíhajících dějů). Takovou soustavu můžeme tedy například realizovat pomocí tří kartézských os pevně spojených s nějakým tělesem (hrany stěn v místnosti), na nichž vynášíme souřadnice  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jako vzdálenosti od počátku  $O$ , a hodin pevně spojených s touto soustavou a umístěných například v počátku, s jejichž pomocí odečítáme čas  $t$  (počáteční okamžik  $t = 0$  můžeme volit libovolně). Souřadnicemi částice (hmotného bodu) budeme tedy rozumět soubor čtyř veličin  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , které udávají polohu částice v prostoru v odpovídajícím okamžiku  $t$ .

Mezi vztažnými soustavami jsou význačné ty, v nichž platí Newtonovy zákony, především zákon setrvačnosti (cizím slovem inercie). Tyto soustavy se nazývají *inerciálními* a hrají ve fyzice zásadní úlohu. Rozhodnout o tom, zda některá vztažná soustava je inerciální, lze pouze experimentálně. Jestliže v inerciální vztažné soustavě nepůsobí na částici svými silami jiné částice nebo tělesa, bude se tato částice pohybovat rovnoměrně a přímočaře. Víme, že vztažná soustava spojená s povrchem Země je inerciální pouze přibližně, jen když můžeme zanedbat síly vznikající například v důsledku zemské rotace. V astronomii můžeme za inerciální vztažnou soustavu považovat tu, jejíž osy míří ke stálícím nebo ještě přesněji ke vzdáleným galaxiím. Zda je tato nejobecnější soustava dokonale inerciální, vyplývá ze zkoumání námi pozorovaného vesmíru jako celku.

V dalším výkladu budeme předpokládat, že máme k dispozici inerciální vztažnou soustavu  $\Sigma$  a pohyb nábojů budeme studovat vůči této soustavě. Uvažujme druhou vztažnou soustavou  $\Sigma'$  s osami  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  a časem  $t'$ , která se pohybuje vůči soustavě  $\Sigma$  rovnoměrně a přímočaře. Bez újmy na obecnosti, jak se

říká, můžeme předpokládat, že v okamžiku  $t = t' = 0$  souřadné osy obou soustav  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  splývají a že soustava  $\Sigma'$  se pohybuje vůči soustavě  $\Sigma$  směrem osy  $x$  rychlostí  $\mathbf{v}$ , jak je znázorněno na obr. 2.1. Snadno se můžeme přesvědčit, že bude-li mít částice v soustavě  $\Sigma$  zrychlení  $\mathbf{a}$ , bude mít totéž zrychlení i v soustavě  $\Sigma'$  a naopak. Totéž platí i pro zrychlení nulové, tedy pro setrvačný pohyb částice. Odtud plyne, že existuje-li inerciální soustava  $\Sigma$ , budou inerciální i všechny vztažné soustavy, které se vůči ní pohybují rovnoměrně přímočaře.



Obr. 2.1 Vzájemný pohyb dvou inerciálních kartézských soustav souřadnic.

Inerciálních vztažných soustav existuje tedy v takovém případě nekonečné množství. Ve všech těchto soustavách platí Newtonovy zákony ve stejném tvaru. Experimentálním zkoumáním mechanického pohybu nelze tedy jednotlivé inerciální soustavy od sebe odlišit. To je obsahem tvrzení takzvaného *Galileiho principu relativity*. Později prováděné experimenty s elektrickými, magnetickými a optickými jevy prokázaly, že v š e c h n y fyzikální zákony mají též tvar ve všech inerciálních soustavách. Žádné fyzikální experimenty (a je rozumné předpokládat, že vůbec žádné experimenty) nemohou tedy navzájem odlišit inerciální vztažné soustavy. Tento *zobecněný princip relativity* je jedním ze základních principů moderní fyziky.

Všimněme si nyní otázky, jaké jsou matematické vztahy mezi souřadnicemi dvou inerciálních vztažných soustav, soustavy  $\Sigma(x, y, z, t)$ , kterou budeme považovat za nehybnou (pozorovací, laboratorní), a soustavy  $\Sigma'(x', y', z', t')$ , která se vůči ní pohybuje popsáním způsobem. Jde nám tedy o nalezení určité transformace souřadnic, a to tak, aby rovnice popisující fyzikální zákonitosti byly vůči této transformaci invariantní.

V klasické mechanice se předpokládá, že čas je veličina absolutní a plyne stejně ve všech soustavách souřadnic; proto  $t = t'$ . Hledaná transformace je pak dána pouze okamžitou vzájemnou polohou souřadnicových os. V našem případě platí zřejmě

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (2.1)$$

Vztahy typu (2.1) se nazývají *Galileiho transformací* a odpovídají zkušenosti našeho běžného života.

Podle těchto transformací se při přechodu od jedné soustavy k druhé nemění zrychlení (je to druhá derivace souřadnic!), nemění se vzdálenosti dvou částic v daném okamžiku, a tedy ani síly, které mohou být funkcí těchto vzdáleností, a podle předpokladu se nemění ani hmotnost částic. Newtonův zákon síly  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  je tedy vůči této transformaci invariantní. Důsledkem této transformace je i zákon skládání pohybů (rychlostí), podle něhož se rychlost hmotného bodu při transformaci sčítá vektorově s rychlostí počátku soustavy. Lze tedy říci, že klasická mechanika vyhovuje principu relativity za předpokladu platnosti Galileiho transformace.

Nové problémy s interpretací principu relativity nastanou, vezmeme-li v úvahu zákonitosti šíření světla (elektromagnetických vln). Experimenty prováděné na konci devatenáctého století (viz např. [2]) ukázaly, že světlo se v prázdném prostoru šíří izotropně konstantní rychlostí  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  nezávislou na rychlosti pohybu jeho zdroje. Světlo vysílané určitým zdrojem nacházejícím se v klidu vůči inerciální soustavě se šíří izotropně rychlostí  $c$  nejen v této soustavě, ale ve všech inerciálních soustavách. Rychlost světla ve vakuu je tedy veličinou, která se zachovává (je neměnná, invariantní) při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé, představuje univerzální konstantu. Moderní experimentální technikou lze tuto konstantu určit s větší přesností než délku jednoho metru. Byla tedy pro ni zvolena přesná hodnota  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a sama definice metru byla vzhledem k ní upravena (viz Dodatek 2).

Invariantnost rychlosti světla odporuje vlastnostem Galileiho transformace. Její přijetí přináší nutnost nahradit Galileiho transformaci jiným typem transformace, což ovšem znamená revizi základních představ o prostoru a čase. Tento úkol řeší *speciální teorie relativity* (STR). Jejím východiskem je *zobecněný princip relativity* pro inerciální soustavy a požadavek *invariance rychlosti světla*; obvykle mluvíme o dvou Einsteinových postulátech nebo krátce o *Einsteinově speciálním principu relativity*. Pro transformaci souřadnic mezi různými inerciálními soustavami vyplývá z Einsteinova speciálního principu relativity nový typ transformačních vztahů, tak zvaná *Lorentzova transformace*. Při rychlostech malých vzhledem k rychlosti světla, s jakými se setkáváme při mechanických pohybech v běžném životě, přechází tato transformace v transformaci Galileiho.

Einsteinův speciální princip relativity pokládáme dnes za obecně platný. Požadujeme, aby mu vyhovovala každá obecná fyzikální teorie. V kapitole 5 uvidíme, že mu vyhovují rovnice elektromagnetického pole, které získáme klasicky na základě konkrétních výsledků experimentu. Tato okolnost slouží též jako významné nepřímé potvrzení Einsteinova speciálního principu relativity. Na druhé straně je zřejmé, že zákony klasické mechaniky nejsou obecně vůči Lorentzově transformaci invariantní a potřebují tedy jisté zobecnění. Tímto způsobem vzniká

nová teorie, tzv. *relativistická mechanika*, z níž vyplývá platnost zákonů klasické mechaniky jen pro případ rychlostí malých ve srovnání s rychlostí světla.<sup>12</sup>

### 2.1.2 Lorentzova transformace

Uvažujme opět naši dvojici inerciálních soustav  $\Sigma, \Sigma'$  z obr. 2.1. Necht' je v počátku soustavy  $\Sigma$  umístěn zdroj schopný vysílat světelný signál všemi směry. Signál vyslaný v okamžiku  $t = 0$  (kdy počátky obou soustav splývají) urazí za dobu  $t$  v libovolném směru vzdálenost

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = ct. \quad (2.2)$$

V okamžiku  $t$  může být tento signál zachycen ve všech bodech kulové plochy poloměru  $r$ . Einsteinův princip relativity žádá, aby i v čárkované soustavě se signál šířil izotropně rychlostí  $c$ . Pro vzdálenost  $r'$  musí tedy platit

$$r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} = ct'. \quad (2.3)$$

Jinými slovy řečeno, vztahy (2.2) a (2.3) musí být invariantní vůči transformaci prostorových i časových souřadnic mezi oběma soustavami, neboli

$$c^2 t^2 - r^2 = c^2 t'^2 - r'^2. \quad (2.4)$$

Uvedenému požadavku vyhovuje hledaná Lorentzova transformace, kterou pro případ soustav znázorněných na obr. 2.1 můžeme zapsat ve tvaru

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right), \quad (2.5)$$

kde  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Je možné se o tom přesvědčit přímým dosazením z (2.5) do (2.4). Speciálně v okamžiku  $t = 0$ , kdy počátky obou soustav splývají, dostaneme jednodušší vztahy

$$x' = \gamma x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = -\gamma \frac{\beta}{c} x. \quad (2.5a)$$

Souřadnice  $x$  částice v soustavě  $\Sigma$  bude tedy  $\gamma$ -krát větší než v soustavě  $\Sigma'$  a v bodě  $x' = x = 0$  bude  $t' = t = 0$  podle předpokladu.

<sup>12</sup> Požadavek, aby obecnější fyzikální teorie závislá na nějakém parametru přecházela při limitních hodnotách tohoto parametru v méně obecnou teorii experimentálně ověřenou pro tyto limitní hodnoty, se nazývá *principem korespondence*. Považujeme-li tedy z hlediska běžných rychlostí mechanických pohybů rychlost světla za velmi velkou, koresponduje relativistická mechanika s klasickou.

Zavedeme-li polohové vektory  $\mathbf{r}(x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}'(x', y', z')$  vyjadřující polohu libovolného bodu v příslušné soustavě, můžeme Lorentzovu transformaci (2.5) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} \left[ \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma t \right], \quad t' = \gamma \left[ t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right], \quad (2.6)$$

kde  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ . Inverzní transformaci vyjadřující souřadnice v soustavě  $\Sigma$  pomocí souřadnic v soustavě  $\Sigma'$  získáme tak, že vzájemně zaměníme čárkované a nečárkované veličiny a změnímme znaménko u rychlosti  $v$  na opačné. Pohybuje-li se totiž čárkovaná soustava vůči nečárkované rychlostí  $v$ , pohybuje se nečárkovaná soustava vůči čárkované rychlostí  $-v$ . Vektorový tvar Lorentzovy transformace (2.6) zůstane týž i v obecnějším případě, kdy se dvě soustavy  $\Sigma, \Sigma'$  s vzájemně rovnoběžnými stejnojmennými osami pohybují vůči sobě libovolně orientovanou rychlostí  $\mathbf{v}$ . Pak ovšem bude  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ .

Lorentzova transformace vyhovuje principu relativity pro libovolnou rychlost  $v < c$ . Při malých rychlostech, kdy můžeme zanedbat veličiny druhého řádu  $\beta^2 = v^2/c^2$  ve srovnání s jednotkou, můžeme klást  $\gamma = 1$  a Lorentzovu transformaci tak zjednodušit na

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{c^2}. \quad (2.7)$$

Transformaci (2.7), která se liší od Galileiho transformace jen transformací časové souřadnice, nazveme „pomalou“ Lorentzovou transformací. Je-li rychlost tak malá, že můžeme zanedbat i veličiny prvního řádu  $\beta = v/c$  ve srovnání s jednotkou, přejde Lorentzova transformace v Galileiho.

Z Lorentzovy transformace přímo vyplývají některé zdánlivě paradoxní důsledky, mezi něž patří *relativita současnosti a souměrnosti, zpomalování chodu času* (dilatace času) a *zkracování délek* (kontrakce délek) pohybujících se těles, a konečně relativistické vzorce pro skládání rychlostí.

Mějme dvě události, z nichž jedna probíhá v okamžiku  $t_1$  a v bodě  $(x_1, y_1, z_1)$ , druhá v okamžiku  $t_2$  v bodě  $(x_2, y_2, z_2)$  (posuzováno v soustavě  $\Sigma$ ). Prostorové a časové vzdálenosti těchto událostí označíme jako  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$ ,  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Přejdeme-li nyní k soustavě  $\Sigma'$ , najdeme z Lorentzovy transformace

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma \left( \Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x \right). \quad (2.8)$$

Pro prostorovou vzdálenost dostaneme použitím vztahů (2.8)

$$\Delta l' = [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2]^{1/2} \quad (2.9)$$

$$= [(\Delta l)^2 + (\Delta x)^2 (\gamma^2 - 1) - 2v\gamma \Delta x \Delta t + \gamma^2 v^2 (\Delta t)^2]^{1/2}.$$

Ze vztahů (2.8) a (2.9) je zřejmé, že bude-li časový interval  $\Delta t = 0$ , tj. uvažované události budou probíhat v soustavě  $\Sigma$  současně, bude interval  $\Delta t'$  obecně různý od nuly v závislosti na prostorové vzdálenosti  $\Delta x$ . Podobně, bude-li například  $\Delta l = 0$ , a tedy obě události proběhnou v soustavě  $\Sigma$  v témž bodě, nemusí tomu tak být v soustavě  $\Sigma'$ , neboť obecně  $\Delta l' \neq 0$ . Tuto okolnost musíme mít na paměti, porovnáváme-li například výsledky dvou měření prováděných v různých okamžicích nebo na různých místech.

Předpokládejme, že uvažované události se týkají jedné částice a spojíme soustavu  $\Sigma'$  s touto částicí (umístíme ji například do počátku  $O'$ ). Soustava  $\Sigma'$  se pak nazývá *vlastní soustavou* (klidovou soustavou) této částice. Aby soustava zůstala inerciální, předpokládejme, že se částice pohybuje vůči inerciální soustavě  $\Sigma$  rovnoměrně a přímočaře rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$ . Potom  $\Delta l' = 0$ ,  $\Delta x' = 0$ ,  $\Delta x = v\Delta t$  a z (2.8) plyne

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}. \quad (2.10)$$

Veličinu  $t'$  nazveme *vlastním časem* částice a označíme  $\tau$ . Položíme-li v okamžiku splnutí obou počátků  $\tau = t = 0$ , můžeme psát

$$\tau = \frac{t}{\gamma} = t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (2.11)$$

Vlastní čas částice tedy plyne pomaleji než čas v laboratorní soustavě  $\Sigma$ .<sup>13</sup>

Uvažujme nyní těleso konečného objemu a spojíme soustavu  $\Sigma'$  s tímto tělesem. Budeme srovnávat podélný rozměr tělesa v obou soustavách:  $l = x_2 - x_1$ ,  $\lambda = l' = x_2' - x_1'$ . Veličinu  $\lambda$  budeme nazývat *vlastní délkou* tělesa. Problém vzniká pouze s určením vzdálenosti  $l$  koncových bodů pohyblivého se tělesa. Souřadnice těchto bodů musíme totiž určovat současně (například při míjení vyznačených bodů na pevné stupnici). Musí tedy být  $\Delta t = 0$  a podle (2.8)  $\Delta x' = \gamma \Delta x$ , neboli

<sup>13</sup> Získaný výsledek můžeme zobecnit i na nerovnoměrný pohyb částice. V každém nekonečně malém časovém intervalu můžeme totiž předpokládat, že rychlost částice je konstantní, a spojit s částicí okamžitou klidovou inerciální soustavou souřadnic. Potom platí

$$d\tau = dt \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{1/2} \quad \text{a pro konečný časový interval} \quad \Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]^{1/2} dt.$$

$$\lambda = \gamma l = l \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \quad (2.12)$$

Podélný (ve směru pohybu) rozměr pohyblivého se tělesa je tedy kratší než jeho vlastní délka. Protože příčné rozměry tělesa zůstávají beze změny, mění se v závislosti na podélném rozměru stejným způsobem i plochy (povrch) a objem tělesa.

Z Lorentzovy transformace plynou nové vztahy pro skládání rychlostí částic. Protože rychlost částice v soustavě  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  můžeme vyjádřit jako  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$   $\mathbf{u}' = d\mathbf{r}'/dt'$ , dostaneme přímým výpočtem

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v} \left[ \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \right]}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}. \quad (2.13)$$

Ve složkách (pro soustavy pohyblivé se vzájemně podle obr. 2.1) dostaneme

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}. \quad (2.14)$$

V případě „pomalé“ Lorentzovy transformace můžeme psát

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}. \quad (2.15)$$

### 2.1.3 Relativistická dynamika

V klasické dynamice je definována hybnost částice  $\mathbf{p}$  jako součin její hmotnosti  $m_0$  a rychlosti  $\mathbf{u}$  v dané inerciální soustavě  $\Sigma$ ;  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u}$ . Zákon síly je vyjádřen vztahem

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (2.16)$$

kde  $\mathbf{F}$  je síla působící na částici; hmotnost  $m_0$  se přitom za pohybu nemění, je považována za invariantní.

Ukazuje se, že vztah (2.16) může být zachován i v relativistické dynamice tak, aby splňoval Einsteinův princip relativity. K tomu je třeba zobecnit definici hybnosti  $\mathbf{p}$  vztahem

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.17)$$



Tento vztah je možné považovat za plně experimentálně prověřený a je základem pro konstrukci urychlovačů relativistických částic. Veličina  $m_0$  má hodnotu stejnou jako v rovnicích klasické mechaniky, je tudíž invariantní vůči Lorentzově transformaci a nazývá se někdy *vlastní* či *klidovou hmotností*.

Využitím vztahu (2.17) lze vyjádřit výkon  $N$  síly  $\mathbf{F}$  působící na částici jako časovou změnu její energie

$$N = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \left( \frac{d}{dt} \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$

Po zintegrování, položíme-li integrační konstantu rovnu nule, získáme známý výraz pro energii částice

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots \quad (2.19)$$

Pomocí (2.17) a (2.19) najdeme vztah mezi relativistickou energií a hybností

$$W^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4, \quad (2.20)$$

který nahrazuje klasický vztah pro energii volné částice  $W = p^2/2m_0$ . Vidíme, že výraz (2.20) je relativisticky invariantní veličina. Přejdeme-li tedy do soustavy  $\Sigma'$ , musí platit

$$\frac{W'^2}{c^2} - p'^2 = \frac{W^2}{c^2} - p^2. \quad (2.21)$$

Porovnejme nyní výraz (2.21) s obdobným vztahem (2.4) pro kinetický invariant  $c^2 p^2 - p^2$ . Vidíme, že pro složky vektoru  $\mathbf{p}$  a energii  $W$  musí platit rovněž Lorentzova transformace jako pro složky polohového vektoru  $\mathbf{r}$  a času  $t$ . Přiřadíme-li  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{p}'$ ,  $t \rightarrow W/c^2$ ,  $t' \rightarrow W'/c^2$  a analogicky vyjádříme (2.6), zapíšeme Lorentzovu transformaci pro hybnost a energii ve vektorovém tvaru jako

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{v} \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \frac{W}{c^2} \right], \quad W' = \gamma [W - \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}]. \quad (2.22)$$

Odtud již snadno najdeme transformační vztahy pro sílu  $\mathbf{F}$  při přechodu mezi soustavami  $\Sigma$  a  $\Sigma'$ .

Uvážíme-li, že

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}, \quad \frac{d}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}, \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.23)$$

dostaneme

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{v} \left[ \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} (\gamma - 1) - \frac{\gamma}{c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \right]}{\gamma \left( 1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)}. \quad (2.24)$$

Pro případ „pomalé“ Lorentzovy transformace se výraz (2.24) zjednoduší na

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}}. \quad (2.25)$$

## 2.2 Pole pohybujících se nábojů

### 2.2.1 Pohybující se bodový náboj

V kapitole o elektrostatice jsme se zabývali nehybnými, statickými náboji a zkoumali síly působící mezi nimi. Tyto síly pro dva bodové statické náboje vyjadřuje Coulombův zákon (1.1). Pokud jsme se zajímali o přemísťování elektrických nábojů (resp. jejich nositelů) v prostoru, nezajímali nás tento proces samotný, ale pouze konečný výsledek, tj. konečné statické rozložení nábojů a jeho vlastnosti.

Přejdeme nyní ke studiu vzájemného působení nábojů, které jsou v pohybu. Tento obecnější případ má ostatně zásadní důležitost – víme totiž, že elementární částice, které vytvářejí atomová jádra, atomy a molekuly látky, jsou v neustálém pohybu a přitom jsou zároveň nositeli mikroskopických nábojů. Z mikroskopického hlediska vzato, statické náboje vlastně vůbec v přírodě neexistují, a proto celá elektrostatika a její experimentální poznatky vyžadují hlubšího teoretického zdůvodnění.

Jevy vznikající při makroskopických pohybech elektrických nábojů (hovoříme o makroskopických elektrických prouděch) byly historicky zkoumány na základě nových experimentálních poznatků. Tyto poznatky vyjadřují fyzikální zákonitosti, které nelze v rámci klasické fyziky získat z dosud známých poznatků elektrostatiky. Naproti tomu mnohé z těchto jevů považovaných z hlediska klasické fyziky za nezávislé experimentální poznatky je možné vyloužit pomocí zákonitostí teorie relativity, především použitím Lorentzovy trans-

formace, která je výrazem obecných vlastností prostoru a času. Tato skutečnost není nijak překvapující. Právě experimentální studium sil a polí vznikajících při pohybu elektrických nábojů vytvářelo postupně předpoklady pro vznik speciální teorie relativity.

Použití Lorentzovy transformace ve spojení se zákony elektrostatiky vede jednoduše k cíli zejména v případě, kdy studujeme vlastnosti jednotlivých nositelů náboje pohybujících se zadaným způsobem ve vakuu. Právě tímto případem se budeme v této kapitole zabývat. Obecný přechod k makroskopickým soustavám za přítomnosti látkového prostředí není však ani jednoduchý, ani názorný. Proto se v následujících kapitolách opět přidržíme klasického postupu založeného na nezávislých experimentálních poznatcích a jejich matematickém zobecnění. Přesto však relativistický pohled na vzájemné působení pohybujících se nábojů může usnadnit hlubší pochopení fyzikální podstaty zkoumaných jevů.

Při studiu vlastností soustav obsahujících pohybující se nositele elektrických nábojů je důležité si uvědomit, že nezáleží jen na jejich vzájemném pohybu, ale rovněž na pohybu vůči soustavě, v níž provádíme pozorování. Tak pole vytvářené soustavou vzájemně nehybných nábojů se pro pozorovatele nacházejícího se v klidu vůči těmto nábojům (tedy ve vlastní soustavě těchto nábojů) bude jevit jako pole elektrostatické. Naproti tomu pro pozorovatele pracujícího v jiné inerciální soustavě se mohou uvažovaná pole projevovat podstatně jiným způsobem. Přitom ovšem musí zůstat v platnosti Einsteinův princip relativity.

Uvažujme nyní dvojici bodových nábojů  $q$  a  $Q$ . Náboj  $q$  nazveme zkušební a budeme zkoumat sílu, kterou na něj působí náboj  $Q$ . V zásadě jsou možné čtyři případy:

1. Náboje  $q$  a  $Q$  jsou oba v klidu v dané pozorovací vztažné soustavě.
2. Náboj  $Q$  je vůči pozorovací soustavě v klidu a působí na pohybující se zkušební náboj  $q$ .
3. Zkušební náboj  $q$  je nehybný v pozorovací soustavě a je vystaven působení pohybujícího se náboje  $Q$ .
4. Náboje  $q$ ,  $Q$  se pohybují různým způsobem vůči pozorovací soustavě. (Kdyby se pohybovaly touž rychlostí, bylo by možné přejít do jejich vlastní vztažné soustavy a úlohu převést na případ 1.)

První případ odpovídá vzájemnému působení statických nábojů a je popsán působením Coulombova elektrostatického pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  daného (1.36), umístíme-li náboj  $Q$  v počátku soustavy souřadnic. Na náboj  $q$  pak působí síla  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r})$ .

Ve druhém případě vytváří náboj  $Q$  totéž elektrostatické pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Mezi základními vlastnostmi elektrického náboje jsme na začátku první kapitoly uváděli, že jeho velikost nezávisí na pohybu nositele, a je tedy invariantní vůči přechodu od jedné inerciální (a dokonce i neinerčiální) souřadné soustavy k druhé. Tedy i na pohybující se náboj  $q$  bude ze strany nehybného bodového náboje  $Q$  působit táž síla

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.26)$$

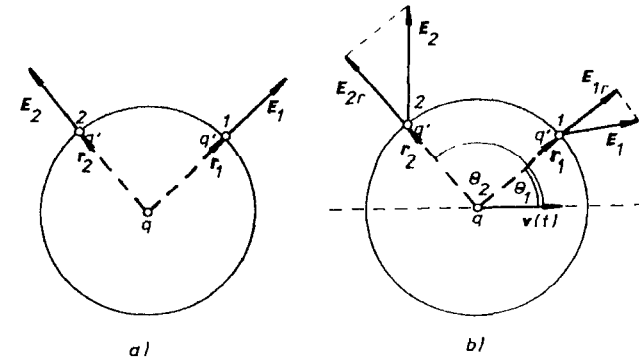
Polem  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  zde můžeme samozřejmě chápat libovolné elektrostatické pole vytvářené soustavou statických nábojů (srov. vztah (1.33)).

Velikost elektrického náboje  $q$  jsme určovali pomocí velikosti Coulombovy síly  $\mathbf{F}$ , s níž tento náboj působí na zkušební náboj  $q'$  ve vzdálenosti  $r$  jako

$$q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{F}{q'} = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \text{konst.} \quad (2.27)$$

Je tedy vlastně určen velikostí intenzity elektrostatického pole vytvářeného nábojem  $q$  ve směru spojnice obou nábojů.

Pro pohybující se náboj nemůžeme ovšem tento postup použít automaticky. Směr pohybu náboje představuje nyní určitý význačný směr v prostoru a úloha již není sféricky symetrická. Obecně nelze tvrdit, že pole vytvářené pohybujícím se nábojem bude mít v dané vzdálenosti vždy tutéž hodnotu nezávislou na směru v prostoru. Z takových měření bychom pak dostávali nejednoznačné hodnoty velikosti náboje. Obecná situace je znázorněna na obr. 2.2.



Obr.2.2 Stanovení velikosti elektrického náboje na základě silového působení na zkušební náboj: a) případ statického náboje, b) případ pohybujícího se náboje.

Můžeme však použít obecnější, Gaussův zákon. Obklopíme měřený bodový náboj kulovou plochou o poloměru  $r$  a zkušební náboj  $q'$  si myslíme rovnoměrně rozprostřen po této ploše s plošnou hustotou  $\sigma'$ ;  $q' = 4\pi r^2 \sigma'$ . Velikost náboje  $q$  pak definujeme na základě střední hodnoty radiální složky síly  $\mathbf{F}$ , působící na zkušební náboj  $q'$  ve vzdálenosti  $r$ . Pomocí Gaussova zákona to můžeme vyjádřit jako

$$q = 4\pi\epsilon_0 r^2 \frac{\langle F_r \rangle}{q'} = \frac{\epsilon_0}{\sigma'} \oint_{S_1} \sigma' \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.28)$$

Platnost Gaussova zákona pro libovolně se pohybující náboje je experimentální poznatek zásadní důležitosti, který je tedy ekvivalentní tvrzení o relativistické invariantnosti elektrického náboje. Podotkněme znovu, že touto svou vlastností nabývá elektrický náboj jako fyzikální veličina mimořádně závažného postavení. Můžeme tedy svým způsobem zobecnit Coulombův zákon. Bodový náboj  $Q$  vytváří ve své vlastní (klidové) soustavě elektrostatické pole dané vztahem (1.36). Toto elektrostatické pole působí na jiný bodový náboj silou  $F$  danou výrazem (1.32), která je nezávislá na pohybu tohoto náboje a na přítomnosti dalších nábojů.

### 2.2.2 Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně malou rychlostí

Prozkoumejme vzájemné silové působení dvou bodových nábojů v situaci označené v předchozím článku jako případ třetí a čtvrtý. Třetí případ je zřejmě zvláštním případem obecnějšího případu čtvrtého, kdy se oba náboje pohybují různým způsobem vůči inerciální pozorovací soustavě  $\Sigma$ . Budeme se proto zabývat přímo případem čtvrtým, ale omezíme se na rovnoměrný přímočarý pohyb náboje  $Q$ , a to nejdříve malou rychlostí  $u$  ( $u \ll c$ ), kdy můžeme použít takzvané pomalé Lorentzovy transformace. Zkušební náboj  $q$  nechť se pak pohybuje libovolným způsobem okamžitou rychlostí  $v$ . Přejdeme nyní k jiné inerciální soustavě souřadnic  $\Sigma'$ , jejíž stejnojmenné osy jsou rovnoběžné s osami soustavy  $\Sigma$  a která se pohybuje vůči soustavě  $\Sigma$  rychlostí  $u$ . V soustavě  $\Sigma'$  je tedy náboj  $Q$  nehybný a vytváří elektrostatické pole dané Coulombovým zákonem. V souladu s druhým případem pak v této soustavě na náboj  $q$  (pohybující se v této soustavě rychlostí  $v'$ ) působí Coulombova síla

$$F' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r'_q - r'_Q|^3} (r'_q - r'_Q). \quad (2.29)$$

Zde  $r'_q$  a  $r'_Q$  představují polohové vektory nábojů  $q$  a  $Q$  v soustavě  $\Sigma'$ .

Abychom nyní vyjádřili sílu působící ze strany náboje  $Q$  na náboj  $q$  v původní, laboratorní soustavě  $\Sigma$ , použijeme pomalou transformaci síly (2.25) a podle zavedeného označení zde nahradíme  $v \rightarrow u$ ,  $u \rightarrow v$ :

$$F = \frac{F' - \frac{1}{c^2} (F' \cdot v) u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}. \quad (2.30)$$

Pro zpětnou transformaci dostáváme

$$F = \frac{F' - \frac{1}{c^2} (F' \cdot v) u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}, \quad (2.31)$$

kde ovšem  $u' = -u$ . Abychom přešli na pravé straně (2.31) k rychlostem částic  $u$  a  $v$  v laboratorní soustavě souřadnic, použijeme pomalou transformaci rychlostí (2.15), opět se záměnou  $v \rightarrow u$ ,  $u \rightarrow v$ ,  $u' \rightarrow v'$ :

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}}. \quad (2.32)$$

Po dosazení do (2.31), zanedbání veličin řádu  $u^2/c^2$  a úpravě najdeme

$$F = \left[ F' + \frac{1}{c^2} \left( F' \cdot \frac{v - u}{1 - \frac{u \cdot v}{c^2}} \right) u \right] \left[ 1 + \frac{u \cdot (v - u)}{c^2 \left( 1 - \frac{u \cdot v}{c^2} \right)} \right]^{-1} = F' \left( 1 - \frac{u \cdot v}{c^2} \right) + \frac{F' \cdot v}{c^2} u \quad (2.33)$$

$$= F' + \frac{1}{c^2} [u(F' \cdot v) - F'(u \cdot v)] = F' + \frac{1}{c^2} v \times (u \times F').$$

(Při poslední úpravě jsme použili známého vztahu vektorové algebry  $b(a \cdot c) - c(a \cdot b) = a \times (b \times c)$ ). Nyní dosadíme za  $F'$  Coulombovu sílu (2.29). Rozdíl polohových vektorů upravíme pomocí pomalých Lorentzových transformací (2.7); předpokládáme přitom, že v soustavě  $\Sigma'$ , kde náboj  $Q$  vytváří statické pole, určujeme polohu obou nábojů současně ( $t'_q = t'_Q$ ). S přesností na veličiny řádu  $u^2/c^2$  tedy máme

$$R' = r'_q - r'_Q = r_q - r_Q - u(t_q - t_Q) = R - \frac{u^2}{c^2} R \approx R. \quad (2.34)$$

Konečný výsledek pro sílu  $F$  mezi dvěma bodovými pohybujícími se náboji dostáváme tedy ve tvaru

$$F = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[ R + \frac{1}{c^2} v \times (u \times R) \right]. \quad (2.35)$$

Všimněme si nejdříve prvního členu na pravé straně výsledku (2.35), který vyjadřuje tu část síly  $F$ , jež nezávisí na rychlosti  $v$  náboje  $q$ . Tento člen určuje tedy mimo jiné i sílu působící na náboj  $q$ , je-li jeho rychlost  $v$  vůči pozorovací

soustavě nulová (uvedený třetí případ). Je pak přirozené vyjádřit sílu  $\mathbf{F}$  jako výsledek působení elektrického pole vytvářeného pohybujícím se nábojem  $Q$ . Pro jeho intenzitu dostáváme podle (2.35)

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2.36)$$

a síla  $\mathbf{F}$  je vyjádřena vztahem typu (2.26).

Výraz (2.36) je formálně shodný s výrazem pro elektrostatické pole bodového náboje. Pole  $\mathbf{E}_0$  je tedy v každém okamžiku středově symetrické vůči bodu, ve kterém se náboj  $Q$  nachází. Porovnáme-li případ druhý (statický náboj působí na pohybující se náboj) a případ třetí (pohybující se náboj působí na statický náboj), dospíváme k závěru, že v každém okamžiku jsou síly působící mezi statickým a pohybujícím se nábojem stejné velikosti a opačného směru, a tedy platí Newtonův zákon akce a reakce. Musíme však ihned upozornit, že tento závěr platí pouze pro pole náboje pohybujícího se malou rychlostí, tj. s přesností na členy řádu  $u^2/c^2$ .

Pole  $\mathbf{E}_0$  nemůžeme ztotožňovat se statickým Coulombovým polem, neboť v časové závislosti polohového vektoru  $\mathbf{R}$  je implicitně obsažena i časová závislost  $\mathbf{E}_0$ . Z tvaru (2.36) je zřejmé, že pro pole  $\mathbf{E}_0$  platí v každém okamžiku Gaussův zákon. Tedy pro každou libovolnou uzavřenou plochu  $S$  klidnou vůči soustavě  $\Sigma$ , v níž je v daném okamžiku náboj  $Q$  uzavřen, platí

$$\oint_S \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.37)$$

V případech, kdy lze zavést objemovou hustotu náboje  $\rho_0$ , platí také diferenciální vztah

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}. \quad (2.37a)$$

Z tvaru (2.36) rovněž vyplývá, že v každém bodě platí

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0. \quad (2.38)$$

Pole  $\mathbf{E}_0$  je tedy v každém okamžiku potenciální. Na druhé straně z jeho časové závislosti vyplývá, že nabitá částice, která v něm vykoná pohyb po uzavřené dráze konečnou rychlostí, může obecně vykonat nenulovou práci.

Použitím označení podle (2.36) lze vztah (2.35) přepsat do přehlednějšího tvaru

$$\mathbf{F} = q \left[ \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0) \right]. \quad (2.39)$$

Druhý člen reprezentuje nový typ silového působení mezi pohybujícími se náboji, které závisí na rychlosti  $\mathbf{v}$  zkušební náboje  $q$ . Lze zavést nové vektorové pole

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{r}_q) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0), \quad (2.40)$$

takže místo (2.39) dostaneme

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]. \quad (2.41)$$

V následující kapitole uvidíme, že tento vztah je totožný s tzv. *Lorentzovým vzorcem*, vyjadřujícím silové působení elektrického a magnetického pole na pohybující se náboj  $q$ , který byl v rámci klasické fyziky získán zobecněním experimentální zkušenosti. Veličina  $\mathbf{B}_0$  charakterizuje magnetické pole a nazývá se *magnetickou indukci*.

Magnetické pole jsme zde zavedli víceméně formálně. O jeho fyzikálním významu však platí v podstatě totéž, co bylo řečeno o fyzikálním významu elektrostatického pole v oddílu 1.2. Vlastnosti magnetického pole budou v různých přiblížení a z různých hledisek studovány v kapitolách 3, 4 a 5.

Podobně jako jsme elektrostatické pole zobrazovali pomocí siločar, magnetické pole můžeme charakterizovat *indukčními čarami*, které mají tu vlastnost, že vektor magnetické indukce v daném bodě leží ve směru tečny k indukční čáře a jeho orientace souhlasí se směrem orientace indukční čáry. Hustotu toku indukčních čar je opět možné normovat tak, aby se rovnala velikosti vektoru magnetické indukce. Vypočteme-li  $\operatorname{div} \mathbf{B}_0$  z (2.40) s použitím (D 1.55), dostaneme vzhledem k (2.38)

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = \frac{1}{c^2} \operatorname{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_0) = 0. \quad (2.42)$$

Znamená to, že magnetické indukční čáry nemají zdroje a musí se buď uzavírat samy do sebe, nebo začínat a končit v nekonečnu. Takové pole nazýváme *solemoidálním*. Jeho obecné vlastnosti jsou vyjádřeny v D 1.1. Výsledek (2.42) jsme odvodili pro dosti speciální případ, ale experimentální zkušenost ukazuje, že jde o obecnou vlastnost magnetického pole.<sup>14</sup> Aplikujeme-li operaci rotace na definiční vztah (2.40) a použijeme-li vztah (D 1.55), zjistíme s ohledem na (2.37a), že  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_0$  je obecně různá od nuly a magnetické pole není potenciální.

Při celkovém hodnocení získaných výsledků tedy vidíme, že při malé rychlosti, kdy můžeme zanedbat faktor  $u^2/c^2$  proti jedné, vede použití Lorentzovy transformace v případě elektrického pole ke stejnému výsledku jako použití

<sup>14</sup> Jak ukázal P. A. M. Dirac, kvantová relativistická fyzika připouští možnost existence takzvaného *magnetického monopolu*, tedy magnetického náboje, který by byl zdrojem indukčních čar. Existence tohoto monopolu však dosud nebyla experimentálně spolehlivě potvrzena.

klasické Galileiho transformace, podle níž je  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ . Na druhé straně však i při těchto malých rychlostech má použití Lorentzovy transformace za následek, že se ve výrazu pro sílu objeví nový člen odpovídající působení magnetického pole. Tento typ interakce mezi pohybujícími se náboji nelze odvodit z elektrické interakce v rámci klasické fyziky. Musí být proto chápána jako nezávislý experimentální poznatek. Relativistická fyzika existenci magnetického pole vysvětluje a zdůvodňuje. Přitom je magnetické pole příkladem jevu, který je sice důsledkem relativistické transformace elektrické interakce mezi náboji, projevuje se však i při pomalých, „nerelativistických“ pohybech nábojů.

### 2.2.3 Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně libovolnou rychlostí

Uvažme nyní případ, kdy se náboj  $Q$  pohybuje libovolnou rychlostí  $u < c$ . Zabýváme se nejdříve pouze elektrickou interakcí, tedy působením pohybujícího se náboje  $Q$  na nehybný zkušební náboj  $q$  (případ třetí) a zkoumejme, zda se při libovolných rychlostech bude elektrické pole pohybujícího se náboje lišit od pole daného vztahem (2.36).

K tomu účelu použijeme jednoduchý názorný postup využívající efektu relativistické kontrakce délek. Mějme pro určitost dvě inerciální souřadné soustavy  $\Sigma$  a  $\Sigma'$ , přičemž soustava  $\Sigma'$  se vůči laboratorní soustavě  $\Sigma$  pohybuje rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$  (obr. 2.1). Mějme nyní rozlehlý deskový kondenzátor nehybný v soustavě  $\Sigma'$  s rovinami desek rovnoběžnými s rovinou  $x'y'$ . V soustavě  $\Sigma'$  (vlastní soustava kondenzátoru) bude mezi deskami kondenzátoru existovat homogenní elektrické pole ve směru osy  $z'$  o velikosti intenzity  $E' = \sigma'/\epsilon_0$  (viz 1.99), kde  $\sigma'$  je plošná hustota náboje na deskách kondenzátoru. Přejdeme-li nyní do soustavy  $\Sigma$ , bude se zde kondenzátor pohybovat rychlostí  $v$  a jeho rozměry ve směru osy  $x$  se podle (2.12) zkrátí faktorem  $1/\gamma$ , kde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ . V témž poměru se tedy zmenší plocha desek kondenzátoru, a protože celkový náboj na deskách kondenzátoru zůstává neměnný, hustota  $\sigma'$  vzroste na

$$\sigma = \gamma \sigma' . \quad (2.43)$$

Vzniká samozřejmě otázka, zda i v laboratorní soustavě souřadnic zůstane zachován směr siločar pole rovnoběžný s osou  $z$ . Symetrie pohybu připouští eventuální vznik podélné složky pole ve směru osy  $x$ . Avšak vzhledem k tomu, že pole uvnitř kondenzátoru je superpozicí polí dvou opačně nabitých rovinných desek, lze očekávat, že by se takové případné podélné složky pole vzájemně vykompenzovaly, a že tedy i v soustavě  $\Sigma$  máme homogenní pole ve směru osy  $z$  o velikosti  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Vlivem zkrácení desek tedy siločary „zhoustnou“ a máme

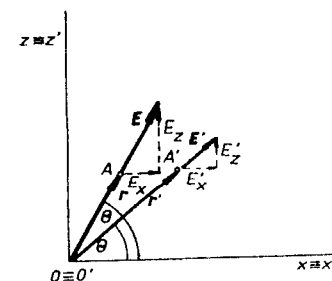
$$E = \gamma E' . \quad (2.44)$$

Budeme-li nyní orientovat desky kondenzátoru rovnoběžně s rovinou  $x'z'$ , uvidíme, že tatáž změna nastane i s vektorem intenzity pole orientovaným ve směru osy  $z'$ . Naproti tomu, budou-li desky kondenzátoru orientovány rovnoběžně s rovinou  $y'z'$ , projeví se v laboratorní soustavě  $\Sigma$  zkrácení délek jako

sblížení desek kondenzátoru a tato změna nemá vliv na hustotu siločar, a tedy ani na vektor intenzity ve směru osy  $x$ . Tímto názorným způsobem jsme dospěli k závěru, že mezi složkami elektrického pole nehybných nábojů (elektrostatického pole) a složkami elektrického pole nábojů pohybujících se ve směru osy  $x$  rovnoměrně libovolnou rychlostí  $v$  platí transformační vztahy

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \gamma E'_y, \quad E_z = \gamma E'_z . \quad (2.45)$$

Mějme nyní bodový náboj  $Q$  pohybující se rovnoměrně rychlostí  $u$ . S tímto nábojem spojíme počátek inerciální soustavy souřadnic pohybující se podle obr. 2.1 a osu  $x$  namíříme ve směru rychlosti  $u = v$ .



Obr. 2.3 K výpočtu intenzity elektrického pole bodového náboje pohybujícího se rovnoměrně libovolnou rychlostí.

Protože elektrické pole tohoto náboje bude zřejmě osově symetrické vzhledem k ose  $x$ , budeme vyšetřovat pouze jeho složky například v rovině  $xz$ . Vzhledem k rovnoměrnému pohybu náboje  $Q$  je lhostejné, v kterém okamžiku budeme jeho pole vyšetřovat. Můžeme proto s výhodou zvolit okamžik  $t = t' = 0$ , kdy počátky obou soustav  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  splývají (viz obr. 2.3). Přitom můžeme použít zjednodušené Lorentzovy transformace (2.5a)  $x' = \gamma x$ ,  $z' = z$ . V soustavě  $\Sigma'$  vytváří náboj statické Coulombovo pole o složkách

$$E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x}{r'^3}, \quad (2.46)$$

$$E'_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r'^3},$$

přičemž bylo použito  $\cos\theta' = x'/r'$ ,  $\sin\theta' = z'/r'$ .

Pro složky  $E_x, E_z$  platí podle (2.45) a (2.46)

$$E_x = E'_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma x}{r'^3}, \quad E_z = \gamma E'_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{r'^3}, \quad \frac{E_z}{E_x} = \frac{z}{x}. \quad (2.47)$$

Získáváme tak důležitý poznatek, že elektrické pole rovnoměrně a přímočaře se pohybujícího bodového náboje zůstává radiální a že jeho siločary leží v přímkách procházejících tímto nábojem. Zbývá určit rozložení hustoty těchto

síločar v prostoru neboli velikost vektoru  $\mathbf{E}$ . Označíme  $k = Q/4\pi\epsilon_0$  a po jednoduché matematické úpravě dostáváme

$$\begin{aligned} E^2 &= k^2 \gamma^2 \frac{x^2 + z^2}{r^6} = k^2 \gamma^2 \frac{x^2 + z^2}{[(\gamma x)^2 + z^2]^3} = \frac{k^2}{\gamma^4} \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + z^2 - \beta^2 z^2)^3} \\ &= k^2 \frac{(1 - \beta^2)^2}{(x^2 + z^2)^2 \left(1 - \frac{\beta^2 z^2}{x^2 + z^2}\right)^3} = k^2 \frac{(1 - \beta^2)^2}{r^4 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^3}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

kde  $\sin \theta = z/r$ .

Směr síločar je vyjádřen úhlem  $\theta$ , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{z}{x} = \gamma \frac{z'}{x'} = \gamma \operatorname{tg} \theta', \quad (2.49)$$

neboli síločáry se v prostoru natačejí jako pevné tyčky. Vektor elektrického pole  $\mathbf{E}$  můžeme tedy podle (2.48) napsat jako

$$\mathbf{E} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.50)$$

anebo v případě obecné polohy náboje  $Q$  jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_q) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad (2.51)$$

kde vektor průvodiče  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_q - \mathbf{r}_Q$ ,  $\mathbf{r}_Q$  je polohový vektor náboje  $Q$  a  $\mathbf{r}_q$  polohový vektor bodu, v němž elektrické pole určujeme (kam umísťujeme zkušební náboj  $q$ ).

Náboj, který se pohybuje libovolnou, relativistickou rychlostí vytváří tedy elektrické pole, které se liší od pole  $\mathbf{E}_0$  daného vztahem (2.36) faktorem

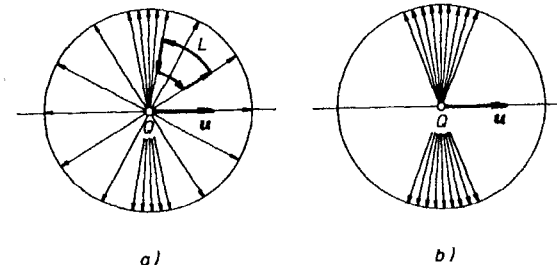
$$\Gamma = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1 - \beta^2}{\left[1 - \left(\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{R}/R}{c}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (2.52)$$

který se někdy nazývá *Heavisideův faktor*. Přitom  $\beta = ulc$  a význam úhlu  $\theta$  je patrný z obr. 2.3.

Pole  $\mathbf{E} = \Gamma \mathbf{E}_0$  na rozdíl od pole pomalu se pohybujícího náboje  $\mathbf{E}_0$  tedy již není kulově symetrické, ale závisí kromě vzdálenosti též na úhlu, který svírá průvodič se směrem pohybu náboje. Síločáry tohoto pole vidíme na obr. 2.4.

Čím více se rychlost nabitě částice blíží rychlosti světla, tím více se síločáry zhušťují ve směru kolmém ke směru pohybu. Tak zvané ultrarelativistické částice, pohybující se téměř rychlostí světla, vytvářejí elektrické pole vlastně jen v rovině kolmé ke směru pohybu.

Porovnáme-li nyní diskutované případy působení nehybného náboje na pohybující se náboj a naopak, zjistíme, že pro velké rychlosti nábojů není splněn Newtonův zákon akce a reakce. Nehybný náboj působí totiž na pohybující se náboj silou (2.26), kde pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  je Coulombovo, zatímco pohybující se náboj působí na nehybný náboj silou téhož tvaru, kde však obecně vystupuje pole (2.51). Jen při pomalých pohybech přechází toto pole na tvar (2.36). Omezení platnosti Newtonova zákona akce a reakce je důsledkem toho, že síly působící na oba náboje je třeba porovnávat současně, což není vzhledem ke konečné rychlosti šíření signálu možné.



Obr. 2.4 Síločáry elektrického pole bodového: a) relativistického a b) ultrarelativistického náboje.

Přestože elektrické pole pohybujícího se náboje nemá již síločáry rozložené středově symetricky, a nemá tedy coulombovský tvar, měl by celkový počet síločar vycházejících z pohybujícího se náboje zůstat zachován, neboť souvisí s velikostí náboje, jenž je invariantní vůči pohybu. Jinými slovy, měl by zůstat v platnosti Gaussův zákon (2.37). Přesvědčíme se o tom.

Budeme nejprve uvažovat Gaussovu plochu ve tvaru kulové plochy  $S_k$  poloměru  $r_0$  (nehybné vůči soustavě  $\Sigma$ ), v okamžiku, kdy se náboj  $Q$  nachází v jejím středu  $O$ . Vektor intenzity  $\mathbf{E}$  má v tomto případě stále směr normály ke kulové ploše, takže pro celkový tok intenzity platí

$$\Phi = \oint_{S_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_k} E \, dS, \quad (2.53)$$

kam za  $\mathbf{E}$  musíme nyní dosadit (2.50). Pro výpočet integrálu je vhodné zavést kulové souřadnice  $r, \theta, \varphi$  vztažené ke středu koule. Souřadnice  $r$  pak představuje vzdálenost od středu  $O$ , úhel  $\theta$  je úhel, který svírá průvodič se směrem pohybu náboje (osou  $x$ ) a úhel  $\varphi$  je polární úhel v rovině kolmé ke směru pohybu a procházející středem  $O$ . Vzhledem k osové symetrii úlohy intenzita pole na

úhlu  $\varphi$  nezávisí a je funkcí souřadnic  $r$  a  $\theta$ . Element kulové plochy je dán výrazem  $dS = r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ , a máme tedy

$$\begin{aligned} \psi &= \oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_i} \Gamma \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} r_0^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{(1-\beta^2) \sin \theta}{(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} d\theta. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Provedeme-li substituci  $\cos \theta = t$ , dostaneme

$$\psi = \frac{Q}{2\epsilon_0} \int_{-1}^{+1} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2 + \beta^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{Q}{2\epsilon_0} \frac{1}{\beta} \left[ \frac{t}{\frac{1-\beta^2}{\beta^2} + t^2} \right]_{-1}^{+1} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.55)$$

Z výpočtu je patrné, že

$$\int_0^\pi \Gamma \sin \theta \, d\theta = 2. \quad (2.56)$$

Ověřili jsme tedy, že v případě kulové plochy obklopující v daný okamžik pohybující se náboj platí

$$\oint_{S_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.57)$$

Zobecnění tohoto výsledku pro libovolnou uzavřenou plochu  $S$  lze získat stejným způsobem, který byl použit v čl. 1.2.2 při odvozování Gaussova zákona ze zákona Coulombova. Vztah (2.57) tedy platí pro libovolnou uzavřenou plochu  $S$ .

Uvažujme nyní případ, že se pohybuje jak náboj  $Q$ , tak zkušební náboj  $q$  (různými konstantními rychlostmi). Jak víme, již v případě pomalu se pohybujících nábojů, jejich vzájemné silové působení se nevyčerpává elektrickou interakcí typu (2.26). Použijeme-li nyní stejný postup jako v případě pomalu se pohybujícího náboje v článku 2.2.2, musíme transformovat Coulombovu sílu (2.29) ze soustavy  $\Sigma'$ , v níž je náboj  $Q$  v klidu, do laboratorní soustavy  $\Sigma$ , v níž se náboj  $Q$  pohybuje rychlostí  $\mathbf{u}$  a zkušební náboj  $q$  rychlostí  $\mathbf{v}$ . Přitom však místo pomalé transformace síly (2.25) musíme použít přesnou transformaci (2.24) a místo pomalé transformace rychlostí (2.5) přesnou transformaci (2.13). Úloha

se poněkud komplikuje, avšak pouze formálně. Jako výsledek dostaneme opět sílu tvaru (2.39), popř. (2.41), tedy Lorentzovu sílu

$$\mathbf{F} = q \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.58)$$

Na rozdíl od (2.39) zde však na místě elektrického pole již nevystupuje pole Coulombova typu (2.36), nýbrž elektrické pole náboje  $Q$  pohybujícího se libovolnou konstantní rychlostí  $\mathbf{u}$ , viz (2.51),

$$\mathbf{E} = \Gamma \mathbf{E}_0 = \Gamma \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{R}, \quad (2.59)$$

kde  $\Gamma$  je dáno výrazem (2.52). Jak se ukazuje, vztah mezi elektrickým a magnetickým polem typu (2.40) je obecný, a platí tedy

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}). \quad (2.60)$$

Pro elektrické pole náboje pohybujícího se libovolnou, tedy i relativistickou rychlostí  $u \leq c$  jsme si ověřili platnost Gaussova zákona. Pokud lze zavést objemovou hustotu náboje  $\rho$ , můžeme tento Gaussův zákon vyjádřit opět i v diferenciálním tvaru typu (2.37a)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.61)$$

Jinou otázkou je, zda toto pole zůstává potenciální, tj. zda pro ně platí vztah (2.38). Pohledem na rozložení siločar takového náboje (obr. 2.4a) snadno usoudíme, že toto pole potenciálním nebude. Skutečně, bude-li se nabitá částice pohybovat v tomto poli po uzavřené dráze  $L$  vyznačené na obrázku, bude přitom vykonána nenulová práce. K práci budou totiž přispívat pouze radiální úseky této dráhy, přičemž hustota siločar, a tedy i intenzita pole je na obou těchto úsecích různá. Čemu tedy bude roven výraz  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ ? Přímým výpočtem podle (D 1.50) dostáváme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} (\Gamma \mathbf{E}_0) = \operatorname{grad} \Gamma \times \mathbf{E}_0 + \Gamma \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = \operatorname{grad} \Gamma \times \mathbf{E}_0. \quad (2.62)$$

Veličinu  $\operatorname{grad} \Gamma$  určíme jako

$$\operatorname{grad} \Gamma = \frac{d\Gamma}{d\theta} \operatorname{grad} \theta = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{R} - R^2 \mathbf{u}}{R^3 u \sin \theta}, \quad (2.63)$$

neboť

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{u R}, \quad \text{grad}(\cos \theta) = -\sin \theta \text{ grad } \theta. \quad (2.64)$$

Potom podle vztahu (2.60)

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R^2 \mathbf{u}}{R^3 u \sin \theta} \times \mathbf{E}_0 = -\frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{c^2}{R u \sin \theta} \mathbf{B}_0. \quad (2.65)$$

Vidíme, že vektor  $\text{rot } \mathbf{E}$  je obecně nenulový a rovnoběžný s vektorem magnetické indukce  $\mathbf{B} = \Gamma \mathbf{B}_0$ . Ukážeme, že výraz na pravé straně (2.65) lze vyjádřit jako parciální časovou derivaci magnetického pole  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Elektrické a magnetické pole pohybujícího se náboje určujeme v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}_q$ . Budeme-li tento bod fixovat, potom časová závislost pole v tomto bodě bude daná jen časovou závislostí vektoru  $\mathbf{R}(t)$ :  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{R}(t))$ . Parciální časovou derivaci pole pak můžeme podle pravidel o derivování složených funkcí vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \text{ grad} \right) \mathbf{B} = - \left( \frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial t} \text{ grad} \right) \mathbf{B} = -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B}. \quad (2.66)$$

Použijeme-li tento výsledek, můžeme dále vyjádřit  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B} = -\mathbf{B}_0 (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \Gamma) - \Gamma (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B}_0. \quad (2.67)$$

První člen na pravé straně upravíme podle (2.63) na

$$-\mathbf{B}_0 (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \Gamma) = -\mathbf{B}_0 \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{u^2 R^2 \cos^2 \theta - u^2 R^2}{R^3 u \sin \theta} = \mathbf{B}_0 \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{u}{R} \sin \theta. \quad (2.68)$$

K úpravě druhého členu použijeme vztah

$$(\mathbf{a} \text{ grad}) (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \times (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{c} - \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \text{ grad}) \mathbf{b}. \quad (2.69)$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} -\Gamma (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B}_0 &= -\frac{\Gamma}{c^2} (\mathbf{u} \text{ grad}) (\mathbf{u} \times \mathbf{E}_0) = -\frac{\Gamma}{c^2} \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{E}_0 \\ &= \frac{\Gamma}{c^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \text{ grad}) \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\Gamma}{c^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{u} \times \left( \frac{\mathbf{u}}{R^3} - \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})}{R^5} \right) \\ &= \frac{\Gamma}{c^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3u \cos \theta}{R^4} (\mathbf{u} \times \mathbf{R}) = \mathbf{B}_0 \frac{3\Gamma u}{R} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dále použijeme

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = 3\Gamma \frac{\beta^2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (2.71)$$

a spojením výsledků (2.68) a (2.70) po dosazení na pravou stranu (2.67) obdržíme

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{u}{R} \left( \frac{d\Gamma}{d\theta} \sin \theta + 3\Gamma \cos \theta \right) \mathbf{B}_0 = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{c^2}{R u \sin \theta} \mathbf{B}_0. \quad (2.72)$$

Porovnáním (2.72) s (2.65) dostáváme tedy rovnici

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.73)$$

Všimněme si nyní vlastností magnetického pole. Pro divergenci  $\mathbf{B}$  dostáváme ( $\mathbf{u}$  je konstantní)

$$c^2 \text{div } \mathbf{B} = \text{div} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = -\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.74)$$

Vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{B}$  jsou však vždy kolmé, a proto pravá strana (2.74) je rovna nule. Konečně se budeme zajímat o rotaci  $\mathbf{B}$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} [\mathbf{u} \text{ div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{u} + (\mathbf{E} \text{ grad}) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{E}] \\ &= \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \rho \mathbf{u} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 (\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Zde jsme dosadili za  $\text{div } \mathbf{E}$  z (2.61), použili (2.66) a zavedli konstantu  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$  (je to tzv. *permeabilita vakua*, o jejíž významu bude pojednáno v kapitole 3).

Přesně vzato pro divergenci  $\mathbf{E}$  bychom měli psát

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \Gamma \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0 \cdot \text{grad } \Gamma + \Gamma \text{div } \mathbf{E}_0. \quad (2.76)$$

Snadno se však přesvědčíme, že  $\mathbf{E}_0 \cdot \text{grad } \Gamma = 0$  a objemové hustoty náboje zavedené (2.37a) a (2.61) se liší normujícím koeficientem  $\Gamma$ :  $\rho = \Gamma \rho_0$ . Představíme-li si částici jako malou kuličku s prostorově rozloženým nábojem s konstantní hustotou  $\rho_0$ , dochází při relativistickém pohybu jakoby ke změně tvaru částice a jejímu zploštění ve směru pohybu. Tím se změní hustota náboje, ale celkový náboj se nemění, jak plyne z integrálního tvaru Gaussova zákona; tato představa je ovšem pouze modelová.



Představme si nyní soustavu nábojů, které se všechny pohybují v inerciální soustavě  $\Sigma$  rovnoměrnými a přímočarými pohyby libovolnými rychlostmi. Pole vytvářené touto soustavou nábojů můžeme vyjádřit jako superpozici polí jednotlivých bodových nábojů. Podle výsledků předchozího článku vyhovují výsledná vektorová pole soustavě rovnic

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\rho \mathbf{u}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (2.77)$$

Tato soustava je formálně totožná se soustavou takzvaných *Lorentzových rovnic* elektromagnetického pole, o nichž pojednáme v kapitole 5. Na soustavě rovnic (2.77) je pozoruhodné to, že jsme je získali pouze na základě Coulombova zákona a transformací speciální teorie relativity. Automaticky se v nich objevují členy jako  $-\partial \mathbf{B}/\partial t$ , který vyjadřuje zákon elektromagnetické indukce, a  $(1/c^2)(\partial \mathbf{E}/\partial t)$ , který popisuje takzvaný Maxwellův posuvný proud. Naproti tomu zobecnění této soustavy na případ nábojů pohybujících se zcela obecně, tedy se zrychlením, není triviální a vyžaduje další nezávislé poznatky.

Experimentálně pozorovaná pole jsou makroskopická a jsou středními hodnotami mikroskopických polí jednotlivých nositelů náboje. Tato makroskopická pole vyhovují soustavě *Maxwellových rovnic*, která bude na základě experimentálních poznatků vyložených v kapitolách 1, 3 a 4 formulována v kapitole 5. Zjistíme pozoruhodný výsledek, že i tvar Maxwellových rovnic je formálně shodný se soustavou (2.77). Vzhledem k uvedené shodě lze soudit, že rovnice typu (2.77) popisují obecné vlastnosti elektromagnetického pole. V žádném případě je však nemůžeme s Maxwellovými či Lorentzovými rovnicemi ztotožnit, či dokonce postup, který k rovnicím vedl, považovat za „odvození“ Maxwellových či Lorentzových rovnic. Za formálním matematickým popisem musíme mít vždy na zřeteli přesný fyzikální obsah. Fyzikální obsah Maxwellových a Lorentzových rovnic i jejich vzájemný vztah bude vyložen v kapitole 5.

Soustava rovnic (2.77) popisuje nestacionární a nepotenciální pole. Při pomalých pohybech nábojů můžeme klást faktor  $\Gamma = 1$  a elektrické pole se stane potenciálním (tedy s přesností na veličiny řádu  $u^2/c^2$ ). Uvidíme, že například makroskopický pohyb nábojů ve vodičích realizující elektrický proud je dokonce velmi pomalý a podmínka  $\Gamma = 1$  je zde velmi dobře splněna. Naproti tomu v moderních urychlovačích se nabitě částice často pohybují rychlostmi blízkými rychlosti světla a v takovém případě je nutné brát v úvahu relativistické elektrické pole.

Soustava rovnic (2.77) umožňuje vyjádřit vektorová pole  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  (celkem 6 funkcí pro jednotlivé složky) pomocí jednoho skalárního a jednoho vektorového

pole (4 funkce). Využijeme-li obecného vztahu  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , můžeme zavést takzvaný *vektorový potenciál*  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_q, t)$  vztahem  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  a napsat (pořadí operací rot a  $\partial/\partial t$  lze vyměnit)

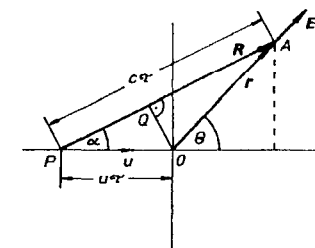
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \quad \operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.78)$$

To ovšem znamená, že pole  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t$  je potenciální a můžeme je vyjádřit pomocí *skalárního potenciálu*  $\varphi(\mathbf{r}_q, t)$  jako  $-\operatorname{grad} \varphi$ . Určíme-li tedy skalární a vektorový potenciál  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  (což bývá zpravidla jednodušší než přímé určování  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ ), dostaneme vektory intenzity elektrického pole a magnetické indukce ze vztahů

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.79)$$

#### 2.2.4 Pole náboje pohybujícího se libovolným způsobem

Uvedli jsme, že poznatky o elektrickém a magnetickém poli, získané v předchozích článcích na základě Lorentzovy transformace, se týkají pouze soustav nábojů pohybujících se rovnoměrným přímočarým pohybem. Je zřejmé, že takový případ je určitou idealizací, neboť na náboje vždy působí síly, které jim udělují zrychlení, dochází ke srážkám nabitých částic, náboje jsou uváděny do pohybu a opět brzděny. Z hlediska teorie relativity je důležité, že každá změna stavu náboje se může projevit v určité vzdálenosti  $R$  až za dobu  $\tau = R/c$ , kde  $c$  je maximální rychlost šíření signálu (informace).



Obr. 2.5 K odvození intenzity elektrického pole bodového pohybujícího se náboje se zřetelem ke konečné rychlosti šíření signálu.

Vraťme se k úloze o nalezení elektrického pole náboje  $Q$  pohybujícího se rovnoměrně rychlostí  $u$  (obr. 2.5). Pole tohoto náboje v bodě  $A$  v okamžiku  $t = 0$ , kdy náboj prochází počátkem, je dáno výrazem (2.50). Je ovšem zřejmé, že účinek náboje  $Q$  se nemůže projevit v bodě  $A$  okamžitě. Pole  $\mathbf{E}$  tedy odpovídá stavu náboje v některém předchozím okamžiku  $-\tau$ , kdy se náboj  $Q$  nacházel v bodě  $P$  vzdáleném od počátku o  $u\tau$ . Za dobu  $\tau$  pak signál doletěl rychlostí  $c$  do bodu  $A$  a náboj za tuto dobu dosáhl počátku rychlostí  $u$ . Je tedy vhodné pokusit

se vyjádřit intenzitu pole  $\mathbf{E}$  nikoli jako funkci polohového vektoru  $\mathbf{r}$ , ale polohového vektoru  $\mathbf{R}$ , což odpovídá vzájemné poloze náboje a bodu, v němž pole zjišťujeme v dřívějším okamžiku  $-\tau$ , kdy náboj  $Q$  vlastně pole v bodě  $A$  „vytváří“. Kdyby například došlo ke změně velikosti náboje nebo jeho rychlosti, projevovalo by se to v bodě  $A$ , právě když bude náboj  $Q$  probíhat počátkem. Vektor  $\mathbf{R}$  odpovídá tedy vzájemné poloze náboje  $Q$  a zkušební náboje  $q$  v čase  $t' = t - \tau = t - R/c$ , který nazýváme *retardovaným, zpožděným, časem*. Použijeme zřejmých vztahů

$$u\tau = R\beta, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}, \quad \beta = \mathbf{u}/c, \quad R\sin\alpha = r\sin\theta \quad (2.80)$$

a určíme  $r$  podle

$$\begin{aligned} \overline{QA} &= R - \overline{PQ} = R - R\beta\cos\alpha = R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta} \\ &= [r^2 - (R\beta\sin\alpha)^2]^{1/2} = r(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.81)$$

jako  $r = (R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta})/(1 - \beta^2\sin^2\theta)^{1/2}$ . Dosazením za  $\mathbf{r}$  a  $r$  do (2.50) najdeme

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta})}{(R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \quad (2.82)$$

V obecném případě náboje pohybujícího se se zrychlením nemůžeme použít Lorentzovu transformaci, která platí pouze mezi inerciálními soustavami. Můžeme se však opřít o představu o konečné rychlosti šíření signálu a o retardovaném čase. Způsobem, který zde nebudeme probírat (viz například [3]) lze vyjádřit pole zrychleného náboje pomocí takzvaných *Liénardových-Wiechertových potenciálů*

$$\varphi(\mathbf{r}_q, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_q, t) = \frac{\mu_0 Q}{4\pi} \frac{\mathbf{u}}{R - \mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\beta}} \Big|_{t'} \quad (2.83)$$

Vektor  $\mathbf{R}$ , proměnná rychlost  $\mathbf{u}$  a  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}/c$  jsou na pravé straně vztahů (2.83) vyjádřeny v retardovaném čase  $t' = t - R/c$ .

Od těchto potenciálů můžeme pomocí vztahů (2.79) (jejichž platnost zde musíme předpokládat) dospět k výrazům pro intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci. Pro elektrické pole dostáváme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_q, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \left\{ \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{R} \right\} \Big|_{t'} \quad (2.84)$$

Časově závislé veličiny na pravé straně (2.84) jsou opět v retardovaném čase  $t'$ . Aby vynikla závislost jednotlivých příspěvků pole ve vzdálenosti  $R$ , zavedli

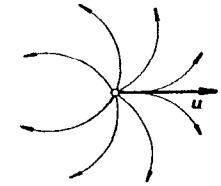
jsme jednotkový vektor ve směru průvodiče v čase  $t'$ :  $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ . Vidíme, že první člen na pravé straně (2.84) odpovídá přesně elektrickému poli rovnoměrně přímočaře pohybujícího se náboje v retardovaném čase (2.82). Novým je zde druhý člen, který závisí na zrychlení náboje  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  a klesá se vzdáleností pomaleji – jako  $1/R$ . Podrobná analýza tohoto členu prováděná v teorii elektromagnetického pole ukazuje, že tento člen vytváří tok energie elektromagnetického pole a odpovídá vyzařování elektromagnetických vln.

Vyzařování elektromagnetické vln způsobené zbrzděním nabitě částice je dobře známo v atomové fyzice a nazývá se *brzdné záření*. Využívá se například k buzení rentgenového záření dopadem urychlených částic na antikatodu. V kruhových urychlovačích nabitých částic získávají částice zase dostředivé zrychlení, které se rovněž projevuje vyzařováním tak zvaného *synchrotronového záření*.

Podobně bychom mohli určit i magnetickou indukci. Uvedeme jen, že mezi vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  obecně se pohybujícího náboje platí vztah

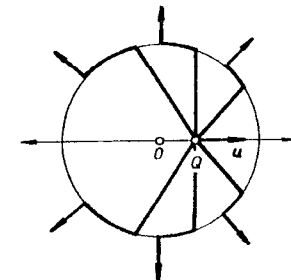
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (2.85)$$

charakteristický pro pole elektromagnetické vlny, jak uvidíme v kapitole 5.



Obr. 2.6 Kvalitativní znázornění siločar elektrického pole bodového náboje pohybujícího se přímočaře zrychleně.

V případě zrychleného pohybu náboje již nemůžeme očekávat, že siločary elektrického pole budou radiální. Budou se zřejmě zakřivovat, i když jejich celkový počet bude opět zůstávat neměnný. Pro přímočarý zrychlený pohyb jsou elektrické siločary kvalitativně znázorněny na obr. 2.6. Vznik tangenciálních



Obr. 2.7 Vznik tangenciálních složek intenzity elektrického pole bodového náboje pohybujícího se zrychlením.

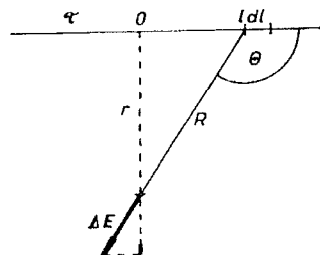
složky pole, příčné ke směru šíření, je pro elektromagnetickou vlnu charakteristický. Názorně si jej můžeme vysvětlit tak, že náboj původně v klidu, který byl náhle urychlen na dále konstantní rychlost  $u$ , vytváří uvnitř koule o poloměru  $ct$  elektrické pole pohybujícího se náboje, zatímco vně koule, kam informace o urychlení náboje ještě „nedošla“, trvá původní statické pole Coulombovo. Na povrchu koule musí siločáry obou polí vzájemně navazovat, a tak vzniká tečné pole. Koule sama se přitom „rozpíná“ rychlostí  $c$  (obr. 2.7).

### 2.2.5 Řešené příklady

#### a) Pole přímého nábojového paprsku

Vztahy (2.59), (2.60) použijeme k výpočtu elektrického a magnetického pole nekonečně dlouhého homogenního paprsku nábojů pohybujících se rychlostí  $u$ . Zavedeme-li lineární hustotu náboje  $\tau$  v tomto paprsku, můžeme použít vztah (2.59) pro vyjádření příspěvku  $\Delta E$  k celkovému poli v daném bodě, který vzbudí krátký úsek paprsku nesoucí náboj  $\Delta Q = \tau \Delta l$ :

$$\Delta E = \Gamma \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{R^3} \Delta l. \quad (2.86)$$



Obr. 2.8 K odvození intenzity elektrického pole přímého nábojového paprsku.

Celkovou intenzitu  $E$  pak dostaneme integrací přes celou délku paprsku. Přitom opět stačí uvažovat pouze projekce do směru kolmého k paprsku. Podle obrázku 2.8 máme

$$l = -r \cotg \theta, \quad dl = \frac{r}{\sin^2 \theta} d\theta, \quad R = \frac{r}{\sin \theta}, \quad (2.87)$$

a tedy použitím (2.56) získáme

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma \sin \theta}{R^2} dl = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \Gamma \sin \theta d\theta = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.88)$$

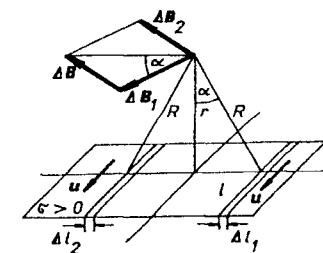
Obdobným způsobem bychom mohli vypočítat i magnetickou indukci. Uvážíme-li však, že rychlost jednotlivých elementů  $u$  je vždy kolmá k intenzitě  $E$ , můžeme použít vztah (2.60), a tak dostaneme přímo

$$B = \frac{\mu_0 u \tau}{2\pi r}. \quad (2.89)$$

Opět jsme označili  $\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2$ . Nábojový paprsek vytváří tedy časově neproměnné (stacionární) elektrické a magnetické pole. Intenzita elektrického pole je totožná s intenzitou elektrostatického pole nabitě přímky (1.93) při téže lineární hustotě náboje. Magnetické pole má směr kolmý k rovině paprsku a průvodiče do daného bodu.

#### b) Pole roviny vytvořené rovnoběžnými nábojovými paprsky

Mějme nyní nabitou rovinu s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ , přičemž všechny náboje se pohybují touž konstantní rychlostí  $u$ . Takovou rovinu můžeme rozdělit na úzké přímé proužky šířky  $\Delta l$  rovnoběžné se směrem pohybu nábojů, každý takový proužek považovat za přímý nábojový paprsek o lineární hustotě  $\tau = \sigma \Delta l$  a pole jím vytvořené popsat podle výsledků předchozího příkladu. Superpozicí elektrického pole těchto nábojových paprsků postupem použitým v odst. 1.2.9b zjistíme, že elektrické pole této roviny je konstantní, kolmé k rovině a má velikost  $E = \sigma/2\epsilon_0$  (srov. (1.96)).



Obr. 2.9 K odvození magnetické indukce plošného rovinného proudu.

Nyní určíme magnetické pole této roviny. Můžeme například uvažovat vždy dvojice proužků symetricky umístěných vůči patě kolmice spuštěné z daného bodu na rovinu a zjistíme, že příspěvek k magnetickému poli vlivem takové dvojice je rovnoběžný s rovinou (viz obr. 2.9). Z téhož obrázku a využitím vztahu (2.89) najdeme

$$l = r \tg \alpha, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad R = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad \Delta B = 2 \cos \alpha \frac{\mu_0 \sigma u \Delta l}{2\pi R}. \quad (2.90)$$

Integraci určíme výsledné magnetické pole

$$B = \frac{\mu_0 \sigma u}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\alpha = \frac{\mu_0 \sigma u}{2}. \quad (2.91)$$

c) *Síly působící mezi nábojovými paprsky*

Uvažujme dvojici nekonečně dlouhých rovnoběžných nábojových paprsků o vzájemné vzdálenosti  $r$ , s lineárními nábojovými hustotami  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  a rychlostmi  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ . Na nábojový element  $\tau_2 \Delta l$  druhého paprsku bude působit elektrická síla  $\mathbf{E} \tau_2 \Delta l$ , kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole podle (2.88). Na jednotku délky druhého paprsku bude tedy působit elektrická síla  $f_c$

$$f_c = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.92)$$

Podobně lze spočítat podle (2.58) i magnetickou sílu, použijeme-li pro magnetickou indukci v místě druhého paprsku výsledek (2.89) z předchozího příkladu. Jelikož je vektor  $\mathbf{B}$  kolmý na společnou rovinu obou paprsků, bude mít magnetická síla  $f_m$  působící na jednotku délky druhého paprsku velikost

$$f_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|\tau_1 u_1| |\tau_2 u_2|}{r} \quad (2.93)$$

a oba paprsky se budou přitahovat nebo odpuzovat touto silou v závislosti na souhlasnosti či nesouhlasnosti znaménka součinů  $\tau_1 u_1$ ,  $\tau_2 u_2$ . Budou-li například oba paprsky mít souhlasná znaménka nábojů i souhlasnou orientaci rychlostí  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$ , bude elektrická síla paprsky odpuzovat a magnetická síla je bude přitahovat. Velikost obou typů sil jsou v poměru

$$\frac{f_m}{f_c} = \frac{u_1 u_2}{c^2}. \quad (2.94)$$

Není bez zajímavosti, že výraz pro celkovou sílu působící mezi dvěma paprsky lze získat bez zavádění pojmu magnetického pole, pouze jako důsledek relativistického efektu kontrakce délek. Mějme pro určitost opět souhlasné znaménko  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  a souhlasný směr rychlostí  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  a zvolme směr odpudivé síly jako kladný. Přejdeme do soustavy  $\Sigma'$  pohybující se spolu s náboji druhého paprsku rychlostí  $\mathbf{u}_2$ . V této soustavě působí na druhý paprsek zřejmě pouze elektrické síly a platí

$$f'_c = \frac{\tau'_1 \tau'_2}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.95)$$

kde  $\tau'_1$ ,  $\tau'_2$  jsou lineární hustoty nábojů v soustavě  $\Sigma'$ . Přejdeme nyní zpět do laboratorní soustavy. Pro příčnou složku síly připadající na jednotku délky v podélném směru přitom platí (podle (2.12) a (2.24))  $f = f'$ . Zbývá přetransformovat lineární hustoty náboje  $\tau'_1$ ,  $\tau'_2$  do laboratorní soustavy. Můžeme k tomu použít vztahů analogických k (2.43), který však platí pouze pro přechod mezi la-

boratorní soustavou  $\Sigma$  a klidovou soustavou  $\Sigma'$ . Podle tohoto vztahu  $\tau'_2 = \tau_2 / \gamma_2$ . Náboje prvního paprsku se obecně pohybují v obou soustavách, a to rychlostmi  $\mathbf{u}_1$  a  $\mathbf{u}'_1$ . Musíme proto přejít nejdříve do klidové soustavy prvního paprsku  $\Sigma''$  ( $\tau''_1 = \tau_1 / \gamma_1$ ) a odtud do soustavy  $\Sigma'$ , kde  $\tau'_1 = \tau''_1 / \gamma_1 = \tau_1 \gamma'_1 / \gamma_1$ . Výsledná síla na jednotku délky druhého paprsku v laboratorní soustavě je tedy

$$f = f' = \frac{\tau'_1 \tau'_2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\gamma'_1}{\gamma_2 \gamma_2}. \quad (2.96)$$

Dosadíme-li

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma_2 = \left(1 - \frac{u_2^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \gamma'_1 = \left(1 - \frac{u_1'^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

dostaneme po úpravě

$$f = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{u_1 u_2}{c^2}\right). \quad (2.97)$$

První člen zde odpovídá elektrické síle (2.92), druhý magnetické síle (2.93).

Ze vztahu (2.94) je zřejmé, že magnetické síly mezi nábojovými paprsky v případě pomalu se pohybujících nábojů  $u_1 \ll c$ ,  $u_2 \ll c$  představují jen malou relativistickou „opravu“ k silám elektrickým. Můžeme si však představit složitější struktury, v nichž budou převládat síly magnetické. Mysleme si například kladné a záporné náboje o téže velikosti lineární hustoty  $\tau$  rovnoměrně rozložené na přímce. Jsou-li oba druhy náboje v klidu, bude tato přímka elektricky neutrální. Představme si nyní, že se náboje jednoho znaménka, například záporné, začnou pohybovat podél přímky rychlostí  $u$ . Podle vztahu o kontrakci délek vzroste lineární hustota záporných nábojů na  $-\gamma \tau$  a přímka se stane nabitou s hustotou  $\tau(1 - \gamma)$ . Máme-li nyní dvě takové, pro jednoduchost identické rovnoběžné přímky ve vzdálenosti  $r$ , budou na sebe působit elektrickou silou

$$f_c = \frac{\tau^2 (1 - \gamma)^2}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.98)$$

Abychom určili celkovou sílu působící na jednotku délky druhé přímky, musíme určit zvlášť sílu působící na kladné a záporné náboje. Na nehybné kladné náboje působí zřejmě síla  $f = \tau^2 (1 - \gamma) / 2\pi\epsilon_0 r$ . Přejdeme-li do klidové soustavy záporných nábojů druhé přímky, zjistíme, že na ně působí ze strany první přímky stejně velká síla. Výsledná celková síla na jednotku délky druhé přímky bude, jak víme, táž i v laboratorní soustavě, takže dostáváme

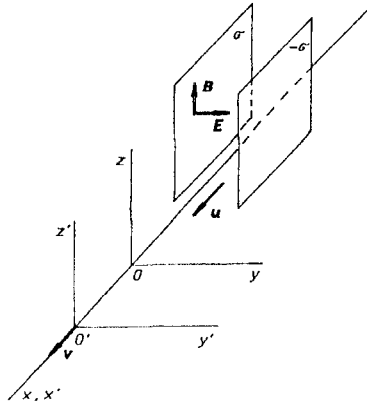
$$f = 2 \frac{\tau^2 (1 - \gamma)}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.99)$$

Srovnáním (2.98) a (2.99) zjistíme, že celková přitažlivá síla (2.99) je mnohem větší než nepatrná odpudivá síla elektrická (2.98). V prvním přiblížení je celková síla  $f$  přitažlivou silou magnetickou

$$f \approx f_m = \frac{\tau^2}{\pi \epsilon_0 r} \left[ 1 - (1 - \beta^2)^{-1/2} \right] = -\frac{\mu_0 \tau^2 u^2}{2\pi r}. \quad (2.100)$$

#### d) Transformace složek elektrického a magnetického pole

Na závěr této kapitoly se budeme zabývat otázkou, jak se transformují složky elektrického a magnetického pole při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé. Budeme opět předpokládat, že obě soustavy  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou ve vzájemném



Obr. 2.10 K odvození transformačních vztahů pro složky intenzity elektrického pole a magnetické indukce.

pohybu znázorněném na obr. 2.10. V prostoru umístíme nabitý rozlehlý deskový kondenzátor s plošnou hustotou  $\sigma$  tak, že jeho desky budou rovnoběžné s rovinou  $xz$ . Předpokládejme dále, že tento kondenzátor se bude pohybovat ve směru osy  $x$  konstantní rychlostí  $u$  v soustavě  $\Sigma$ , respektive  $u'$  v soustavě  $\Sigma'$ . Situace je znázorněna na obr. 2.10. Myšlený kondenzátor můžeme tedy považovat za soustavu dvou nekonečných rovin tvořených nábojovými paprsky s opačným znaméním náboje. Budeme-li v soustavě  $\Sigma$  superponovat elektrická pole (1.96) a magnetická pole (2.91) těchto dvou rovin, zjistíme, že vektor intenzity elektrického pole  $E$  je orientován ve směru osy  $y$  a má velikost  $E = \sigma/\epsilon_0$ , vektor magnetické indukce  $B$  je orientován ve směru osy  $z$  a má velikost  $B = \mu_0 \sigma u$ .

Stejný obraz budeme ovšem pozorovat i v soustavě  $\Sigma'$ , pouze s tím rozdílem, že musíme dosadit čárkované hodnoty  $\sigma'$ ,  $u'$ . Podle zákona skládání rychlostí (2.14) dostaneme

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \quad \beta'_u = \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \beta_u = \frac{u}{c}, \quad \beta'_u = \frac{u'}{c}. \quad (2.101)$$

Abychom určili  $\sigma'$ , musíme nejdříve přejít ze soustavy  $\Sigma$  do klidové soustavy kondenzátoru  $\Sigma''$  (soustavy pohybující se vůči laboratorní soustavě rychlostí  $u$ ) a najdeme zde  $\sigma'' = \sigma/\gamma_u$ . Z této soustavy pak přejdeme do soustavy  $\Sigma'$ , kde bude

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\gamma'_u \sigma}{\gamma_u} = \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1}{(1 - \beta_u^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1}{\left[ 1 - \left( \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta} \right)^2 \right]^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma}{\gamma_u} \frac{1 - \beta_u \beta}{[(1 - \beta^2)(1 - \beta_u^2)]^{1/2}} = \sigma \gamma (1 - \beta_u \beta). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Potom

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \gamma \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\beta_u \beta \sigma}{\epsilon_0} \right) = \gamma \left( E_y - \beta c \frac{\mu_0 \sigma u}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} \right) = \gamma (E_y - \beta c B_z)$$

a

$$\begin{aligned} B'_z &= \mu_0 \sigma' u' = \mu_0 \sigma \gamma c (\beta_u - \beta) = \gamma (\mu_0 \sigma u - \mu_0 \sigma v) \\ &= \gamma \left( B_z - \frac{\beta \sigma}{c \epsilon_0} \right) = \gamma \left( B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right). \end{aligned}$$

Kdybychom nyní orientovali myšlený kondenzátor rovnoběžně s rovinou  $xy$ , našli bychom vztahy mezi složkami  $z$  elektrického pole a složkami  $y$  magnetického pole. Podobně bychom z tohoto myšlenkového experimentu mohli usoudit, že složky  $E_x$  a  $B_x$  se při transformaci nemění. Dostáváme tedy obecné transformační vzorce

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma (E_y - \beta c B_z), & E'_z &= \gamma (E_z + \beta c B_y), \\ B'_x &= B_x, & B'_y &= \gamma \left( B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right), & B'_z &= \gamma \left( B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Vidíme, že složky elektrického a magnetického pole jsou vzájemně nerozlučně spjatý transformačními vztahy. (V relativistické elektrodynamice se ukazuje, že představují složky jediného čtyřrozměrného antisymetrického tenzoru).

Předpokládáme-li, že v soustavě  $\Sigma'$  jsou náboje v klidu, bude  $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$  a z (2.103) obdržíme transformace (2.45) jako zvláštní případ. Z transformačních vzorců (2.103) dále plyne, že je-li v soustavě  $\Sigma$  pole čistě elektrické ( $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ), objeví se v soustavě  $\Sigma'$  magnetické pole o složkách

$$B'_x = 0, \quad B'_y = \frac{\beta}{c} E'_z, \quad B'_z = -\frac{\beta}{c} E'_y, \quad (2.104)$$

neboli ve vektorovém tvaru ( $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ )

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v}' \times \mathbf{E}'. \quad (2.105)$$

Analogicky, je-li v soustavě  $\Sigma$  pole čistě magnetické ( $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ), bude v soustavě  $\Sigma'$

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -\beta c B'_z, \quad E'_z = \beta c B'_y, \quad (2.106)$$

neboli

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'. \quad (2.107)$$

Pro malé rychlosti  $v \ll c$  můžeme položit  $\gamma \approx 1$  a transformační vztahy (2.103) zjednodušit na

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (2.108)$$

Pomocí obecných transformací (2.103) se můžeme rovněž přesvědčit, že existují určité kombinace vektorů  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  a  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , které se při transformaci mezi dvěma inerciálními soustavami souřadnic nemění. Takové veličiny nazýváme *invarianty elektromagnetického pole*. Jsou to

$$II = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad \Sigma = B^2 - \frac{1}{c^2} E^2. \quad (2.109)$$

Ze vztahů (2.109) zejména plyne, že jsou-li vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  v nějaké inerciální soustavě navzájem kolmé, zachovávají si tuto vlastnost ve všech inerciálních soustavách.

### 3 Stacionární pole

V předcházejících kapitolách byla podrobně diskutována invariance elektrického náboje vůči pohybu. Bylo ukázáno, že elektrický náboj je veličina nezávislá na pohybu jeho nositele, takže například účinky libovolného elektrostatického pole na daný náboj jsou nezávislé na pohybu tohoto náboje. Platnost zákona invariantnosti elektrického náboje, který je jedním z nejobecnějších fyzikálních zákonů, umožňuje měřit náboj nezávisle na jeho pohybu, a dovoluje tudíž kvantitativně sledovat jeho pohyb.

V této kapitole započneme studovat jevy, které nastávají při přemísťování náboje. To znamená, že se budeme zabývat jednak popisem samotného pohybu náboje, jednak budeme studovat jeho příčiny a fyzikální projevy. Od elektrostatiky přejdeme tedy k *elektrodynamice*. Omezíme se však na *stacionární přiblížení*, tj. na situaci, kdy příslušné makroskopické veličiny nezávisí explicitně na čase. Na rozdíl od kapitoly 2 budeme vycházet z experimentálních poznatků získaných na makroskopických soustavách, které budeme zobecňovat. Budeme tedy induktivním postupem budovat *makroskopickou* teorii stacionárních elektrických (a magnetických) jevů.

#### 3.1 Elektrický proud

##### 3.1.1 Pojem elektrického proudu, hustota proudu

Samotné přemísťování elektrického náboje nazýváme *elektrickým proudem*. Pro jeho kvantitativní zavedení předpokládejme (jako dosud vždy), že pozorování provádíme v určité inerciální soustavě, v níž je dána pevná orientovaná plocha  $S$  (viz obr. 3.1).<sup>15</sup> Můžeme si představit, že v prostoru dochází k pohybu nositelů náboje, z nichž některé prochází uvažovanou plochou  $S$ . Projde-li v časovém intervalu  $\Delta t$  touto plochou v kladném směru náboj  $\Delta Q$ , definujeme veličinu

$$I_{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

kteou nazýváme *průměrným proudem*. Limitní hodnotu

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3.2)$$

označíme jako *okamžitý proud* (nebo krátce proud) tekoucí plochou  $S$ .

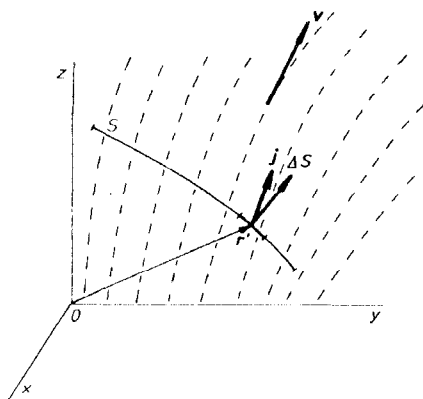
<sup>15</sup> O orientaci plochy viz Dodatek I.

Obecně je třeba považovat proud za funkci času. Je-li proud skutečně s časem proměnný, mluvíme o *nestacionárním proudu*, proud časově neproměnný nazýváme *proudem stacionárním*. Množství náboje  $Q$ , které proteče danou plochou v konečném časovém intervalu  $(0, t)$ , je zřejmě dáno vztahem

$$Q = \int_0^t I(t) dt, \quad (3.3)$$

který se v případě stacionárního proudu redukuje na prostý součin

$$Q = It. \quad (3.4)$$



Obr. 3.1 K definici proudu a jeho hustoty.

Proud je zřejmě skalární veličina, která může nabývat kladných i záporných hodnot. Kladný je tehdy, protéká-li v kladném směru kladný náboj. Jestliže přitom vytéká z jednoho objemu a vtéká do druhého, znamená pravá strana (3.1), popř. (3.2), přírůstek náboje za jednotku času v objemu, kam náboj vtéká, nebo úbytek náboje za jednotku času v objemu, z něhož náboj vytéká. Průchod kladného náboje jedním směrem je ekvivalentní průchodu záporného náboje opačným směrem.

Přejdeme k definici hustoty proudu. *Hustotou proudu* rozumíme vektorovou veličinu  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  definovanou v každém bodě plochy  $S$  protékané proudem, která popisuje rozložení proudu na této ploše. Proud  $I_i$  tekoucí libovolnou částí  $S_i$  plochy  $S$  lze pak vyjádřit vztahem

$$I_i = \int_{S_i} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.5)$$

který můžeme považovat za integrální definiční rovnici hustoty proudu (srov. analogický postup při zavádění pojmu hustoty náboje v článku 1.1.4). Z významu hustoty proudu vyplývá, že proud  $\Delta I$  tekoucí velmi malou ploškou  $\Delta S$  tvořící část plochy  $S$ , bude možné přibližně vyjádřit vztahem (viz obr. 3.1)

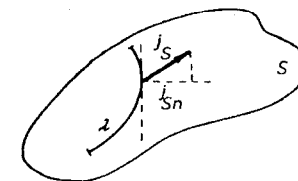
$$\Delta I = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad (3.6)$$

ve kterém  $\mathbf{r}'$  představuje libovolný bod plošky  $\Delta S$ . Ve speciálním případě, kdy je proud rovnoměrně rozdělen po celé ploše rovinné  $S$ , tj. v případě, kdy má proudová hustota ve všech bodech plochy stejnou velikost a směr, redukuje se integrál (3.5) na prostý součin

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}. \quad (3.7)$$

Hustota proudu reprezentuje nové vektorové pole. Z toho, co o ní bylo dosud řečeno, je zřejmé, že její orientace udává v daném bodě kladný směr proudu a její velikost vyjadřuje velikost proudu připadající na jednotku plochy. Hustota stacionárního proudu zřejmě nezávisí na čase, zatímco hustota nestacionárního proudu je explicitní funkcí času.

Pro popis rozložení proudu ve vodiči je výhodné zavést pojmy analogické těm, které se užívají pro popis rozložení elektrostatického pole. *Proudovou čarou* rozumíme křivku, jejíž tečny mají vždy směr hustoty proudu. *Proudovou trubici* rozumíme část prostoru (z vnějšku) vymezenou plochou tvořenou proudovými čarami. Touto plochou, která tvoří plášť trubice, tedy neprotéká žádný proud. Hustotu proudu chápeme v celé této knize (s výjimkou oddílu 5.4) jako makroskopickou veličinu, která nebere zřetel na diskretní mikrofyzikální strukturu náboje. V tomto ohledu je zcela analogická hustotě náboje, se kterou jsme pracovali v kapitole I.



Obr. 3.2 K definici hustoty plošného proudu.

Dosud jsme proud považovali za prostorovou záležitost a chápali jsme jej jako přemístování objemově rozložených nábojů. Analogicky však můžeme hovořit také o plošných proudech, kterými rozumíme pohyb plošných nábojů po povrchu určitých těles. Necht' je dáno určité těleso, na jehož povrchu  $S$  je rozložen plošný náboj, který se po tomto povrchu může pohybovat. Pak můžeme zavést pojem plošného proudu  $I_S$ , tekoucího libovolnou křivkou  $\lambda$ , ležící na ploše  $S$  (viz obr. 3.2).

Označíme-li  $\Delta Q$  náboj, který projde křivkou  $\lambda$  ve zvoleném směru za časový interval  $\Delta t$ , máme analogicky k (3.2)

$$I_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (3.2a)$$

Můžeme také zavést *hustotu plošného proudu*  $\mathbf{j}_S$ , (srov. čl. 1.1.4). Analogicky k (3.5) bude platit

$$I_S = \int_{\lambda} j_{S,n} d\lambda. \quad (3.5a)$$

Pojem plošného proudu je užitečný při vyšetřování magnetického pole v látkách (viz oddíl 3.5).

Jednotkou proudu v Mezinárodní soustavě jednotek je *ampér* (A), který je v této soustavě základní jednotkou a je definován pomocí magnetických účinků proudu (viz čl. 3.3.2, popř. Dodatek 2). Vztah mezi ampérem a jednotkou náboje coulombem je dán výrazem (3.2), respektive (3.3). *Jeden coulomb je takové množství náboje, které protече danou plochou za jednu sekundu, jestliže touto plochou teče proud jednoho ampéru.* Jednotkou hustoty objemového proudu je podle (3.5) až (3.7) *ampér na metr čtverečný* ( $A \cdot m^{-2}$ ). Analogicky jednotkou hustoty plošného proudu je *ampér na metr* ( $A \cdot m^{-1}$ ).

### 3.1.2 Mechanismy vedení proudu

Přemísťování náboje v prostoru může být uskutečňováno několika způsoby. Podle charakteru přemísťování náboje rozlišujeme několik typů proudu. Především může jít o *volné proudy*, které vznikají při přemísťování volných nábojů na makroskopické vzdálenosti. Volné proudy mohou být realizovány buď pohybem volných nositelů náboje v látkovém prostředí (tj. ve vodičích), nebo makroskopickým pohybem volných nositelů náboje v prázdném prostoru. V prvním případě mluvíme o *proudech kondukčních*, ve druhém případě o *proudech konvekčních*.

Konkrétní fyzikální zákonitosti platné pro kondukční proudy budou diskutovány v kapitole 7. Bude například ukázáno, že zatímco v pevných látkách je elektrický proud realizován především elektrony, v kapalinách jsou standardními nositeli proudu ionty a průchod proudu je doprovázen transportem hmoty.

V kapitole o elektrostatice jsme viděli, že při změně polarizace dielektrika může docházet ke změnám v prostorovém rozložení makroskopických vázaných nábojů, při nichž nedochází k pohybu žádných nositelů náboje na makroskopické vzdálenosti. Změny v prostorovém rozložení makroskopických vázaných nábojů jsou tedy působeny zásadně odlišným pohybem nositelů náboje než

v případě volných proudů. Mluvíme o *polarizačním proudu* v dielektriku, který je jedním typem tzv. *vázaných proudů*.<sup>16</sup>

V případě volných proudů existuje jednoduchý vztah mezi hustotou proudu, hustotou náboje a rychlostí pohybu. Nechť jsou v daném místě prostoru rozloženy kladné náboje s objemovou hustotou  $\rho_+$  a záporné náboje s hustotou  $\rho_-$ . Nechť dále  $\mathbf{v}_+$  je rychlost kladných a  $\mathbf{v}_-$  rychlost záporných nábojů. Množství kladného náboje  $\Delta Q_+$ , které projde malou ploškou  $\Delta S$  za krátký časový interval  $\Delta t$ , vyplní zřejmě objem  $\Delta V$  (viz obr. 3.3), takže platí  $\Delta Q_+ = \rho_+ \Delta V = \rho_+ (\Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}_+) \Delta t$ . Hustota proudu  $\mathbf{j}_+$  tvořeného kladnými náboji je tedy dána vztahem

$$\mathbf{j}_+ = \rho_+ \mathbf{v}_+. \quad (3.8)$$

Pro hustotu proudu vytvořeného zápornými náboji platí analogicky

$$\mathbf{j}_- = \rho_- \mathbf{v}_-. \quad (3.9)$$

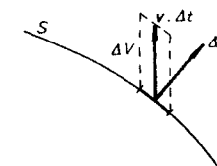
Celková hustota kondukčního proudu v daném bodě je pak dána vektorovým součtem obou příspěvků

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_-. \quad (3.10)$$

V praxi nastává často případ, že vodič je jako celek elektricky neutrální, takže platí  $|\rho_+| = |\rho_-|$ . Potom lze celkovou proudovou hustotu  $\mathbf{j}$  zřejmě vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}, \quad (3.11)$$

kde  $\rho = |\rho_+| = |\rho_-|$  a  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$  je relativní rychlost obou typů nositelů.



Obr. 3.3 K vyjádření hustoty proudu náboje rozloženého s objemovou hustotou  $\rho$  a pohybujícího se rychlostí  $\mathbf{v}$ .

Vztahy analogické k (3.8) až (3.11) lze zřejmě získat i pro případ plošných proudů. V těchto jednotlivých vztazích je třeba pouze nahradit proudovou hus-

<sup>16</sup> Polarizační proud v dielektriku je jedním typem vázaných proudů, který reprezentuje makroskopické změny v rozložení skutečných nábojů. V oddílu 3.5 bude zaveden jiný typ vázaného proudu, tzv. *magnetizační proud* v *magnetiku*, pomocí něhož lze popsat vliv látkového prostředí na výsledné magnetické pole v daném místě. Magnetizační proud však nereprezentuje žádný přenos náboje v makroskopickém měřítku, a nevyjadřuje tudíž žádný skutečný makroskopický proud ve smyslu uvedené definice. Nebudeme jej proto v tomto článku uvažovat. Podobný charakter má i tzv. *Maxwellův proud* ve vakuu, který se zavádí při formulaci obecných rovnic nestacionárního elektromagnetického pole (viz kapitola 5).



totu  $\mathbf{j}$  hustotou plošného proudu  $\mathbf{j}_S$  a hustoty objemového rozložení náboje příslušnými plošnými hustotami.

V případě polarizačního proudu v dielektriku lze hustotu proudu jednoduše vyjádřit pomocí časové změny vektoru polarizace. Uvažujme za tímto účelem libovolnou uzavřenou plochu  $S$  uvnitř dielektrika a označme  $Q_P$  celkový vázaný náboj v ní obsažený. Celkový polarizační proud  $I_P$  tekoucí plochou  $S$  lze podle (3.5) vyjádřit pomocí hustoty  $\mathbf{j}_P$  ve tvaru

$$I_P = \int_S \mathbf{j}_P \cdot d\mathbf{S}.$$

Na druhé straně je proud  $I_P$  dán úbytkem náboje  $Q_P$  za jednotku času,  $I_P = -dQ_P/dt$ . V případě, že uvnitř plochy jsou vázané náboje jen objemově rozložené, můžeme podle čl. 1.5.2 psát

$$Q_P = \int_V \rho_P dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

což znamená

$$I_P = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

Spojením obou vyjádření dostáváme pro hustotu polarizačního (posuvného) proudu  $\mathbf{j}_P$

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Všechny tři uvedené mechanismy, které reprezentují pohyb reálných nábojů, mohou obecně přispívat k výslednému proudu. Celkový proud tekoucí v prostoru je pak superpozicí příspěvků všech těchto mechanismů. Hustota posuvného proudu nemůže však být časově nezávislá, poněvadž polarizace dielektrika nemůže do nekonečna vzrůstat ani klesat. Posuvný proud proto nemůže přispívat ke stacionárnímu proudu, který je tudíž vždy dán jen proudy volnými.

### 3.1.3 Rovnice kontinuity proudu

Tato rovnice je matematickým vyjádřením zákona zachování náboje. Jak bylo vyloženo v předchozích kapitolách, vyjadřuje zákon zachování náboje experimentálně ověřený poznatek (platný v makroskopickém i mikroskopickém měřítku), že náboj nikde nevzniká ani nezaniká.

Uvažujme libovolnou uzavřenou plochu  $S$ , která tvoří povrch tělesa objemu  $V$ . Předpokládejme, že z této plochy vytéká proud  $I$ , takže za krátký časový in-

terval  $\Delta t$  z ní vyteče náboj  $\Delta Q'$ , o který se vzhledem k zákonu o zachování náboje musí zmenšit celkový náboj uzavřený v ploše. Označíme-li tento úbytek  $-\Delta Q$ , dostaneme  $-\Delta Q = I \Delta t$ , odkud plyne pro limitní případ  $\Delta t \rightarrow 0$  podmínka

$$I + \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (3.13)$$

nazývaná *rovnice kontinuity proudu* v integrálním tvaru, v níž  $Q = Q(t)$  reprezentuje okamžité množství náboje uzavřeného v ploše  $S$ .

Rovnice (3.13) je přímým důsledkem zákona zachování náboje, a platí tudíž zcela obecně. Vyloučíme-li z úvah plošné náboje a plošné proudy, můžeme získat její matematicky konkrétnější tvar. Především lze vztahem typu (3.5) vyjádřit proud  $I$  pomocí hustoty proudu

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (3.14)$$

Dále můžeme náboj  $Q$  vyjádřit jako objemový integrál hustoty náboje  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ . Předpokládáme-li, že poloha a tvar plochy  $S$  nezávisí na čase, můžeme psát

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

a levou stranu (3.14) upravit známým způsobem pomocí Gaussovy věty. Dostaneme diferenciální tvar rovnice kontinuity

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.15)$$

Ve speciálním případě stacionárního proudu musí být člen  $dQ/dt$ , popř.  $\partial \rho / \partial t$  ve vztazích (3.13) a (3.14), a tedy i v (3.15) roven nule. Z libovolné uzavřené plochy nemůže totiž vytékat od nuly různý stacionární (tj. časově nezávislý) proud, neboť by v objemu jí ohraničeném musel existovat buď zdroj nekonečně velkého náboje, nebo by se v něm musel nekonečně velký náboj ztrácet. Pro stacionární proud má tedy rovnice kontinuity tvar

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.16)$$

nebo

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (3.17)$$

Zákon zachování náboje se vztahuje na všechny náboje uzavřené v uvažované ploše  $S$ . Bylo by proto přirozené proud  $I$  a náboj  $Q$  v (3.13) chápat

jako celkový proud vytékající z plochy  $S$  a jako celkový náboj v ní obsažený. Podobně v diferenciálním tvaru (3.15) by vystupovala celková hustota proudu  $\mathbf{j}$  a celková hustota náboje  $\rho$  v daném bodě. Častěji se však rovnice kontinuity formuluje pro volné proudy, které mají větší praktický význam. Symboly v (3.13) a (3.15) mají pak význam příslušných veličin volného proudu v dané soustavě. Platnost rovnice kontinuity v tomto obvyklém tvaru je ovšem vázána na podmínku, která je v praxi často splněna, a to že se v dané soustavě zachovává charakter nositelů náboje, tj. že se například počet volných nositelů náboje nemění na úkor počtu nositelů náboje vázaného.

## 3.2 Stacionární elektrické pole a elektrický obvod

### 3.2.1 Základní vlastnosti stacionárního elektrického pole

Ve stacionárním stavu nezávisí žádná makroskopická veličina na čase. Ve stacionárních soustavách může tedy existovat pouze časově neproměnné rozdělení nábojů v prostoru, které je popsáno časově neproměnnou objemovou hustotou. Ve srovnání s elektrostatikou je však situace obecnější v tom, že zatímco některé náboje mohou být v klidu, jiné konají makroskopický pohyb, a realizují tedy stacionární elektrický proud. Jeho hustota  $\mathbf{j}$  je časově neproměnná a vyhovuje rovnici kontinuity ve tvaru (3.16), respektive (3.17). Elektrické pole vytvořené těmito stacionárně rozloženými náboji se nazývá stacionárním elektrickým polem. Vyšetřeme nyní jeho vlastnosti.<sup>17</sup>

Experimentální zkušenost ukazuje, že elektrické stacionární pole je (podobně jako pole elektrostatické) potenciální a konzervativní. Jeho intenzita  $\mathbf{E}$  (definovaná vztahy typu (1.32), respektive (2.26)) splňuje tedy v každém bodě podmínku (1.63)

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

a stacionární elektrické pole může být rovněž popsáno pomocí skalárního potenciálu  $\varphi(\mathbf{r})$ ;  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r})$ .

Fyzikální podstatu konzervativnosti stacionárního pole snadno pochopíme na základě poznatků vyložených v kapitole 2. Jak uvidíme při vyšetřování elektrické vodivosti různých druhů prostředí v kapitole 7, je makroskopická rychlost nábojů realizujících proud téměř vždy velmi malá ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu. Elektrické pole takto pomalu pohybujícího se náboje je dáno vztahem (2.36), který je formálně shodný s výrazem pro elektrostatické pole bodového náboje. Je tedy zřejmé, že při vyšetřování stacionárního pole není třeba rozlišovat, zda náboje, které pole vytvářejí, jsou v klidu či v pohybu. Makro-

<sup>17</sup> Vedle stacionárního elektrického pole budí pohybující se náboje ještě stacionární pole magnetické. Jeho vlastnosti budeme vyšetřovat v následujícím oddílu.

skopické stacionární pole, představující střední hodnotu pole nábojů v makroskopickém stacionárním pohybu, bude tedy časově neproměnné a bude vyhovovat všem základním rovnicím platným pro pole elektrostatické.

Veškerá dosavadní experimentální zkušenost rovněž ukazuje, že pro elektrické stacionární pole platí i *Gaussův zákon*, viz (1.73) a (1.77),

$$\Phi = \frac{Q_c}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}.$$

Podstatný rozdíl mezi oběma typy polí je v tom, že stacionární elektrické pole, na rozdíl od pole elektrostatického, může být trvale nenulové i uvnitř vodičů (ve kterých ovšem teče proud). Úlohy o elektrostatickém a elektrickém stacionárním polí jsou tedy popsány formálně shodnými rovnicemi, liší se však okrajovými podmínkami.

Pro stacionární pole v látkovém prostředí (i uvnitř vodičů) lze zavést vektor elektrické indukce  $\mathbf{D}$  vztahy analogickými jako v elektrostatice. Platí (1.246),

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

kde  $\mathbf{P}$  je vektor polarizace prostředí. Pro elektricky měkká vodivá prostředí lze zavést i elektrickou susceptibilitu  $\chi_e$  permitivitu  $\epsilon$ , takže opět máme<sup>18</sup>, viz (1.255) a (1.258),

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Pro vektor elektrické indukce platí Gaussův zákon. Pro libovolnou uzavřenou plochu  $S$ , ve které je obsažen volný náboj  $Q$ , její integrální tvar zní, viz (1.247),

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

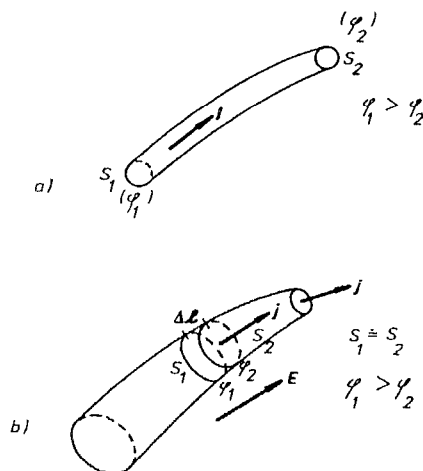
V případech, kdy rozložení volného náboje lze v okolí daného bodu popsat objemovou hustotou  $\rho(\mathbf{r})$ , je možné známým postupem (viz čl. 1.5.3) získat diferenciální tvar Gaussova zákona (1.248)

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho.$$

<sup>18</sup> Zavedení vektoru elektrické polarizace a elektrické indukce pro vodiče je zcela logické. V každém vodiči jsou totiž kromě volných nositelů náboje ještě další objekty složené z kladně a záporně nabitých částic (iony, molekuly, krystalová mřížka v kovech apod.). O nich je třeba předpokládat, že se mohou polarizovat. Elektrické pole způsobí tedy nejen vznik elektrického proudu, ale obecně i vznik nenulové elektrické polarizace prostředí a s ní související vznik makroskopických vázaných nábojů. (V elektrostatice není nutné polarizaci vodičů uvažovat proto, že intenzita pole je v nich nulová). Experimentální studium polarizace vodičů je ovšem značně ztíženo přítomností volných nábojů, takže konkrétní hodnoty susceptibilitivity či permitivity nejsou zpravidla známy.

### 3.2.2 Ohmův zákon pro homogenní vodiče

Pro zkoumání dalších vlastností stacionárních soustav je již třeba vzít v úvahu konkrétní způsob realizace proudu; v případě proudu kondukčního pak i konkrétní vlastnosti daného prostředí. V tomto článku se budeme zabývat vlastnostmi vedení stacionárního proudu ve velké třídě homogenních vodičů.



Obr. 3.4 K formulaci Ohmova zákona v homogenním vodiči: a) v integrálním tvaru, b) v diferenciálním tvaru.

Je zřejmé, že elektrické pole může být příčinou přemísťování volných nábojů ve vodiči, tedy příčinou vzniku elektrického proudu. Je proto přirozené očekávat, že mezi velikostí intenzity pole (respektive mezi velikostí rozdílu potenciálu) a velikostí proudu v daném okamžiku bude existovat vztah, který bude závislý na vlastnostech užitého vodiče. Studium této závislosti se na počátku devatenáctého století zabýval G. S. Ohm, který na základě experimentů prováděných především na kovech formuloval vztah, který je dnes všeobecně nazýván *Ohmovým zákonem* a který platí pro velkou třídu homogenních vodičů.

*Ohmův zákon říká, že proud I tekoucí v určitém okamžiku daným vodičem je úměrný okamžité hodnotě spádu potenciálu U na tomto vodiči.* Pro kvantitativní formulaci Ohmova zákona uvažujme v homogenním izotropním vodiči část proudové trubice, v níž teče proud I, vymezenou dvěma ekvipotenciálními plochami  $S_1, S_2$  pro jejichž potenciály  $\varphi_1, \varphi_2$  platí  $\varphi_1 > \varphi_2$  (viz obr. 3.4a). Spádem potenciálu na této části vodiče nazveme kladnou veličinu

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.18)$$

Veličina  $U$  vyjadřuje zřejmě napětí plochy  $S_1$  o větším potenciálu vůči ploše  $S_2$ ; (srov. čl. 1.2.3). Ohmův zákon je pak zvykem psát ve tvaru

$$I = \frac{1}{R} U. \quad (3.19)$$

Konstanta  $R$  je závislá jednak na geometrickém tvaru vodiče, jednak na druhu látky, z níž je zhotoven. Nazýváme ji *elektrickým odporem* vodiče.

Elektrický odpor  $R$ , definovaný vztahem (3.19), charakterizuje schopnost vodiče vést elektrický proud. Je vždy považován za kladnou veličinu, čímž je dána orientace vodiče. Za kladný směr ve vodiči je tudíž brán směr poklesu potenciálu. Ohmův zákon ve tvaru (3.18) také říká, že vodiči vždy teče proud ve směru spádu potenciálu.

Pro vzájemné srovnání vlastností různých látek je výhodné zavést veličinu, která nezávisí na tvaru vodiče. Touto veličinou je *měrný (specifický) odpor (rezistivita)  $\rho_R$* , jehož fyzikální smysl snadno pochopíme vyšetřováním poměrů v proudové trubici.

Na libovolnou část proudové trubice vymezenou ekvipotenciálními plochami je možné aplikovat Ohmův zákon. Uvažujme její malou část vymezenou plochami  $S_1, S_2$  o vzdálenosti  $\Delta l$  (viz obr. 3.4b) a předpokládejme, že v tomto úseku můžeme průřez  $S$  proudové trubice považovat za konstantní. Uvědomíme-li si, že každým průřezem trubice tvořícím ekvipotenciální plochu protéká stejný proud, zjistíme použitím Ohmova zákona, že odpor daného úseku je přímo úměrný délce  $\Delta l$  a nepřímo úměrný průřezu  $S$ . Je-li uvažovaný úsek i průřez  $S$  dostatečně malý, můžeme i pro případ nehomogenního vodiče psát známý vztah

$$R = \rho_R \frac{\Delta l}{S}. \quad (3.20)$$

Podle něho vyjadřuje měrný odpor velikost odporu vodiče jednotkové délky a jednotkového průřezu. (Ve shodě s definicí můžeme například říci, že měrný odpor je číselně roven odporu vodiče ve tvaru krychle o jednotkové hraně, jehož protilehlé stěny jsou udržovány na konstantních potenciálech – třeba přiložením vhodných elektrod.) V případě homogenního vodiče o konstantním měrném odporu  $\rho_R$  lze právě uvedeným postupem jednoduše vyjádřit i odpor  $R$  libovolně dlouhého úseku  $l$  proudové trubice konstantního průřezu  $S$ . Platí analogicky k (3.20)

$$R = \rho_R \frac{l}{S}. \quad (3.20a)$$

Kromě odporu a měrného odporu se k charakterizování vlastností látek při vedení elektriny užívá *vodivost  $G$*  a *měrná vodivost (konduktivita)  $\gamma$* . Jsou definovány vztahy

$$G = \frac{1}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{\rho_R}. \quad (3.21)$$

Ohmův zákon vyjádřený ve tvaru (3.19) není vhodný pro obecné úvahy, neboť veličiny v něm vystupující závisí na tvaru uvažovaného vodiče. Užitím pojmu měrného odporu (resp. měrné vodivosti) je však možné získat jeho vyjádření v tzv. *diferenciálním tvaru*, vyjadřujícím vlastnosti prostředí v daném bodě (srov. čl. 1.2.5). Abychom ho našli, uvažujme opět malou část velmi úzké proudové trubice podle obr. 3.4b. Napětí  $\Delta U$  mezi ekvipotenciálními plochami  $S_1, S_2$  můžeme vyjádřit pomocí intenzity pole  $\mathbf{E}$

$$\Delta U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{l}.$$

Proud  $I$  tekoucí trubicí lze vyjádřit pomocí hustoty proudu  $\mathbf{j}$ :  $I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$ . Dosadíme-li tyto hodnoty do (3.19) a vezmeme-li v úvahu, že  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{j}$  jsou kolmé k plošce  $S$ , dostaneme s ohledem na (3.20), (3.21) výsledek

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad (3.22)$$

ktej představuje hledaný diferenciální tvar Ohmova zákona. Vztah (3.22) platí podobně jako (3.19) pro většinu homogenních vodičů a může být také považován za definici měrné vodivosti.

Vztah (3.19) slouží také k odvození jednotek. V Mezinárodní soustavě je jednotkou elektrického odporu jeden *ohm* ( $\Omega$ ). Podle (3.19) má vodič odpor jednoho ohmu tehdy, teče-li jím při napětí jednoho voltu proud jednoho ampéru. Jednotkou měrného odporu je podle (3.20) *ohm metr* ( $\Omega \cdot \text{m}$ ). Pomocí vztahů (3.21) lze dále odvodit jednotky vodivosti a měrné vodivosti. Jednotkou vodivosti je *ohm na minus první* ( $\Omega^{-1}$ ), nazývaný *siemens* (S). Jednotkou měrné vodivosti je  $(\text{ohm metr})^{-1}$ ,  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ .

Ohmův zákon je materiálový vztah, který přibližně popisuje chování reálných vodičů v elektrickém poli. V teorii elektrických a magnetických jevů je jeho význam podobný jako význam vztahu (1.255) popisujícího chování měkkého dielektrika v elektrickém poli. Jako každý lineární vztah mezi dvěma různými fyzikálními veličinami může být považován za aproximaci složitější závislosti. Fyzikální podmínky a meze jeho platnosti, které blíže poznáme v kapitole 7, jsou u různých typů vodičů značně rozdílné. Zatímco například v případě homogenních kovů přestává Ohmův zákon zpravidla platit až za velmi extrémních podmínek, existuje řada vodivých prostředí různých skupenství, ve kterých Ohmův zákon v podstatě vůbec neplatí. Nehledě na tyto skutečnosti, má Ohmův zákon zásadní důležitost v teorii elektrických obvodů, neboť definuje pojem lineárního vodiče, v němž se proudy buzené různými příčinami mohou superponovat, aniž by se navzájem ovlivňovaly.

Pro lineární homogenní a izotropní vodič je měrná vodivost (popř. měrný odpor) kladná skalární veličina. V lineárním anizotropním prostředí je měrná vodivost symetrický tenzor druhého řádu. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru (3.22) je pak třeba zobecnit. Pro jednotlivé složky hustoty proudu platí

$$\begin{aligned} j_x &= \gamma_{xx} E_x + \gamma_{xy} E_y + \gamma_{xz} E_z, \\ j_y &= \gamma_{yx} E_x + \gamma_{yy} E_y + \gamma_{yz} E_z, \\ j_z &= \gamma_{zx} E_x + \gamma_{zy} E_y + \gamma_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (3.23)$$

V anizotropním prostředí nejsou tedy vektory  $\mathbf{j}$  a  $\mathbf{E}$  obecně kolineární.

Užitím Ohmova zákona lze odvodit některé důležité vlastnosti stacionárního elektrického pole v lineárních vodičích. Především je třeba si uvědomit, že v lineárním, homogenním a izotropním vodiči je hustota proudu vektor, a to vždy kolineární s intenzitou elektrického pole. Dále snadno ukážeme, že v lineárním homogenním vodiči protékaném stacionárním proudem je hustota volného i vázaného náboje nulová; užitím rovnice continuity (3.17) a vztahů (1.248) a (3.22) dostaneme pro objemovou hustotu volného náboje

$$\rho = \text{div } \mathbf{D} = \varepsilon \text{div } \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\gamma} \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (3.24)$$

a analogicky pro hustotu náboje vázaného

$$\rho_p = -\text{div } \mathbf{P} = -\chi_e \text{div } \mathbf{E} = -\frac{\chi_e}{\gamma} \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (3.25)$$

Nenulové makroskopické náboje mohou tedy existovat pouze v místech, ve kterých se mění parametry vodiče.

### 3.2.3 Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče

Dosud jsme probírali vlastnosti stacionárního proudu ve vodiči v souvislosti s vlastnostmi příslušného elektrického pole. Existenci stacionárního proudu jsme předpokládali a nestarali jsme se o podmínky, za kterých tato existence přichází y úvahu. Věnujme se nyní této otázce.

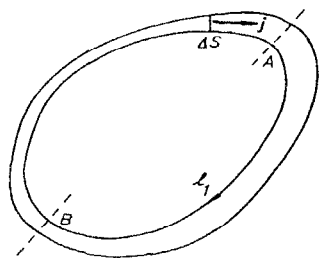
Vzhledem k rovnici continuity (3.16), popř. (3.17), jsou proudové čáry stacionárního proudu v soustavách konečných rozměrů vždy uzavřené křivky, takže nositelé náboje, realizující tento proud, se musí pohybovat po uzavřených drahách. Takový pohyb, a tudíž ani stacionární proud, nemůže být vyvolán elektrostatickým či elektrickým stacionárním polem, neboť obě tato pole jsou potenciální. Jelikož ze zkušenosti víme, že stacionární proud ve vodiči může existovat, musíme předpokládat existenci jiných, a to nepotenciálních silových polí působících na nositele proudu.

Konkrétní podklady pro vyšetřování takových polí dávají experimenty s nehomogenními vodiči, které ukazují, že Ohmův zákon vyjádřený vztahy (3.19), popř. (3.22), pro ně neplatí. Ukazuje se například, že v nehomogenním vodiči může být nulová hustota proudu i při nenulovém poli nebo nenulová hustota proudu při nulovém poli. Tyto výsledky vedou k závěru, že pro nehomogenní vodiče je nutné Ohmův zákon zobecnit. To je možné provést tak, že do vztahu typu (3.22) zahrneme působení žádaných nepotenciálních polí, která jsou obecně neelektrické povahy. (V kapitole 7 budou probrány některé konkrétní formy těchto polí.)

Předpokládáme-li, že zmíněné pole působící na nositele proudu lze popsat silou  $\mathbf{F}^*$ , úměrnou jejich náboji  $q$ , je možné v analogii s intenzitou elektrického pole zavést veličinu  $\mathbf{E}^*$  vztahovou k jednotkovému náboji ( $\mathbf{F}^* = q\mathbf{E}^*$ ) a vztah (3.22) zobecnit na tvar

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*). \quad (3.26)$$

Velichinu  $\mathbf{E}^*$  je zvykem nazývat *vlištěnou (elektromotorickou) intenzitou*. Ohmův zákon tvaru (3.26) vyhovuje uvedeným experimentálním výsledkům. Hustota proudu je nulová v bodech, ve kterých je  $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$ . V bodech s nulovou intenzitou pole je proudová hustota  $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}^*$ .



Obr. 3.5 K vyjádření integrálního tvaru Ohmova zákona v nehomogenním vodiči.

Užitím vztahu (3.26) najdeme nyní odpovídající integrální tvar Ohmova zákona. Vyjádříme křivkový integrál jeho levé i pravé strany podél určité části proudové čáry  $l_1$  mezi dvěma ekvipotenciálními plochami A, B (viz obr. 3.5). Dostaneme

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.27)$$

Proudovou hustotu na levé straně můžeme vyjádřit pomocí proudu  $I$  tekoucího úzkou proudovou trubčicí průřezu  $\Delta S$  vedenou podél čáry  $l_1$  (viz obr. 3.5). Tento proud je podél celé proudové čáry konstantní, takže můžeme psát

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{\mathbf{j}}{\gamma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{j}{\gamma} dl = I \int_{(A)}^{(B)} \frac{dl}{\gamma \Delta S}.$$

Velichina

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{dl}{\gamma \Delta S} \quad (3.20a)$$

však podle (3.20) představuje odpor  $R$  příslušného úseku trubice, integrál

$$U_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

vyjadřuje příslušný pokles potenciálu. Dále zavedeme velichinu

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.28)$$

kterou nazveme *elektromotorickým napětím* působícím na daném úseku proudové čáry. Dostaneme potom celkem

$$I_{AB} = \frac{1}{R} (U_{AB} + \mathcal{E}_{AB}). \quad (3.29)$$

Relace (3.29) vyjadřuje integrální tvar Ohmova zákona pro danou část nehomogenního vodiče. Říká, že proud tekoucí touto částí je úměrný součtu (elektrického) napětí a elektromotorického napětí, jež v ní působí.

Elektromotorické napětí je velichina, která má zřejmě stejný fyzikální rozměr jako potenciál. V Mezinárodní soustavě jednotek se proto měří rovněž ve volttech.

Proudové čáry stacionárního proudu jsou uzavřené křivky. Můžeme proto rozšířit integraci v (3.27) na celou (uzavřenou) čáru  $l_1$  (viz obr. 3.5). Dostaneme

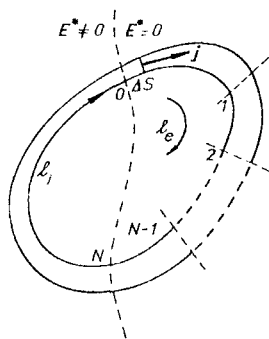
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_c}, \quad (3.30)$$

přičemž  $R_c$  vyjadřuje celkový odpor proudové trubice a  $\mathcal{E} > 0$  vyjadřuje celkovou hodnotu elektromotorického napětí.

Vztah (3.30) říká, že proud tekoucí uzavřenou proudovou trubčicí je přímo úměrný celkovému elektromotorickému napětí a nepřímo úměrný celkovému odporu trubice. V kapitole 7 poznáme některé konkrétní typy elektromotoric-

kých napětí. Uvidíme, že existují vtištěné síly nezávislé na čase. Vzhledem k tomuto faktu z rovnice (3.30) pak také vyplývá možnost existence stacionárního proudu ve vodiči. Výsledek (3.30) se někdy nazývá *Ohmovým zákonem pro uzavřený obvod*.

Uvažujme nyní speciální případ uzavřené proudové trubice, v níž působí vtištěná síla pouze na části  $l_1$  zatímco druhá část  $l_2$  je tvořena homogenním vodičem (viz obr. 3.6). Tento případ je důležitý z praktického hlediska, neboť modeluje tzv. *elektrický obvod* tvořený jednak homogenními pasivními vodiči (část  $l_2$ ), jednak zdroji elektromotorického napětí, například galvanickými články (část  $l_1$ ).



Obr. 3.6 Ohmův zákon pro elektrický obvod.

Vyšetříme nejdříve křivkový integrál (3.27) bráný přes  $l_1$ . Po zavedení označení

$$R_1 = \int_{l_1} \frac{dl}{\gamma \Delta S}, \quad \mathcal{E} = \int_{l_1} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}$$

jej můžeme přepsat na tvar

$$IR_1 = \int_{l_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \mathcal{E} \quad (3.31)$$

ekvivalentní s (3.29), který vyjadřuje závislost napětí mezi ekvipotenciálními plochami  $O, N$  na proudu. Představuje-li proudová trubice na obr. 3.6 model obvodu se zdrojem elektromotorického napětí, jsou řezy  $O, N$  svorkami tohoto zdroje. Rozdíl potenciálu mezi nimi je důležitou charakteristikou. Obvykle se zavádí pojem *svorkového napětí* vztahem

$$U_0 = \int_{l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.32)$$

které je vždy kladnou veličinou. Jelikož platí

$$\int_{l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

je možné místo (3.31) psát

$$\mathcal{E} - R_1 I = U_0. \quad (3.33)$$

Svorkové napětí je tedy vždy menší než elektromotorické napětí. Pouze ve speciálním případě nulového proudu platí mezi nimi rovnost. Rovnice (3.33) vyjadřuje prostou fyzikální situaci, která nastává ve zdroji elektromotorického napětí. Vtištěné síly, působící uvnitř zdroje, rozdělí volné nositele náboje tak, že mezi svorkami působí elektrické pole. V případě, kdy zdrojem neteče žádný proud, nastane rovnovážný (statický) stav při rovnosti elektromotorického a svorkového napětí. Za tohoto stavu platí podle (3.26)  $\mathbf{E} = -\mathbf{E}^*$ , takže na nositele proudu uvnitř zdroje již další síly nepůsobí. Při odběru proudu jsou ze svorek zdroje odváděny náboje, čímž poklesne svorkové napětí i intenzita pole uvnitř zdroje. Působení vtištěných sil není pak zcela vykompenzováno a odváděné náboje mohou být neustále doplňovány.

Přejdeme k vyšetření integrálu přes celou uzavřenou proudovou čáru (obr. 3.6). Integrál (3.27) lze upravit na tvar

$$I \int_{l_1} \frac{dl}{\gamma \Delta S} + I \int_{l_2} \frac{dl}{\gamma \Delta S} = \int_{l_1} \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.34)$$

Označíme-li ještě

$$R_2 = \int_{l_2} \frac{dl}{\gamma \Delta S},$$

dostaneme

$$R_1 I + R_2 I = \mathcal{E}. \quad (3.35)$$

Homogenní část proudové čáry  $l_2$  je možné rozdělit na libovolný počet částí body 1, 2, 3, ...,  $N-1$ . Označíme-li

$$R_{e1} = \int_{(0)}^{(1)} \frac{dl}{\gamma \Delta S}, \quad R_{e2} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{dl}{\gamma \Delta S}, \quad \dots, \quad R_{eN} = \int_{(N-1)}^{(N)} \frac{dl}{\gamma \Delta S},$$

bude zřejmě platit

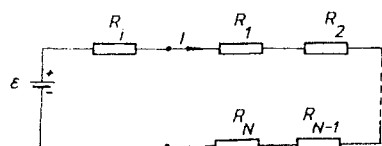
$$R_2 = R_{e1} + R_{e2} + \dots + R_{eN} \quad (3.36)$$

a po dosazení do (3.35) získáme

$$\mathcal{E} = R_1 I + R_{e1} I + R_{e2} I + \dots + R_{eN} I. \quad (3.37)$$

Podle Ohmova zákona pro homogenní vodiče (3.19) vyjadřuje každý člen  $R_{ek}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , spád potenciálu v příslušné části obvodu. Obsah výsledku (3.37) pak můžeme vyjádřit slovy: *součet úbytků napětí na všech odporech v obvodu působících je roven celkovému elektromotorickému napětí  $\mathcal{E}$ .*

Uzavřenou proudovou trubici podle obr. 3.6 považujeme za uzavřený elektrický obvod, jestliže plášť trubice souhlasí s povrhem vodičů. Můžeme ji pak překreslit do schematického tvaru podle obr. 3.7. Značkou  $\boxed{\text{—}}$  je — jak známo — reprezentován zdroj elektromotorického napětí a jednotlivými značkami  $\boxed{\text{—}}$  odpory jednotlivých úseků vodičů.

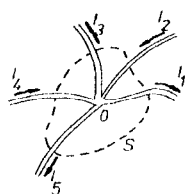


Obr. 3.7 Schematické zobrazení obvodu podle obr. 3.6.

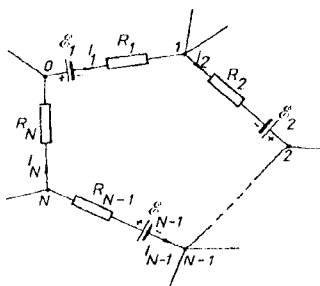
### 3.2.4 Kirchhoffova pravidla pro stacionární obvod

Tímto označením rozumíme dva poznatky, které jsou východiskem při řešení libovolně složitých elektrických obvodů.

I. *Kirchhoffovo pravidlo* je důsledkem rovnice kontinuity proudu ve stacionárním přiblížení. Týká se celkového proudu vytékajícího ze styčného místa několika vodičů (tzv. uzlu).



Obr. 3.8 K formulaci I. Kirchhoffova pravidla.



Obr. 3.9 K formulaci II. Kirchhoffova pravidla.

Uvažujme soustavu několika vodičů, které se stýkají ve společném uzlu (viz obr. 3.8) a které jsou obklopeny nevodivým prostředím. Označme postupně  $I_1, I_2, \dots, I_N$  proudy tekoucí jednotlivými vodiči. Jestliže obklopíme uzel 0 libovolnou uzavřenou plochou  $S$ , bude celkový proud vytékající z této plochy zřejmě roven algebraickému součtu proudů tekoucích jednotlivými vodiči. Podle (3.16) pak dostaneme podmínku

$$I_1 + I_2 + \dots + I_N = 0, \quad (3.38)$$

kteřá tvoří obsah I. Kirchhoffova pravidla: *Celkový stacionární proud vytékající z libovolného uzlu je roven nule.*

II. *Kirchhoffovo pravidlo* je důsledkem Ohmova zákona pro libovolnou smyčku vytvořenou z vodičů libovolně složitého elektrického obvodu. Příklad takové smyčky je uveden na obr. 3.9. Integrací Ohmova zákona (3.26) podél této smyčky vymezené body 0, 1, 2, ..., N, 0 bychom opět dostali vztah (3.37), který můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2 + \dots + U_N. \quad (3.39)$$

Veličina  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_N$  vyjadřuje celkové elektromotorické napětí působící ve smyčce a  $U_1 = R_1 I_1, \dots, U_N = R_N I_N$  představují napětí v jednotlivých úsecích vodičů mezi sousedními uzly. Obsah vztahu (3.39) je opět možné vyjádřit slovy: *Součet úbytků napětí na všech odporech ve smyčce působících je roven celkovému elektromotorickému napětí  $\mathcal{E}$  působícímu ve smyčce.*

Rozdělení integrační dráhy na jednotlivé úseky mezi sousedními uzly je v případě rozvětveného obvodu nutné, neboť každým úsekem teče obecně jiný proud. Výsledné elektromotorické napětí je rovno algebraickému součtu napětí všech zdrojů; při integraci může vyjít s kladným i záporným znaménkem, v závislosti na orientaci integrační dráhy. Rovněž napětí na jednotlivých odporech mohou vyjít kladná i záporná podle toho, jak je orientován směr integrace vůči skutečnému směru proudu. Volba směru integrace je ovšem lhostejná. Jeho změna odpovídá změně znaménka všech členů rovnice, odpovídá tedy násobení faktorem  $(-1)$ .

Vlastnosti elektrických obvodů vyjádřené Kirchhoffovými pravidly jsou značně důležité z praktického hlediska. Pomocí nich a pomocí Ohmova zákona je možné vyřešit libovolně složitý stacionární obvod. To znamená, že pro dané zapojení obvodu, dané odpory vodičů a daná elektromotorická napětí všech zdrojů je možné pomocí Kirchhoffových pravidel a Ohmova zákona vypočítat proudy ve všech vodičích a potenciály všech uzlů. Některé příklady použití Kirchhoffových pravidel jsou uvedeny v článku 3.2.6, obecné metody řešení obvodů budou vyloženy v kapitole 8.

### 3.2.5 Práce a výkon v elektrickém obvodu, Jouleův zákon

Nejdříve vyšetříme případ konvekčního proudu tvořeného proudem nabitých částic ve vakuu, v prostoru mezi elektrodami  $V_1$ ,  $V_2$  (viz obr. 3.10). Vnější zdroj nechť udržuje mezi elektrodami napětí  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . Částice nesoucí náboj  $q$  bude v prostoru mezi elektrodami vystavena působení síly  $F = qE$ . Při proběhnutí celé vzdálenosti  $d$  získá kinetickou energii  $W$  rovnou změně potenciální energie

$$W = qU. \quad (3.40)$$

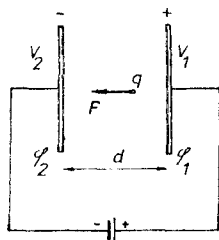
Tato energie nemůže být elektrickému poli navracena. Částice ji ztratí při nárazu na elektrodu. Energie se přitom promění v teplo, popřípadě v jinou formu energie v závislosti na konkrétní fyzikální situaci. Je proto zřejmé, že pro udržení proudu mezi elektrodami je nutné, aby elektrické pole dodávalo nositelům proudu energii.

Při průchodu proudu  $I$  bude za krátký časový interval  $\Delta t$  dodána energie

$$\Delta W = UI\Delta t, \quad (3.41)$$

takže výkon  $N = \Delta W/\Delta t$  dodávaný zdroji elektrického pole bude dán vztahem

$$N = UI. \quad (3.42)$$



Obr. 3.10 K výpočtu výkonu konvekčního proudu.

Pro obecné úvahy je výhodnější najít diferenciální formu výrazu (3.42). Za tím účelem uvažujme velmi malou část úzké proudové trubice vymezenou ekvipotenciálními ploškami  $\Delta S_1$ ,  $\Delta S_2$  (srov. obr. 3.4b). Vzdálenost plošek nechť je dána vektorem  $\Delta l$  orientovaným ve směru spádu potenciálu. Pro jeho hodnotu  $\Delta U$  bude platit  $\Delta U = \mathbf{E} \cdot \Delta l$ . Energie, kterou získá náboj  $\Delta Q$  při proběhnutí vzdálenosti  $\Delta l$ , bude rovna  $\Delta Q(\mathbf{E} \cdot \Delta l)$ . V čase  $\Delta t$ , který potřebují nositelé proudu k proběhnutí vzdálenosti  $\Delta l$ , projde potenciálovým rozdílem  $\Delta U$  náboj  $\Delta Q = (\mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S})\Delta t$ , jemuž předá pole energii

$$(\mathbf{j} \cdot \Delta \mathbf{S})(\mathbf{E} \cdot \Delta l)\Delta t = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})(\Delta \mathbf{S} \cdot \Delta l)\Delta t.$$

Veličina

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (3.43)$$

tedy představuje hustotu výkonu předávaného elektrickým polem nositelům proudu. Vztah (3.43) reprezentuje hledané diferenciální vyjádření výrazu (3.42).

Nyní přejdeme k vyšetřování kondukčního proudu ve vodiči. Uvažujme část vodiče vymezenou ekvipotenciálními plochami  $S_1$ ,  $S_2$  (obr. 3.4a), mezi nimiž je potenciálový spád  $U$ . Energií potřebnou k udržování proudu  $I$  v tomto vodiči určuje experimentálně nalezený Jouleův zákon, který říká: *Ve vodiči protékáném proudem vzniká teplo (Jouleovo teplo). Tepelný výkon  $N$  vznikající ve vodiči protékáném proudem  $I$ , na němž je potenciálový spád  $U$ , určuje vztah*

$$N = UI. \quad (3.44)$$

Užitím Ohmova zákona můžeme (3.44) vyjádřit v jiném tvaru pomocí odporu vodiče  $R$

$$N = \frac{U^2}{R}, \quad N = RI^2. \quad (3.45)$$

Výrazy (3.44), (3.45) vyjadřující Jouleův zákon lze také vyjádřit v diferenciálním tvaru pomocí měrné vodivosti  $\gamma$ , intenzity pole  $\mathbf{E}$ , popř. hustoty proudu  $\mathbf{j}$ . Jelikož vztahy (3.42) a (3.44) jsou formálně totožné, bude zřejmě i hledaný diferenciální tvar Jouleova zákona formálně totožný s výrazem (3.43)

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}. \quad (3.46)$$

Je však třeba si uvědomit, že přes tuto formální shodu popisují výrazy (3.42) a (3.43) na jedné straně a výrazy (3.44) a (3.46) na straně druhé zcela odlišné fyzikální situace. Nositelé konvekčního proudu se pohybují v prázdňném prostoru. Jejich kinetická energie při přechodu od jedné elektrody ke druhé neustále vzrůstá. Práce spojitě dodávaná zdrojem elektrického pole je nositeli proudu akumulována a teprve při jejich nárazu na příslušnou elektrodu je měněna na teplo. Naproti tomu nositelé proudu ve vodiči jsou v neustálé interakci s látkou vodiče, jíž neustále předávají energii získanou od elektrického pole. Ke vzniku Jouleova tepla tedy dochází v celém objemu vodiče.

Ke konci článku vyšetříme ještě energetickou bilanci v uzavřeném elektrickém obvodu. Uvažujme obvod podle obr. 3.6. Platí pro něj rovnice (3.35). Vynásobíme-li ji proudem  $I$ , dostaneme

$$R_i I^2 + R_c I^2 = I \mathcal{E}. \quad (3.47)$$

Členy na levé straně vyjadřují podle (3.45) Jouleovo teplo vznikající jednak ve vnitřním odporu zdroje  $R_i$ , jednak v odporu vnějších vodičů  $R_c$ . Předpokládáme-



li, že v obvodu neprobíhají žádné další děje podílející se na energetické bilanci, je nutné vzhledem k zákonu zachování energie soudit, že člen na pravé straně vyjadřuje výkon  $N_z$  dodávaný zdrojem do obvodu

$$N_z = I \mathcal{E}. \quad (3.48)$$

Pro obecné úvahy je opět výhodné vztáhnout výkon dodávaný vtištěnými silami na jednotkový objem nehomogenního vodiče. Formulí vyjadřující tento výkon  $n_z$  dostaneme zřejmě analogickým postupem jako výrazy (3.43), resp. (3.46). Bude tedy platit

$$n_z = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*. \quad (3.49)$$

Na základě právě uvedených úvah jsme dostali názorný obraz o fyzikální situaci v elektrickém obvodu. Do obvodu může být dodávána energie pouze prostřednictvím vtištěných (elektromotorických) sil, které konají práci. Tato práce vzniká na úkor jiné formy energie. (V galvanických člancích jde například o energii uvolňující se při chemických procesech.) Účinkem vtištěných sil se vytvoří elektrické pole, které předává energii nositelům proudu. Díky interakcím nositelů proudu s látkou vodiče je pohybová energie nositelů proudu předávána vodičům ve formě tepla.

### 3.2.6 Řešené příklady

#### a) Podobnost elektrostatického a stacionárního elektrického pole

Formální totožnost rovnic popisujících elektrostatické pole a elektrické stacionární pole se často využívá při řešení konkrétních úloh. Těžko řešitelnou úlohu o poli jednoho druhu je totiž v mnoha případech výhodné převést na úlohu o poli druhého druhu. Tuto situaci budeme demonstrovat na dvou příkladech.

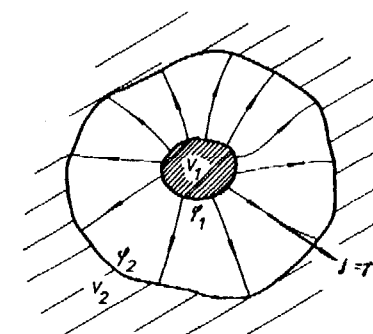
V praxi se může vyskytnout úloha vyřešit průběh elektrostatického pole v okolí jisté soustavy elektrod udržovaných na konstantních potenciálech. Soustava může přitom být natolik složitá, že konkrétní průběh pole nelze vypočítat. V tomto případě je výhodné modelovat elektrostatické pole stacionárním a určit jeho průběh experimentálně. K modelování se zpravidla užívá tzv. *elektrolytická vana*. Modely elektrod se zhotoví z dobře vodivého materiálu a vloží se do kapaliny, jejíž vodivost je značně menší. Za těchto předpokladů lze povrch elektrod považovat za ekvipotenciální hladiny. V kapalině se vytvoří stacionární pole, jehož průběh odpovídá vyšetřovanému poli elektrostatickému. Rozložení potenciálu stacionárního pole v kapalině lze snadno vyšetřit experimentálně. Konkrétní způsob uspořádání je popsán například v [5].

Opačně může vzniknout potřeba vypočítat odpor homogenního vodiče obklopujícího danou soustavu elektrod. Přímý výpočet může být pro složitější uspořádání značně obtížný. Za předpokladu, že povrch elektrod lze považovat za ekvi-

potenciální hladiny, lze úlohu s výhodou převést na elektrostatický problém dané soustavy elektrod.

Jako příklad tohoto druhu vyšetříme dvojici elektrod  $V_1$ ,  $V_2$  zhotovených z velmi dobrého vodiče, jejichž geometrie odpovídá definici kondenzátoru (viz čl. 1.4.5), vnořených do „nekonečného“ prostředí značně menší měrné vodivosti (viz obr. 3.11). Označíme-li  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  jejich potenciály, dostaneme podle Ohmova zákona vztah mezi proudem  $I$  protékajícím každou elektrodou a spádem potenciálu  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ . Tedy

$$U = RI.$$



Obr. 3.11 K výpočtu vodivosti vodiče vyplňujícího prostor mezi dvojicí elektrod  $V_1$  a  $V_2$ .

Odpor  $R$  působící mezi oběma elektrodami vypočítáme pomocí analogie s elektrostatickým polem. Necht' jsou nyní obě elektrody vnořeny do „nekonečného“ měkkého dielektrika o permitivitě  $\epsilon$  a necht' jsou na ně přivedeny náboje stejné velikosti  $Q$ , ale opačného znamení, které udržují původní hodnoty potenciálů. Vztah mezi velikostí náboje  $Q$  a spádem potenciálu pak lze vyjádřit pomocí kapacity  $C$

$$Q = CU.$$

Náboj  $Q$  je však podle (1.276) dán tokem vektoru elektrické indukce přes povrch  $S$  kladně nabitých elektrod, takže platí

$$Q = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Na druhé straně lze proud  $I$  vyjádřit pomocí proudové hustoty

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

a podle Ohmova zákona

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

Spojením výrazů pro oba typy polí lze pak odpor  $R$  vyjádřit pomocí kapacity  $C$

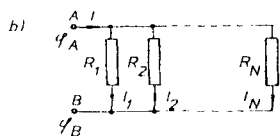
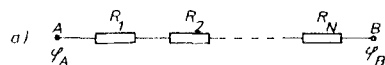
$$R = \frac{\varepsilon}{\gamma C}. \quad (3.50)$$

Budeme-li tedy umět kapacitu vypočítat, popř. určit experimentálně, bude vyřešena i úloha o vedení proudu. Její výpočet může být ovšem obecně stejně obtížný jako výpočet odporu příslušného vodiče. Změřena však může být na kondenzátoru jen s danou geometrií elektrod a s libovolným vhodným dielektrikem.

### b) Řazení odporů

Pomocí Ohmova zákona (3.19) a Kirchhoffových pravidel lze velmi snadno odvodit vztahy pro výpočet výsledného odporu několika vodičů zapojených sériově (obr. 3.12a), či paralelně (obr. 3.12b). Problém výsledného odporu několika sériově zapojených vodičů byl vlastně již řešen v čl. 3.2.3 (srov. obr. 3.6 a vztahy (3.35) až (3.37)). Opakováním těchto úvah na odpory  $R_1, R_2, \dots, R_N$  zapojené podle obr. 3.12a dostaneme pro výsledný odpor  $R_S$  vztah analogický k (3.36)

$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_N. \quad (3.51)$$



Obr. 3.12 Řazení odporů: a) sériové, b) paralelní.

Při paralelním spojení podle obr. 3.12b je na všech odporech stejný spád potenciálu  $U = |\varphi_A - \varphi_B|$  a jednotlivé proudy  $I_1, I_2, \dots, I_N$  jsou určeny Ohmovým zákonem

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_N = \frac{U}{R_N}.$$

Výsledný proud  $I$  tekoucí body  $A, B$  je podle (3.38) roven součtu proudů procházejících jednotlivými vodiči.

Po dosazení za tyto proudy a srovnáním výsledku s (3.19) dostaneme pro výsledný odpor  $R_P$  paralelního spojení

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}. \quad (3.52)$$

### c) Transformace hvězda trojúhelník

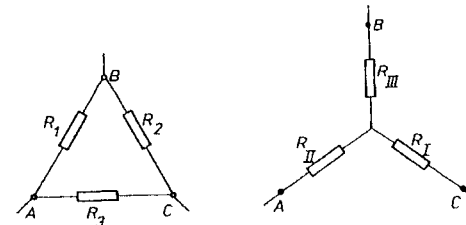
Mějme tři prvky o odporech  $R_1, R_2, R_3$  zapojené do trojúhelníku a tři prvky o odporech  $R_I, R_{II}, R_{III}$  zapojené do hvězdy (obr. 3.13). Tato spojení bude možné v libovolném obvodu vzájemně zaměnit, budou-li výsledné odpory mezi body  $AB, AC, BC$  v obou uspořádáních stejné. Využitím vztahů (3.51) a (3.52) lze z uvedených požadavků získat rovnice, jejichž řešením jsou hledané transformační vztahy

$$\begin{aligned} R_I &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{II} &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \\ R_{III} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

respektive vztahy inverzní

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{II} + R_{III} + \frac{R_{II} R_{III}}{R_I}, \\ R_2 &= R_I + R_{III} + \frac{R_I R_{III}}{R_{II}}, \\ R_3 &= R_I + R_{II} + \frac{R_I R_{II}}{R_{III}}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Transformací hvězda–trojúhelník lze v některých případech zjednodušit řešení složitějších obvodů (srov. příklad 8.2.7c).



Obr. 3.13 Transformace hvězda trojúhelník.

#### d) Výkonové přizpůsobení spotřebiče

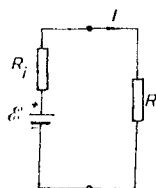
Je-li ke zdroji elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$  s vnitřním odporem  $R_i$  připojen spotřebič o odporu  $R$  (obr. 3.14), je výkon dodávaný zdrojem do spotřebiče závislý na vzájemném vztahu odporů  $R$  a  $R_i$ . Bude-li odpor  $R$  příliš velký, poteče jím malý proud a výkon dodaný do spotřebiče bude malý. Naopak bude-li odpor  $R$  příliš malý, bude proud v obvodu určen vnitřním odporem zdroje a výkon dodaný do spotřebiče bude rovněž malý. Optimální hodnota výkonu dodaného do spotřebiče je dána maximem funkce

$$N(R) = RI^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2} \mathcal{E}^2,$$

kteřé nastává při splnění podmínky

$$R = R_i. \quad (3.55)$$

O tomto stavu říkáme, že spotřebič je výkonově přizpůsoben zdroji.



Obr. 3.14 K výpočtu výkonového přizpůsobení spotřebiče odporu  $R$  ke zdroji o vnitřním odporu  $R_i$ .

### 3.3 Stacionární magnetické pole

Již ve starověku bylo známé silové působení mezi určitými (zmagnetovanými) látkami. Z látek jevičích takové chování byly známy některé nerosty obsahující především oxidy železa (magnetit  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , maghemit  $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$  apod.) a také kovové železo. Byla také známa existence zemského magnetismu a magnetka.

Nová etapa ve vývoji poznatků o magnetismu nastala objevem magnetických účinků vodičů protékaných proudem. Byly to především experimenty H. Ch. Oersteda, který (r. 1820) objevil silové působení mezi vodičem protékaným proudem a magnetkou. Zjistil, že magnetka umístěná do blízkosti vodiče protékaného proudem se vychýlí ze svého původního směru určeného zemským magnetismem. V případě dlouhého přímého vodiče má magnetka tendenci zaujímat polohu kolmou k vodiči, přičemž její orientace závisí na směru proudu. Záhy po Oerstedových objevech objevil A. M. Ampère silové působení mezi dvěma vodiči protékanými proudem. Známá je především Ampèrova modifikace Oerstedova pokusu, ve kterém byla magnetka nahrazena válcovou cívečkou protékanou proudem a bylo zjištěno, že chování cívečky je zcela analogické chování mag-

netky. Jiným známým typem Ampèrova experimentu je silové působení mezi přímými vodiči protékanými proudem: Dva rovnoběžné vodiče se přitahují, teče-li v nich proud stejným směrem a naopak se odpuzují při opačných směrech proudu. Jsou-li dva přímé a dostatečně dlouhé vodiče navzájem kolmé, téměř na sebe nepůsobí.

Na základě poznatků získaných z experimentů popsaného typu byl zaveden pojem magnetického pole, které se projevuje silovými účinky na zmagnetovaná tělesa, vodiče protékané proudem, či na pohyblivé se nositele elektrického náboje. Zdrojem magnetického pole mohou být zmagnetovaná tělesa nebo makroskopické elektrické proudy. Velmi důležitou pro teorii elektromagnetických jevů, která vznikala hlavně ve druhé polovině devatenáctého století, byla otázka, zda jsou jednotlivé mechanismy elektrického proudu (viz čl. 3.1.2) z hlediska magnetických účinků ekvivalentní. Tato otázka byla experimentálně studována řadou fyziků ještě na přelomu devatenáctého a dvacátého století. Známé jsou například experimenty H. Rowlanda (1876) a W. C. Roentgena (1888), které prokázaly magnetické účinky konvekčního proudu realizovaného makroskopickým pohybem těles nesoucích volné či vázané náboje. Těmito a dalšími podobnými experimenty byla jednoznačně prokázána ekvivalence magnetických účinků všech typů proudu. Objev speciální teorie relativity pak přinesl možnosti kvalitativně nového pohledu na podstatu magnetických účinků elektrického proudu. Jak bylo v kapitole 2 ukázáno jednoduchou aplikací Lorentzovy transformace, elektrické a magnetické pole představují jen dvě různé stránky vzájemné interakce pohybujících se nábojů. Zatímco elektrické pole (a jeho intenzita definovaná vztahy typu (1.32), popř. (2.26)) vyjadřuje tu část silových účinků mezi náboji, která je nezávislá na rychlosti „zkušebního“ náboje vůči pozorovací soustavě souřadné, magnetické pole popisuje naopak část silových účinků na této rychlosti závislou.

V tomto oddílu se budeme podrobně zabývat vlastnostmi stacionárního magnetického pole. Budeme přitom přísně stát na stanovisku klasické fyziky. Existenci magnetického pole budeme považovat za nový fyzikální poznatek vyplývající z experimentů Oerstedova a Ampèrova typu.

#### 3.3.1 Vektor magnetické indukce

Experimenty Oerstedova a Ampèrova typu ukazují, že magnetické pole může být v dané části prostoru vytvořeno buď náboji libovolného typu, pohybujícími se v makroskopickém měřítku, nebo přítomností látek nacházejících se ve zvláštním (zmagnetovaném) stavu. Experiment dále ukazuje, že makroskopické magnetické pole může existovat ve vakuu i v látkovém prostředí.<sup>19</sup> Magnetické pole se projevuje silovými účinky jednak na vodiče protékané makroskopickým

<sup>19</sup> Význam makroskopického magnetického pole v látkovém prostředí je zcela analogický makroskopickému elektrostatickému poli v látkách, vyšetřovanému v oddílu 1.5. Vzájemnému vztahu makroskopického a mikroskopického pole bude věnována pozornost ještě v kapitole 5.

proudem, jednak na pohybující se tělesa nesoucí libovolný náboj, ale má rovněž účinky na všechny druhy látek v klidu.

Uvedené silové účinky je výhodné popsat pomocí vektorového pole. Lze si představit, že příslušné vodiče či zmagnetovaná tělesa vytvářejí ve svém okolí magnetické pole, které působí na jiné vodiče či na jiná tělesa. Výhodnost takového postupu byla dostatečně prokázána v kapitole o elektrostatice (srov. čl. 1.2.1), takže se již nemusíme jeho zdůvodňováním zabývat.

Podrobný kvantitativní rozbor výsledků jednotlivých typů experimentů dovojuje formulovat základní definiční vztah pro veličinu charakterizující magnetické pole, která se z historických důvodů nazývá *magnetickou indukcí*. Uvažujme nejdříve částici malých rozměrů nesoucí náboj  $q$ , který budeme považovat za bodový náboj. Jestliže se tato částice bude pohybovat v blízkosti vodičů protékáných proudem či v blízkosti zmagnetovaných těles, lze ukázat (viz též oddíl 2.2), že celkovou sílu  $\mathbf{F}$  působící na částici lze vyjádřit vztahem

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (3.56)$$

v němž  $\mathbf{v}$  je rychlost částice v dané inerciální soustavě. Vzorec (3.56) se nazývá *Lorentzovým vzorcem*, je zobecněním vztahu (1.32) a může být považován za definiční vztah pro intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  i pro magnetickou indukci  $\mathbf{B}$  (srov. vztahy (2.41) a (2.58)). V případě, že elektrické pole je v daném místě nulové, působí na částici jen magnetická síla, která je dána vztahem

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.57)$$

Další zobecnění vztahu (3.57) dostaneme, budeme-li místo jediného „zkušebního náboje“  $q$  uvažovat působení magnetického pole na libovolný proud popsaný hustotou proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ . V tomto případě je výhodné uvažovat sílu působící na nositele proudu v jednotkovém objemu vodiče, tedy objemovou hustotu síly  $\mathbf{f}$ . Podle vztahů (3.8) až (3.11) je možné vyjádřit hustotu proudu pomocí hustoty nábojů  $\rho$  (podílejších se na vedení proudu) a pomocí jejich rychlostí. Pro hustotu síly  $\mathbf{f}$  pak podle (3.57) zřejmě dostaneme

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.58)$$

Výraz (3.58) platí nezávisle na tom, jakým mechanismem je proudová hustota realizována. Udává vztah mezi okamžitými hodnotami síly  $\mathbf{f}$ , proudové hustoty  $\mathbf{j}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$  v daném bodě. Fyzikální obsah vztahu (3.58) je zřejmě stejný jako fyzikální obsah vzorce (3.57). Je tedy lhostejné, který z nich budeme za definici vektoru magnetické indukce považovat.

Jednotka magnetické indukce v Mezinárodní soustavě se nazývá *tesla* (T). Ze vztahu (3.57), popř. (3.58), snadno odvodíme, že tesla = newton.(amper.metr)<sup>-1</sup>. Lze tedy říci, že magnetické pole 1 tesla působí na náboj jednoho coulombu, který se

pohybuje rychlostí jednoho metru za sekundu, silou jednoho newtonu (za předpokladu, že směr rychlosti náboje je kolmý ke směru pole).

Jako pro každé vektorové pole, lze také pro vektor magnetické indukce zavést pojem toku (srov. čl. 1.2.2). Mluvíme o *magnetickém toku*  $\Phi$ . Pro libovolnou orientovanou plochu  $S$  platí

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.59)$$

Jednotkou magnetického toku je jeden *weber* (Wb). Podle definiční relace jednotky magnetické indukce platí: weber = joule.sekunda.coulomb<sup>-1</sup>. V příští kapitole uvidíme, že také platí: weber = volt.sekunda.

### 3.3.2 Ampèrovův zákon pro magnetické pole ve vakuu

V předchozím článku jsme se seznámili s fyzikálními účinky magnetického pole a zavedli jsme vektorovou veličinu  $\mathbf{B}$  jako jeho kvantitativní míru. Vztahy, které jsme získali, platí obecně pro libovolné magnetické pole ve stacionárním přiblížení. Platí pro pole ve vakuu i v látkovém prostředí, nezávisle na tom, jakou měrou se na jeho vzniku podílejí makroskopické proudy ve vodičích, jiné mechanismy pohybu nábojů (konvekční proudy i pohyb nabitých makroskopických těles) a zmagnetovaná tělesa.

Dosud však nevíme, jaký je vztah daného magnetického pole k jeho zdrojům. To znamená, že neumíme určit vektor magnetické indukce v daném bodě, i když známe rozložení proudů ve vodičích i vlastnosti příslušného prostředí. Otázkami tohoto druhu se nyní budeme postupně zabývat. Nejdříve se zaměříme na magnetické pole ve vakuu vytvářené soustavou vodičů protékáných proudem.

Vydeme z experimentů o silovém působení magnetického pole a budeme nejdříve uvažovat pole přímého nekonečně dlouhého vodiče. Příslušné experimenty by ukázaly, že vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  má vždy směr tečny ke koncentrickým kružnicím se středy na ose vodiče, ležícími v rovině kolmé na směr vodiče. Velikost vektoru magnetické indukce ve vzdálenosti  $a$  od osy vodiče by byla přímo úměrná velikosti proudu  $I$  protékajícího vodičem a nepřímo úměrná vzdálenosti  $a$ . Bylo by tedy možné vyjádřit ji vztahem

$$B = C \frac{I}{a}, \quad (3.60)$$

v němž  $C$  je konstanta související s volbou jednotky proudu.

Jestliže do magnetického pole vyšetřovaného vodiče vložíme jiný přímý nekonečně dlouhý vodič protékáný proudem  $I'$ , který je s prvním vodičem rovnoběžný, lze pomocí vzorce (3.58) vypočítat silové působení mezi oběma vodiči. Podle toho co bylo o orientaci vektoru magnetické indukce přímého vodiče

řečeno je zřejmé, že vodiče v závislosti na vzájemné orientaci proudů  $I$ , popř.  $I'$ , se budou buď přitahovat, nebo odpuzovat. Ze vztahu (3.58) snadno určíme velikost příslušné síly  ${}^{(1)}F$  působící na daný úsek vodiče o délce  $l$ . Platí

$${}^{(1)}F = C \frac{II'}{a} l, \quad (3.61)$$

což je známý Ampèrov vzorec.

Vztahu (3.61) bylo jak známo použito k definici jednotky proudu (viz Dodatek 2). V Mezinárodní soustavě jednotek byla tato jednotka (jeden ampér) zvolena tak, že konstanta  $C$  v (3.60), respektive (3.61) je z definice rovna  $C = 2 \cdot 10^{-7}$  newton.ampér $^{-2}$ . Vztah (3.61) je v této soustavě obvykle zapisován ve tvaru

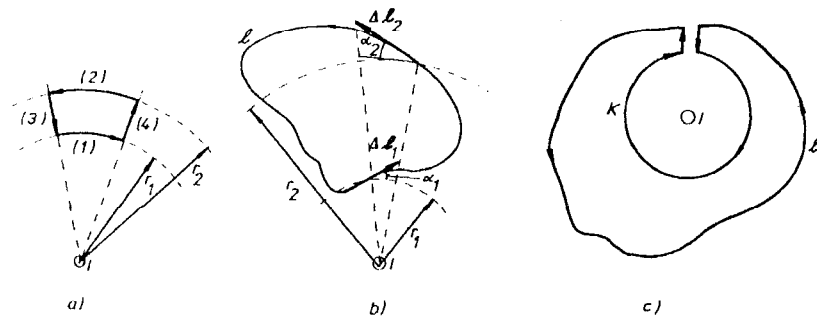
$${}^{(1)}F = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{II'}{a} l, \quad (3.62)$$

kde

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \quad (3.63)$$

je tzv. permeabilita vakua. (O jednotce henry  $[\text{H}] = [\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2}] = [\text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}^{-1}]$  viz článek 4.1.4.) Volbou hodnoty  $\mu_0$  je určena i hodnota permitivity vakua  $\epsilon_0$ , zavedená vztahem (1.8), neboť obě tyto konstanty mají bezprostřední vztah k rychlosti šíření světla ve vakuu. (Podrobněji o těchto otázkách viz článek 5.3.1 a Dodatek 2.)

Všimněme si nyní zajímavé vlastnosti magnetického pole přímého vodiče, která souvisí s cirkulací vektoru magnetické indukce, tj. s vyšetřováním křivkového integrálu



Obr. 3.15 K formulaci Ampèrova zákona. Výpočet cirkulace vektoru magnetické indukce po křivkách neobepínajících vodič: a) speciální tvar křivky, b) obecná křivka, c) výpočet cirkulace vektoru magnetické indukce po křivce obepínající vodič.

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.64)$$

po libovolné uzavřené křivce  $l$  (viz Dodatek 1). Zvolme nejdříve speciální tvar rovinné křivky  $l$  sestávající ze dvou oblouků (1), (2) kružnic koncentrických s osou vodiče a ze dvou radiálních úseků (3), (4) (viz obr. 3.15a). Úseky (3), (4) k hodnotě integrálu (3.64) nepřispívají, neboť na nich je  $\mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ . Příspěvky úseků (1), (2) se navzájem odečítají, neboť délky úseků jsou v poměru  $r_2/r_1$  a velikosti magnetické indukce jsou podle (3.60) v poměru obráceném, přičemž orientace těchto úseků jsou opačné vzhledem k orientaci vektoru  $\mathbf{B}$ . Celkem tedy platí

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.65)$$

Získaný výsledek je možné zobecnit i na uzavřenou křivku obecného tvaru, rovinnou i prostorovou, pokud tato křivka nebude obepínat vyšetřovaný vodič. Vytáhneme-li totiž na takové křivce dvěma radiálními paprsky dva diferenciální úseky  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  (viz obr. 3.15b), potom délky těchto úseků budou v poměru

$$\frac{r_1}{\cos \alpha_1} : \frac{r_2}{\cos \alpha_2},$$

zatímco projekce vektoru  $\mathbf{B}$  do směru tečny budou v poměru obráceném.

Naopak, budeme-li hledat hodnotu integrálu (3.64) podél kružnice  $K$  poloměru  $r$  v rovině kolmé k vodiči, se středem v jeho ose, bude zřejmě platit podle (3.60) a (3.63)

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_K d\mathbf{l} = 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I. \quad (3.66)$$

V případě křivky  $l$  obecného tvaru můžeme při vyšetřování integrálu (3.64) použít postup analogický k postupu použitému při formulaci Gaussova zákona (viz čl. 1.2.2). Zvolíme pomocnou kružnici  $K$  se středem na ose vodiče a vytvoříme sjednocení obou křivek  $K + l$  tak, aby příspěvky úseků tvořících spojení obou křivek bylo možné zanedbat (nebo aby se vynuřily) – viz obr. 3.15c. Celková křivka  $K + l$  neobepíná vodič a integrál (3.64) podél ní je tedy roven nule. Vzhledem k tomu, že obě křivky  $K$ ,  $l$  jsou opačně orientované, platí

$$\oint_K \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.67)$$

a hodnota integrálu (3.64) podle obecné křivky  $l$  je tedy opět rovna  $\mu_0 I$ . Celkem lze tedy říci, že pro integrál (3.64) přes libovolnou uzavřenou křivku  $l$  platí

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (3.68)$$

Experimentální zkušenost ukazuje, že vztah (3.68) platí obecně pro libovolné magnetické pole (tj. pro libovolný tvar vodičů protékaných proudem) a pro libovolnou uzavřenou křivku  $l$ . *Křivkový integrál typu (3.64) počítaný přes libovolnou uzavřenou křivku je vždy roven  $\mu_0$ -násobku proudu, který protéká plochou ohraničenou touto křivkou.* (Přesně vzato, toto tvrzení platí pouze tehdy, je-li křivka jednoduchá. V případech, kdy křivka obíhá daný vodič například  $N$ -krát, vystupuje na pravé straně (3.68)  $N$ -násobek proudu  $I$ .)

Vztah (3.68) vyjadřuje jednu ze základních vlastností magnetického pole. Nazývá se *Ampèrův zákon* (někdy též zákon celkového proudu). Je z něj vidět, že magnetické pole není obecně potenciální. Křivkový integrál (3.68) obecně závisí na tvaru a poloze uzavřené křivky  $l$ . Pouze ve speciálních případech, kdy křivka neobepíná makroskopický proud, je příslušný integrál nulový (srov. čl. 3.4.4). Ampèrův zákon vyjádřený vztahem (3.68) udává souvislost mezi hodnotami magnetické indukce a proudy, které ji vytváří, v implicitním a integrálním tvaru.

Na platnost tohoto vztahu nejsou kladena žádná fyzikální omezení. Je proto nutné předpokládat, že ve všech případech, kdy křivkový integrál (3.64) má smysl, splňuje podmínku (3.68). Proud na pravé straně tohoto vztahu může být realizován libovolným způsobem. S ohledem na rovnici continuity, která ve stacionárním přiblížení platí ve tvaru (3.16), resp. (3.17), může být pro výpočet tohoto proudu zvolena libovolná plocha  $S$  ohraničená křivkou  $l$ . Ampèrův zákon (3.68) má pro popis magnetického pole analogický význam jako Gaussův zákon pro popis pole elektrostatického (srov. rovnici (1.73) a výklad čl. 1.2.5).

Výraz (3.68) je možné převést na diferenciální tvar. Předpokládejme, že na ploše  $S$  zvolené pro výpočet proudu  $I$  netečou žádné plošné proudy. Proud  $I$  je potom určen pouze hustotou objemového proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , takže platí

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.69)$$

Po dosazení do (3.68) a po použití Stokesovy věty (viz Dodatek 1) můžeme Ampèrův zákon vyjádřit pomocí plošného integrálu

$$\int_S [\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \cdot \mathbf{j}] \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.70)$$

Vzhledem k libovolnosti plochy  $S$ , vyplývá z (3.70) podmínka

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (3.71)$$

kteřá tedy platí ve všech bodech s nulovou hustotou plošného proudu a která představuje *diferenciální formu Ampèrova zákona*.

### 3.3.3 Vektorový potenciál, Biotův–Savartův vzorec

V kapitole 1 jsme viděli, že cirkulace intenzity elektrostatického pole a její tok uzavřenou plochou určují obecné vlastnosti elektrostatického pole. Podobně v předchozím článku bylo ukázáno, že vyšetřování cirkulace magnetické indukce vede na formulaci Ampèrova zákona, který rovněž vyjadřuje jednu z obecných vlastností magnetického pole. Vzniká proto přirozeně otázka, jakou informaci o magnetickém poli může dát vyšetřování toku vektoru magnetické indukce uzavřenou plochou.

Tok vektoru magnetické indukce, nebo krátce *magnetický tok*  $\Phi$ , je pro danou plochu  $S$  definován vztahem (3.59). Veškerá dosavadní experimentální zkušenost ukazuje, že *magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou  $S$  je roven nule*.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.72)$$

Analogickým postupem jako v článku 1.2.5 (srov. Dodatek 1) je možné vlastnost (3.72) vyjádřit též v diferenciálním tvaru

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (3.73)$$

Na platnost vztahu (3.72) nejsou kladena žádná fyzikální omezení. Je možné jej uvažovat ve všech situacích, ve kterých má integrál na levé straně smysl. Podobně podmínku (3.73) je možné uvažovat ve všech bodech, ve kterých mají smysl příslušné operace. Oba tyto vztahy vyjadřují experimentální poznatek, že v přírodě neexistují „magnetické náboje“, které by tvořily zdroje magnetického pole.<sup>20</sup> Magnetické indukční čáry, jimiž je možné magnetické pole zobrazovat (podobně jako elektrické pole siločarami – viz čl. 1.2.1), jsou tedy vždy uzavřené křivky.

P. A. M. Dirac v roce 1931 předpověděl teoreticky možnost existence elementární částice, která by byla nositelem magnetického náboje (tzv. *Diracův magnetický monopol*). Přes značné úsilí, které pokračuje i v současné době s využitím nejmodernějších experimentálních metod, však dosud nebyla existence takové částice experimentálně potvrzena. O teoretických důvodech vedoucích k možnosti existence Diracova magnetického monopolu pojednává například [3].

Platnost vztahů (3.68) a (3.72) ukazuje, že magnetické pole je polem *solenoidálním* (viz Dodatek 1). Magnetickou indukci lze tedy vyjádřit pomocí nového vektorového pole  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vyhovujícího vztahu

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (3.74)$$

kteřá se nazývá *vektorovým potenciálem* magnetického pole.

<sup>20</sup> V článku 3.4.5 uvidíme, že v některých speciálních případech lze pojem „magnetického náboje“ formálně zavést. Výhoda takového postupu spočívá v analogii s popisem elektrostatického pole.

Definiční relace (3.74) však neurčuje vektorový potenciál jednoznačně. Je zřejmé, že pokud existuje alespoň jedna funkce  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  vyhovující (3.74), vyhovuje tomuto vztahu také každá vektorová funkce tvaru

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \text{grad } \xi(\mathbf{r}), \quad (3.75)$$

kde  $\xi(\mathbf{r})$  je libovolná skalární funkce, pro niž existují příslušné diferenciální operace. Uvědomíme-li si totiž, že pro libovolnou funkci  $\xi(\mathbf{r})$  platí identita  $\text{rot grad } \xi(\mathbf{r}) = 0$  (viz Dodatek 1), dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \text{rot}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \text{grad } \xi(\mathbf{r})) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

Tato nejednoznačnost dovoluje předepsat pro vektorový potenciál vedlejší podmínku. Speciálně je vždy možné vektorový potenciál vybrat tak, aby byla splněna podmínka

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.76)$$

nazývaná podmínkou *kalibrační*. Skutečně, platí-li pro daný vektorový potenciál vyšetřovaného magnetického pole například  $\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})$ , kde  $\alpha(\mathbf{r})$  je nenulová skalární funkce, lze k němu superponovat funkci  $\text{grad } \xi$  vyhovující rovnici  $\text{div grad } \xi(\mathbf{r}) = \Delta \xi(\mathbf{r}) = -\alpha(\mathbf{r})$ ; nový vektorový potenciál pak již kalibrační podmínce (3.76) vyhovuje.<sup>21</sup>

Využijeme nyní vlastností vektorového potenciálu k vyjádření dalších obecných zákonitostí magnetického pole. Ampèrov zákon (3.71) lze pomocí vektorového potenciálu zapsat ve tvaru

$$\text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (3.77)$$

Využitím identity vektorové analýzy (D 1.58) pak pro něj dostaneme

$$-\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \text{grad div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (3.78)$$

a díky kalibrační podmínce (3.76) máme vektorovou rovnici

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (3.79)$$

kteřá představuje vlastně trojici Poissonových rovnic pro jednotlivé složky vektorů  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  (srov. čl. 1.2.7). V analogii s elektrostatikou můžeme její řešení psát zřejmě ve tvaru

<sup>21</sup> Ani kalibrační podmínka (3.76) spolu s definičním vztahem (3.74) však neurčují vektorový potenciál jednoznačně (srov. příklad 3.3.5e).

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'. \quad (3.80)$$

Vektor  $\mathbf{R}$  zde má opět svůj známý význam  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Integrační proměnnou je polohový vektor  $\mathbf{r}$  a integrujeme přes objem  $V$ , ve kterém je  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$ .

Přímým provedením operace rotace na funkci (3.80) dostaneme vyjádření pro magnetickou indukci

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Operace rotace a integrace působí na různé proměnné. Budeme (jako vždy) předpokládat možnost záměny jejich pořadí. Kromě toho vezmeme v úvahu platnost identity

$$\text{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = \text{grad} \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\text{rot } \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}.$$

Druhý člen pravé strany je identicky nulový, neboť hustota proudu není funkcí proměnné  $\mathbf{r}$ , na kterou působí operátor rotace. Přímým výpočtem dále zjistíme, že

$$\text{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

takže pro vyjádření magnetické indukce získáme konečný výraz

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (3.81)$$

kteřý se obvykle nazývá *Biotovým–Savartovým vzorcem*.

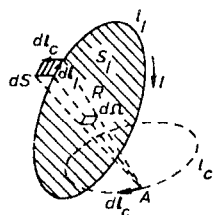
Vzorec (3.81) (na rozdíl od Ampèrova zákona) vyjadřuje souvislost mezi vektorem magnetické indukce a proudy, tvořícími zdroj magnetického pole, v explicitní formě. Tento vzorec a vzorec (3.80) pro vektorový potenciál jsou zřejmě analogické vzorcům (1.70a), popř. (1.69a), pro potenciál, popř. intenzitu elektrostatického pole spojitě rozložených nábojů. Z tvaru Biotova–Savartova vzorce lze výsledné magnetické pole v daném bodě chápat jako superpozici příspěvků jednotlivých „proudových elementů“  $\mathbf{j}dV$ . Lze tedy – podobně jako v elektrostatice – hovořit o platnosti principu superpozice. Je ovšem samozřejmé, že „proudový element“ nelze izolovat. Platnost Biotova–Savartova vzorce a principu superpozice může být tudíž ověřována jen nepřímou, měřením výsledného pole uzavřených proudových smyček různého tvaru.

Pro vyšetřování magnetického pole vodičů zanedbatelně malého průřezu  $\Delta S$  s homogenně rozloženým proudem  $I$  je výhodné vyjádřit vzorec (3.81) v poněkud jiném tvaru. Malý úsek vodiče délky  $\Delta l$  reprezentuje zřejmě „proudový element“  $I \Delta l$  ekvivalentní s  $\mathbf{j} \Delta V$  (srov. vztah (3.6)). Záměnou těchto elementů lze objemový integrál v (3.80) a (3.81) zřejmě převést na křivkový integrál podél proudové trubice  $l$  s daným proudem  $I$ . Tedy

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}. \quad (3.82)$$

Je-li zdroj magnetického pole tvořen několika proudovými smyčkami (proudovými trubicemi), je výsledné pole zřejmě dáno sumou integrálů typu (3.82).

Vzorce typu (3.81) a (3.82) pro vyjádření magnetického pole vodičů protékáných proudem byly původně získány zobecněním experimentální zkušenosti. V literatuře bývají proto často nazývány *Biotovým–Savartovým zákonem*. Byly formulovány roku 1820 na základě měření, které konali jeho autoři na vodičích různého tvaru; o obecnou formulaci výsledků se zasloužil P. Laplace (srov. Historický přehled).



Obr. 3.16 K výkladu ekvivalence Ampèrova zákona a Biotova–Savartova vzorce.

Biotův–Savartův vzorec jsme odvodili z Ampèrova zákona. Lze jej však považovat za poznatek k Ampèrovu zákonu ekvivalentní, neboť lze obráceně, na základě platnosti Biotova–Savartova vzorce, odvodit i platnost Ampèrova zákona. Pro demonstraci této možnosti budeme uvažovat magnetické pole buzené proudovou smyčkou  $l$  s proudem  $I$  a budeme počítat jeho cirkulaci po uzavřené křivce  $l_c$  obepínající vodič smyčky  $l$  (viz obr. 3.16). Necht' je podle předpokladu magnetická indukce  $\mathbf{B}$ , vybuzená smyčkou  $l$  v libovolném bodě  $A$  křivky  $l_c$ , dána vztahem (3.82). Pro uvažovanou cirkulaci pak dostaneme

$$\oint_{l_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_c = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{l_c} \oint_l \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}_c}{R^3}.$$

Aniž bychom se zabývali matematickou stránkou naznačené dvojnásobné integrace po křivkách  $l_c$  a  $l$ , můžeme uvést jednoduchou úvahu, z níž její výsledek vyplývá. Cyklickou záměnou veličin smíšeného součinu dostaneme  $(d\mathbf{l} \times \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}_c = (d\mathbf{l}_c \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{R} = d\mathbf{S} \cdot \mathbf{R}$ , kde  $d\mathbf{S} = d\mathbf{l}_c \times d\mathbf{l}$ . Zavedeme-li element prostorového úhlu  $d\Omega$ , pod nímž je z bodu  $A$  na křivce  $l_c$  vidět element plochy  $dS$ , můžeme celý výraz za integračními značkami vyjádřit ve tvaru

$$\frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{R}) \cdot d\mathbf{l}_c}{R^3} = \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}}{R^3} = d\Omega.$$

Výsledek naznačené integrace pak zřejmě představuje celkovou změnu prostorového úhlu, pod nímž vidíme smyčku  $l_c$ , jestliže bod  $A$  oběhne celou uzavřenou křivku  $l_c$ . Obepíná-li křivka  $l_c$  vodič tvořený smyčkou  $l$ , je tato změna rovna plnému prostorovému úhlu  $4\pi$ . Platí tedy

$$\oint_{l_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (3.68a)$$

Alternativně lze tento výsledek získat i využitím ekvivalence proudové smyčky a homogenní magnetické dvojvrstvy s danou konstantní hustotou dipólového momentu  $M_S$  (viz čl. 3.4.5), vyplňující libovolnou plochu  $S_l$  ohraničenou křivkou  $l_l$  (viz obr. 3.16), je-li splněna podmínka (3.125). Vyšetřované magnetické pole je pak možné popsat skalárním potenciálem, viz rov. (3.126),

$$\varphi_m(\mathbf{r}_A) = \frac{M_S}{4\pi} \Omega.$$

kde  $\Omega$  je prostorový úhel, pod nímž je dvojvrstva vidět z bodu  $A$ . Podle (3.120) je možné hledanou cirkulaci vyjádřit ve tvaru

$$\oint_{l_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}_c = -\mu_0 \frac{M_S}{4\pi} \oint_{l_c} \text{grad} \Omega \cdot d\mathbf{l}_c.$$

Jelikož při průchodu plochou  $S_l$  má potenciál  $\varphi_m$  nespojitost velikosti  $M_S$ , platí podle (3.126)

$$\oint_{l_c} \text{grad} \Omega \cdot d\mathbf{l}_c = -4\pi,$$

odkud již s ohledem na (3.125) ihned plyne (3.68).

Pomocí vektorového potenciálu jsme získali pozoruhodné výsledky. Viděli jsme, že základní rovnici magnetického pole (3.70), která je vyjádřena pomocí Ampèrova zákona, můžeme přepsat do tvaru analogického Poissonově rovnici (1.85). Jejím řešením je pak možné najít integrální vztahy (3.80) až (3.82) pro explicitní vyjádření vektorového potenciálu a magnetické indukce. Podmínkou pro platnost těchto získaných závěrů ovšem je, aby řešení rovnice (3.79) bylo také řešením rovnice (3.77), a tedy i řešením rovnice (3.71). To bude splněno, bude-li vektorový potenciál (3.80) splňovat kalibrační podmínku (3.76). Přířímým výpočtem (viz například [6]) lze snadno ukázat, že uvedená vlastnost je důsledkem rovnice kontinuity proudu ve stacionárním přiblížení (3.17). Lze tedy uzavřít, že pro danou stacionární soustavu vodičů protékáných proudem vektorový potenciál požadovaných vlastností<sup>22</sup> vždy existuje a může být v principu vždy vypočten pomocí vztahů typu (3.80) až (3.82).

Vektorový potenciál je rovněž vhodnou veličinou pro vyjádření magnetického toku  $\Phi$  danou plochou  $S$ . Alternativně k definičnímu vztahu (3.59) lze použitím Stokesovy věty (D 1.45) vyjádřit magnetický tok  $\Phi$  pomocí křivkového integrálu

<sup>22</sup> Pro nestacionární elektromagnetické pole lze vektorový potenciál rovněž zavést. Je však pro něj nutné uvažovat jinou kalibrační podmínku (viz kapitolu 5).



$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.59a)$$

přes uzavřenou křivku  $l$  obepínající plochu  $S$ . Magnetický tok je tedy zcela určen, pokud známe průběh vektorového potenciálu jen na hranicích této plochy  $S$ .

Ze způsobu zavedení vektorového potenciálu vyplývá, že z hlediska klasické fyziky představuje vedle magnetické indukce alternativní a fyzikálně zcela ekvivalentní veličinu pro popis makroskopického magnetického pole. Na tomto závěru nemění nic ani skutečnost, že vektorový potenciál není silovými účinky magnetického pole určen jednoznačně, a ani to, že v některých případech je třeba vektorový potenciál považovat za různý od nuly v místech s nulovou magnetickou indukcí (viz příklad 3.3.5e). O volbě konkrétního postupu při vyšetřování daného magnetického pole mohou rozhodnout praktické důvody, například obtížnost výpočtu příslušných integrálů či skutečnost, že výrazy pro vektorový potenciál v některých případech divergují, zatímco výrazy pro magnetickou indukcí konvergují (viz článek 3.3.5). Pomocí vektoru magnetické indukce lze ovšem bezprostředněji vyjádřit síly působící na vodiče protékané proudem nebo na pohybující se částice. V kapitole 6 naopak uvidíme, že vektorový potenciál je (obecně řečeno) vhodnější veličinou pro vyjádření energie či hybnosti nabitě částice v magnetickém poli.

Ekvivalence obou způsobů popisu magnetického pole přestává být však zřejmá při studiu působení magnetického pole na mikročástice, zejména v případech, kdy je třeba brát v úvahu zákonitosti kvantové mechaniky. Některá hlediska této problematiky budou ještě diskutována v článku 4.1.2 a v oddílu 6.1.

### 3.3.4 Magnetické pole v místech s nenulovou hustotou proudu, pole plošných proudů

Výsledky integrace ve vztazích (3.80) až (3.82) lze chápat jako vlastní hodnoty integrálu, pokud počítáme magnetické pole v bodech s nulovou hustotou proudu. Uvedené výrazy je však možné za určitých podmínek použít i k výpočtu magnetického pole v bodech, v nichž je  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$ . Jelikož vzorce (3.80) a (3.81), vyjadřující vektorový potenciál a magnetickou indukcí magnetického pole makroskopického proudu o hustotě  $\rho(\mathbf{r}')$ , jsou formálně shodné se vzorci (1.70a) a (1.69a) pro potenciál a intenzitu elektrostatického pole spojitě rozloženého náboje o objemové hustotě  $\rho(\mathbf{r}')$ , je možné tyto podmínky diskutovat zcela analogicky jako v elektrostatice (viz článek 1.2.4).

Za předpokladu, že funkce  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  je konečná a dostatečně hladká ve všech vnitřních bodech oblasti  $V$ , lze shrnout vlastnosti výrazů (3.80) a (3.81) takto:

1. Vztah (3.80) vyjadřuje konečný vektorový potenciál magnetického pole objemových proudů ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech oblasti  $V$ , v nichž je od nuly různá hustota objemového proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ .

2. Tento potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu.

3. Veličina  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$  je rovna objemovému integrálu (3.81) ve všech bodech prostoru. Tento vzorec vyjadřuje tedy správně magnetickou indukcí pole i uvnitř oblasti  $V$ .

4. Magnetická indukce daná vztahem (3.81) je všude spojitá.

V některých situacích (například při vyšetřování magnetického pole v látkách – viz oddíl 3.5) má význam studovat magnetické pole makroskopických plošných proudů. Je-li dána hustota plošného proudu  $\mathbf{j}_S(\mathbf{r}')$  tekoucího na ploše  $S$ , je zřejmě možné vyjádřit vektorový potenciál a magnetickou indukcí příslušného pole vzorci analogickými k (1.70b) a (1.69b). Je tedy možné psát

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}_S(\mathbf{r}')}{R} dS', \quad (3.80a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{j}_S(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}}{R^3} dS'. \quad (3.81a)$$

Vzhledem k formální shodnosti těchto vztahů se vzorci (1.70b) a (1.69b) pro potenciál a intenzitu elektrostatického pole plošně rozložených nábojů, je možné analogicky k článku 1.2.4 formulovat vlastnosti magnetického pole plošných proudů, včetně jeho chování v bezprostředním okolí plochy  $S$ . Za analogických předpokladů o vlastnostech funkce  $\mathbf{j}_S(\mathbf{r}')$  platí:

1. Výraz (3.80a) vyjadřuje konečný vektorový potenciál ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech plochy  $S$ , v nichž je od nuly různá hustota proudu  $\mathbf{j}_S(\mathbf{r}')$ .

2. Tento potenciál je všude spojitý. Má parciální derivace alespoň prvního řádu v bodech neležících na ploše  $S$ .

3. Vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$  je roven plošnému integrálu (3.81a) ve všech bodech s výjimkou bodů plochy  $S$ . Na této ploše nemá vektor magnetické indukce smysl.

4. Magnetická indukce daná výrazem (3.81a) je spojitá všude s výjimkou bodů plochy  $S$ . Při průchodu touto plochou zůstávají spojitě pouze její normálové složky  $B_n$ . Její tečné složky se mění skokem o hodnotu určenou hustotou proudu  $\mathbf{j}_S(\mathbf{r}')$ . Platí vztahy

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 \mathbf{j}_S, \quad (3.84)$$

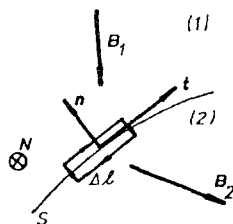
v nichž  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor normály plochy  $S$ , orientovaný ze strany (2) k (1) – viz obr. 3.17.

Alternativní možnost pro vyjádření vztahů (3.83) a (3.84) dávají operace „Div“ a „Rot“ zavedené v Dodatku 1 (srov. vztahy (1.80) a (1.82))

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0, \quad (3.83a)$$

$$\text{Rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_S. \quad (3.84a)$$

Tyto vztahy lze dokázat přímo diskusí vlastností plošných integrálů (3.80a) a (3.81a). Lze je však také snadno dokázat využitím obecných vlastností magnetického pole daných rovnicemi (3.68) a (3.72). Spojitost normálových složek vektoru magnetické indukce je triviálním důsledkem rovnice (3.72). Abychom se o tom přesvědčili, stačí obklopit vyšetřovaný bod na ploše  $S$  malou válcovou ploškou o podstavách  $\Delta S$ , jejíž osa je rovnoběžná s normálou plochy  $S$  (srov. obr. 1.14). Z nulovosti celkového magnetického toku touto ploškou pak ihned plyne vlastnost (3.83).



Obr. 3.17 K důkazu nespojitosti tečných složek vektoru magnetické indukce na ploše  $S$  s nenulovým plošným proudem.

Pro důkaz vlastností tečných složek (3.84) uvažujme orientovanou uzavřenou křivku tvaru obdélníčku, která obklopuje vyšetřovaný bod na ploše  $S$ , jak je naznačeno na obr. 3.17. Delší strany obdélníčku  $\Delta l$  nechť jsou rovnoběžné s libovolně zvoleným jednotkovým tečným vektorem  $\mathbf{t}$ . Jeho kratší strany nechť jsou kolmé k ploše  $S$ , tj. rovnoběžné s jednotkovým vektorem normály  $\mathbf{n}$ . Zavedme ještě jednotkový vektor  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$  a aplikujme na obvod obdélníčku rovnici (3.68). Celkový proud protékající jeho plochou bude mít zřejmě hodnotu  $j_{SN}\Delta l = (\mathbf{j}_S \cdot \mathbf{N})\Delta l$ . Pro křivkový integrál (3.64) dostaneme po zanedbání příspěvků kratších stran obdélníčku přibližnou hodnotu  $(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{t} \Delta l$ . Bude tedy platit

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{t} = \mu_0 (\mathbf{j}_S \cdot \mathbf{N}).$$

Jelikož je

$$\mathbf{t} = \mathbf{N} \times \mathbf{n}, \quad (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{n}) = [(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{N},$$

lze výsledek zapsat ve tvaru

$$\mathbf{N} \cdot [(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \times \mathbf{n} - \mu_0 \mathbf{j}_S] = 0.$$

Orientace tečného vektoru  $\mathbf{t}$  byla zvolena libovolně. Poslední podmínka může tedy platit jen tehdy, je-li výraz v hranaté závorce roven nule, tj. platí-li (3.84).

### 3.3.5 Řešené příklady

V tomto článku shrneme obecné zásady pro výpočet magnetické indukce, respektive vektorového potenciálu magnetického pole buzeného zadanými makroskopickými proudy v okolním prázdňém prostoru. Obecný výklad doplníme několika typickými a z praktického hlediska užitečnými příklady.

1. Je-li zadána hustota objemového proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , hustota plošného proudu  $\mathbf{j}_S(\mathbf{r})$ , nebo je-li znám proud  $I$  protékající zadaným obvodem, je vždy možné vypočítat magnetickou indukci  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  a vektorový potenciál příslušného pole  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  v explicitní formě pomocí vzorců Biotova–Savartova typu (3.80) až (3.82), respektive (3.80a) a (3.81a). Přitom můžeme počítat buď  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  i  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  nezávisle na sobě, nebo integrovat příslušný vzorec pro  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  (což v některých případech bývá snazší) a pak určit magnetickou indukci podle (3.74). O volbě konkrétního postupu rozhodne obtížnost výpočtu jednotlivých integrálů. Přitom může nastat situace, že integrál pro  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  diverguje, zatímco integrál pro  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  konverguje.

2. Pokud prostorové rozložení proudu je symetrické, je nejvýhodnější použít Ampèrova zákona v integrálním tvaru (3.68). Stačí najít uzavřenou křivku  $l$  procházející daným bodem a obepínající zadaný proud  $I$  tak, aby vektor magnetické indukce na této křivce měl tečný směr a konstantní velikost  $B$ . Potom platí

$$B = \mu_0 \frac{I}{l}. \quad (3.85)$$

3. Jde-li o geometricky nepravidelné nebo komplikované rozložení proudů, mohou se předchozí způsoby ukázat nepoužitelné nebo příliš pracné. Jak bude ukázáno v následujícím oddílu 3.4, lze pak na vzdálenostech mnohem větších, než je rozměr oblasti s nenulovým proudem, určovat průběh vektorového potenciálu či magnetické indukce přibližně, pomocí tzv. *multipólového rozvoje* (viz článek 3.4.3). Přitom je obvykle možné vystačit s dipólovým, nejvýše s kvadrupólovým členem.

#### a) Magnetické pole přímého vodiče

Průběh magnetické indukce přímého nekonečně dlouhého vodiče jsme již částečně diskutovali při formulování Ampèrova zákona v čl. 3.3.2. Zjistili jsme, že vektor  $\mathbf{B}$  leží v rovině kolmé k ose vodiče a má v každém bodu směr tečny kružnice se středem v ose vodiče. Závislost jeho velikosti na vzdálenosti  $a$  od osy vodiče je dána vztahem typu (3.60). Tento vzorec bychom nyní snadno získali použitím Ampèrova zákona. Kdybychom za uzavřenou křivku  $l$  zvolili kružnici o poloměru  $a$  se středem v ose vodiče, mohli bychom s ohledem na symetrii soustavy psát podle Ampèrova zákona (viz vztah (3.85))  $B l = 2\pi a B = \mu_0 I$ , odkud plyne ihned výsledek

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a}. \quad (3.86)$$

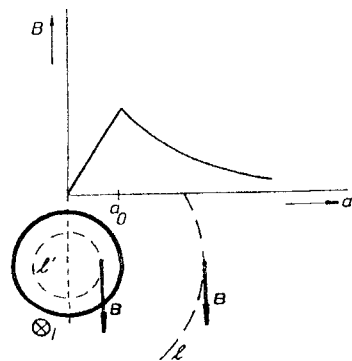
Užitím Ampèrova zákona je možné vypočítat průběh magnetického pole také uvnitř vodiče. Předpokládejme, že vodič má poloměr  $a_0$ , a zvolme uzavřenou křivku  $l'$  ve tvaru kružnice se středem v ose vodiče a s poloměrem  $a \leq a_0$ . Za předpokladu, že proud je rovnoměrně rozdělen po celém průřezu vodiče, můžeme vypočítat proud  $I'$  protékající plochou kružnice

$$I' = \frac{\pi a^2}{\pi a_0^2} I = \frac{a^2}{a_0^2} I.$$

Užitím Ampèrova zákona pak pro magnetickou indukci máme

$$2\pi a B = \mu_0 I', \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi a_0^2} I a. \quad (3.87)$$

Vidíme, že v soulahu se závěry předchozího článku je její průběh na povrchu vodiče spojitý (viz obr. 3.18).



Obr. 3.18 Průběh magnetické indukce nekonečně dlouhého přímého vodiče.

Pro ilustraci použití Biotova–Savartova vzorce k výpočtu magnetického pole odvodíme vzorec (3.86) ještě jednou pomocí vztahu (3.82). Uvažujme velmi tenký vodič protékající proudem podle obr. 3.19. Zvolme počátek souřadné  $O$  v patě kolmice spuštěné na vodič z bodu, ve kterém počítáme pole. Dosazením do (3.82) obdržíme pro velikost vektoru magnetické indukce vzbuzené úsekem vodiče  $AB$

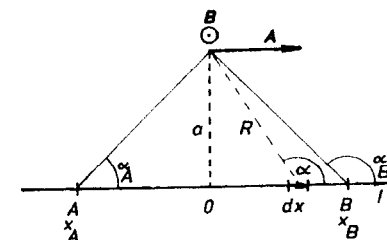
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sin \alpha}{R^2} dx.$$

Uvážíme-li, že  $a/R = \sin \alpha$ ,  $x/a = -\cot \alpha$ , můžeme dále počítat

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \frac{\sin \alpha}{a} d\alpha, \quad (3.88)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\cos \alpha_A - \cos \alpha_B].$$

Odtud pro limitní případ nekonečně dlouhého vodiče, kdy platí  $\cos \alpha_A \rightarrow 1$ ,  $\cos \alpha_B \rightarrow -1$ , okamžitě plyne výsledek (3.86).



Obr. 3.19 Výpočet pole přímého vodiče pomocí Biotova–Savartova vzorce.

Využitím (3.82) lze podobným způsobem vypočítat i vektorový potenciál  $A$ . V našem případě má proudový element  $I \Delta l$  neproměnný směr totožný se směrem vodiče orientovaným směrem protékajícího proudu. Směr a orientace vektorového potenciálu je tudíž dána směrem vodiče a orientací proudového elementu (viz obr. 3.19). Pro velikost vektorového potenciálu připadajícího na úsek vodiče  $AB$  podle (3.82) vychází

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(A)}^{(B)} \frac{dl}{R} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ -\int_0^{x_A} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} + \int_0^{x_B} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

a odtud

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[ -\ln \frac{x_A + (a^2 + x_A^2)^{1/2}}{a} + \ln \frac{x_B + (a^2 + x_B^2)^{1/2}}{a} \right]. \quad (3.89)$$

Limitování pro nekonečně dlouhý vodič není v tomto případě možné, neboť výsledek pro  $|x_A|, |x_B| \rightarrow \infty$  diverguje.

Získaný výsledek může být zpětně použit k výpočtu magnetické indukce pomocí (3.74). Jelikož je  $\mathbf{A} \equiv (A, 0, 0)$ , platí  $\mathbf{B} \equiv (0, \partial A / \partial z, -\partial A / \partial y)$ . Pro obě nenulové složky tudíž dostáváme

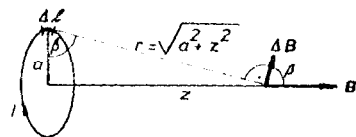
$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{z_a}{a^2} |\cos \alpha_A - \cos \alpha_B|, \quad (3.90)$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{y_a}{a^2} |\cos \alpha_A - \cos \alpha_B|,$$

přičemž jsme označili  $(z_a^2 + y_a^2) = a^2$ ,  $\cos \alpha = -x/R$ . Využitím tohoto výsledku již snadno vypočteme velikost magnetické indukce danou vztahem (3.88).

### b) Magnetická indukce na ose kruhového závitu

K řešení této úlohy je výhodné použít Biotova–Savartova vzorce. Z uspořádání na obr. 3.20 je vidět, že výsledná magnetická indukce je rovnoběžná s osou závitu, neboť kolmé složky příspěvků buzených symetricky položenými elementy se vzájemně ruší. Můžeme proto počítat přímo složku  $B_z$ , pro niž se křivkový integrál (3.82) redukuje na elementární integraci. Jelikož je  $\cos \beta = ar$ , platí v označení podle obrázku



Obr. 3.20 Výpočet magnetické indukce na ose kruhového závitu.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \beta}{r^2} \int dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.91)$$

Pole ve středu závitu dostaneme, dosadíme-li do (3.91)  $z = 0$

$$B = \frac{\mu_0}{2a} I. \quad (3.92)$$

### c) Magnetická indukce na ose solenoidu

Cívku, jejíž závity jsou navinuty v jedné vrstvě těsně vedle sebe na válcové ploše, nazýváme solenoidem. Na obrázku 3.21 je zobrazen solenoid délky  $l$  a poloměru  $a$ . Předpokládejme, že na jeho jednotkovou délku připadá  $N_l$  závitů. Vypočítáme velikost vektoru magnetické indukce  $B$  v libovolném bodě  $O$  na jeho ose.

Úlohu nejsnáze vyřešíme, použijeme-li principu superpozice a výsledku předchozího příkladu. Uvedené pole bude dáno součtem příspěvků jednotlivých

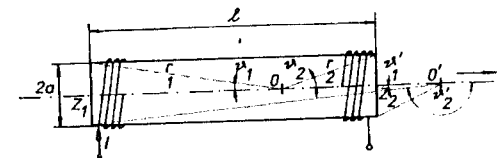
závitů. Uvážíme-li, že na délku vinutí  $\Delta z$  připadá  $N_l \Delta z$  závitů, které přispívají k celkové hodnotě magnetické indukce příspěvkem

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} N_l \Delta z,$$

bude výsledná hodnota dána integrálem

$$B = \frac{\mu_0}{2} IN_l \int_{z_1}^{z_2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0}{2} IN_l \left[ \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]_{z_1}^{z_2} = \quad (3.93)$$

$$= \frac{\mu_0}{2} IN_l \left[ \frac{|Z_1|}{\sqrt{a^2 + Z_1^2}} + \frac{|Z_2|}{\sqrt{a^2 + Z_2^2}} \right].$$



Obr. 3.21 Výpočet magnetické indukce na ose solenoidu.

Výsledek bude názornější, uvážíme-li, že pro úhly  $\vartheta_1, \vartheta_2$  vyplývají z obrázku vztahy

$$\cos \vartheta_1 = \left[ \frac{|Z_1|}{\sqrt{a^2 + Z_1^2}} \right], \quad \cos \vartheta_2 = \left[ \frac{|Z_2|}{\sqrt{a^2 + Z_2^2}} \right].$$

Dostaneme

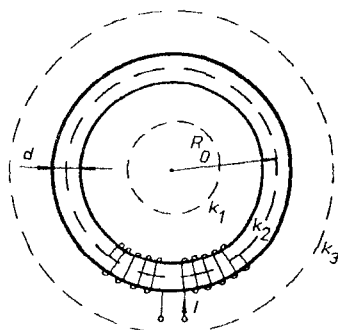
$$B = \frac{\mu_0}{2} IN_l (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2). \quad (3.94)$$

Pro body uvnitř solenoidu jsou oba úhly  $\vartheta_1, \vartheta_2$  ostré, takže hodnoty obou kosinů jsou kladné. Leží-li však bod, ve kterém počítáme pole, vně solenoidu (např. bod  $O'$  na obrázku), je jeden úhel tupý a příslušný kosinus má zápornou hodnotu. Ve speciálním případě velmi dlouhého solenoidu bude  $\cos \vartheta_1 = 1, \cos \vartheta_2 = 1$ . Vzorec (3.94) se redukuje na známý jednoduchý tvar

$$B = \mu_0 IN_l. \quad (3.95)$$

#### d) Magnetická indukce toroidu

Uvažujme cívku podle obr. 3.22. Závity cívky z velmi tenkého vodiče o celkovém počtu  $N$  nechť jsou navinuty na kostře ve tvaru prstence, v jedné vrstvě těsně vedle sebe po celém jejím obvodu; proud  $I$  tekoucí cívku má pak vlastnosti plošného proudu rovnoměrně rozloženého na plášti prstence. Střední poloměr prstence nechť je  $R_0$ . Vypočítejme hodnotu magnetické indukce  $\mathbf{B}$  uvnitř prstence.



Obr. 3.22 Výpočet magnetické indukce toroidu.

Vzhledem k symetrii soustavy lze soudit, že magnetické indukční čáry jsou kružnice ležící v rovinách kolmých k ose symetrie solenoidu, se středy na této ose. Z podobných důvodů je nutné dále soudit, že magnetická indukce má stejnou hodnotu ve všech bodech dané indukční čáry. Zvolíme-li proto za integrační dráhu libovolnou indukční čáru délky  $l$ , bude podle Ampèrova zákona platit

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = 2\pi R B = \mu_0 N I,$$

kde  $R$  je poloměr této čáry.

Kružnice, které jsou vedeny vně toroidu (např. kružnice  $k_1$ ,  $k_3$  na obrázku), neuzavírají žádný proud, takže platí  $Bl = 0$ . Magnetická indukce vně toroidu je tedy nulová. Leží-li naopak indukční čára, podle níž se integruje, uvnitř prstence platí

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}. \quad (3.96)$$

V praktických aplikacích je častý případ, kdy rozměr  $d$  je mnohem menší než střední poloměr  $R_0$ ,  $d \ll R_0$ . (viz kružnici  $k_2$  na obr. 3.22). Pak platí

$$B = \mu_0 \frac{N I}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi R_0} N I. \quad (3.97)$$

Magnetická indukce má tedy pro tento případ v celém vnitřním objemu toroidu přibližně stejnou velikost danou vztahem (3.97).

Z tohoto vztahu můžeme také získat výraz (3.95) pro magnetickou indukci velmi dlouhého solenoidu. Uvědomíme-li si, že poměr  $N/l = N_l$  představuje počet závitů připadající na jednotkovou délku, dostaneme zmiňovaný výraz. Nekonečně dlouhý solenoid můžeme chápat jako toroid o nekonečném poloměru. Z postupu, kterým byl vzorec (3.97) získán, ovšem plyne, že magnetické pole uvnitř nekonečného solenoidu je homogenní. Vzorec (3.95) udává tedy jeho hodnotu nejen na ose.

#### e) Vektorový potenciál homogenního pole a nekonečně dlouhého solenoidu

Úloha o nalezení vektorového potenciálu k danému průběhu magnetické indukce znamená nalézt vektorové pole  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , které vyhovuje definičnímu vztahu (3.74), eventuálně kalibrační podmínce (3.76). Předpokládáme nejdříve, že dané homogenní pole  $\mathbf{B}_0$  je vytvářeno blíže nespecifikovanými zdroji a vyplňuje celý prostor. Příným výpočtem se snadno přesvědčíme, že vektorový potenciál

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}) \quad (3.98)$$

vyhovuje uvedeným podmínkám, tj. definiční relaci (3.74), i kalibrační podmínce (3.76). Zvolíme-li speciální pravoúhlou soustavu souřadnou například tak, že osu  $z$  položíme do směru pole  $\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$ , můžeme vektorový potenciál (3.98) vyjádřit ve složkách. Platí

$$\mathbf{A} \equiv \left( -\frac{B_0}{2} y, \frac{B_0}{2} x, 0 \right). \quad (3.98a)$$

Snadno se přesvědčíme, že pro dané homogenní pole  $\mathbf{B}_0$  vyhovují podmínkám (3.74) a (3.76) i vektorová pole  $\mathbf{A}' \equiv (-B_0 y, 0, 0)$  a  $\mathbf{A}'' \equiv (0, B_0 x, 0)$ , za jejichž superpozici můžeme (až na velikost) vektorový potenciál (3.98) považovat. Tato skutečnost demonstruje známý poznatek, že vektorový potenciál není k danému průběhu magnetické indukce (i při splnění kalibrační podmínky (3.76)) určen jednoznačně.

Jedním z možných způsobů, jak lze homogenní magnetické pole (v omezeném objemu) přibližně realizovat, je velmi dlouhý solenoid. Proto ještě vyšetříme vektorový potenciál nekonečně dlouhého solenoidu, který ve svém vnitřním objemu vytváří homogenní pole (srov. příklad 3.3.5d). Je zřejmé, že magnetické pole ve vnitřním prostoru solenoidu může být popsáno vektorovým potenciálem (3.98a), položíme-li osu  $z$  soustavy souřadné do osy solenoidu. Ve vzdálenosti  $r_\perp$  od osy solenoidu,  $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} < a$ , kde  $a$  je jeho poloměr, lze tedy podle (3.95) pro velikost vektorového potenciálu psát

$$A = \mu_0 \frac{N_I}{2} I r_{\perp}. \quad (3.99)$$

Jeho směr bude zřejmě dán směrem tečny kružnice vedené daným bodem v rovině kolmé k ose solenoidu, se středem na této ose.

Další (a standardní) možnost pro výpočet vektorového potenciálu solenoidu spočívá v přímé aplikaci vzorce (3.82). Výpočet příslušného integrálu však není zcela jednoduchý a nebudeme jej uvádět.<sup>23</sup> Pro vnitřní prostor nekonečně dlouhého solenoidu vychází opět výsledek (3.99). Podle článku 3.3.4 však musí existovat vektorový potenciál vyhovující kalibrační podmínce (3.76), který je spojilý při průchodu vodičem s nenulovou hustotou proudu. Splnění této podmínky pro nekonečně dlouhý solenoid vede k nenulovému vektorovému potenciálu i ve vnějším prostoru, tedy v místech, kde je magnetická indukce nulová (srov. článek 3.3.3). Výpočet pomocí vzorce (3.82) skutečně k nenulovému vektorovému potenciálu ve vnějším prostoru vede. Pro nekonečně dlouhý solenoid poloměru  $a$ , vinutý z nekonečně tenkého vodiče, platí v případě  $r_{\perp} > a$

$$A = \mu_0 \frac{N_I}{2} I \frac{a^2}{r_{\perp}}, \quad (3.100)$$

příčemž směr vektoru  $\mathbf{A}$  leží ve směru tečen sousých kružnic, podobně jako ve vnitřním prostoru.

Snadno se přesvědčíme, že vektorový potenciál podle (3.99) a (3.100) je spojilý pro  $r_{\perp} = a$ , příčemž splňuje kalibrační podmínku (3.76). Pro  $r_{\perp} > a$  platí  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = 0$ . Je dále poučné si uvědomit, že vektorový potenciál podle (3.100), přestože se týká oblasti prostoru s nulovou magnetickou indukcí, umožňuje výpočet magnetického toku danou plochou  $S$ , i když tato plocha prochází pláštěm solenoidu. Uvažme například magnetický tok tekoucí plochou sousého kruhu poloměru  $R_0 > a$ . Je zřejmé, že k tomuto toku přispívá jen magnetické pole  $B_0$  uvnitř solenoidu, takže pro něj platí  $\Phi = \pi a^2 B_0$ . Na druhé straně může být pro výpočet magnetického toku použit vzorec (3.59a). Díky tomu, že vektorový potenciál je na kružnici tvořící obvod uvažovaného kruhu konstantní a má směr její tečny, platí

$$\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \frac{N_I}{2} I \frac{a^2}{R_0} \oint d\mathbf{l} = (\mu_0 N_I I) \pi a^2 = B_0 \pi a^2.$$

Výsledek je nezávislý na poloměru  $R_0$ , pokud ovšem platí  $R_0 > a$ .

<sup>23</sup> Postup výpočtu vektorového potenciálu nekonečně dlouhého solenoidu pomocí vztahu (3.82) je dosti podrobně popsán například v knize W. T. Scott: *The Physics of Electricity and Magnetism*, J. Wiley, New York 1966.

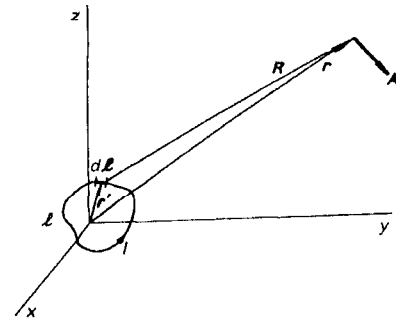
### 3.4 Magnetický dipól

Pro popis vlastností magnetického pole je pojem magnetického dipólu neméně důležitý jako pojem elektrického dipólu pro popis pole elektrostatického. Magnetickým dipólem se budeme zabývat nyní. Postup výkladu budeme přitom volit tak, aby byly zdůrazněny analogie i odlišné vlastnosti mezi dipólem elektrickým a magnetickým (srov. oddíl 1.3).

#### 3.4.1 Magnetický dipólový moment rovinné proudové smyčky

Uvažujme rovinnou proudovou smyčku  $l$  libovolného tvaru a malých rozměrů, protékanou proudem  $I$ , kterou umístíme do blízkosti počátku pravouhlé soustavy souřadné. Budeme studovat magnetické pole této smyčky v bodě  $\mathbf{r}$  značně vzdáleném od počátku soustavy souřadné (viz obr. 3.23). Vektorový potenciál  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  smyčky bude zřejmě dán výrazem typu (3.82), ve kterém  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Polohový vektor  $\mathbf{r}'$  přitom probíhá body smyčky, takže podle uvedeného předpokladu platí  $r' \ll r$  a v prvním přiblížení lze položit  $R \approx r$ . Výraz pro vektorový potenciál lze využitím (D 1.73) vyjádřit pomocí plošného integrálu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}'}{R} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \text{grad}' \left( \frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S}' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{S}' \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (3.101)$$



Obr. 3.23 K výpočtu vektorového potenciálu proudové smyčky.

v němž se integruje přes část roviny  $S$  ohraničené smyčkou  $l$  a symbolem  $\text{grad}'$  je vyznačeno, že se tato operace vztahuje na proměnnou  $r'$ . Použijeme-li již uvedené přiblížení, nebude integrovaná funkce záviset na integrační proměnné  $r'$  a vektorový potenciál bude možné přibližně vyjádřit vztahem

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (3.102)$$

Tento vzorec je možné zapsat v obvyklejším tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \doteq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (3.103)$$

zavedeme-li veličinu  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ , kterou nazveme *Ampèrovým magnetickým momentem smyčky*<sup>24</sup>.

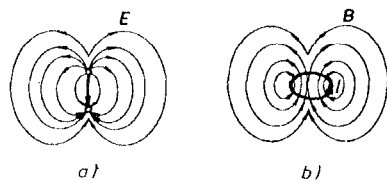
Magnetickou indukcí vyjádříme vztahem  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Přímý výpočet lze provést využitím identity vektorové analýzy (D 1.55) pro rotaci vektorového součinu dvou funkcí. Jelikož  $\mathbf{m}$  je konstanta a pro  $r \neq 0$  platí  $\text{div}(\mathbf{r}/r^3) = 0$ , dostaneme

$$\mathbf{B} \doteq -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \text{grad}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

a po provedení naznačené operace získáme konečný výsledek

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right), \quad (3.104)$$

ktej je formálně shodný s výrazem (1.125) pro intenzitu pole elektrického dipólu. Průběh siločar elektrického pole konečného dipólu a indukčních čar konečného magnetického dipólu je ve velkých vzdálenostech stejný (viz obr. 3.24).



Obr. 3.24 Analogie mezi elektrickým a magnetickým dipólem: a) elektrický dipól, b) magnetický dipól.

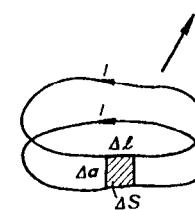
Uvedená shoda je pozoruhodná zejména proto, že jsme k výrazům pro pole dipólu dospěli zásadně odlišným způsobem. Zatímco elektrický dipól je reprezentován dvojicí bodových nábojů stejné velikosti a opačného znamení, magnetický dipól je tvořen smyčkou protékanou proudem. Díky shodě v průběhu polí je možné formálně zavést pojem *magnetického náboje* a magnetický dipól chápat také jako dvojici magnetických nábojů stejné velikosti a opačného znamení. Takový postup se někdy volí pro popis magnetického pole vytvořeného jen zmagnetovanými látkami. Příslušná teorie je pak zcela analogická teorii elektrostatického pole (viz článek 3.5.6). Na rozdíl od elektrostatiky je však nutné považovat magnetické náboje za formálně zavedenou veličinu (srov. články 3.3.3 a 3.4.4).

<sup>24</sup> Vedle Ampèrova magnetického momentu se v soustavě jednotek SI zavádí Coulombův magnetický moment  $\rho_m = \mu_0 \mathbf{m}$ .

Podobně jako v případě elektrického dipólu můžeme i zde zavést pojem *elementárního (bodového) magnetického dipólu*, budeme-li rozměry smyčky zmenšovat k nule a měnit proud  $I$  tak, aby magnetický moment měl konečnou nenulovou limitní hodnotu. Vzniklý bodový útvar bude charakterizován momentem  $\mathbf{m}$ . Při jeho umístění v počátku soustavy souřadné budou vzorce (3.103) a (3.104) popisovat průběh magnetického pole přesně ve všech bodech  $r \neq 0$ . Je zřejmé, že pro případ elementárního magnetického dipólu ztrácí konkrétní smysl otázka, je-li tvořen „bodovým“ proudovým útvarem, či „nekonečně blízkými“ magnetickými náboji. Pole elementárního magnetického dipólu lze též popsat pomocí skalárního potenciálu (viz článek 3.4.4).

### 3.4.2 Potenciální energie a silové účinky magnetického pole na magnetický dipól

Uvažujme uzavřenou proudovou smyčku protékanou proudem  $I$  vloženou do vnějšího magnetického pole indukce  $\mathbf{B}$ . Smyčku posuneme do nové polohy při zachování proudu  $I$ . Posunutí nechť je velmi malé a nechť je charakterizováno vektorem  $\Delta \mathbf{a}$  (viz obr. 3.25). (Vektor  $\Delta \mathbf{a}$  nemusí být podél celé smyčky konstantní; dokonce není ani nutné předpokládat, že smyčka si při posunutí zachová svůj tvar.)



Obr. 3.25 K výpočtu energie dipólu v magnetickém poli.

Na smyčku v magnetickém poli působí síla  $\mathbf{F}$ , kterou je možné vypočítat pomocí vztahu (3.58) a která při posunutí smyčky vykoná mechanickou práci  $A$ . Velikost práce  $\Delta A$  připadající na malý úsek vodiče  $\Delta l$  bude zřejmě dána vztahem

$$\Delta A = \Delta \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{a} = I (\Delta l \times \mathbf{B}) \cdot \Delta \mathbf{a} = I [\mathbf{B} \cdot (\Delta \mathbf{a} \times \Delta l)] = I (\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S}) = I \Delta \Phi,$$

v němž  $\Delta \mathbf{S}$  je plocha opsaná úsekem vodiče  $\Delta l$  při posunutí o  $\Delta \mathbf{a}$ . Celkovou práci  $A$  vypočítáme integrací předchozího vztahu podél celé smyčky. Označíme-li  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  magnetické toky tekoucí smyčkou v její výchozí a konečné poloze, bude podle obr. 3.25 s ohledem na rovnici (3.72) zřejmě platit

$$A = I (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3.105)$$

Práce bude tedy kladná, když tok poroste a naopak bude záporná, bude-li tok klesat. Magnetické síly mají tudíž tendenci vtahovat smyčku do magnetického

pole tak, aby magnetický tok jí protékající byl co největší. Veličina  $I\Phi$  představuje práci, kterou magnetické síly vykonají při přenesení smyčky z místa o nulovém toku do místa o toku  $\Phi$ . Veličinu

$$W = -I\Phi \quad (3.106)$$

můžeme tedy považovat za potenciální energii smyčky v magnetickém poli.

Pro rovinnou smyčku malých rozměrů o ploše  $S$  můžeme psát  $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$  a po zavedení jejího magnetického momentu  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$  dostaneme výraz pro potenciální energii ve tvaru

$$W = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}. \quad (3.107)$$

Tento vztah má stejný tvar jako výraz (1.131) pro energii elektrického dipólu v elektrostatickém poli. Podle toho, co bylo o magnetickém dipólu řečeno v předchozím článku, udává výraz (3.107) zřejmě energii obecného (elementárního) bodového dipólu v libovolném vnějším magnetickém poli. Díky formální totožnosti (3.107) s (1.131) je možné využitím (1.133) získat (stejným postupem jako v případě elektrického dipólu) analogické výrazy pro složky zobecněné síly působící na magnetický dipól v magnetickém poli. Například při popisu soustavy pomocí pravoúhlých souřadnic dostaneme pro obyčejnou sílu  $\mathbf{F}$  a moment silové dvojice  $\mathcal{M}$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (3.108)$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

### 3.4.3 Multipólový rozvoj magnetického pole

Nyní budeme vyšetřovat magnetické pole obecnějšího útvaru, než je rovinná proudová smyčka. Budeme předpokládat libovolné rozložení proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ , budeme však požadovat, aby proudová hustota byla nenulová pouze uvnitř koule  $K$  poloměru  $R_0$  se středem v počátku soustavy souřadnic. Uvažované proudy se tedy v objemu  $K$  uzavírají. Průběh pole budeme opět vyšetřovat v obecném bodě  $\mathbf{r}$  značně vzdáleném od počátku soustavy, takže opět můžeme předpokládat  $R_0 \ll r$ .

Vektorový potenciál  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  bude dán vztahem typu (3.80), přičemž se integruje přes objem  $V$  celý uzavřený uvnitř koule  $K$ . Za předpokladu  $r' \ll r$  lze vektorový potenciál přibližně vyjádřit v konkrétnějším tvaru, rozvineme-li veličinu  $1/R$  v mocninou řadu souřadnic vektoru  $\mathbf{r}'$  kolem počátku soustavy souřadnic. Stejným postupem, který byl použit pro multipólový rozvoj skalárního elektrostatického potenciálu v oddílu 1.3, získáme pro první tři členy rozvoje vektorového potenciálu výraz

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) + \dots = \frac{1}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV - \\ & - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{r}' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \mathbf{r}' \cdot \text{grad} \left( \mathbf{r}' \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) \right] \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV + \dots \end{aligned} \quad (3.109)$$

První člen  $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$  v rozvoji (3.109) je roven nule, neboť integrál z proudové hustoty  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  přes objem  $V$ , ve kterém se všechny uvažované proudy uzavírají, je nulový.

První nenulový člen rozvoje je obecně  $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ . Aproximuje vyšetřované pole v prvním přiblížení, a má tedy dominantní význam. Vyšetříme proto podrobněji jeho vlastnosti. Vektorový potenciál je možné vyjádřit ve tvaru (3.103) pro bodový magnetický dipól,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (3.103a)$$

jestliže zobecníme definici (Ampèrova) magnetického momentu (srov. čl. 3.4.1) pomocí vztahu

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] dV. \quad (3.110)$$

Lze se snadno přesvědčit (srov. čl. 3.3.3), že pro speciální případ úzké rovinné proudové trubice malých rozměrů se vztah (3.110) redukuje na jednoduchý výraz  $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$  zavedený v čl. 3.4.1. Odpovídající průběh vektoru magnetické indukce pro dipólový člen je zřejmě dán vztahem (3.104).

Je-li dipólový člen rozvoje nulový, nebo je-li dané obecné pole třeba popsat s větší přesností, je nutné vzít v úvahu kvadrupólový, popř. další členy. V tomto směru je situace zcela analogická elektrostatickému poli (srov. článek 1.3.2). Platí zejména také, že velikost jednotlivých příspěvků rozvoje je závislá na symetrii rozložení proudu. Se zvyšováním této symetrie klesá podíl příspěvků vyšších multipólů. (Jejich velikost navíc rychle klesá s rostoucí vzdáleností.) Osově symetrické rozložení proudu vytváří magnetické pole, jehož průběh se nejvíce blíží poli dipólu.

### 3.4.4 Objemové rozložení magnetických dipólů

Stejně jako v případě elektrických dipólů (viz článek 1.3.4) můžeme uvažovat spojité prostorové rozložení magnetických dipólů, charakterizované (objemovou) hustotou (například Ampèrova) dipólového momentu  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ . Tato veličina se



nazývá vektorem magnetizace<sup>25</sup> (srov. čl. 3.5.2). Celkový dipólový moment  $\mathbf{m}_V$  daného objemu  $V$  lze pak vyjádřit objemovým integrálem

$$\mathbf{m}_V = \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV'. \quad (3.112)$$

Vektorový potenciál magnetického pole těmito dipóly vytvořeného bude podle (3.103) zřejmě dán vztahem

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV'. \quad (3.113)$$

Tento výraz lze upravit na přehlednější tvar, přepíšeme-li integrand následujícím způsobem

$$\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \text{grad}' \frac{1}{R} = -\text{rot}' \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} + \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R}$$

a použijeme-li zobecněné Gaussovy věty (D 1.72), dostaneme tak výsledek

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{S}}{R^3} + \int_V \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} dV' \right], \quad (3.114)$$

v němž  $S$  je uzavřená plocha ohraničující objem  $V$  a čárkou u operací „grad“ a „rot“ je naznačeno, že se tyto operace vztahují na integrační proměnnou  $\mathbf{r}'$ . Jestliže položíme

$$\overset{(m)}{j}_S(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}, \quad (3.115)$$

$$\overset{(m)}{j}(\mathbf{r}') = \text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (3.116)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor vnější normály plochy  $S$ , můžeme vztah (3.114) dále vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \oint_S \frac{\overset{(m)}{j}_S(\mathbf{r}')}{R} dS' + \int_V \frac{\overset{(m)}{j}(\mathbf{r}')}{R} dV' \right]. \quad (3.117)$$

Srovnáním posledního vztahu s (3.80) a (3.80a) můžeme učinit zajímavý závěr: *Magnetické pole vytvořené prostorovým rozložením magnetických dipólů s ob-*

<sup>25</sup> Vedle magnetizace se v Mezinárodní soustavě jednotek zavádí vektor magnetické polarizace  $\mathbf{P}_m(\mathbf{r})$ , který představuje objemovou hustotu Coulombova magnetického momentu. Platí tedy

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (3.111)$$

jemovou hustotou  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  v objemu  $V$  je totožné s magnetickým polem vytvořeným objemovými proudy hustoty  $\overset{(m)}{j}(\mathbf{r})$  (3.116) tekoucími v objemu  $V$  a plošnými proudy hustoty  $\overset{(m)}{j}_S(\mathbf{r}')$  (3.115) tekoucími na ploše  $S$  ohraničující objem  $V$ .

Průběh magnetické indukce studovaného pole získáme aplikací operace rotace na vektorový potenciál daný některými z výrazů (3.113), (3.114), (3.117). Díky formální shodnosti výrazů (1.125) a (3.104) pro intenzitu a magnetickou indukci pole elektrického a magnetického dipólu a vzhledem k platnosti principu superpozice pro oba typy polí lze soudit, že při shodném prostorovém rozložení objemové hustoty elektrického dipólového momentu  $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$  (viz čl. 1.3.4) a objemové hustoty magnetického dipólového momentu  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  získáme pole o shodném průběhu elektrické intenzity a magnetické indukce.

Uvedená shoda dovoluje učinit druhý zajímavý závěr: *Jelikož elektrostatické pole je potenciální, je možné i pole elementárního magnetického dipólu, respektive pole prostorově rozložených magnetických dipólů, popsat pomocí skalárního potenciálu.* Skutečně, zavedeme-li analogicky k (1.169) formálně objemovou a plošnou hustotu „magnetického náboje“  $\rho_m(\mathbf{r}')$  a  $\sigma_m(\mathbf{r}')$  vztahy

$$\sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_m(\mathbf{r}') = -\text{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (3.118)$$

je možné zavést skalární magnetický potenciál  $\varphi_m(\mathbf{r})$  analogicky k (1.169) vztahem

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[ \oint_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} dS' + \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dV' \right] \quad (3.119)$$

a magnetickou indukci  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  studovaného pole v bodech s nulovou magnetizací vyjádřit jako

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \text{grad} \varphi_m(\mathbf{r}). \quad (3.120)$$

Speciálně pole jediného elementárního dipólu s dipólovým momentem  $\mathbf{m}$  bude popsáno skalárním potenciálem ve tvaru

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.121)$$

### 3.4.5 Magnetická dvojrstva

Vedle objemového rozložení magnetických dipólů, probíraného v předchozím článku, je možné uvažovat i magnetické dipóly spojené rozložené na dané ploše  $S$ . Plošné rozložení magnetických dipólů se nazývá magnetickou dvojrstvou (srov. pojem elektrické dvojrstvy zavedený v čl. 1.3.3) a je charakterizováno plošnou hustotou magnetického dipólového momentu  $\mathbf{M}_S(\mathbf{r}')$ . Celkový moment rozložený na dané ploše  $S$  je zřejmě roven plošnému integrálu

$$\mathbf{m}_S = \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \cdot dS. \quad (3.122)$$

Magnetická dvojrstva, jejíž hustota dipólového momentu má všude stejnou velikost a je v každém bodě orientována ve směru normály plochy, se nazývá *homogenní*. Nadále se budeme zabývat jen vlastnostmi homogenní dvojrstvy.

Za předpokladu platnosti principu superpozice lze vektorový potenciál magnetického pole dvojrstvy vyjádřit užitím (3.103) ve tvaru plošného integrálu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dS'. \quad (3.123)$$

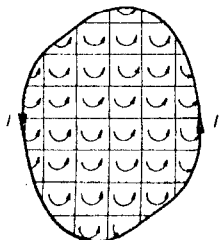
Využitím (D 1.73) lze tento výraz pro homogenní dvojrstvu vyjádřit pomocí křivkového integrálu přes křivku  $l$ , ohraničující plochu  $S$ . Platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_S \frac{d\mathbf{S} \times \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_S \left( \text{grad} \frac{1}{R} \times d\mathbf{S} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} M_S \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}. \quad (3.124)$$

Srovnáním výsledku s (3.82) vidíme, že výraz pro vektorový potenciál dvojrstvy se ztotožní s výrazem pro vektorový potenciál magnetického pole velmi tenké uzavřené proudové smyčky, bude-li její proud  $I$  roven velikostí plošné hustotě dipólového momentu dvojrstvy. Tedy

$$\mathbf{M}_S = I \mathbf{n}, \quad (3.125)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor normály plochy  $S$  v daném bodě.



Obr. 3.26 Ekvivalence magnetické dvojrstvy a proudové smyčky.

Z uvedeného výsledku vyplývá, že homogenní magnetická dvojrstva vytvoří v okolním prostoru stejné magnetické pole jako velmi úzká uzavřená proudová trubice ohraničující plochu dvojrstvy, jestliže proud tekoucí trubici splňuje podmínku (3.125). Ekvivalenci dvojrstvy a proudové smyčky snadno názorně pochopíme podle obr. 3.26. Jednotlivé magnetické dipóly homogenní dvojrstvy

jsou v obrázku reprezentovány smyčkami protékányými proudem  $I$ . Tyto proudy sousedních smyček se však v celé ploše vzájemně vyruší. Nevyrušen zůstane jen proud na obvodu dvojrstvy, který reprezentuje zmíněnou proudovou trubici.

Díky formální shodnosti výrazů (1.125) a (3.104) pro intenzitu a magnetickou indukci elektrického a magnetického dipólu je možné magnetické pole homogenní magnetické dvojrstvy vyšetřovat též způsobem, který byl v článku 1.3.3 použit pro dvojrstvu elektrickou. Podobně jako v případě objemově rozložených magnetických dipólů je i zde zřejmé, že pole magnetické homogenní dvojrstvy lze popsat skalárním magnetickým potenciálem  $\varphi_m(\mathbf{r})$ . V analogii se vztahem (1.158) dostaneme pro tento potenciál výraz

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} M_S \Omega, \quad (3.126)$$

kde  $\Omega$  značí prostorový úhel, pod nímž je plocha dvojrstvy vidět z bodu  $r$ , v kterém potenciál uvažujeme. Magnetická indukce  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  může pak být vypočtena podle (3.120). Potenciál  $\varphi_m(\mathbf{r})$  je spojitý všude, s výjimkou plochy dvojrstvy  $S$ . Při průchodu touto plochou má nespojitost  $M_S$ .

### 3.4.6 Řešené příklady

#### a) Magnetický dipólový moment nabitě částice konající rovnoměrný kruhový pohyb

Uvažujme bodovou částici hmotnosti  $M_0$  nesoucí náboj  $q$ , která koná rovnoměrný kruhový pohyb rychlostí  $v$  po dráze o poloměru  $r$ . Je zřejmé, že částice reprezentuje proudovou smyčku o ploše  $S = \pi r^2$ , s proudem  $I = qv/2\pi r$ . Její magnetický dipólový moment  $\mathbf{m}$  má podle článku 3.4.1 velikost

$$m = IS = \frac{1}{2} qrv. \quad (3.127)$$

Sledovaná částice reprezentuje také mechanickou soustavu, jejíž pohybový stav je možné charakterizovat hodnotou mechanického momentu hybnosti  $\mathbf{L}$ . Pro jeho velikost platí

$$L = M_0 |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = M_0 rv.$$

Vypočítáme-li poměr velikosti magnetického momentu  $m$  a mechanického momentu hybnosti částice  $L$ , dostaneme tzv. *gyromagnetický poměr*  $\gamma$ . Pro vyšetřovanou částici vychází

$$\gamma = \frac{m}{L} = \frac{q}{2M_0}. \quad (3.128)$$

Z výsledku můžeme učinit zajímavý závěr: *gyromagnetický poměr je pro danou částici charakteristickou konstantou, která nezávisí na jejím pohybovém stavu.*

### b) Magnetický dipólový moment rotující nabitě koule

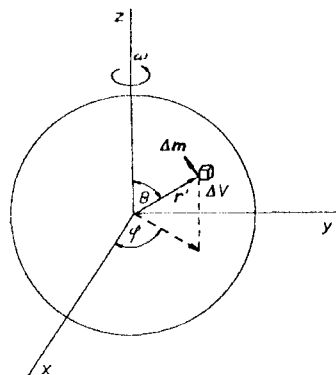
Určeme magnetický dipólový moment homogenně nabitě koule s objemovou hustotou náboje  $\rho$ , která rotuje úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy  $z$ . Pro výpočet magnetického dipólového momentu použijeme vztah (3.110). Uvědomíme si, že pro  $\rho > 0$  má výsledný moment směr vektoru úhlové rychlosti a že diferenciál dipólového momentu  $dm$  (viz obr. 3.27) přispěje jen složkou do osy  $z$ ;  $dm \sin \vartheta$ . Stačí tudíž integrovat jen přes velikost této složky. Vektory  $\mathbf{j}$  a  $\mathbf{r}'$  jsou navzájem kolmé, přičemž platí  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{r}' \omega \sin \vartheta$ . Tedy

$$m = \frac{1}{2} \int_V r' j \sin \vartheta dV' = \frac{1}{2} \int_V r' \rho v \sin \vartheta dV' = \frac{1}{2} \rho \omega \int_V r'^2 \sin^2 \vartheta dV'.$$

Ve sférických souřadnicích dostaneme

$$m = \frac{\rho \omega}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r'^4 \sin^3 \vartheta dr' d\varphi d\vartheta = \frac{QR^2 \omega}{5}, \quad (3.129)$$

kde jsme symbolem  $Q$  označili celkový náboj koule  $Q = \rho(4/3)\pi R^3$ .



Obr. 3.27 K výpočtu magnetického dipólového momentu rotující nabitě koule.

Analogicky k předchozímu příkladu vypočítáme gyromagnetický poměr rotující koule. Její hmotnost označíme  $M_0$  a vezmeme v úvahu, že její moment hybnosti  $L$  je roven  $L = (2/5)M_0 R^2 \omega$ . Dostaneme výsledek shodný s (3.128), který potvrzuje závěr předchozího příkladu.

## 3.5 Magnetické pole v látkách

### 3.5.1 Chování látek v magnetickém poli

Již v úvodu oddílu 3.3 bylo zdůrazněno, že k výslednému magnetickému poli v daném bodě mohou kromě makroskopických proudů přispívat také zmagnetované látky. Byly rovněž uvedeny některé experimentální údaje, které ukazují, že magnetické pole může existovat i bez přítomnosti makroskopických proudů. Vektor magnetické indukce byl v článku 3.3.1 definován vztahy (3.57), respektive (3.58). Jak bylo na uvedeném místě zdůrazněno, platí tato definice obecně, bez ohledu na to, jakými zdroji je magnetické pole vybuzeno a jde-li o magnetické pole ve vakuu či v látkovém prostředí. (Pole v látkovém prostředí zde ovšem opět chápeme makroskopicky, podobně jako v oddílu 1.5 pole elektrostatické.)

Přesto, že se v této kapitole zabýváme fenomenologickým popisem magnetických jevů z makroskopického hlediska, bude pro získání větší názornosti užitečné uvést zpočátku alespoň kvalitativně některá nejzákladnější fakta o magnetických vlastnostech atomů a molekul.

Každý atom, jako soustava vzájemně se pohybujících nabitých částic, je také magneticky aktivní. Elektron obíhající kolem jádra můžeme považovat za proudovou smyčku a jeho magnetické účinky můžeme charakterizovat příslušným magnetickým momentem (srov. příklad 3.4.6a). Kromě toho je dnes dostatečně prokázáno, že některé elementární částice samotné (elektron, proton, neutron) mají vlastní magnetický moment. Jedním ze základních rysů magnetismu elementárních částic a atomů je přímá souvislost mezi magnetickým momentem  $\boldsymbol{\mu}$  a momentem hybnosti  $\mathbf{L}$ . Mezi oběma momenty platí vždy přímá úměrnost charakterizovaná gyromagnetickým poměrem  $\gamma$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}$ . (Souvislost mezi magnetickým dipólovým momentem a mechanickým momentem hybnosti není ovšem omezena jen na mikroskopické objekty – srov. příklady 3.4.6a a 3.4.6b.) Částice, která má od nuly různý magnetický moment, má tedy vždy nenulový i mechanický moment hybnosti a charakter jejího pohybu ve vnějším magnetickém poli je vždy do určité míry podobný pohybu setrvačnicku. Jak uvidíme v kapitole 7, je tato okolnost podstatná pro chování látek ve stacionárním i časově proměnném magnetickém poli. Momenty, které získává elektron v důsledku svého pohybu kolem jádra, se nazývají *orbitálními momenty*. Vlastní moment hybnosti elementárních částic (elektronů, nukleonů apod.) se nazývá jejich *spinem*. Spinu příslušný magnetický moment se nazývá *spinovým magnetickým momentem*.

Z kvantové mechaniky víme, že moment hybnosti orbitálního pohybu elektronu v atomu je kvantován a jeho složka do daného směru může nabývat pouze hodnot, které jsou celistvým násobkem veličiny  $h = h/2\pi$ , kde  $h \doteq 6,626 \cdot 10^{-34}$  J.s je *Planckova konstanta*. Podle (3.128) je tedy kvantován i příslušný magnetický moment. Nejmenší orbitální magnetický moment elektronu odpovídá nejmenší nenulové hodnotě orbitálního momentu hybnosti, která je rovna  $h$ , a nazývá se *Bohrův magneton*  $\mu_B$ . Podle (3.128) platí

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \doteq 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

Z kvantové mechaniky dále plyne, že i spinový magnetický moment elektronu může mít v daném směru velikost rovnou  $\mu_B$ , gyromagnetický poměr má však v tomto případě hodnotu  $\gamma_e = e/m_e$ . Magnetické dipólové momenty nukleonů a jader se vyjadřují pomocí analogické veličiny  $\mu_N$ , zvané *jaderný magneton*. Platí pro něj

$$\mu_N = \frac{m_e}{m_p} \mu_B \doteq 5,051 \cdot 10^{-27} \text{ A} \cdot \text{m}^2,$$

kde  $m_p$  je hmotnost protonu. Podrobněji je o této problematice pojednáno v čl. 7.1.4 a v Dodatku 2.

Výsledný magnetický moment atomu (a tedy i jeho chování ve vnějším magnetickém poli) je dán vektorovým součtem magnetických momentů jednotlivých jeho složek. Výsledný magnetický moment elektronového obalu má řádovou velikost Bohrova magnetonu, magnetické momenty jader jsou obecně o tři řády menší a mohou být v prvním přiblížení zanedbány. Hodnota výsledného magnetického momentu závisí samozřejmě na stavech, v nichž se jednotlivé elektrony nacházejí. Výsledný moment může být nulový i v případě, kdy atom či molekula obsahuje značný počet elektronů, a naopak může být od nuly různý pro velmi jednoduché atomy či molekuly. Jeho hodnota závisí také na chemických faktorech, takže atom daného prvku může mít různý magnetický moment v různých typech sloučenin. Specificky složitá je situace zejména v případě kovů, v nichž existují volné (vodivostní) elektrony, které jsou společně všem atomům kovu.

U většiny látek jsou atomové momenty za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole orientovány chaoticky, takže výsledný magnetický moment makroskopického množství látky je roven nule. Teprve při vložení do vnějšího magnetického pole působí na atomové magnetické momenty moment síly (3.108), který se snaží orientovat je do směru pole. Látka pak jeví nenulový makroskopický magnetický moment; říkáme, že je zmagetována. (Kromě uvedeného orientačního mechanismu může vnější pole také ovlivňovat stavy elektronů u atomu, a tím ovlivňovat i magnetické momenty jednotlivých atomů.)

Právě uvedená fakta ukazují, že lze každému atomu či molekule dané látky přiřadit určitou střední hodnotu magnetického momentu  $\mathbf{p}_m = \mu_0 \mathbf{m}$ , který je jednoznačně určen fyzikálním stavem látky a uplatní se v jejích makroskopických projevech. V dalším textu této kapitoly se budeme již výhradně zabývat tímto makroskopickým popisem magnetického pole a budeme vycházet jen z právě uvedeného kvalitativního poznatku. Všechny otázky podmíněné konkrétními vlastnostmi a mikrofyzikální strukturou atomu ponecháme stranou. Pozornost jim bude věnována v kapitole 7.

### 3.5.2 Magnetická polarizace (magnetizace) látek, magnetizační proudy

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá, že magnetické pole vytvořené zmagetovanými látkami je možné považovat za magnetické pole soustavy prostorově rozložených dipólů. Jak bylo ukázáno v článku 3.4.4, je průběh tohoto pole jednoznačně určen charakterem prostorového rozložení dipólů. Podobně jako v případě elektrostatického pole (viz oddíl 1.5) v látkovém prostředí, je i zde výhodné použít vektorovou funkci polohového vektoru, která popisuje v makroskopickém měřítku zmíněné parametry atomových dipólů. Mluvíme o magnetické polarizaci  $\mathbf{P}_m(\mathbf{r})$ , respektive o magnetizaci  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  dané látky (srov. čl. 3.4.4). Vektor  $\mathbf{P}_m$ , respektive  $\mathbf{M}$  vyjadřuje magnetický moment připadající na její jednotkový objem. V případě magnetické polarizace jde o moment Coulombův, v případě magnetizace o moment Ampèrův. Platí tedy vztah (3.111)

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

Definiční vztahy pro magnetickou polarizaci (magnetizaci) jsou zcela analogické příslušným vztahům pro polarizaci elektrickou (viz články 1.3.4 a 1.5.2). Uvedeme proto jen jejich velmi stručný přehled. Uvažujme malý objem  $\Delta V$  vyšetřované látky, který je však dostatečně velký, aby z makroskopického hlediska mohly být zanedbány fluktuace magnetického momentu na vzdálenostech srovnatelných s rozměry atomu a tento objem mohl být považován za kontinuum. Jeho magnetický moment  $\mathbf{p}_{m,\Delta V}$  může být potom vyjádřen dvěma způsoby: jednak jako součet momentů  $\mathbf{p}_{m,i}$  jednotlivých atomů

$$\mathbf{p}_{m,\Delta V} = \sum_i \mathbf{p}_{m,i}, \quad (3.130)$$

jednak po zavedení limitní veličiny (magnetické polarizace)

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{m,\Delta V}}{\Delta V} \quad (3.131)$$

ve tvaru

$$\mathbf{p}_{m,\Delta V} \doteq \mathbf{P}_m(\mathbf{r}) \Delta V,$$

přičemž polohový vektor  $\mathbf{r}$  může být v objemu  $\Delta V$  zvolen libovolně. Magnetický moment  $\mathbf{p}_{m,\Delta V}$  libovolného objemu  $V$ , je zřejmě možné vyjádřit ve tvaru objemového integrálu

$$\mathbf{p}_{m,V} = \int_V \mathbf{P}_m dV. \quad (3.132)$$

Ve speciálním případě, kdy je magnetická polarizace v celém objemu homogenní, platí

$$\mathbf{p}_{m,V} = \mathbf{P}_m V. \quad (3.133)$$

Pro magnetizaci lze napsat analogické výrazy

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{m}_{m,\Delta V}}{\Delta V}, \quad (3.131a)$$

$$\mathbf{m}_V = \int_V \mathbf{M} dV, \quad (3.132a)$$

$$\mathbf{m}_V = \mathbf{M} V. \quad (3.133a)$$

Rozměr magnetické polarizace je shodný s rozměrem magnetické indukce. Její jednotkou v Mezinárodní soustavě je *tesla* (T). Jednotkou magnetizace je ampér na metr ( $A \cdot m^{-1}$ ).

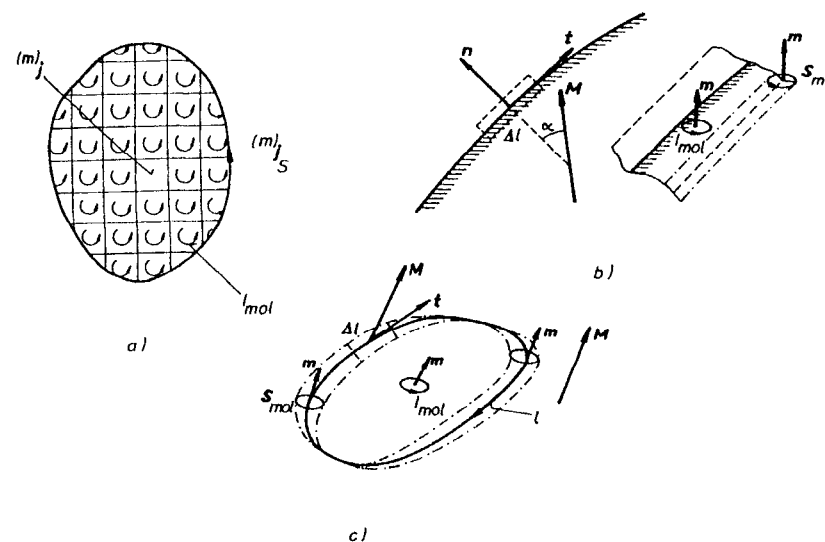
V článku 3.4.1 jsme zavedli pojem bodového magnetického dipólu při studiu magnetického pole proudové smyčky. Z druhé strany je jasné, že magnetické pole každého dipólu je možné (bez ohledu na jeho vnitřní strukturu) reprezentovat magnetickým polem proudové smyčky stejného magnetického momentu. Uvedené skutečnosti umožňují vyjádřit magnetické pole zmagnetovaného tělesa (jež je polem soustavy dipólů) pomocí magnetického pole proudových smyček. Právě získaný výsledek vyjadřuje v podstatě hypotézu o existenci molekulárních proudů, kterou zavedl A. M. Ampère, když předpokládal, že příčinou magnetické aktivity látek jsou mikroskopické proudy, které se uzavírají v molekulárních rozměrech.

Úvahy tohoto druhu lze dále rozvíjet, když si uvědomíme, že soustava „molekulárních“ proudových smyček může reprezentovat i určité makroskopické proudy.

Vznik takových proudů lze kvalitativně pochopit z obr. 3.28a, který je analogický s obr. 3.26 (objasňujícímu ekvivalenci proudové smyčky a magnetické dvojvrstvy) a který schematicky znázorňuje řez zmagnetovaným tělesem s magnetizací kolmou k rovině nárkresny. Plochu řezu si můžeme představit rozdělenou na malé plošky, z nichž každá reprezentuje proudovou smyčku, po jejímž obvodu protéká „molekulární proud“  $I_{mol}$ . Je zřejmé, že pokud budou proudy ve všech smyčkách stejné, budou se vzájemně rušit ve společných stranách sousedících smyček a nezrušeny zůstanou pouze proudy na povrchu tělesa. Lze tedy soudit, že magnetické pole vytvořené homogenně zmagnetovaným tělesem bude totožné s polem vhodně zvolených makroskopických plošných proudů tekoucích po povrchu tělesa. Největší hustotu budou mít zřejmě v místech, kde je povrch rovnoběžný s vektorem magnetizace, a naopak v místech, kde je povrch k magnetizaci kolmý, bude jejich hustota nulová.

Nebudou-li proudy ve všech smyčkách uvnitř tělesa stejné, nebudou se vzájemně rušit a uvnitř tělesa budou moci vznikat objemové makroskopické proudy. (Na obrázku je tato situace reprezentována jednou chybějící smyčkou.) Lze tedy říci, že objemové makroskopické proudy mohou reprezentovat nehomogenity v magnetizaci těles.

Na základě právě uvedených úvah lze očekávat, že magnetické pole libovolného zmagnetovaného tělesa bude možné také vyjádřit jako pole makroskopických plošných proudů tekoucích na povrchu tělesa a makroskopických objemových proudů tekoucích uvnitř tělesa. Tyto proudy se nazývají *magnetizačními proudy* a mají charakter efektivních vázaných proudů, o nichž byla řeč v článku 3.1.2.



Obr. 3.28 K výkladu souvislosti magnetizačních proudů s nehomogenní magnetizací.

Vyjádření magnetického pole zmagnetovaného tělesa pomocí pole magnetizačních proudů má výhodu v tom, že dovoluje použít všechny vztahy platné pro pole makroskopických proudů ve vakuu také pro popis magnetického pole zmagnetovaných těles. V tomto smyslu je zde plná analogie s elektrostatickou (viz oddíl 1.5), kde je také možné vyjádřit elektrostatické pole zpolarizovaných těles (tj. pole soustavy elektrických dipólů) pomocí pole vázaných nábojů. Avšak zatímco vázané náboje jsou reálně existující *makroskopickou* veličinou, v případě vázaných magnetizačních proudů tomu tak není. Tyto proudy nemají nic společného se skutečnými proudy, tj. s přemisťováním nábojů v makroskopickém měřítku. Mohou být od nuly různé jak ve

vodivém, tak i v nevodivém prostředí a představují jen efektivní veličinu umožňující pohodlně popsat magnetismus zmagnetovaných těles.

Právě zmíněná možnost vyjádření magnetického pole zmagnetovaných těles pomocí magnetického pole vázaných magnetizačních proudů je ovšem podmíněna nalezením takového rozložení proudů, o kterém bude předem známo, že vytvoří stejné magnetické pole jako zmagnetované těleso. Tato otázka však již byla bez ohledu na právě provedené názorné úvahy v podstatě vyřešena v článku 3.4.4. Ze vztahů (3.114) a (3.117) vyláznul z požadavku ekvivalence obou způsobů vyjádření vztah mezi magnetizací  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  a hustotami plošných magnetizačních proudů  ${}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$  (3.115) a objemových magnetizačních proudů  ${}^{(m)}\mathbf{j}(\mathbf{r})$  (3.116)

$${}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = \mathbf{M}(\mathbf{r}) \times \mathbf{n},$$

$${}^{(m)}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{r}),$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor normály na povrchu zmagnetovaného tělesa. Zdůrazníme znovu, že plošné magnetizační proudy jsou nenulové na povrchu těchto těles a objemové magnetizační proudy jsou nenulové uvnitř těles.

Výraz (3.116) je možné bez obtíží převést na integrální tvar, neboť výsledný magnetizační proud  ${}^{(m)}I$  protékající libovolnou plochou  $S$  je dán vztahem

$${}^{(m)}I = \int_S {}^{(m)}\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Použitím Stokesovy věty je možné příslušný plošný integrál převést na křivkový integrál přes křivku  $l$  ohraničující plochu  $S$ . Platí tedy

$${}^{(m)}I = \int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.116a)$$

Připomínáme (viz Dodatek 1), že orientaci plochy  $S$ , která je nezbytná pro stanovení znamení proudu, je určena i orientací křivky  $l$  ve vztahu (3.116a).

Vztahy (3.115) a (3.116) lze získat i matematicky jednodušším elementárním (i když méně rigorózním) postupem. Budeme nejdříve uvažovat situaci na povrchu zmagnetovaného tělesa o magnetizaci  $\mathbf{M}$ , jehož část je zobrazena na obr. 3.28b. Předpokládáme, že na tomto povrchu teče plošný magnetizační proud reprezentovaný hustotou  ${}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ . Zvolme úzkou orientovanou obdélníkovou plošku, jejíž delší strany  $\Delta V$  jsou rovnoběžné s jednotkovým tečným vektorem  $\mathbf{t}$  a jejíž plocha protíná povrch tělesa v kolmém směru (viz obr. 3.28b). Celkový proud protékající touto ploškou můžeme počítat dvěma způsoby: za prvé makroskopicky pomocí předpokládané hustoty  ${}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$  a za druhé mikroskopicky sečtením příspěvků všech molekulárních proudů  $I_{\text{mol}}$  reprezentujících magnetické momenty molekul.

Pro první způsob výpočtu zavedeme jednotkový vektor  $\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}$  (srov. čl. 3.3.4). Hledaný proud pak lze vyjádřit ve tvaru  $\int {}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N} \Delta l$ . Za druhé předpokládáme, že na jednotkový objem tělesa připadá  $n_0$  molekul, z nichž každá je reprezentována smyčkou o magnetickém momentu  $\mathbf{m} = I_{\text{mol}} \mathbf{S}_{\text{mol}}$ . Ze zvětšené části smyčky na obrázku je zřejmé, že k celkovému proudu plochou

obdélníčku budou přispívat jen smyčky vyplňující válcové těleso objemu  $\Delta V$ , o kolmém průřezu  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{S}_{\text{mol}}$ . (Smyčky, které jsou celé uvnitř obdélníčku, protínají jeho plochu dvakrát a k celkovému proudu nepřispívají.) Vezmeme-li v úvahu platnost vztahu  $\mathbf{M} = n_0 \mathbf{m}$ , dostaneme pro hledaný proud vyjádření  $I_{\text{mol}} n_0 \Delta l = -I_{\text{mol}} n_0 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{S}_{\text{mol}}) \Delta l = -(\mathbf{M} \cdot \mathbf{t}) \Delta l$ . Ze srovnání obou postupů plyne vztah

$$-({}^{(m)}\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{t}$$

představující jen jiné vyjádření (3.115).

Pro vyšetření poměrů uvnitř zmagnetovaného tělesa budeme počítat celkový magnetizační proud  ${}^{(m)}I$  protékající plochou libovolně zvolené křivky  $l$  (viz obr. 3.28c). Lze opět postupovat dvěma způsoby; jednak makroskopicky pomocí předpokládané objemové hustoty  ${}^{(m)}\mathbf{j}$  magnetizačního proudu a jednak mikroskopicky sečtením příspěvků jednotlivých molekulárních proudů. V prvním případě lze magnetizační proud  ${}^{(m)}I$  vyjádřit plošným integrálem typu (3.5) přes libovolnou plochu  $S$  ohraničenou křivkou  $l$ . Při použití druhého postupu si podle obr. 3.28c snadno uvědomíme, že nenulový příspěvek mohou dát jen smyčky, jejichž středy leží uvnitř čerchované vyznačeného prstencovitého tělesa. Jeho krátký úsek  $\Delta l$  bude zřejmě přispívat hodnotou  $\Delta({}^{(m)}I) = I_{\text{mol}} n_0 \Delta V = I_{\text{mol}} (\mathbf{S}_{\text{mol}} \cdot \Delta l) n_0 = \mathbf{M} \cdot \Delta l$ . Integrací podél křivky  $l$  a využitím Stokesovy věty dostaneme ihned hledané vyjádření (3.116a) a (3.116).

### 3.5.3 Ampèrův zákon v látkovém prostředí

Z výsledků předchozího odstavce je patrné, že libovolné magnetické pole je možné popsat rovnicemi formulovanými v článku 3.3.2, jestliže kromě skutečných volných proudů budeme za zdroje tohoto pole považovat také vázané proudy reprezentující magnetizaci příslušných látek.

Kromě toho je zřejmé, že i v látkovém prostředí zůstane zachována uzavřenost magnetických indukčních čar. Tok vektoru magnetické indukce libovolnou uzavřenou plochou  $S$  bude vždy nulový, nezávisle na tom, leží-li tato plocha ve vakuu či v látkovém prostředí, viz (3.72),

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

V libovolném bodě bude tedy platit, viz (3.73),

$$\text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Pro libovolnou uzavřenou křivku  $l$  bude platit Ampèrův zákon (3.68). Na pravé straně musí však vystupovat celkový volný  $I$  i vázaný  ${}^{(m)}I$  proud protékající plochou křivky  $l$

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + {}^{(m)}I). \quad (3.134)$$

Za vázaný proud je možné dosadit z rovnice (3.116a). Dostaneme

$$\oint_l (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (3.135)$$

nebo pomocí magnetické polarizace

$$\oint_l (\mathbf{B} - \mathbf{P}_m) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (3.135a)$$

Poslední výraz lze zapsat ve velmi jednoduchém tvaru, ve kterém vystupují jen volné proudy, zavedeme-li novou veličinu

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{P}_m(\mathbf{r})}{\mu_0}, \quad (3.136)$$

nazývanou *intenzita magnetického pole*. Platí

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (3.137)$$

Předpokládáme-li, že plochou ohraničenou křivkou  $l$  nepřetéka žádný plošný proud, můžeme známým postupem využívajícím Stokesovu větu přejít k diferenciálnímu vyjádření vztahu (3.137)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (3.138)$$

v němž veličina  $\mathbf{j}$  vyjadřuje hustotu volného objemového proudu v daném bodě.

Výrazy (3.137) a (3.138) vyjadřují Ampèrův zákon pro magnetické pole v přítomnosti látkového prostředí. Pro doplnění jeho diferenciálního vyjádření (3.138) zbývá vyšetřit chování vektoru intenzity magnetického pole v okolí plošných proudů. Necht' danou libovolnou plochou  $S$  tečou volné i vázané plošné proudy o hustotách  $\mathbf{j}_S, {}^{(m)}\mathbf{j}_S$ . Prostor nad plochou  $S$  necht' je vyplněn prostředím (1), jehož magnetická polarizace je  $\mathbf{P}_{m1}$  a magnetická indukce je  $\mathbf{B}_1$ . Podobně prostor pod ní necht' je vyplněn prostředím (2), o magnetické polarizaci  $\mathbf{P}_{m2}$  (srov. obr. 3.17). Podle (3.84) bude při průchodu plochou  $S$  platit

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \mu_0 (\mathbf{j} + {}^{(m)}\mathbf{j}_S).$$

Po dosazení z (3.115) za  ${}^{(m)}\mathbf{j}_S$  a po zavedení vektoru intenzity pole dostaneme konečnou podmínku

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_S. \quad (3.139)$$

Vidíme z ní, že nespojitost tečných složek vektoru intenzity magnetického pole je dána pouze hustotou volných plošných proudů. Při průchodu plochou, na níž jsou pouze vázané plošné proudy (například při průchodu povrchem zmagnetovaného tělesa), zůstávají tečné složky intenzity pole spojitě.

Využitím Ampèrova zákona ve tvaru (3.137) je možné určit jednotku intenzity magnetického pole. V Mezinárodní soustavě pro ni dostaneme *ampér na metr* ( $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

Intenzita magnetického pole byla zavedena formálně vztahem (3.136). Vzniká proto otázka, jaký je její význam pro popis magnetického pole za přítomnosti látkového prostředí. Tento význam spočívá v platnosti výrazů (3.137), (3.138) a (3.139), které určují vztah vektoru intenzity magnetického pole k volnému proudu. Použití intenzity pole k popisu magnetického pole zmagnetovaných látek umožňuje vyloučit z explicitních úvah vázané proudy. Je ovšem samozřejmé, že pro bezprostřední vyjádření fyzikálních účinků magnetického pole (tj. pro vyjádření sil působících na pohybující se náboje – a jak uvidíme v kapitole 4 – také pro vyjádření jevu elektromagnetické indukce) zůstává i v látkovém prostředí určující veličinou vektor magnetické indukce.

Výrazy (3.137), (3.138), (3.139) a právě vyložený význam vektoru intenzity magnetického pole v mnohém připomínají situaci v oddílu 1.5, kde byla pro popis elektrostatického pole v dielektriku zavedena rovněž vektorová funkce – vektor elektrické indukce (srov. vztahy (1.247), (1.248), (1.252)). Vlastnosti intenzity magnetického pole jsou skutečně v mnohém podobné vlastnostem vektoru elektrické indukce. Z praktického hlediska je však třeba považovat intenzitu magnetického pole za potřebnější veličinu než vektor elektrické indukce. Magnetické soustavy jsou totiž téměř vždy zadány rozložením volných proudů v prostoru. Je proto téměř vždy výhodné uvažovat veličinu, která má bezprostřednější vztah k těmto makroskopickým zdrojům. Užitečnost takového postupu bude demonstrována v následujících dvou článcích.

### 3.5.4 Materiálové vztahy, magnetická susceptibilita a permeabilita

Při dosavadních úvahách o magnetickém poli za přítomnosti zmagnetovaných látek jsme považovali vektor magnetizace (respektive vektor magnetické polarizace) za známou funkci souřadnic a nestarali jsme se o to, jak souvisí jeho hodnota s fyzikálními podmínkami, ve kterých se látky nachází. Při řešení konkrétních úloh je ovšem znalost této souvislosti nezbytná. Je různá pro různé typy látek a je možné ji popsat pomocí fenomenologických materiálových veličin zavedených na základě výsledků experimentálního studia chování látek v magnetickém poli. (Srov. analogický postup v případě elektrostatického pole v čl. 1.5.4 či postup při formulaci Ohmova zákona ve stacionárním elektrickém poli v čl. 3.2.2.)

Uvedené relace mezi magnetickými veličinami, závislé na vlastnostech látek, se nazývají *materiálovými vztahy*. Na rozdíl od obecných rovnic formulovaných v článku 3.5.3, které popisují vlastnosti magnetického pole přesně, tj. v plné shodě s veškerou dosavadní experimentální zkušeností, vyjadřují dané konkrétní materiálové vztahy zpravidla jen přibližně chování skutečných látek. Pro různé účely je často třeba volit vztahy různého tvaru. V tomto článku se omezíme jen

na zavedení lineárních materiálových relací v nejjednodušším tvaru, které relativně dobře vyhovují pro stacionární pole. Podrobnější diskusi chování látek v elektromagnetickém poli odkládáme do kapitoly 7.

Pro popis magnetických vlastností látek je nejdůležitější stanovit souvislost mezi magnetizací (popř. magnetickou polarizací) a magnetickým polem uvnitř látek. Vzhledem k tomu, že se vlastnosti látek zpravidla zkoumají ve vnějším poli vybuzeném proudem ve vodičích vhodného tvaru, je výhodné určovat souvislost mezi magnetizací a *intenzitou pole* uvnitř látky. Intenzita pole má totiž bezprostřednější vztah k volným proudům, jimiž je pole zadáno, než vektor magnetické indukce – viz článek 3.5.3.

Vyloučíme-li zatím z úvah látky v supravodivém stavu, o nichž bude jednáno v kapitole 7, je možné z hlediska chování v magnetickém poli rozdělit všechny látky do dvou velkých skupin. Do první skupiny zařazujeme látky, jejichž magnetizace nabývá jen malých hodnot. Mluvíme o látkách *slabě magnetických*. Do druhé skupiny zařazujeme naopak látky, jejichž magnetizace může nabývat značných hodnot. Jde o látky *silně magnetické*.

*Pro slabě magnetické látky* je až na výjimky charakteristická lineární závislost mezi intenzitou pole a magnetizací, která je velmi přesně splněna do značně vysokých polí (s výjimkou oboru velmi nízkých teplot). Je zvykem ji zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (3.140)$$

Konstantu úměrnosti  $\chi_m$  nazýváme *magnetickou susceptibilitou* látky.<sup>26</sup> Pro magnetickou polarizaci dostaneme zřejmě podle (3.111)

$$\mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (3.141)$$

Vzhledem k definičnímu vztahu pro intenzitu pole, můžeme snadno určit také vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou pole

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (3.142)$$

Veličina  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$  se nazývá *permeabilitou látky*, veličina  $\mu_r = 1 + \chi_m$  její *relativní permeabilitou*. Zatímco relativní permeabilita a magnetická susceptibilita jsou bezrozměrné veličiny, permeabilita má rozměr a jednotku shodnou s konstantou  $\mu_0$ , a to (newton.ampér)<sup>2</sup>. Ze vzorce (3.142) je také zřejmý původ názvu permeabilita vakua pro konstantu  $\mu_0$ . Pro magnetické pole ve vakuu platí totiž  $\mu = \mu_0$  takže

<sup>26</sup> Vedle susceptibilit  $\chi_m$  se někdy užívá též tzv. *měrná susceptibilita*  $\kappa_m = \chi_m / \rho_m$ , kde  $\rho_m$  je hustota daného materiálu. Měrná susceptibilita vyjadřuje vztahem analogickým k (3.140) magnetický moment vztahovaný na jednotkovou hmotnost. Má význam například u práškových materiálů, kdy je obtížné určit skutečný objem vyšetřované látky.

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (3.143)$$

Oba vektory se liší pouze konstantou; zavádění vektoru intenzity je tedy ve vakuu zbytečné.

Magnetická susceptibilita zavedená vztahem (3.140) je skalární veličina. Vektor magnetizace je v tomto případě vždy rovnoběžný s vektorem intenzity pole. To však platí jen v případě izotropních látek. V anizotropních látkách (např. v některých krystalech) je směr magnetizace obecně různý od směru intenzity pole. Magnetickou susceptibilitu je pak nutné považovat za symetrický tenzor druhého řádu (srov. vztahy (1.261) a (3.23)). Pak platí

$$\begin{aligned} M_x &= \chi_{m,xx} H_x + \chi_{m,xy} H_y + \chi_{m,xz} H_z, \\ M_y &= \chi_{m,yx} H_x + \chi_{m,yy} H_y + \chi_{m,yz} H_z, \\ M_z &= \chi_{m,zx} H_x + \chi_{m,zy} H_y + \chi_{m,zz} H_z. \end{aligned} \quad (3.140a)$$

Magnetická susceptibilita může být kladná i záporná. Je-li záporná, mluvíme o látkách *diamagnetických*, látky s kladnou susceptibilitou nazýváme *paramagnetickými*. Diamagnetické jsou některé kovy, dále nekovové pevné látky, kapaliny a plyny (ale také například plazma) a většina látek organického původu. Paramagnetismus vykazuje většina kovů, některé soli v krystalickém stavu, vodné roztoky těchto solí, některé plyny (např. kyslík).

Magnetická susceptibilita diamagnetických látek téměř nezávisí na teplotě. Rovněž susceptibilita některých paramagnetických látek (zejména alkalických kovů) je teplotně nezávislá. U většiny paramagnetických látek se však susceptibilita s teplotou mění. Susceptibilita mnohých z nich splňuje tzv. *Curieův zákon*, který lze vyjádřit vztahem

$$\chi_m = \frac{C}{T}, \quad (3.144)$$

v němž  $T$  je absolutní teplota a  $C$  tzv. *Curieova konstanta*, charakteristická pro danou látku. Absolutní hodnoty magnetické susceptibilita slabě magnetických látek se za normálních podmínek zpravidla pohybují v intervalu  $10^{-6}$  až  $10^{-3}$ .

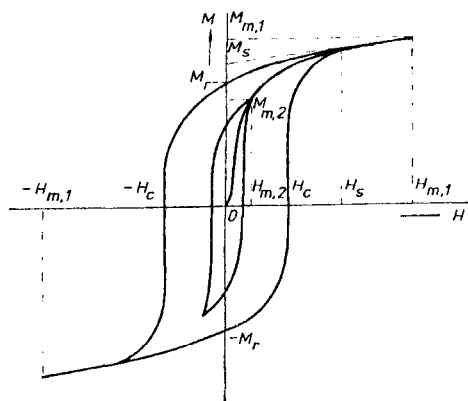
*Silně magnetické látky* se od slabě magnetických neliší pouze velikostí magnetizace. Jejich dalším charakteristickým rysem je složitá závislost magnetizace na intenzitě pole, na historii vzorku, i na mnoha dalších faktorech.

Klasickými představiteli silně magnetických látek jsou *látky feromagnetické*. Při jejich cyklickém magnetování je závislost magnetizace na intenzitě pole dána tzv. *hysterezní smyčkou*. Na obrázku 3.29 jsou schematicky zobrazeny typické hysterezní smyčky feromagnetika odpovídající dvěma různým hodnotám maximálního pole  $H_{m1}$  a  $H_{m2}$ <sup>27</sup>. Magnetizace vzorku, který byl ve výchozím stavu

<sup>27</sup> Hysterezní křivka feromagnetika má kvalitativně stejný průběh jako hysterezní křivka ferroelektrika, o kterém pojednáme v kapitole 7 (srov. článek 7.2.1).



nezmagnetován, roste se vzrůstající intenzitou pole nejdříve podle křivky  $0, M_{m2}$ ,  $M_{m1}$  nazývané *křivkou prvotního magnetování*. Maximální hodnotám pole při daném cyklu  $H_{m1}$ , popř.  $H_{m2}$ , odpovídají maximální hodnoty magnetizace  $M_{m1}$ , popř.  $M_{m2}$ . Jak je z obrázku vidět, pro hodnoty pole menší než jistá hodnota  $H_S$  magnetizace poměrně rychle vzrůstá. Při poli o hodnotě  $H_S$  dosahuje vzorek magnetického nasycení a při jeho dalším zvyšování magnetizace vzrůstá již jen nepatrně. Hodnota magnetizace  $M_S$  se nazývá *spontánní magnetizací* daného feromagnetika. Závisí na teplotě a představuje jednu z jeho základních charakteristik. Například pro čisté železo při pokojové teplotě je  $P_{mS} = \mu_0 M_S = 2,15 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$ .



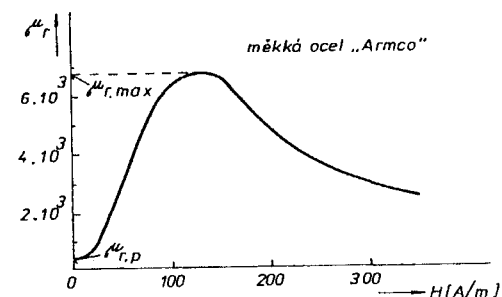
Obr. 3.29 Hysterezní smyčka feromagnetika.

Při následujícím snižování pole klesá magnetizace podle zcela jiné křivky. Například, byl-li vzorek magneticky nasycen, bude to křivka  $M_{m1}, M_r$ . Nenulová hodnota magnetizace  $M_r$ , odpovídající nulovému poli se nazývá *remanentní magnetizací*. Další snižování magnetizace může být dosaženo přiložením pole opačného směru. Hodnota intenzity  $H_c$ , při níž magnetizace klesne opět na nulu, se nazývá *koercitivním polem*. Při dalším zvyšování pole má magnetizace opačný směr a vzrůstá podle křivky  $-H_c, -M_{m1}$  do své maximální hodnoty  $-M_{m1}$  a při opětovném snižování pole se proces opakuje podle křivky  $-M_{m1}, -M_r$ . Opakované cyklické změny intenzity pole s danými maximálními hodnotami vyvolávají cyklické změny magnetizace určené jednotlivými větvemi smyčky  $M_{m1}, -H_c, -M_{m1}, H_c$ ; nulové hodnotě pole již neodpovídá nulová magnetizace. Kvalitativně podobný charakter má průběh magnetizace i v případě, kdy vzorek nedosahuje nasycení (viz obr. 3.29). Nezmagnetovaný stav, kdy nulovému poli odpovídá nulová magnetizace, může být opět dosažen cyklickým magnetováním s postupně klesající amplitudou pole k nule; amplituda magnetizace při jednotlivých cyklech pak klesá k nule podle křivky prvotního magnetování.

Pro feromagnetické látky lze zavést pojem permeability  $\mu$  a relativní permeability  $\mu_r$ . Analogicky k (3.142) definujeme

$$\mu = \frac{B}{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r, \quad (3.145)$$

přičemž požadujeme, aby magnetizace probíhala po křivce prvotního magnetování. Takto definovanou permeabilitu lze tedy změřit jedině na vzorku, který měl v nulovém stavu nulovou magnetizaci, tj. byl v nezmagnetovaném stavu. Relativní permeabilita feromagnetických látek má zpravidla hodnotu značně větší než jedna. Je samozřejmě závislá na intenzitě magnetického pole. Na obrázku 3.30 je uvedena typická závislost tohoto druhu pro ocel „Armco“. Význačnými body na této křivce jsou počáteční permeabilita  $\mu_{r,p}$ , odpovídající malým hodnotám pole, a maximální permeabilita  $\mu_{r,max}$ .



Obr. 3.30 Závislost relativní permeability měkké oceli „Armco“ na magnetickém poli.

Nejznámějšími představiteli látek jevících feromagnetismus za pokojové teploty jsou prvky železo, kobalt, nikl, gadolinium. Kromě gadolinia jeví feromagnetismus za nižších teplot také další vzácné zeminy. Dále se feromagnetismus projevuje u velkého množství slitin i sloučenin nekovového charakteru. Pro technické účely se připravují feromagnetické materiály z různých hledisek.

Za prvé mohou feromagnetické látky zmagnetované do určitého stavu sloužit jako zdroje magnetického pole, tj. jako trvalé magnety. Pro tento typ použití je žádoucí, aby magnetický stav látky byl pokud možno stálý, tedy aby co nejméně závisel na různých vnějších vlivech, speciálně na vnějších polích. Tento požadavek bude zřejmě splněn, bude-li látka mít co největší hodnotu koercitivního pole. Feromagnetika s vysokou hodnotou koercitivního pole se nazývají *magneticky tvrdá*. V praxi se za magneticky tvrdé považují látky, pro něž je  $H_c \geq 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ . Vysoké koercitivní pole však není jediný požadavek kladený na magneticky tvrdé materiály. Pro konstrukci trvalých magnetů je také žádoucí co největší hodnota remanentní magnetizace  $M_r$ . Kvalita magneticky tvrdého feromagnetika se proto nejčastěji vyjadřuje velikostí součinu  $H_c M_r$ .

Při použití v elektrických strojích (generátorech, elektromotorech, transformátorech) a jiných zařízeních s proměnným magnetickým polem (viz oddíl 4.2) je naopak žádoucí používat materiály s nízkým koerzivním polem a s vysokou hodnotou permeability. V tomto případě mluvíme o *magneticky měkkých feromagnetikách*. Za magneticky měkká se v praxi považují feromagnetika, pro něž platí  $H_c \leq 100 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ . Zmíněná ocel „Armco“ má  $H_c \approx 50 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ ; je klasickým magneticky měkkým feromagnetikem.

Jak již bylo řečeno, spontánní magnetizace feromagnetika závisí na teplotě. S rostoucí teplotou klesá, až při jisté kritické teplotě  $T_c$ , nazývané *Curieovou teplotou*, klesne na nulu. Nad Curieovou teplotou se látka zpravidla chová jako paramagnetikum.

Silný magnetismus látek může mít i jinou fyzikální podstatu než feromagnetismus.<sup>28</sup> Například technicky důležité magnetické materiály, nazývané ferity, jsou *ferimagnetika*. Bez ohledu na konkrétní podstatu silného magnetismu je pro tyto látky vždy charakteristické nelineární chování a hystereze. Pro přesný popis magnetického pole v takových látkách je tudíž vždy nutné znát příslušnou magnetizační křivku či smyčku. Pro méně přesné účely a pro mnohé obecné úvahy není třeba brát v úvahu detaily materiálových vztahů. Zavádějí se proto dva abstraktní typy magnetických látek, vystihující extrémní vlastnosti. Za prvé je to pojem *ideálně magneticky měkkého prostředí*, o němž se předpokládá, že je izotropní a splňuje přesně vztah (3.140), respektive (3.142). Za normálních podmínek vyhovují těmto předpokladům vlastně všechna magneticky izotropní diamagnetika a paramagnetika. Z magneticky silných materiálů je možné uvedený pojem přibližně použít pro magneticky měkké látky, přičemž se jejich vlastnosti podle situace popisují buď počáteční, nebo maximální permeabilitou (susceptibilitou).

Za druhé se zavádí pojem *ideálně tvrdého magnetika*, u něhož předpokládáme určitou hodnotu permanentní magnetizace, jež již nemůže být ovlivněna působením vnějšího magnetického pole. Je zřejmé, že tento pojem přibližně vystihuje například vlastnosti magneticky tvrdých feromagnetik. Za jejich permanentní magnetizaci je obvykle možné položit remanentní magnetizaci.

### 3.5.5 Magnetický obvod

Problém výpočtu magnetického pole v látkách je jednoduchý v případě, kdy je celý prostor v němž pole uvažujeme, vyplněn homogenním, izotropním a lineárním prostředím. Pro vztah mezi magnetickou indukcí a intenzitou pole pak platí

<sup>28</sup> Fyzikální podstatou silného magnetismu je tzv. *spontánní uspořádání* magnetických momentů atomů. Podle geometrie uspořádání rozoznáváme feromagnetika, ferimagnetika, antiferomagnetika a jiné. Silná magnetika mají takový typ magnetického uspořádání, u něhož se magnetické momenty atomů vzájemně nevykompenzují (feromagnetika, ferimagnetika). Typ magnetického uspořádání, u něhož jsou tyto momenty navzájem vykompenzovány, vede naopak na slabý magnetismus (například antiferomagnetika). Podrobněji o těchto otázkách pojednáme v kapitole 7.

(3.142), přičemž permeabilita  $\mu$  je konstanta nezávislá na prostorových souřadnicích. Ampèrovův zákon (3.137) lze užitím (3.142) vyjádřit pomocí magnetické indukce ve tvaru

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I, \quad (3.146)$$

zcela analogickým s (3.68), který platí pro magnetické pole makroskopických proudů ve vakuu. Z této shody je patrné, že za uvedené situace můžeme použít všechny postupy formulované v článku 3.3.5. Je možné počítat přímo magnetickou indukcí tak, že v příslušných vzorcích z článku 3.3.5 nahradíme permeabilitu vakua  $\mu_0$  permeabilitou daného materiálu  $\mu$ .

Nejsou-li uvedené předpoklady splněny, je při výpočtu pole nutné vyjít z obecných rovnic formulovaných v článku 3.5.3. Speciálně při vyšetřování pole na plošném rozhraní dvou různých homogenních materiálů je nutné použít vztahů (3.72) a (3.139). Z (3.72) vyplývá, že při průchodu rozhraním jsou spojitě normálové složky vektoru magnetické indukce a z (3.139) plyne naopak spojitost tečných složek intenzity pole (neboť na vyšetřovaném rozhraní jsou volné plošné proudy nulové).

Velmi užitečnou pomůckou při řešení magnetických soustav v látkovém prostředí je pojem *magnetického obvodu*. Tento pojem vychází z toho, že magnetické indukční čáry jsou uzavřené křivky, podobně jako proudové čáry stacionárního proudu. Analogicky k proudovým trubícím stacionárního proudu je možné zavést pojem *magnetické tokové trubice*, která je rovněž uzavřená a vymezuje určitý konstantní magnetický tok. Na základě uvedených analogií je možné vyšetřovat magnetický tok tekoucí danou trubicí metodami stejnými, které byly v článcích 3.2.3 a 3.2.4 použity k vyšetřování stacionárního elektrického obvodu. Vznikne tak možnost formulovat vztahy zcela analogické s Ohmovým zákonem a Kirchhoffovými pravidly, pomocí nichž lze za určitých předpokladů počítat magnetické pole jednodušších soustav metodami vypracovanými pro elektrické obvody.

Magnetickým obvodem tedy rozumíme část prostoru vymezenou magnetickou tokovou trubicí, v níž se uzavírá určitý magnetický tok, buzený zpravidla elektrickým proudem protékajícím v okolních vodičích. Technický význam mají zejména obvody, jejichž podstatná část je tvořena materiály s vysokou magnetickou permeabilitou. Příslušná toková trubice je pak vymezena povrchovými plochami součástí zhotovených z těchto materiálů.

Abychom mohli formulovat zákonitosti pro magnetický obvod, budeme uvažovat uzavřenou trubicí magnetického toku  $\Phi$  podle obr. 3.31. Trubice nechť prochází několika homogenními izotropními prostředími o permeabilitách  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ . Uvnitř této trubice zvolme jistou indukční čáru  $I$ , jejíž úseky v jednotlivých prostředích označme  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . Konečně předpokládejme, že

trubice je dostatečně úzká, aby magnetické pole uvnitř ní bylo možné považovat za homogenní. Magnetický tok bude potom možné vyjádřit ve tvaru  $\Phi = BS$ , kde  $S$  je libovolný průřez trubice kolmý k indukční čáře  $l$ .

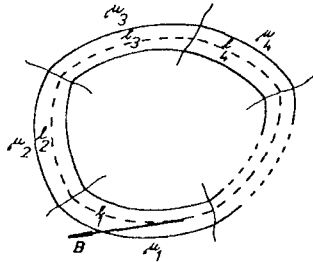
Nechť křivka  $l$  obepíná celkový proud  $I_c$ . Pro intenzitu pole  $H$  bude potom platit

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c.$$

Veličina

$$\mathcal{E}_m = I_c = \left( \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (3.147)$$

představuje míru, kterou se na vytvoření magnetického pole v obvodu podílí vnější makroskopický proud. Nazývá se *magnetomotorickým napětím* působícím v obvodu.



Obr. 3.31 Magnetický obvod.

Magnetický tok je podél celého obvodu konstantní. Pro libovolný úsek  $l_i$  proto platí

$$\int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \Phi \int_{l_i} \frac{dl}{\mu_i S}. \quad (3.148)$$

V analogii s elektrickým obvodem je možné zavést veličinu

$$U_{m,i} = \int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.149)$$

kteřou nazveme *magnetickým napětím* (spádem magnetického potenciálu) na úseku obvodu  $l_i$ . Dále můžeme srovnat křivkový integrál

$$\int_{l_i} \frac{dl}{\mu_i S} \quad (3.150)$$

s výrazem (3.20a) vyjadřujícím elektrický odpor určité části proudové trubice. Vzhledem k formální shodnosti obou výrazů můžeme zmíněný křivkový integrál (3.150) považovat za *magnetický odpor* příslušné části magnetického obvodu. (Permeabilita bude mít pak zřejmě význam měrné magnetické vodivosti.) Označíme-li jej  $R_m$  můžeme místo (3.148) psát

$$U_{m,i} = \Phi R_m. \quad (3.151)$$

Jestliže přirovnáme magnetický tok k elektrickému proudu, můžeme vztah (3.151) považovat za obdobu Ohmova zákona. Vyjadřuje skutečnost, že spád magnetického potenciálu je roven součinu magnetického toku a magnetického odporu, a bývá někdy nazýván *Hopkinsonovým zákonem*.

Pro celý obvod podle obr. 3.31 bude zřejmě platit

$$\mathcal{E}_m = \sum_{i=1}^N \int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N U_{m,i} \quad (3.152)$$

a z druhé strany

$$\mathcal{E}_m = \Phi \int_{l_1} \frac{dl}{\mu_1 S} + \dots + \Phi \int_{l_N} \frac{dl}{\mu_N S}, \quad (3.153)$$

$$\mathcal{E}_m = \Phi R_{m,1} + \Phi R_{m,2} + \dots + \Phi R_{m,N},$$

čímž jsme opět dostali vztah zcela analogický s rovnicí (3.37) pro elektrický obvod.

Jednotkou magnetomotorického napětí i magnetického napětí je v soustavě jednotek SI zřejmě *ampér*. Vzhledem k tomu, že proud  $I_c$  v (3.147) představuje celkový proud protékající plochou křivky  $l$ , užívá se pro magnetomotorické napětí někdy také jednotka *ampérvávit*. Tento název vystihuje v praxi častou situaci, kdy je magnetické pole vytvářeno cívkou o  $z$  závitů protékanou proudem  $I$ . Pro celkový proud pak platí  $I_c = Iz$ .

V hledání analogií mezi elektrickým a magnetickým obvodem by bylo možné pokračovat například tím, že bychom uvažovali libovolně složitý rozvětvený obvod. Vzhledem k tomu, že výchozí vztahy (3.151) a (3.153) jsou totožné s odpovídajícími vztahy pro elektrický obvod, dále díky rovnici (3.72), již je možné považovat za analogii rovnice kontinuity proudu, bychom jistě i v tomto případě dostali výsledky shodné s elektrickým obvodem. Speciálně bychom mohli formulovat Kirchhoffova pravidla pro magnetický obvod. Vzhledem k tomu, že analogie mezi oběma typy obvodů je dostatečně průhledná, nebudeme se již podrobným rozvíjením těchto úvah zabývat. V dalším výkladu ale budeme demonstrovat použití právě vyložených postupů na řešení několika příkladů.

### 3.5.6 Magnetostatické pole

V článku 3.5.3 jsme vyřešili otázku, jak mohou zmagnetovaná tělesa přispívat spolu s makroskopickými proudy k vytváření magnetického pole. V článku 3.5.4 bylo dále při vyšetřování vlastností feromagnetik poukázáno na možnost existence nenulové magnetizace i bez přítomnosti vnějšího pole. Uvedená vlastnost feromagnetik vytváří jednu z konkrétních možností existence magnetického pole vytvářeného pouze zmagnetovanými látkami, o níž byla zmínka v úvodu tohoto oddílu.

Magnetické pole, které vzniká bez přítomnosti volného makroskopického proudu a je pouze důsledkem nenulové magnetizace látek, se nazývá *polem magnetostatickým*. Jeho vlastnosti jsou plně popsány obecnými rovnicemi uvedenými v čl. 3.5.3, neboť jde o speciální případ magnetického pole v látkovém prostředí. Libovolná úloha o magnetostatickém poli může být vyřešena pomocí těchto rovnic; stačí znát magnetické vlastnosti a prostorové rozložení příslušných látek. V tomto článku se proto omezíme pouze na zdůraznění některých speciálních vlastností.

Ze vztahu (3.137) plyne pro libovolnou uzavřenou křivku

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.154)$$

Podobně z (3.138) dostáváme pro libovolný bod

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (3.155)$$

Magnetostatické pole, které je polem objemově rozložených magnetických dipólů, je tedy potenciální a může být popsáno skalárním potenciálem. (O této vlastnosti magnetického pole objemově rozložených dipólů jsme se jiným způsobem přesvědčili již v článku 3.4.4.)

Ze známého průběhu magnetizace zmagnetovaných těles lze určit objemovou  $\rho_m(\mathbf{r}')$  a plošnou  $\sigma_m(\mathbf{r}')$  hustotu magnetických nábojů, a to ze vztahu, viz (3.118),

$$\sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}'), \quad \rho_m(\mathbf{r}') = -\operatorname{div} \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

a magnetický potenciál může být vyjádřen vztahem (srov. (3.119))

$$\varphi_m(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{R} dS + \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} dV \right]. \quad (3.156)$$

Intenzita magnetostatického pole je pak dána zřejmým vztahem

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \varphi_m(\mathbf{r}) \quad (3.157)$$

a magnetická indukce podle (3.136) vztahem

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (3.158)$$

Pro magnetostatické pole zůstávají samozřejmě v platnosti beze změny vztahy (3.72), respektive (3.73), neboť v nich volné proudy explicitně nevystupují. Dostáváme tedy soustavu rovnic, která je zcela totožná s rovnicemi elektrostatického pole za předpokladu nepřítomnosti volných nábojů (viz (1.253)). (Takové elektrostatické pole je tvořeno pouze vázanými náboji na zpolarizovaných tělesech.) Na magnetostatické pole se tedy můžeme dívat jako na analogii pole elektrostatického.

Ze srovnání analogických rovnic vychází jako analogické veličiny intenzity pole  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  a podobnou analogii je možné vidět také mezi vektory elektrické a magnetické indukce  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$ . Je však třeba si uvědomit, že tato analogie je pouze *formální*. Fyzikální účinky magnetického pole jsou bezprostředně popsány vektorem magnetické indukce  $\mathbf{B}$  podobně, jako jsou fyzikální účinky elektrostatického pole bezprostředně popsány vektorem intenzity pole  $\mathbf{E}$ . Proto, chceme-li hledat analogii mezi oběma typy polí, je nutné vidět fyzikálně opodstatněnější analogii mezi veličinami  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ . Úlohou zbylých veličin  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$  je doplnit popis příslušných polí v látkovém prostředí. Charakteristickým znakem obou těchto vektorů je přitom jejich bezprostřednější vztah k makroskopickým zdrojům příslušných polí (k volným nábojům a k volným proudům). Konkrétní příklad řešení magnetostatického problému je uveden v 3.5.7b.

### 3.5.7 Řešené příklady

#### a) Magnetické pole na rozhraní dvou prostředí

Uvažujme plošné rozhraní dvou homogenních izotropních prostředí o permeabilitách  $\mu_1$  a  $\mu_2$ . Označme  $\vartheta_1$  úhel, který svírá magnetické pole v prvním prostředí s normálou rozhraní, a  $\vartheta_2$  analogický úhel pro magnetické pole ve druhém prostředí. Snadno nalezneme vztah mezi úhly  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  a hodnotami permeabilit  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Jelikož je na rozhraní nulová hustota volného plošného proudu, plyne z (3.139) spojitost tečných složek intenzity magnetického pole  $H_1 \sin \vartheta_1 = H_2 \sin \vartheta_2$ . Z (3.72) dostaneme postupem stejným jako v článku (1.5.6) spojitost normálových složek vektoru magnetické indukce. Tedy  $B_1 \cos \vartheta_1 = B_2 \cos \vartheta_2$ . Použitím (3.142) obdržíme z těchto podmínek výsledek

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta_1}{\mu_1} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_2}{\mu_2} \quad (3.159)$$

shodný s analogickým vztahem (1.278) pro elektrostatické pole.

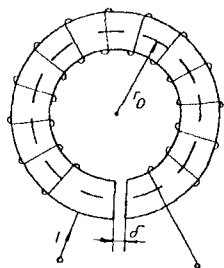
Speciálně, je-li první prostředí vzduch a druhé prostředí má vysokou hodnotu permeability, platí  $\mu_1 = \mu_0$ ,  $\mu_2 \gg \mu_0$ . Odtud získáme

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta_1}{\operatorname{tg} \vartheta_2} = \frac{\mu_0}{\mu_1} \doteq 0, \quad (3.160)$$

což je možné jen v případě, že  $\vartheta_1 \doteq 0$ . Z prostředí o vysoké permeabilitě vystupuje tedy magnetické pole kolmo na jeho povrch.

### b) Toroidní jádro se vzduchovou mezerou

Jako příklad na použití vlastností magnetického obvodu vypočítáme magnetické pole toroidní soustavy podle obr. 3.32. Nechť jádro zhotovené z materiálu o vysoké relativní permeabilitě  $\mu_r \gg 1$  ve tvaru prstence o středním poměru  $r_0$  se vzduchovou mezerou  $\delta$  je ovinuto cívkou o  $z$  závitů. Vypočítáme magnetické pole v jádru i v mezeře za předpokladu, že cívkou teče proud  $I$ .



Obr. 3.32 K výpočtu magnetické indukce v mezeře toroidu.

Budeme předpokládat, že průřez jádra je  $S$ . Dále budeme předpokládat, že šířka mezery je malá, takže magnetický tok  $\Phi$  teče plochou  $S$  i v této mezeře. Pro magnetické odpory mezery i jádra potom dostaneme

$$R_{m,v} = \frac{\delta}{\mu_0 S}, \quad R_{m,j} = \frac{2\pi r_0 - \delta}{\mu S} \doteq \frac{2\pi r_0}{\mu S}.$$

Po dosazení do (3.153) můžeme vypočítat magnetický tok tekoucí obvodem

$$\Phi = \frac{zI}{R_{m,v} + R_{m,j}}. \quad (3.161)$$

Zavedeme označení  $B_j, H_j$  pro magnetickou indukci a intenzitu pole v jádru a podobně  $B_v, H_v$  pro tyto veličiny v mezeře. Bude pak platit

$$\begin{aligned} B_j &= B_v = \frac{\Phi}{S}, \\ B_j &= \mu H_j, \quad B_v = \mu_0 H_v, \\ \mu_r &= \frac{H_v}{H_j}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Vidíme, že zatímco magnetická indukce má stejnou hodnotu ve vzduchu i v jádru, intenzita pole ve vzduchu je  $\mu_r$ -krát větší.

Právě vyřešený příklad ilustruje, proč je výhodné užívat při konstrukci magnetických soustav materiálů s vysokou permeabilitou. Jejich užitím se sníží magnetický odpor obvodu, čímž v příslušném poměru vzroste magnetický tok.

Ve stejném uspořádání si nyní ukážeme způsob řešení magnetostatického problému. Předpokládejme, že v cívce z obr. 3.32 byl vypnut proud, přičemž ve feromagnetickém jádru zůstala nenulová magnetizace konstantní hodnoty  $M_0$ , ( $P_{m,0} = \mu_0 M_0$ ), jejíž směr je v každém bodě rovnoběžný se směrem tečny kružnice o středu ležícím na ose prstence. Při použití označení zavedeného v čl. 3.5.5 bude platit

$$0 = \int_{l_j} \mathbf{H}_j \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_v} \mathbf{H}_v \cdot d\mathbf{l} = H_j(2\pi r_0 - \delta) + H_v \delta$$

a dále vzhledem ke kolmosti vektorů  $\mathbf{B}_j, \mathbf{B}_v$  k povrchu jádra

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{B}_v = \mathbf{B},$$

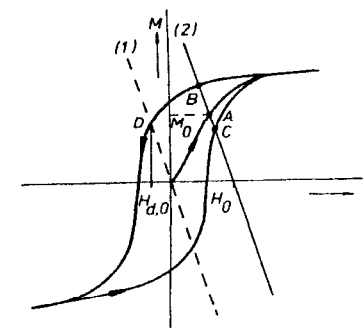
$$B_v = \mu_0 H_v, \quad B_j = \mu_0 H_j + P_{m,0}.$$

Odtud dostaneme jednoduchým výpočtem

$$H_j = \frac{\delta}{2\pi r_0 - \delta} H_v, \quad (3.163)$$

$$\mu_0 H_v \left( 1 + \frac{\delta}{2\pi r_0 - \delta} \right) = P_{m,0},$$

$$B = \frac{2\pi r_0 - \delta}{2\pi r_0} P_{m,0}. \quad (3.164)$$



Obr. 3.33 K výpočtu magnetizace feromagnetické koule v homogenním vnějším poli.

Ze získaných výsledků je patrné, že intenzita pole  $H_j$  uvnitř jádra má opačný směr než vektor magnetické indukce a než intenzita pole ve vzduchové mezeře. To je dáno tím, že celou její hodnotu určuje demagnetizační pole. Z (3.164) pro ni dostaneme

$$H_j = -\frac{\delta}{2\pi r_0} M_0. \quad (3.165)$$

Velikost magnetické indukce  $B$  i intenzity pole uvnitř jádra  $H_j$  je úměrná magnetizaci jádra  $M_0$ . Hodnotu  $H_j$  lze odečíst z hysterezní smyčky. Je dána průsečíkem demagnetizační přímky (3.165) s klesající větví hysterezní smyčky (průsečík analogický bodu  $D$  na obr. 3.33).

### c) Koule v homogenním magnetickém poli

Rozložení magnetického pole vytvořeného magneticky homogenní a izotropní koulí vloženou do vnějšího magnetického pole je možné počítat způsobem zcela analogickým s tím, který byl použit při výpočtu elektrostatického pole dielektrické koule (viz příklad 1.5.6c). Ze stejných důvodů především platí, že homogenní těleso tvaru koule (nebo obecněji elipsoidu), vložené do vnějšího homogenního magnetického pole  $B_0$ , bude homogenně zmagnetováno. Označíme-li tuto jeho magnetizaci  $M_0$ , bude výsledný magnetický dipólový moment tělesa roven

$$m_v = M_0 V. \quad (3.166)$$

Výsledné magnetické pole vně koule bude superpozicí vnějšího pole  $B_0$  a pole  $B_m$  vytvořeného v daném bodě zmagnetovanou koulí. Podle výsledků příkladů 3.4.4 a 1.5.6c je zřejmé, že vně koule bude pole  $B_m$  totožné s polem magnetického dipólu o magnetickém momentu  $m_v$  umístěného ve středu koule.

Stejným postupem jako v 1.5.6c pro pole elektrostatické bychom zjistili, že uvnitř koule se vlivem jejího zmagnetování vytvoří homogenní demagnetizační pole o intenzitě  $H_d$ , které se vektorově sečte s původním vnějším polem  $B_0$ . Analogicky k (1.184) platí

$$H_d = -\frac{1}{3} M_0, \quad (3.167)$$

a pro výsledné pole uvnitř koule dostaneme

$$H = H_0 + H_d = H_0 - \frac{1}{3} M_0, \quad (3.168)$$

$$B = \mu_0 (H + M_0) = \mu_0 \left[ H_0 + \frac{2}{3} M_0 \right].$$

V případě, že materiál koule může být považován za lineární měkké magnetikum, může být magnetizace vyjádřena pomocí magnetické susceptibility;  $M_0 = \chi_m H$  a pro výsledné pole dostaneme výrazy

$$H = \frac{3}{3 + \chi_m} H_0, \quad B = 3 \frac{1 + \chi_m}{3 + \chi_m} B_0, \quad (3.169)$$

kteří jsou analogické k (1.281), popř. (1.282).

V případě, že materiál koule je feromagnetikum, je situace složitější, neboť vztah mezi magnetizací a výsledným polem uvnitř koule je dán hysterezní smyčkou. Skutečná magnetizace materiálu koule  $M_0$  i výsledné magnetické pole uvnitř může být určeno z hysterezní smyčky způsobem uvedeným v obr. 3.33. Závislost demagnetizačního pole  $H_d$  na magnetizaci, daná vztahem (3.167a), může být v obrázku znázorněna přímkou (1) a podobně závislost výsledného pole  $H$  na magnetizaci přímkou (2). Průsečíky  $A, B, C$  této přímky s hysterezní smyčkou udávají možné hodnoty magnetizace materiálu. O tom, která z nich se bude skutečně realizovat, rozhodne postup, jakým bylo vnější pole nastaveno. Například při jeho monotónním zvyšování z nuly na konečnou hodnotu  $H_0$  za předpokladu, že materiál byl původně v nezmagnetovaném stavu, nastane případ  $A$ . Z křivky prvotní magnetizace lze pro danou hodnotu magnetizace  $M_0$  odečíst i příslušnou hodnotu výsledného pole  $H$ .

### d) Elipsoid magnetovaný ve směru hlavní osy

Výsledky získané v předchozím příkladu pro těleso tvaru koule snadno zobecníme pro obecný elipsoid za předpokladu, že vnější pole je orientováno ve směru jedné z jeho hlavních os. Využijeme k tomu opět analogii mezi elektrostatickým a magnetickým polem prostorově rozložených dipólů (srov. čl. 1.3.4 a 3.4.4).

Podobně jako v elektrostatickém poli (viz 1.5.6c) platí, že magneticky homogenní těleso tvaru elipsoidu je ve vnějším homogenním magnetickém poli  $H_0$  homogenně zmagnetováno. Pro jeho výsledný magnetický dipólový moment platí opět vztah (3.166).

Za předpokladu, že vnější pole  $H_0$  je orientováno ve směru jedné z hlavních os elipsoidu, má homogenní demagnetizační pole  $H_d$  uvnitř elipsoidu rovněž směr této osy a platí

$$H_d = -N_i M_0, \quad (3.167a)$$

kde  $N_i$  je hlavní hodnota demagnetizačního (depolarizačního) faktoru příslušející dané hlavní ose elipsoidu<sup>29</sup>. Výsledné magnetické pole uvnitř elipsoidu je pak místo (3.168) dáno vztahem

<sup>29</sup> Depolarizační faktor je obecně tenzorová veličina. Součet jeho hlavních hodnot je roven jedné  $N_1 + N_2 + N_3 = 1$  (viz například [7]).

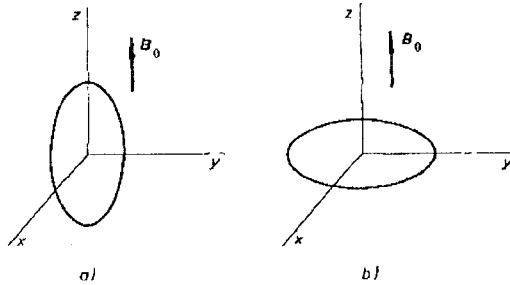
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_0 - N_i \mathbf{M}_0, \quad (3.168a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}_0) = \mu_0 [\mathbf{H}_0 + (1 - N_i) \mathbf{M}_0].$$

Pro lineární magneticky měkké magnetikum pak platí

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + N_i \chi_m} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{1 + \chi_m}{1 + N_i \chi_m} \mathbf{B}_0. \quad (3.169a)$$

V případě feromagnetického tělesa lze opět postupovat podle obr. 3.33 s tím, že demagnetizační přímký mají směrnici danou demagnetizačním faktorem.



Obr. 3.34 K výkladu demagnetizačních polí v rotačním elipsoidu magnetovaném ve směru rotační osy  $z$ : a) protáhlý elipsoid, b) zploštělý elipsoid. V daném označení os platí pro hlavní hodnoty demagnetizačního faktoru  $N_1 = N_x$ ,  $N_2 = N_y$ ,  $N_3 = N_z$ .

Výsledky (3.167) až (3.169) pro kouli dostaneme jako speciální případ  $z$  (3.167a) až (3.169a), uvědomíme-li si, že pro kouli platí  $N_1 = N_2 = N_3 = 1/3$ . Důležité jsou rovněž dva další speciální případy: velmi protáhlý rotační elipsoid magnetovaný podél osy rotační symetrie (obr. 3.34a) a zploštělý rotační elipsoid magnetovaný rovněž podél své rotační osy (obr. 3.34b). V prvním případě můžeme zřejmě přibližně položit  $N_x = N_y \approx 1/2$ ,  $N_z \approx 0$ . Demagnetizační pole je tedy podle (3.167a) přibližně nulové a intenzita pole uvnitř elipsoidu je přibližně rovna  $\mathbf{H}_0$ . Ve druhém případě platí naopak  $N_x = N_y \approx 0$ ,  $N_z \approx 1$  a pro demagnetizační pole platí

$$\mathbf{H}_d \approx -\mathbf{M}_0. \quad (3.167b)$$

Výsledné pole uvnitř elipsoidu je podle (3.168a) v prvním případě rovno

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} \approx \mu_0 (\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}_0) \quad (3.168b)$$

a v druhém případě platí

$$\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_0 - \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0. \quad (3.168c)$$

### ÚLOHY KE KAPITOLE 3

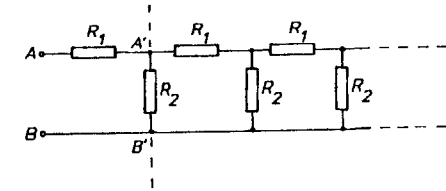
Ú 3.1: Uvnitř homogenního izotropního tělesa s měrnou vodivostí  $\gamma$  necht' v okamžiku  $t = 0$  existuje volný náboj charakterizovaný objemovou hustotou  $\rho_0$ . Jak se bude tento náboj měnit s časem? Odhadněte konkrétní hodnoty pro měď' ( $\gamma = 0,6 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ), polovodič o měrné vodivosti  $\gamma = 100 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  a izolant (sklo) o měrné vodivosti  $\gamma = 10^{-12} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Relativní permitivitu položte rovno jedné.

Ú 3.2: Určete:

a) vstupní odpor, tj. odpor  $R_{AB}$  mezi body  $A$ ,  $B$ , nekonečného řetězce složeného z odporů  $R_1$ ,  $R_2$  podle obr. 3.35.

b) odpor  $R_{AB}$  mezi body  $A$ ,  $B$  sítě podle obr. 1.66, v níž jsou všechny kapacity nahrazeny odpory  $R$ . Výsledek srovnajte s výsledkem úlohy Ú 1.30.

c) odpor mezi protilehlými vrcholy krychle, jejíž každá hrana reprezentuje odpor  $R$ .



Obr. 3.35 Zapojení řetězce odporů k úloze Ú 3.2.

Ú 3.3: Určete změnu  $\Delta R$  paralelního spojení odporů  $R_1$ ,  $R_2$  způsobenou změnou odporu  $R_2$  o  $\Delta R_2$ .

Ú 3.4: Jakou změnu odporu můžeme očekávat, když napjeme měděný drát tak, že se prodlouží o 0,1 %?

Ú 3.5: Z desky tloušťky  $t$  zhotovené z materiálu o měrné vodivosti  $\gamma$  je vyříznuto mezikruží o vnitřním poloměru  $r_1$  a vnějším  $r_2$ . Stanovte odpor  $R$  mezikruží, slouží-li jako přívody proudu obě válcové plochy, kterými je omezeno. Předpokládejte, že vodivost přívodů je nekonečně velká a tloušťka desky malá ve srovnání s oběma poloměry.

Ú 3.6: Za jak dlouho ohřeje ponorný vařič 2 litry vody z  $20^\circ\text{C}$  na  $90^\circ\text{C}$ ? Vařič je připojen na síť o napětí  $U = 220 \text{ V}$ , jeho odpor je  $R = 100 \Omega$ . Účinnost je 75 %. (Změnu odporu vařiče s teplotou zanedbejte).

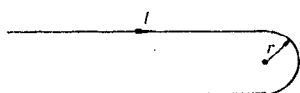
Ú 3.7: Ke zdroji o elektromotorickém napětí  $\mathcal{E} = 100 \text{ V}$  a vnitřním odporu  $R_i = 5 \Omega$  je připojena paralelní kombinace proměnného odporu  $R$  a pevného odporu  $R' = 10 \Omega$ . Nalezněte hodnotu odporu  $R$ , do něhož zdroj dodá výkon  $100 \text{ W}$ .

Ú 3.8: Dva kruhové závity o stejném poloměru  $R_0$  jsou umístěny souose ve vzájemně vzdálenosti  $l$  tak, že jejich roviny jsou kolmé ke společné ose. Oběma závity protéká proud  $I_0$  stejným směrem. Odvodte výraz pro magnetickou indukci  $B$  na ose obou závitů. Vypočítejte hodnotu magnetické indukce  $B_z$  ve středu

závitu a magnetickou indukcí  $B_H$  uprostřed na ose mezi závity v případě  $R_0 = 10$  cm,  $l = 20$  cm,  $I_0 = 3$  A.

Ú 3.9: Pro dvojici závitů z předchozí úlohy Ú 3.8 nalezněte relaci mezi poloměrem  $R_0$  a vzdáleností  $l$ , při níž má pole  $B_H$  maximální homogenitu ve směru spojnice středů obou závitů.

Ú 3.10: Jaký vztah musí platit mezi délkou  $l$  a průměrem  $D$  solenoidu, aby bylo možné počítat pole v jeho středu podle vzorce pro nekonečný solenoid s chybou nepřesahující 1 %?



Obr. 3.36 Tvar vodivé smyčky pro výpočet magnetického pole v úloze U 3.11.

Ú 3.11: Nekonečný drát je ohnut do půlkruhu poloměru  $r$ , jak je naznačeno na obr. 3.36. Určete magnetickou indukcí  $B$  ve středu půlkruhu za předpokladu, že drátem protéká proud  $I$ .

Ú 3.12: Určete magnetickou indukcí  $B$  ve středu smyčky ve tvaru:

- kružnice o poloměru  $r$ ,
- rovnostanného trojúhelníka o straně  $a$ ,
- čtverce o straně  $a$ ,
- obdélníka o stranách  $a$ ,  $b$ ,
- pravidelného šestiúhelníka o straně  $a$ .

Ú 3.13: Čtvercovou smyčkou o straně 6 m protéká proud 10 A. Určete magnetickou indukcí  $B$  v bodě na ose smyčky ve výšce 4 m nad rovinou smyčky.

Ú 3.14: Uvnitř dlouhého přímého homogenního vodiče kruhového průřezu je vyvrtána podélná válcová dutina, jejíž osa je rovnoběžná s osou vodiče. Vzájemná vzdálenost obou os je  $a$  a vodičem protéká proud o hustotě  $j$ . Jakou velikost má magnetická indukce v dutině?

Ú 3.15: Vypočítejte magnetický tok  $\Phi$  plochou čtverce o straně  $a = 3$  cm umístěného vedle nekonečně dlouhého přímého drátu, jímž protéká proud  $I = 15$  A. Jedna strana čtverce je rovnoběžná s drátem ve vzdálenosti 4 cm, protilehlá strana je od drátu vzdálena 5 cm.

Ú 3.16: Nalezněte průběh hustoty plošného proudu  $j_s$  tekoucího na povrchu koule poloměru  $r_0$ , který uvnitř koule vytvoří homogenní pole  $B_0$ . Ukažte, že vně koule je toto pole ekvivalentní poli dipólu a určete jeho dipólový moment  $m$ .

Ú 3.17: Magnetický dipól o magnetickém momentu  $m$  je umístěn v homogenním magnetickém poli  $B_0$ , přičemž vektory  $B_0$  a  $m$  jsou orientovány antiparalelně. Nalezněte poloměr koule  $r_0$ , jejímž povrchem neprochází žádné magnetické indukční čáry výsledného pole. Určete výslednou magnetickou indukcí  $B$  na „rovníkové“ kružnici této koule.

Ú 3.18: Válcová tyč poloměru  $r_0$  a délky  $l$  z magnetického materiálu je cirkulárně zmagnetována tak, že čáry magnetizace  $M$  tvoří koaxiální kružnice, přičemž velikost magnetizace vzrůstá se vzdáleností od osy;  $M = kr$ ,  $k$  je konstanta. Vyjádřete hustoty magnetizačních proudů  $^{(m)}j$ ,  $^{(m)}j_s$ , magnetickou indukcí  $B$  a intenzitu pole  $H$  uvnitř tyče.

Ú 3.19: Určete intenzitu pole  $H$  a magnetizaci  $M$  uvnitř bizmutové koule vložené do vnějšího homogenního magnetického pole  $B_0 = 1,0$  T. Pro magnetickou susceptibilitu bizmutu použijte hodnotu uvedenou v tabulce 7.4.

Ú 3.20: Určete intenzitu pole  $H$  a magnetizaci  $M$  uvnitř koule z oceli „Armco“ vložené do vnějšího magnetického pole  $B_0 = 1,0$  T. Výpočet proveďte za zjednodušujícího předpokladu, že relativní permeabilita materiálu nezávisí na magnetickém poli a je rovna počáteční permeabilitě  $\mu_{r,p} = 300$  (srov. obr. 3.30).



## 4 Kvazistacionární elektrické a magnetické pole

V předchozí kapitole byly zavedeny pojmy makroskopického elektrického a magnetického stacionárního pole. Tato pole popisují fyzikální projevy elektrických nábojů i v situaci, kdy jsou tyto náboje v makroskopickém pohybu vůči pozorovací soustavě souřadnic (tj. realizují-li elektrický proud), avšak pouze za předpokladu, že příslušné charakteristiky soustavy (proudová hustota, intenzita elektrického pole, magnetická indukce, hustota náboje aj.) nejsou závislé na čase.

Jak uvidíme v této a následující kapitole, jsou uvedena omezení fyzikálně podstatná, neboť časová závislost elektrického a magnetického pole přináší jevy, které musí být z hlediska klasické fyziky považovány za nové, nezávislé experimentální poznatky. V průběhu této kapitoly se budeme zabývat vlastnostmi časově proměnného elektrického a magnetického pole za předpokladu jistého omezení. Budeme předpokládat, že časové změny prostorového rozložení nábojů jsou vždy dostatečně pomalé, takže je možné zanedbat druhý člen v obecné rovnici kontinuity proudu (3.15). Budeme tedy předpokládat, že i pro časově závislou hustotu proudu  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  platí rovnice kontinuity ve tvaru (3.17), který je vlastní stacionárnímu přiblížení.

Uvedené přiblížení je velmi důležité pro různé technické aplikace a nazývá se *kvazistacionárním přiblížením*. Je zřejmé, že stacionární elektrické a magnetické pole může být chápáno jako speciální případ pole kvazistacionárního.

### 4.1 Elektromagnetická indukce

#### 4.1.1 Zákon elektromagnetické indukce

Zákon elektromagnetické indukce vyjadřuje (vedle silových účinků) další fyzikální projev magnetického pole. Objevil jej M. Faraday v r. 1831 na základě svých experimentů které ukázaly, že v uzavřeném elektrickém obvodu vzniká proud, jestliže v jeho okolí dochází k jakýmkoliv změnám magnetického pole.

Jev elektromagnetické indukce je možné studovat v několika situacích. Uvažujme vodivou uzavřenou smyčku zhotovenou z homogenního vodiče, která je umístěna v blízkosti zdrojů magnetického pole. (Tyto zdroje mohou být libovolné a mohou být tudíž tvořeny jakoukoliv soustavou vodičů protékanych

proudem a zmagnetovaných těles.) Předpokládejme dále, že máme možnost měřit proud protékající smyčkou. Zjistíme, že smyčkou nepoteče žádný proud, jestliže magnetické pole v jejím okolí bude neproměnné a smyčka bude v klidu. Naopak smyčkou počne protékat proud:

- jestliže se smyčka počne vhodným způsobem pohybovat,
- jestliže se vhodným způsobem počnou pohybovat zdroje magnetického pole,
- jestliže smyčka i zdroje magnetického pole zůstanou v klidu vůči laboratorní (pozorovací) soustavě, ale počne se měnit magnetické pole uvnitř smyčky (například tím, že se změní proudy v některých vodičích vytvářejících pole).

Výsledky experimentů ukazují, že na nositele proudu ve vodiči smyčky působí ve všech uvedených případech síly, které jsou schopny vyvolat proud. Podobně jako v čl. 3.2.3 je i zde výhodné popsat vzniklou situaci zavedením příslušné vtištěné intenzity  $\mathbf{E}_F^*$  a jí příslušného elektromotorického napětí, které nazýváme *indukované elektromotorické napětí*  $\mathcal{E}_F$ . Na rozdíl od stacionárních soustav vyšetřovaných v předchozí kapitole, kdy mohlo elektromotorické napětí působit jen v nehomogenních vodičích, může indukované elektromotorické napětí vznikat při změnách magnetického pole i ve vodičích homogenních. Označíme-li tedy  $R$  celkový odpor smyčky a  $I(t)$  okamžitou hodnotu v ní indukovaného proudu, můžeme v analogii se vztahem (3.30) definovat okamžitou hodnotu indukovaného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_F(t)$  pomocí rovnice

$$\mathcal{E}_F(t) = RI(t). \quad (4.1)$$

Na základě podrobnějších pokusů s elektromagnetickou indukcí bylo ukázáno, že pro vznik indukovaného elektromotorického napětí jsou určující změny c e l k o v é h o magnetického toku procházejícího plochou smyčky. Z výsledků uvedených pokusů je možné stanovit kvantitativní vztah mezi hodnotou  $\mathcal{E}_F(t)$  a těmito změnami toku:

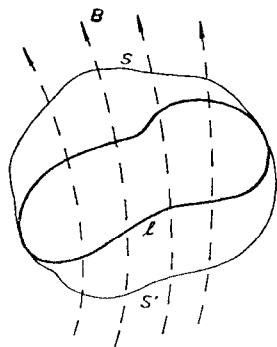
*Velikost indukovaného elektromotorického napětí je rovna velikosti totální časové derivace celkového magnetického toku smyčkou. Směr indukovaného proudu ve smyčce je vždy takový, že magnetické pole vytvořené tímto proudem se vždy snaží kompenzovat změny toku odpovědné za vznik indukovaného proudu.* (Poznatek o směru indukovaného proudu se v literatuře často nazývá *Lenzovo pravidlo*.) Právě uvedené závěry se obvykle vyjadřují ve tvaru<sup>30</sup>

$$\mathcal{E}_F(t) = - \frac{d\Psi}{dt}. \quad (4.2)$$

<sup>30</sup> Zákon elektromagnetické indukce představuje vedle sil působících na pohybující se náboje další nezávislý účinek magnetického pole. Vzhledem k tomu, že všechny veličiny vystupující ve vztahu (4.2) mají již zavedené jednotky, bylo by možné v tomto vztahu očekávat konstantu úměrnosti různou od jedné (srov. vztah G (4.2) v Dodatku 2. Soustava SI má vhodně volené jednotky tak, že tato konstanta úměrnosti je rovna jedné.

Vztah (4.2) vyjadřuje správnou hodnotu indukovaného elektromotorického napětí nezávisle na tom, jakým způsobem změny toku nastávají. Jeho platnost je experimentem plně potvrzena ve všech uvedených případech (a) až (c) a také tehdy, probíhají-li tyto změny najednou.

Vzniká ještě otázka jednoznačnosti určení magnetického toku. Magnetický tok  $\Psi$  v (4.2) je totiž dán relací (3.59), v níž plocha  $S$  představuje plochu použité smyčky, jejíž volba není jednoznačná. (V případě smyčky ve tvaru kružnice může být například za její plochu považována plocha příslušného kruhu, nebo část kulové plochy procházející smyčkou, nebo dokonce libovolná plocha ohraničená uvažovanou smyčkou.) Zákon elektromagnetické indukce vyjádřený vztahem (4.2) bude mít jednoznačný fyzikální smysl jedině tehdy, bude-li hodnota magnetického toku  $\Psi$  nezávislá na tom, kterou z možných ploch  $S$  ohraničených uvažovanou smyčkou pro výpočet podle (3.59) zvolíme.



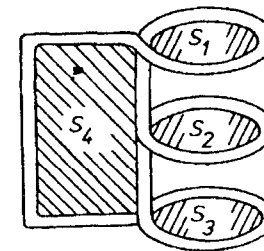
Obr. 4.1 K výkladu vlastností magnetického toku plochou uzavřené smyčky.

Uvedená vlastnost magnetického toku bude automaticky splněna, budeme-li předpokládat, že i pro kvazistacionární pole zůstává v platnosti vztah (3.72), podle něhož je celkový magnetický tok procházející libovolnou uzavřenou plochou nulový. Daná plocha  $S$  ohraničená uzavřenou smyčkou  $l$  může být totiž vždy doplněna jinou libovolně vybranou plochou  $S'$  (rovněž ohraničenou křivkou  $l$ ) na uzavřenou plochu  $S + S'$  (viz obr. 4.1). Z nulovosti magnetického toku plochou  $S + S'$  pak ihned plyne rovnost magnetických toků plochami  $S$  a  $S'$ . Magnetický tok procházející danou smyčkou bude tedy za uvedeného předpokladu jednoznačně určen jen její velikostí, tvarem a polohou v prostoru.

Vztah (3.72) představuje jednu ze základních vlastností magnetického pole i v kvazistacionárním přiblížení. Vyjadřuje skutečnost, že i v kvazistacionárním magnetickém poli jsou magnetickými indukčními čarami vždy uzavřené křivky. (Obecné vlastnosti kvazistacionárního pole budou diskutovány v čl. 4.1.3.)

Při používání vztahu (4.2) je důležité si uvědomit, že tok  $\Psi$  musí být skutečně celkový magnetický tok procházející danou smyčkou. Na tuto okolnost

je třeba dát pozor zejména tehdy, má-li použitý obvod složitější tvar. Na obrázku 4.2 je uveden příklad smyčky tvořené třemi kruhovými závity spojenými do zkratu. Celkový magnetický tok procházející touto smyčkou je dán například součtem toků tekoucích plochami  $S_1$  až  $S_4$ .<sup>31</sup>



Obr. 4.2 Příklad celkového magnetického toku.

Při výkladu zákona elektromagnetické indukce jsme předpokládali, že všechna měření jsou prováděna ve vztažné soustavě pevně spojené s laboratoří. Pozorovatel pracující v této soustavě může považovat magnetické pole za funkci polohového vektoru a času  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Časová závislost vektoru magnetické indukce v daném bodě může být způsobena jednak změnou proudů ve vodičích tvořících zdroje magnetického pole a jednak pohybem těchto vodičů vůči laboratorní soustavě. Pozorovatel pracující v této soustavě nemusí mít vždy možnost rozlišit, kterou z uvedených možností jsou změny magnetického pole vyvolány. Elektromotorické napětí indukované ve smyčce  $l$  nehybné vůči laboratorní soustavě je možné vyjádřit speciálnějším vzorcem

$$\mathcal{E}_l(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.3)$$

Zdůrazněme ještě jednou, že tento poslední výraz neplatí na rozdíl od (4.2) obecně; zahrnuje pouze uvedené případy (b), (c). V případě, kdy smyčka koná pohyb vůči laboratorní soustavě, je nutné započítat ještě změny toku způsobené změnou polohy (popř. i velikostí a tvaru) plochy  $S$ .

Existence indukovaného elektromotorického napětí je jednou z příčin, že zákonitosti platné pro stacionární elektrické obvody (viz články 3.2.3 a 3.2.4) v kvazistacionárním přiblížení obecně neplatí. Pojem elektrického obvodu musí být zobecněn a musí být rovněž zobecněny příslušné vztahy popisující jeho vlastnosti. Docházíme k pojmu *kvazistacionárního elektrického obvodu*, jehož vlastnostmi se budeme zabývat ve oddílu 4.2.

<sup>31</sup> V právě uvedené formulaci zákona elektromagnetické indukce jsme pro označení *celkového magnetického toku uzavřenou vodivou smyčkou* použili symbol  $\Psi$ , zatímco v kapitole 3 byl pro magnetický tok danou plochou obecně zaveden symbol  $\Phi$  (srov. definiční vztah (3.59)). Pro zdůraznění specifičnosti celkového magnetického toku budeme i nadále používat proto rozdílné označení.

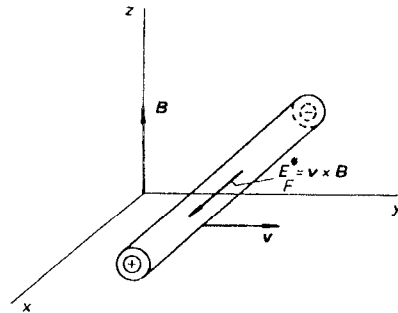
Vzhledem k tomu, že zákon elektromagnetické indukce představuje vedle silových účinků druhý, z hlediska klasické fyziky nezávislý fyzikální projev magnetického pole,<sup>32</sup> může být vztah (4.2) stejně dobře jako Lorentzův vzorec (3.56) použit k definici vektoru magnetické indukce. Vyjadřování magnetického toku ve voltsekundách, které bylo zmíněno v čl. 3.3.1, je tedy s ohledem na vztah (4.2) plně fyzikálně oprávněno.

#### 4.1.2 Souvislost mezi elektromagnetickou indukcí a silovými účinky magnetického pole

Proberme nyní několik typických experimentálních situací, v nichž se projevuje jev elektromagnetické indukce.

##### a) Pohyb přímého vodiče v homogenním magnetickém poli

Uvažujme vodivou tyč orientovanou podél osy  $x$  dané inerciální soustavy souřadné. Nechť se tyč pohybuje ve směru osy  $y$  v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}$  orientovaném ve směru osy  $z$  (viz obr. 4.3). Podle Lorentzova vzorce bude na volné nositele náboje ve vodiči působit síla, která bude mít tendenci posunovat náboje různého znamení opačným směrem. Ve smyslu výkladu předchozího článku lze toto silové působení popsat vtištěnou intenzitou  $\mathbf{E}_F^*$ , pro níž bude podle (3.56) platit



Obr. 4.3 K výpočtu elektrického pole indukovaného v přímém pohybujícím se vodiči.

$$\mathbf{E}_F^* = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Účinkem tohoto silového pole se bude tyč na jednom konci nabíjet kladně a na druhém konci záporně, takže uvnitř vodiče vznikne elektrické pole  $\mathbf{E}$ . Rovnovážný stav nastane, vykompenzuje-li toto elektrické pole vtištěnou intenzitu  $\mathbf{E}_F^*$ , tedy

<sup>32</sup> Určitými hledisky vzájemné souvislosti mezi oběma projevy magnetického pole se budeme zabývat v následujícím článku.

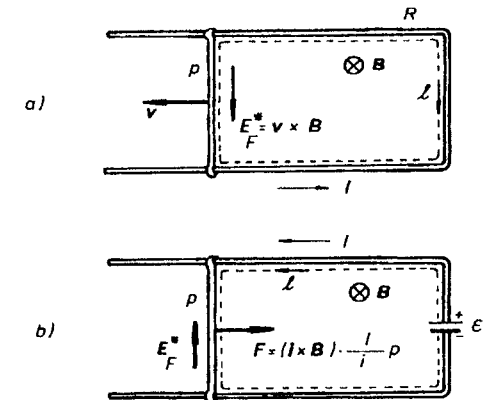
$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

Z výsledku vidíme, že v dané situaci vzniká uvnitř pohybujícího se vodiče elektrické pole, které je důsledkem silových účinků magnetického pole na pohybující se náboje. Jev elektromagnetické indukce je tedy v tomto speciálním případě důsledkem silových účinků magnetického pole.

Je zajímavé si uvědomit, jakou situaci bude sledovat pozorovatel v soustavě souřadnic pevně spojené s vodičem. V této soustavě jev elektromagnetické indukce nenastává, neboť vodič je v homogenním poli v klidu. Elektrické pole  $\mathbf{E}$  uvnitř vodiče musí tedy vymizet. To skutečně nastane, neboť v nové soustavě bude působit elektrické pole  $\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , které vznikne transformací původního magnetického pole (srov. příklad 2.2.5d). Náboje na povrchu vodiče můžeme považovat za důsledek působení tohoto elektrického pole. Výsledné elektrické pole uvnitř vodiče pak bude skutečně nulové.

##### b) Princip elektrického stroje

Vyšetřeme podmínky pro vznik elektrického proudu v uzavřené smyčce, který je důsledkem elektromagnetické indukce ve vodiči, pohybujícím se v magnetickém poli. Uvažujme vodivou smyčku ve tvaru obdélníka, zhotovenou z homogenního vodiče vyhovujícího Ohmovu zákonu, jejíž jedna strana  $p$  je pohyblivá (viz obr. 4.4a). Smyčka nechť je vložena do homogenního magnetického pole  $\mathbf{B}$  kolmého k její rovině a mířícího za nákretnu.



Obr. 4.4 Princip elektrického generátoru a elektromotoru: a) generátor, b) elektromotor.

Bude-li se příčka  $p$  pohybovat účinkem vnější síly rychlostí  $v$ , nastane v ní situace stejná jako ve vodiči vyšetřovaném v předchozím odstavci. Na volné nositele náboje bude působit vtištěná intenzita  $\mathbf{E}_F^*$  podle (4.4), která může zřejmě nahradit vtištěnou intenzitu  $\mathbf{E}^*$  ve vztahu (3.26) vyjadřujícím Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče. Integrací tohoto výrazu podél celé smyčky lze

vypočítat proud  $I$  tekoucí smyčkou (srov. postup, kterým byl získán vztah (3.30)). Platí

$$RI = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.6)$$

Veličina na pravé straně má význam indukovaného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_F$ . Jelikož  $\mathbf{E}_F^*$  je od nuly různé pouze podél příčky  $p$ , platí

$$\mathcal{E}_F = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_p (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.7)$$

Vzorec pro indukované napětí  $\mathcal{E}_F$  lze dále upravit. Jelikož je  $\mathbf{E}_F^*$  konstantní podél celé příčky, dostaneme jednoduchý výraz

$$\mathcal{E}_F = |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|_p = Bvp. \quad (4.8)$$

Elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_F$  v (4.8) je kladná veličina, neboť jsme směr integrace volili souhlasně se směrem  $\mathbf{E}_F^*$ , a tedy i se směrem proudu  $I$ . Lze snadno vyjádřit  $\mathcal{E}_F$  ve tvaru obecného vzorce pro elektromagnetickou indukci (4.2). Součin  $vp$  představuje totiž plochu, kterou opiše příčka  $p$  za jednotku času. Veličina  $Bvp$  pak zřejmě udává absolutní hodnotu změny magnetického toku smyčkou připadající na jednotku času. Jelikož pro výpočet celkového magnetického toku  $\Psi$  smyčkou musíme ponechat orientaci její plochy danou směrem protékajícího proudu, je – jak plyne z obr. 4.4a – tento tok záporný. Je tedy  $\mathcal{E}_F = Bvp = -\Delta\Psi/\Delta t$ , což je hledaný tvar (4.2).

Proud protékající obvodem vyvolává ve vodičích vznik Jouleova tepla. energii potřebnou pro vznik tohoto tepla dodává vnější síla, která při pohybu příčky koná práci. Vidíme tedy, že jev elektromagnetické indukce umožňuje, aby v uvažovaném obvodu podle obr. 4.4a mohla být mechanická práce měněna na elektrickou energii.

Můžeme také vyšetřovat obrácený děj podle obr. 4.4b. Do smyčky nechť je zapojen vnější zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$ , který v ní vzbudí proud  $I$ . Na vodiče smyčky počne opět působit podle (3.58) síla. Předpokládejme, že jako v předchozím případě je smyčka pevná a pouze příčka  $p$  je pohyblivá. Příčka  $p$  se pak může účinkem síly  $\mathbf{F}$  pohybovat a soustava je schopna konat mechanickou práci. Označíme-li rychlost příčky  $\mathbf{v}'$ , bude práce vykonaná za jednotku času zřejmě rovna

$$N_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}' = \frac{I}{j} p [(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}'] = IBpv'. \quad (4.9)$$

Tato práce je konána na úkor energie dodané soustavě zdrojem elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$ . Podle (3.48) je výkon dodaný tímto zdrojem do obvodu roven

$N_z = \mathcal{E}I$ . Předpokládáme-li, že kromě zmíněné mechanické práce a Jouleova tepla neprobíhají v obvodu žádné procesy podílející se na energetické bilanci, můžeme na základě zákona zachování energie psát

$$\mathcal{E}I = RI^2 + N_m = RI^2 + IBpv'. \quad (4.10)$$

Podle (4.8) však  $Bpv'$  představuje absolutní hodnotu elektromotorického napětí  $\mathcal{E}'_F$ , které se v příčce indukuje při jejím pohybu. Chceme-li vnější elektromotorické napětí považovat za kladnou veličinu, musíme za kladný směr integrace považovat směr proudu  $I$ . Pak ovšem

$$\mathcal{E}'_F = \oint_l \mathbf{E}_F^* \cdot d\mathbf{l} = -Bpv' < 0.$$

Po dosazení do (4.10) můžeme energetickou bilanci v obvodu zapsat také ve tvaru

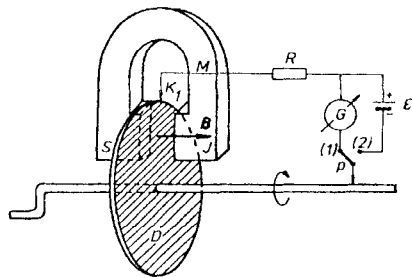
$$\mathcal{E}I = RI^2 - \mathcal{E}'_F I. \quad (4.11)$$

O poměrech v obvodu máme tedy tento výsledný obraz. Vnější zdroj elektromotorického napětí budí v obvodu proud, který vyvolává silové účinky na vodič  $p$ . Počne-li se vodič v důsledku těchto sil pohybovat, počne soustava konat mechanickou práci. V pohybující se smyčce se indukují elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_F$ , které působí proti vnějšímu napětí  $\mathcal{E}$ , a způsobí tedy zmenšení proudu. Jeho konečná hodnota je dána vztahem (4.11). Mechanická práce konaná při pohybu vodiče je konána na úkor energie dodané vnějším zdrojem elektromotorického napětí. Jelikož lze práci vykonanou za jednotku času vyjádřit ve tvaru  $-\mathcal{E}'_F I$ , můžeme také říci, že energie dodávaná vnějšími zdroji se spotřebovává na udržování proudu proti směru indukovaného elektromotorického napětí. Rozbor situace v tomto obvodu ukázal, že vznik indukovaného elektromotorického napětí je podstatný činitel umožňující proměnu elektrické energie v mechanickou práci.

Soustava na obrázku 4.4b popisuje fyzikální princip *elektromotoru*, zatímco soustava na obr. 4.4a princip *elektrického generátoru*. Z provedených úvah vyplývá, že silové účinky na pohybující se vodič a indukování elektromotorického napětí v pohybujícím se vodiči představují dvě různé stránky obecnějšího fyzikálního projevu magnetického pole. Existence silových účinků magnetického pole podmiňuje existenci elektromagnetické indukce a naopak. Každý elektromotor může principiálně sloužit jako generátor (je-li z vnějších zdrojů dodávána mechanická práce) a obráceně každý generátor může sloužit jako elektromotor (je-li dodávána elektrická energie z vnějších zdrojů elektromotorického napětí).

Na obrázku 4.5 je znázorněno principiální uspořádání jednopólového elektrického stroje s otáčivým pohybem (tzv. Barlowovo kolečko), který do

značné míry věrně realizuje fyzikální situaci právě popsaných experimentů, viz obr. 4.4, a tudíž se často používá k demonstraci činnosti generátoru i elektromotoru. Vodivý (nejčastěji měděný) disk  $D$  upevněný na otočném hřídeli je umístěn mezi póly trvalého magnetu  $M$ . Při otáčení hřídelem můžeme měřicím přístrojem  $G$  detekovat indukovaný proud (přepínač  $P$  v poloze (1)). Naopak zapojíme-li do obvodu vnější zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$  tak, aby obvodem protékal proud stejného směru (přepínač  $P$  v poloze (2)), počne se kolečko otáčet opačným směrem.



Obr. 4.5 Principiální uspořádání elektrického stroje.

### c) Princip fluxmetru

Fluxmetrem je nazýván klasický přístroj, který se dříve hojně užíval k měření magnetického pole. Přístroj byl založen na možnosti převést měření změny magnetického toku plochou vodivé smyčky na měření náboje prošlého obvodem, v němž je smyčka zapojena. I když se tento přístroj dnes téměř nepoužívá, je užitečné se seznámit s jeho principem, který velmi dobře demonstruje vlastnosti elektromagnetické indukce.

Uvažujme rovinnou cívku o  $N$  závitěch umístěnou ve vnějším magnetickém poli  $\mathbf{B}$ , dostatečně malého průřezu  $S$  tak, abychom v celém jejím objemu mohli magnetické pole považovat za homogenní. Nechť je cívka zapojena do obvodu o celkovém odporu  $R$  spolu s měřidlem umožňujícím měřit celkový prošlý náboj  $q$ . (O klasické možnosti měření prošlého náboje pomocí balistického galvanometru pojednává příklad 4.3.4d.) Předpokládejme, že jsme v místě cívky jakýmkoliv způsobem změnili magnetické pole z počáteční hodnoty  $\mathbf{B}_i$  na konečnou hodnotu  $\mathbf{B}_f$ . Ukážeme, že celkový náboj prošlý obvodem při změně pole nezávisí na charakteru této změny, ale jen na počáteční ( $\Psi_i$ ) a konečné ( $\Psi_f$ ) hodnotě magnetického toku procházejícího cívkou.

Pro počáteční a konečnou hodnotu celkového magnetického toku cívkou zřejmě platí

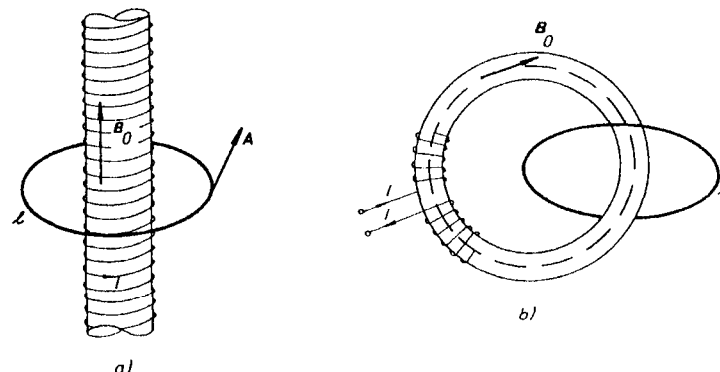
$$\Psi_i = N(\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{S}), \quad \Psi_f = N(\mathbf{B}_f \cdot \mathbf{S}).$$

Označíme-li dále  $I(t)$  okamžitou hodnotu proudu indukovaného v obvodu cívky při změně magnetického pole, můžeme pro náboj  $q$  psát

$$q = \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_T(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} \int_{\Psi_i}^{\Psi_f} d\Psi = \frac{\Psi_f - \Psi_i}{R}, \quad (4.12)$$

čímž je vyřešen úkol vyřešen.

V odstavcích 4.1.2a,b byla diskutována souvislost indukovaného elektromotorického napětí a silových účinků magnetického pole. Bylo by však závažné mylně považovat tyto úvahy za obecné odvození zákona elektromagnetické indukce ze silových účinků magnetického pole. Všechny uvedené úvahy se týkaly pouze indukovaného elektromotorického napětí v pohyblivých vodičích za předpokladu, že magnetické pole je vůči pozorovací vztažné soustavě časově neproměnné.



Obr. 4.6 Demonstrace elektromagnetické indukce ve smyčce umístěné v prostoru s nulovou magnetickou indukcí: a) smyčka obepínající nekonečně dlouhý solenoid, b) smyčka obepínající toroid.

Zákon elektromagnetické indukce, tak jak byl formulován v předchozím článku, představuje mnohem obecnější poznatek. Z hlediska klasické fyziky musí být považován za nový fyzikální zákon formulovaný na základě experimentu. Skutečnost, že jev elektromagnetické indukce nemůže být vždy vyložen na základě silových účinků magnetického pole na pohybující se náboje, lze demonstrovat pomocí myšlenkového experimentu podle obr. 4.6a. Uvažujme kruhovou vodivou smyčku  $l$  poloměru  $r$ , obepínající nekonečně dlouhý solenoid o poloměru  $a < r$ . Tato smyčka prochází celým prostorem s nulovou magnetickou indukcí, takže magnetické pole vytvořené solenoidem nemůže na nositele proudu ve smyčce silově působit ve smyslu vztahu (3.57). Přesto však, platí-li zákon elektromagnetické indukce, bude se při změně proudu cívkou solenoidu ve smyčce indukovat proud, neboť se bude měnit magnetický tok tekoucí plochou smyčky. Pro okamžitou hodnotu elektromotorického napětí indukovaného ve smyčce  $\mathcal{E}_T(t)$  platí podle (4.3) a podle výsledků příkladů 3.3.5e

$$\mathcal{E}_V(t) = -\pi a^2 \frac{\partial B_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_I \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_I \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.13)$$

Získaný výsledek ukazuje zároveň, že má reálný fyzikální smysl uvažovat vektorový potenciál i v těch částech prostoru, ve kterých je magnetická indukce nulová. (K diskusi o této otázce se ještě vrátíme v kapitole 6.) Uvedený experiment lze za téměř ideálních podmínek realizovat v uspořádání podle obr. 4.6b, kdy je nekonečný solenoid nahrazen toroidem (srov. příklad 3.3.5d).

Otázka vzájemné souvislosti silových účinků magnetického pole a jevu elektromagnetické indukce se ovšem jeví v jiném světle z hlediska relativistické fyziky. V kapitole 2 bylo například ukázáno, že alespoň v některých speciálních situacích je možné magnetické pole se všemi jeho projevy chápat jako specifický důsledek Coulombova zákona, svázaný s danou inerciální soustavou souřadnou.

#### 4.1.3 Obecné vlastnosti kvazistacionárního pole

Jak bylo již naznačeno v úvodu této kapitoly, v kvazistacionárním přiblížení připouštíme „pomalé“ časové změny příslušných charakteristik soustavy. Především je možné, aby se s časem měnilo rozložení makroskopických nábojů v prostoru, což znamená, že objemová hustota volných nábojů  $\rho(\mathbf{r}, t)$  i objemová hustota vázaných nábojů  $\rho_p(\mathbf{r}, t)$  mohou být explicitní funkce času. „Pomalost“ časových změn objemové hustoty volných nábojů je dána požadavkem, aby druhý člen  $\partial\rho/\partial t$  v obecné rovnici kontinuity proudu (3.15) byl zanedbatelný proti členu prvnímu, takže proudová hustota volných proudů  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  splňuje rovnici kontinuity (3.16)

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \doteq 0,$$

popř. (3.17)

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \doteq 0,$$

která je charakteristická pro stacionární soustavy. Je rovněž zřejmé, že v kvazistacionárním přiblížení se málo uplatní vázané proudy, včetně posuvného proudu v dielektrikách, jehož proudová hustota je dána časovou derivací vektoru polarizace (srov. vztah (3.12)).

Časově závislé rozložení nábojů budí v okolním prostoru časově proměnné elektrické pole. Kvazistacionární elektrické pole je tedy obecně závislé na čase. Experimentální zkušenost ukazuje, že je v řadě konkrétních případů můžeme s dobrou přesností považovat za pole potenciální. Intenzita kvazistacionárního elektrického pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  tedy v každém okamžiku splňuje podmínku (1.61)

$$\oint_I \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

respektive podmínku (1.63)

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}.$$

Skalární potenciál  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  (obecně rovněž časově závislý) je definován známou relací (1.50)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Kvazistacionární elektrické pole splňuje rovněž Gaussův zákon. V přítomnosti látkového prostředí lze zavést vektor elektrické indukce vztahem typu (1.246)  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ . Platí pak vztah (1.247)

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = Q$$

nebo v diferenciálním tvaru vztah (1.248)

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t).$$

Uvedené vlastnosti elektrického kvazistacionárního pole jsou, jak vidíme, formálně shodné s vlastnostmi pole stacionárního. V kapitole 5 uvidíme, že potenciální charakter kvazistacionárního elektrického pole je důsledkem určité nedůslednosti v aplikaci zákona elektromagnetické indukce a představuje jen určité přiblížení. Veškerá elektrotechnická praxe však ukazuje užitečnost tohoto přiblížení, které je s dostatečnou přesností schopné popsat velkou třídu technicky důležitých situací. Přesto však, že elektrické stacionární a kvazistacionární pole jsou popsána formálně shodnými rovnicemi, existují rozdíly v působení obou polí na nabitou částici. I když například pro kvazistacionární pole v každém okamžiku platí vztah (1.61), může (vzhledem k časové závislosti pole) nabitá částice, pohybující se po uzavřené dráze konečnou rychlostí, konat nenulovou práci.

V úvodu oddílu 3.3 bylo zmíněno úsilí fyziků na přelomu devatenáctého a dvacátého století prokázat experimentálně ekvivalenci magnetických účinků všech mechanismů elektrického proudu. Navzdory pozitivním výsledkům těchto experimentů se v kvazistacionárním přiblížení (vzhledem k jeho charakteru přibližujícímu jen „pomalé“ časové změny) zcela zanedbávají magnetické účinky posuvných proudů. V příští kapitole uvidíme, že tato aproximace podstatnou měrou ochuzuje popis elektromagnetických jevů.

Při zanedbání magnetických účinků polarizačních proudů v látkách nastane podobná situace jako ve stacionárním přiblížení. Za zdroje magnetického pole mohou být (vedle zmagetovaných látek) považovány jen volné proudy, takže je

přirozené předpokládat platnost Ampèrova zákona ve formálně stejném tvaru. Vlastnosti kvazistacionárního magnetického pole, které z tohoto předpokladu plynou, jsou v plné shodě s výsledky příslušných experimentů. (Možnosti demonstrace platnosti Ampèrova zákona pro kvazistacionární pole v relativně obecném uspořádání popisuje příklad 4.1.5a.)

Pro obecnou situaci kvazistacionárního pole v látkách, které může být časově závislé, lze vedle magnetické indukce  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  zavést intenzitu magnetického pole  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ . Ampèrov zákon v integrálním tvaru lze pak vyjádřit podmínkou (3.137)

$$\oint_l \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = I,$$

v níž  $I$  je celkový volný proud protékající plochou uzavřené křivky  $l$ , a jeho diferenciální tvar je dán rovnicí (3.138)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$$

v níž  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  je hustota volného proudu.

Z platnosti Ampèrova zákona a rovnice kontinuity ve speciálním tvaru (3.16), popř. (3.17), plyne dále možnost zavedení vektorového potenciálu  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  definičním vztahem (3.74), který splňuje kalibrační podmínku (3.76)  $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ . Odtud plyne, že pro kvazistacionární pole zůstávají v platnosti všechny závěry článku 3.3.3. Speciálně v každém bodě platí vztah (3.73)

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

a pro libovolnou uzavřenou plochu  $S$  je, viz (3.72),

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Podmínky potřebné pro jednoznačnou formulaci zákona elektromagnetické indukce jsou tedy skutečně splněny.

Právě vyložené vlastnosti elektrického a magnetického kvazistacionárního pole je samozřejmě třeba doplnit zákonem elektromagnetické indukce formulovaným vztahem (4.2)

$$\mathcal{E}_F = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Tento zákon přináší jednu z nejpodstatnějších nových kvalit kvazistacionárního pole ve srovnání s polem stacionárním. Ze zákona elektromagnetické indukce plyne, že časové změny magnetického pole vyvolávají změny v rozložení elektrických nábojů, a tedy i změny elektrického pole. Tyto změny elektrického pole

mohou naopak vyvolat změny v rozložení proudu, a tedy zpětně i změny magnetického pole. Elektrické a magnetické pole přestávají být tedy navzájem nezávislé.

Pro kvazistacionární pole lze v mnoha případech zachovat platnost materiálových vztahů tak, jak byly vyloženy v kapitolách 1 a 3. Speciálně v mnoha případech lze charakterizovat vlastnosti prostředí jeho permitivitou, permeabilitou a měrnou vodivostí, přičemž pro nepříliš rychlé změny pole lze tyto veličiny považovat za konstanty. Při používání Ohmova zákona však musíme mít na paměti, že na nositele proudu může působit navíc indukovaná vtištěná intenzita  $\mathcal{E}_F^*$ , o kterou je třeba doplnit jeho obecnou formulaci (3.26). Ani pro homogenní vodič nelze obecně užívat Ohmův zákon v prostém tvaru (3.22), takže v kvazistacionárním poli neplatí obecně důsledky (3.24), (3.25). Při vhodném úplatnění elektromagnetické indukce může být i v homogenním prostředí nenulová hustota volných či vázaných nábojů.

Z matematického hlediska je kvazistacionární elektrické a magnetické pole popsáno formálně totožnými rovnicemi jako stacionární elektrické a stacionární magnetické pole. Fyzikální odlišnost kvazistacionárního pole je vyjádřena jinými okrajovými podmínkami, které musí brát v úvahu navíc pole indukované vtištěné intenzity  $\mathcal{E}_F^*(\mathbf{r})$ .

#### 4.1.4 Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů

Uvažujme vodivou smyčku protékanou proudem  $I(t)$ , která je uložena ve vakuu. Jak plyne z (3.82), je magnetické pole  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , v daném bodě vybuzené touto smyčkou, lineární funkcí proudu  $I(t)$ . Směr vektoru  $\mathbf{B}$  zůstává v každém bodě stálý; se změnami proudu se mění pouze jeho velikost. Magnetický tok  $\Psi$  libovolnou plochou  $S$  je proto také lineární funkcí proudu  $I$ . Tato linearita zůstane zřejmě zachována i v případě, kdy bude prostor vyplněn hmotným prostředím, jehož permeabilita (resp. magnetická susceptibilita) není závislá na magnetickém poli. (Podle čl. 3.5.4 bude tato linearita dobře zachována v případě paramagnetických a diamagnetických látek. Pro feromagnetické látky bude naopak vztah mezi magnetickým tokem a proudem  $I$  obecně nelineární.)

Uvažujme nyní speciální případ, kdy za plochu  $S$  zvolíme některou z ploch ohraničenou uvažovanou proudovou smyčkou  $l$  (srov. obr. 4.1). Mezi magnetickým tokem  $\Psi$  tekoucím touto plochou a proudem  $I$  bude zřejmě platit vztah

$$\Psi = LI, \quad (4.14)$$

ve kterém konstanta úměrnosti  $L$ , která se nazývá *vlastní indukčností smyčky*, je závislá pouze na geometrickém tvaru smyčky, popřípadě na permeabilitě prostředí vyplňujícího prostor.

Vlastní indukčnost vodiče vyjadřuje jeho schopnost vytvářet magnetické pole. Jde tedy o veličinu, která je v jistém smyslu analogická kapacitě vodiče

(srov. článek 1.4.5). Pro správné pochopení definičního vztahu (4.14) je třeba si uvědomit, že magnetický tok  $\Psi$  představuje skutečně celkový magnetický tok vytvořený smyčkou, podobně jako při formulaci zákona elektromagnetické indukce (srov. obr. 4.2).

Vlastní indukčnost může být zavedena nejen pro uzavřenou smyčku konečných rozměrů, ale i pro libovolný vodič či jeho úsek. Při definici je třeba opět dbát na to, aby v definičním vztahu vystupoval celkový magnetický tok vytvořený uvažovaným úsekem. Například v případě dvojice přímých nekonečně dlouhých vodičů bude celkový magnetický tok vytvořený úsekem délky protékat vyšrafovanou plochou na obr. 4.9b. Je tedy třeba počítat nejen s tokem vně, ale i uvnitř vodičů. Výpočet indukčnosti  $L_{dl}$  připadající na délku  $d$  vodičů je řešen v příkladu 4.1.5b.

Nyní budeme věnovat pozornost obecnějšímu problému. Necht' je v prostoru rozmístěno  $N$  smyček  $l_1, l_2, \dots, l_N$ , protékáných proudy  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . Je zřejmé, že celkový magnetický tok  $\Psi_i$ , protékající  $i$ -tou smyčkou, bude obecně záviset na proudech ve všech uvažovaných  $N$  smyčkách. Podle toho co bylo řečeno na začátku článku je dále zřejmé, že příspěvek  $\Psi_{ik}$   $k$ -té smyčky k celkovému toku  $\Psi_i$  bude možné vyjádřit vztahem

$$\Psi_{ik} = L_{ik} I_k, \quad (4.15)$$

ve kterém  $L_{ik}$  představuje opět veličinu závislou pouze na tvaru, velikosti, vzájemné poloze a orientaci příslušných smyček a na permeabilitě prostředí. Celkový tok  $\Psi_i$  libovolné z uvažovaných smyček ( $i = 1, \dots, N$ ) bude tedy možné vyjádřit ve tvaru

$$\Psi_i = L_{ik} I_k. \quad (4.16)$$

Koeficienty se stejnými indexy  $L_{kk}$  ( $k = 1, \dots, N$ ) představují zřejmě vlastní indukčnosti jednotlivých smyček. Koeficienty  $L_{ik}$  pro  $i \neq k$  vyjadřují, jak proud v  $k$ -té smyčce přispívá k magnetickému toku  $i$ -tou smyčkou. Nazývají se *vzájemnými indukčnostmi* příslušných smyček.

Vztahy (4.14), (4.15) a (4.16) představují tzv. *statickou* definici vlastní a vzájemné indukčnosti. Kromě nich se užívá také *dynamických* definičních vztahů, které udávají souvislost mezi indukovanými elektromotorickými napětími v jednotlivých smyčkách a změnami proudu. Tyto vztahy získáme snadno použitím výrazu (4.2) vyjadřujícího zákon elektromagnetické indukce. Budeme nejdříve uvažovat pouze jedinou smyčku, v níž může docházet ke změnám proudu  $I$ . Tyto změny proudu budou vyvolávat změny magnetického toku tekoucího smyčkou, které je možné vyjádřit vztahem (4.14). Změny magnetického toku budou dále vyvolávat ve smyčce indukované elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_F$ , pro které podle zákona elektromagnetické indukce dostaneme

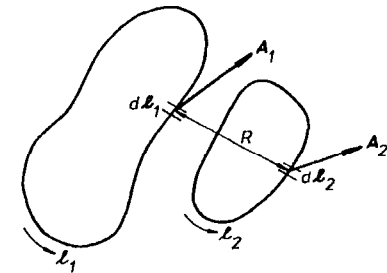
$$\mathcal{E}_F = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.17)$$

Podobně pro uvažovanou soustavu  $N$  smyček bude elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_{F,i}$ , indukované v  $i$ -té smyčce v důsledku změn proudů  $I_1, I_2, \dots, I_N$  ve všech smyčkách, dáno vztahem

$$\mathcal{E}_{F,i} = -\frac{d\Psi_i}{dt} = -\sum_{k=1}^N L_{ik} \frac{dI_k}{dt}. \quad (4.18)$$

Z energetických úvah (viz úlohu Ú 4.5) lze ukázat, že vlastní indukčnost vodiče je vždy kladná veličina. Vzájemná indukčnost může být naopak kladná i záporná v závislosti na tom, je-li (při dané orientaci příslušných ploch) příspěvek  $\Psi_{ik}$  v (4.15) k celkovému toku  $\Psi_i$  kladný či záporný. Platí však obecně

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (4.19)$$



Obr. 4.7 K výkladu symetrie vzájemných indukčností smyček  $l_1, l_2$ .

Pro dvojici smyček  $l_1, l_2$  (například podle obr. 4.7) lze relaci (4.19) dokázat jednoduše, vyjádříme-li magnetický tok pomocí vektorového potenciálu vztahem (3.59a). Pro vzájemné indukčnosti smyček platí podle definice

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}, \quad L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \quad (4.20)$$

a například pro  $L_{12}$  dostaneme pomocí (4.20) a dále využitím (3.82)

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{dl_1 dl_2}{R}. \quad (4.21)$$

Tento výraz je nezávislý na pořadí indexů (1) a (2), což dokazuje vztah (4.19). Jeho platnost je možné dokázat i na základě energetických úvah – viz úlohu Ú 4.6.



Podmínka (4.19) vyjadřuje tzv. *větu o vzájemnosti*, kterou lze formulovat takto:

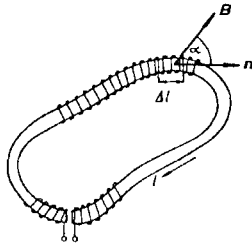
Jestliže proud  $I$  v  $k$ -tém obvodu přispívá k celkovému magnetickému toku  $i$ -tého obvodu hodnotou  $\Psi_{ik}$ , pak stejný proud v  $i$ -tém obvodu přispívá stejnou hodnotou magnetického toku  $k$ -tého obvodu.

V soustavě SI je jednotkou vlastní i vzájemné indukčnosti henry (H). Podle (4.14), respektive (4.15), platí: henry = weber/ampér = voltsekunda.ampér<sup>-1</sup>.

#### 4.1.5 Řešené příklady

##### a) Demonstrace platnosti Ampèrova zákona (měřicí transformátor)

Všimneme si konkrétního uspořádání, které umožňuje demonstrovat platnost Ampèrova zákona relativně obecným způsobem a které má také praktický význam, neboť umožňuje měřit (periodicky proměnný) proud ve vodiči bez nutnosti zařazovat měřicí přístroj do příslušného obvodu.



Obr. 4.8 Princip činnosti měřicího transformátoru.

Uvažujme cívku o velkém počtu závitů navinutou na ohebném jádru malého průřezu  $\Delta S$  zhotoveném z vhodného materiálu (kůže, plastická látka apod.). Z této cívky lze vytvořit uzavřenou smyčku  $l$  velmi obecného tvaru (viz obr. 4.8), přičemž lze předpokládat, že plocha každého závitu je v podstatě kolmá ke směru křivky  $l$  v daném místě.

Předpokládejme dále, že cívka je vložena do magnetického pole libovolné soustavy vodičů. Abychom mohli vypočítat celkový magnetický tok  $\Psi$  tekoucí touto cívkou, uvažujme nejdříve její malou část  $\Delta l$  (viz obr. 4.8). Zavedeme jednotkový vektor  $\mathbf{n}$ , jehož směr má směr tečny smyčky  $l$  v daném místě a jehož orientace souhlasí se zvolenou orientací smyčky. Lze pak napsat  $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{n} \Delta l$ ,  $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n} \Delta S$ . Magnetický tok  $\Delta \Phi$  tekoucí jedním závitem cívky vyjádříme ve tvaru  $\Delta \Phi = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{S}$ . Necht' na jednotkovou délku cívky připadá  $z_0$  závitů. Na úseku  $\Delta l$  bude potom  $z_0 \Delta l$  závitů. Celkový magnetický tok  $\Delta \Psi$  tekoucí všemi závitů na úseku  $\Delta l$  bude mít tvar

$$\Delta \Psi = z_0 \Delta l \Delta \Phi = z_0 \Delta S (\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{l}).$$

Magnetický tok  $\Psi$  tekoucí celou cívkou tedy zajisté můžeme vyjádřit křivkovým integrálem

$$\Psi = z_0 \Delta S \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.22)$$

Bude-li se magnetické pole měnit, bude se v cívce indukovat elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_F(t)$ , které bude mít hodnotu

$$\mathcal{E}_F(t) = -z_0 \Delta S \frac{d}{dt} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.23)$$

Předpokládejme nyní, že v okamžiku  $t = 0$  zapneme proud ve vodičích vytvářejících studované magnetické pole. Proud v těchto vodičích a magnetické pole v jejich okolí začne od tohoto okamžiku narůstat, až po uplynutí dostatečně dlouhé doby dosáhne své rovnovážné hodnoty. V cívce se při tomto procesu bude indukovat elektromotorické napětí podle vztahu (4.23). Jestliže bude cívka zapojena do uzavřeného obvodu, poteče jím proud. Snadno vypočítáme hodnotu celkového náboje  $Q$ , který proteče obvodem o celkovém odporu  $R$  po zapnutí (nebo také vypnutí) proudu ve zmíněných vodičích (srov. odstavec 4.1.2c). Zřejmě platí

$$Q = \int_0^{\infty} I(t) dt = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} \mathcal{E}_F(t) dt = -\frac{z_0 \Delta S}{R} \int_0^{\infty} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{z_0 \Delta S}{R} \oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.24)$$

Získaný vzorec ukazuje, že celkový náboj prošlý obvodem měrné cívky při zapnutí pole je úměrný křivkovému integrálu (3.64) z konečných hodnot pole. Připojíme-li tedy měrnou cívku k měřicímu přístroji schopnému měřit celkový prošlý náboj, můžeme měřením pro různé polohy cívky ověřovat platnost vztahu (3.68). Především se můžeme přesvědčit o tom, že prošlý náboj je nulový, nezavírá-li smyčka  $l$  vytvořená měrnou cívkou žádný proud. V opačném případě, kdy smyčka obepíná jistý proud  $I$ , je prošlý náboj úměrný tomuto proudu.

Praktický význam právě popsaného uspořádání spočívá v tom, že je možné za předpokladu platnosti Ampèrova zákona měřit proud ve vodičích podle jeho magnetických účinků, bez nutnosti zařazovat měřicí přístroj do příslušného obvodu. Výhody tohoto způsobu vyniknou zejména při měření velkých proudů, kdy by vlastní odpor měřicího přístroje mohl značně ovlivnit poměry v obvodu. Pro měření velkých střídavých proudů se komerčně zhotovují měrné cívky pevného tvaru, zpravidla na feromagnetickém jádru, které se nazývají měřicí transformátory.

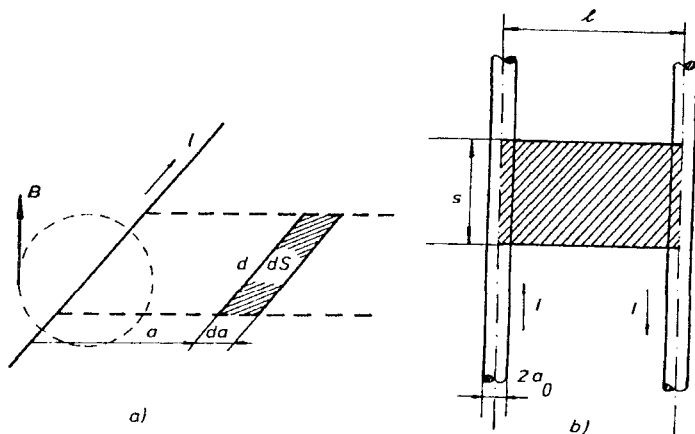
##### b) Vlastní indukčnost přímých vodičů

Uvažujme nejdříve jediný nekonečně dlouhý velmi tenký vodič protékáný proudem  $I$ , vložený ve vakuu. Chceme-li určit vlastní indukčnost tohoto vodiče připadající na délku  $d$ , můžeme postupovat tak, že zvolíme část radiální plochy

šířky  $da$  a určíme celkový magnetický tok touto plochou (viz obr. 4.9a). Tok diferenciální ploškou  $dS$  bude  $d\Psi = Bd da$  a pro indukčnost dostaneme

$$L_d = \frac{\Psi_d}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} d \int_0^{\infty} \frac{da}{a}.$$

Integrál však diverguje jak pro  $a \rightarrow 0$ , tak pro  $a \rightarrow \infty$ , což ukazuje, že vyšetřovaný příklad je nepřipustně zidealizován. Divergenci pro  $a \rightarrow 0$  lze odstranit předpokladem konečného průměru vodiče. Pro  $a \rightarrow \infty$  však v případě jednoho nekonečného vodiče divergenci integrálu odstranit nelze, tudíž ani nelze najít konečnou hodnotu vlastní indukčnosti.



Obr. 4.9 K výpočtu indukčnosti přímých vodičů: a) jediný nekonečný vodič, b) dvojice přímých, rovnoběžných, nekonečně dlouhých vodičů.

Řešitelná je úloha o vlastní indukčnosti dvou přímých, rovnoběžných, nekonečně dlouhých vodičů konečného průměru  $2a_0$ , jejichž osy jsou vzdáleny o  $l$  a jimiž protéká proud  $I$  opačnými směry (viz obr. 4.9b). K určení celkového indukčního toku připadajícího na délku  $s$  vodičů stačí uvažovat část radiální plochy šířky  $s$  mezi osami obou vodičů. Předpokládejme nejdříve, že proud je rozdělen rovnoměrně po celém průřezu vodiče. Integraci magnetického toku je pak nutné rozdělit na dvě části; na část vně vodičů, kde je průběh magnetické indukce dán superpozicí příspěvků typu (3.86), a na část uvnitř vodičů, kde průběh magnetického pole určuje vztah (3.87). Za předpokladu, že vodiče mají relativní permeabilitu rovnou jedné a jsou umístěné ve vakuu, lze pro indukčnost  $L_s$  tedy psát

$$L_s = \frac{\mu_0}{2\pi a_0^4} s \left[ \int_0^{a_0} a^3 da + \int_{l-a_0}^l (l-a)^3 da \right] + \frac{\mu_0}{2\pi} s \left[ \int_{a_0}^{l-a_0} \frac{da}{a} + \int_l^{l-a_0} \frac{da}{l-a} \right], \quad (4.25)$$

odkud po integraci dostaneme

$$L_s = \frac{\mu_0}{2\pi} s \left( 1 + \ln \frac{l-a_0}{a_0} \right). \quad (4.26)$$

Pro duté vodiče ovšem první člen v (4.25) i v (4.26) odpadne.

Zajímavé je srovnání výsledku pro duté vodiče s výsledkem příkladu 1.4.7f, ve kterém byla počítána kapacita dvojice válcových vodičů. Pro součin indukčnosti  $L_0$  a kapacity  $C_0$  připadající na jednotkovou délku platí

$$L_0 C_0 = \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (4.27)$$

### c) Vlastní indukčnost kruhové smyčky

Máme určit vlastní indukčnost kruhové smyčky poloměru  $r$  vložené ve vakuu a protékané proudem  $I$ . Ze stejných důvodů jako v předchozím příkladu nemůžeme smyčku považovat za nekonečně tenkou; budeme tedy předpokládat, že vodič má kruhový průřez o poloměru  $a_0$ .

K určení vlastní indukčnosti je třeba vypočítat magnetický tok kruhovou plochou ohraničenou osovou kružnicí smyčky. Přitom je třeba výpočet opět rozdělit na dvě části, tj. na tok uvnitř vodiče plochou ve tvaru mezikruží omezeného kružnicemi o poloměrech  $r$  a  $r-a_0$  a na tok vně vodiče kruhovou plochou o poloměru  $r-a_0$ .

Pro  $r \gg a_0$  lze zanedbat zakřivení kružnice a vnitřní tok můžeme počítat jako v případě úseku přímého vodiče délky  $2\pi r$ . Pokud jde o vnější část toku, pro jeho výpočet je nutná znalost průběhu magnetické indukce na celé kruhové ploše ohraničené smyčkou. Avšak jelikož vně smyčky můžeme proud  $I$  považovat za tekoucí nekonečně tenkou osovou kružnicí, je úloha ekvivalentní výpočtu vzájemné indukčnosti dvou tenkých koncentrických kruhových smyček o poloměrech  $r$  a  $r-a_0$  ležících v téže rovině. K tomu lze použít vzorec (4.21). Vlastní výpočet integrálu není snadný. Položíme-li relativní permeabilitu vodiče rovnou jedné, vychází přibližný výsledek [6]

$$L = \mu_0 r \left( \ln \frac{8r}{a_0} - \frac{7}{4} \right). \quad (4.28)$$

**d) Vlastní indukčnost solenoidu**

Uvažujme dlouhý solenoid délky  $l$  a poloměru  $R$ , na němž je navinuto  $N_l$  závitů na jednotku délky. Zanedbáme-li okrajové efekty, můžeme magnetické pole uvnitř solenoidu považovat za homogenní s hodnotou magnetické indukce danou vztahem (3.95). Celkový magnetický tok procházející všemi závity cívky  $\Psi$  je roven

$$\Psi = N_l B S l,$$

kde  $S = \pi R^2$  udává průřez solenoidu. Podle definice dostaneme pak pro vlastní indukčnost vztah

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 N_l^2 V, \quad (4.29a)$$

v němž  $V = S l$  je objem solenoidu.

Přesnější výpočet zahrnující okrajové efekty (viz například [9]) dává

$$L = k \mu_0 N_l^2 V, \quad (4.29b)$$

kde

$$k = 1 - \frac{8R}{3\pi l} + \frac{R^2}{2l^2} - \frac{R^4}{4l^4}.$$

**e) Vlastní indukčnost toroidu**

Toroidální cívky se uplatňují v celé řadě důležitých aplikací, nevyjímaje velká zařízení, jako je například tokamak, sloužící k udržení horkého plazmatu, nebo betatron (srov. 6.3.2d). Určíme vlastní indukčnost toroidu kruhového průřezu o poloměru  $b$ , na němž je navinuto celkem  $N$  závitů. Osová kružnice toroidu nechť má poloměr  $R_0$  (viz obr. 4.10a).

Magnetické indukční čáry v toroidu jsou kružnice s osou v ose toroidu a velikost magnetické indukce ve vzdálenosti  $R$  od osy, která je dána vztahem (3.96), klesá s první mocninou  $R$ .

K určení vlastní indukčnosti musíme najít celkový magnetický tok  $\Psi$  uvnitř toroidu. Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu průřezu toroidu (obr. 4.10a), takže na povrchu průřezu platí  $x^2 + y^2 = b^2$ . Pro vlastní indukčnost pak máme

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2}{\pi} \int_{R_0-b}^{R_0+b} \frac{y}{R} dR = \frac{\mu_0 N^2}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{R_0 + x} dx.$$

Provedeme substituci  $x = bz$  a označíme  $R_0 = bC$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-z^2}}{C+z} dz = \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1-z^2 - Cz + Cz + C^2 - C^2}{(C+z)\sqrt{1-z^2}} dz = \\ &= \frac{\mu_0 N^2 b}{\pi} \left[ (1-C^2) \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(C+z)\sqrt{1-z^2}} - \int_{-1}^{+1} \frac{z dz}{\sqrt{1-z^2}} + C \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right]. \end{aligned}$$

První integrál v hranaté závorce řešíme substitucí  $1/(C+z) = t$ , čímž dostaneme

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{(1-C^2)t^2 + 2Ct - 1}} = \frac{1}{\sqrt{C^2-1}} \arcsin[(1-C^2)t + C],$$

druhý integrál je roven nule a třetí  $\pi$ . Celkově dostaneme tedy výsledek

$$L = \mu_0 N^2 \left( R_0 - \sqrt{R_0^2 - b^2} \right). \quad (4.29c)$$

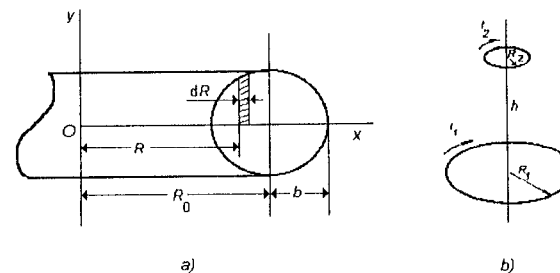
Pro tenký toroid, v přiblížení  $b \ll R_0$ , vychází

$$L = \mu_0 N^2 \frac{b^2}{2R_0} = \mu_0 N_l^2 V, \quad (4.29d)$$

kde  $V = 2\pi^2 R_0 b^2$  je objem toroidu a  $N_l$  počet závitů na jednotkové délce vinutí. Výsledek je tedy stejný jako u dlouhého solenoidu.

**f) Vzájemná indukčnost dvou sousých smyček**

Uvažujme vzájemnou indukčnost dvou sousých, stejně orientovaných smyček o poloměrech  $R_1, R_2$ , jejichž roviny leží ve vzdálenosti  $h$  (obr. 4.10b). Magnetická indukce vybuzená větší smyčkou ve středu smyčky menší je dána vztahem



Obr. 4.10 K výpočtu a) vlastní indukčnosti toroidu, b) vzájemné indukčnosti dvojice sousých smyček.

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 I_1 \frac{R_1^2}{(R_1^2 + h^2)^{3/2}}$$

a může být v průřezu této (menší) smyčky považována za homogenní. Pro hledanou vzájemnou indukčnost pak ihned dostaneme

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (4.30a)$$

Speciálně pro koncentrické smyčky ( $h = 0$ ) platí

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \frac{R_2^2}{R_1} = \frac{\mu_0}{2} \frac{S_2}{R_1}. \quad (4.30b)$$

#### g) Vzájemná indukčnost dvojice sousedních válcových cívek

Uvažme dvě válcové cívky o poloměrech  $R_1$ ,  $R_2$ , počtech závitů  $N_1$ ,  $N_2$ , a délkách  $l_1$ ,  $l_2$ . Vypočítáme jejich vzájemnou indukčnost pro dva konkrétní případy:

1. Necht' obě cívky mají stejné rozměry, stejnou orientaci, jsou dostatečně dlouhé a jsou navinuty na společném jádru, takže magnetický tok jimi procházející je totožný. Prochází-li cívkou (1) proud  $I_1$ , poteče jejím průřezem magnetický tok  $\Phi = (\mu_0 I_1 N_1 S) / l$ . Celkové magnetické toky  $\Psi_1$ ,  $\Psi_{21}$  první a druhé cívky budou tedy rovny

$$\Psi_1 = N_1 \Phi, \quad \Psi_{21} = N_2 \Phi.$$

Odtud pro vlastní indukčnost a vzájemnou indukčnost obou cívek snadno dostaneme výsledky

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l}, \quad L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}. \quad (4.31)$$

Vidíme, že vzájemná indukčnost  $L_{12}$  může také být vyjádřena ve tvaru

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}, \quad (4.32)$$

což je nejvyšší mezní hodnota vzájemné indukčnosti dvou cívek a odpovídá situaci, kdy se obě cívky prostorově ztotožní a mají společný magnetický tok. (O různých stupních vazby dvou cívek bude jednáno ještě v čl. 4.2.3).

2. Necht' první cívka délky  $l_1$  a poloměru  $R_1$  je dostatečně dlouhá a druhá (krátká) cívka o poloměru  $R_2 \ll R_1$  je do první cívky koaxiálně zasunuta. Obě cívky necht' mají souhlasnou orientaci. Pole vytvořené první cívkou můžeme v průřezu cívky druhé považovat za homogenní. Magnetický tok tekoucí průře-

zem druhé cívky bude tedy roven  $(\mu_0 I_1 N_1 S) / l_1$  a pro vzájemnou indukčnost  $L_{12}$  dostaneme

$$L_{12} = \frac{(\mu_0 N_1 N_2 S_2)}{l_1}. \quad (4.33)$$

## 4.2 Kvazistacionární elektrický obvod

Již v článku 4.1.1 bylo poukázáno na skutečnost, že v elektrických obvodech, ve kterých může docházet ke změnám proudu, existují složitější poměry než v obvodech stacionárních. Příčinou této situace je především jev elektromagnetické indukce, neboť při změnách proudu může v obvodu vznikat indukované elektromotorické napětí, které ovlivní proud tekoucí obvodem. Další rozdíly ve srovnání se stacionárním obvodem přináší uplatnění kapacit mezi jednotlivými vodiči. Uvedená komplikace je způsobena tím, že při změnách potenciálu vodičů dochází ke změnám v rozložení nábojů, a tudíž ke vzniku dodatečných proudů v jednotlivých částech obvodu.

Uvedené okolnosti nejsou samozřejmě zahrnuty ve vztazích, které byly pro stacionární obvod odvozeny v oddílu 3.2. Pro kvazistacionární obvod je třeba tyto vztahy zobecnit a kromě toho je třeba zobecnit i sám pojem elektrického obvodu, což je úkolem tohoto oddílu.

### 4.2.1 Kirchhoffova pravidla pro kvazistacionární obvod

Uvažujme soustavu  $N$  vodivých, uzavřených smyček a předpokládejme, že v každé z nich mohou působit obecně časově proměnné vtištěné síly, jejichž vliv v  $i$ -té smyčce lze popsat výsledným, obecně časově proměnným elektromotorickým napětím  $\mathcal{E}_i(t)$ . Změny proudu v jednotlivých smyčkách budou dále v každé smyčce indukovat elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_{F,i}(t)$  dané vztahem (4.18). Doplněním tohoto napětí do rovnice (3.30), vyjadřující Ohmův zákon pro uzavřený obvod, dostaneme v případě  $i$ -té smyčky podmínku

$$R_{c,i} I_i = \mathcal{E}_i(t) + \mathcal{E}_{F,i}(t) = \mathcal{E}_i(t) - \frac{d\Psi_i}{dt}, \quad (4.34a)$$

popř.

$$R_{c,i} I_i = \mathcal{E}_i(t) - \sum_{k=1}^N L_{ik} \frac{dI_k}{dt}, \quad (4.34b)$$

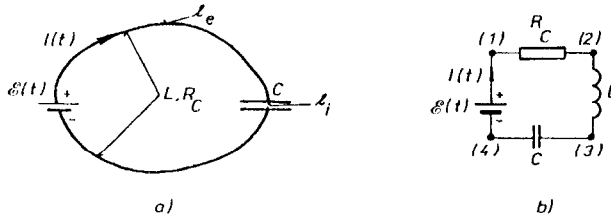
v níž  $R_{c,i}$  představuje celkový odpor této smyčky a  $I_i$  její proud. Ve speciálním případě jediné smyčky se soustava (4.34) zjednoduší na jedinou rovnici

$$R_c I = \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.35a)$$

popř.

$$R_c I = \mathcal{E}(t) - L \frac{dI}{dt}. \quad (4.35b)$$

Rovnice (4.34), popř. (4.35), zřejmě nahrazují rovnici (3.30) pro náš obecnější případ, kdy se uplatní vliv jevu elektromagnetické indukce. Je z nich možné vypočítat proudy ve všech smyčkách  $I_1(t), I_2(t), \dots, I_N(t)$ , jsou-li zadána vnější elektromotorická napětí  $\mathcal{E}_1(t), \mathcal{E}_2(t), \dots, \mathcal{E}_N(t)$ , celkové odpory  $R_{c,1}, R_{c,2}, \dots, R_{c,N}$  a vlastní i vzájemné indukčnosti  $L_{ik}$ . (Jelikož jde o diferenciální rovnice prvního řádu, je pro určení konkrétního průběhu proudu třeba ještě znát počáteční podmínky, tj. například hodnotu proudu v určitém okamžiku.) Tyto rovnice však ještě nevystihují situaci v obvodech s proměnným proudem úplně. Není v nich totiž počítáno s vlivem kapacity mezi jednotlivými vodiči.



Obr. 4.11 Vodivá smyčka v kvazistacionárním přiblížení: a) realizace smyčky s odporem, indukčností a kapacitou, b) schéma smyčky v aproximaci soustředěných parametrů.

Abychom její vliv mohli poznat, uvažujme jednoduchý obvod podle obr. 4.11a. Předpokládejme, že tento obvod vznikl přerušením vodivého uzavřeného obvodu o celkovém odporu  $R_c$  a vlastní indukčnosti  $L_{ik}$ , přičemž do místa přerušení byl zařazen kondenzátor kapacity  $C$ . Kapacity mezi jednotlivými částmi vodičů původního obvodu zatím zanedbáme, takže vlastnosti nové soustavy budou plně určeny veličinami  $R_c, L, C$ . Je samozřejmé, že takto upraveným „obvodem“ již nemůže téci stacionární proud. Jeho vodiči však může protékat časově proměnný kondukční proud při změnách náboje na elektrodách kondenzátoru.

Předpokládejme dále, že ve vodičích obvodu působí vtištěné síly, jejichž vliv je možné popsat elektromotorickým napětím  $\mathcal{E}(t)$ . Provedeme integraci Ohmova zákona (3.26) podél uzavřené křivky  $l$ , jejíž část  $l_e$  vedená vně kondenzátoru splývá s vodiči obvodu. Druhá část  $l_i$ , probíhající vnitřkem kondenzátoru, nechť je vedená libovolně. Budeme však předpokládat, že kondenzátor je malých roz-

měrů, takže bude  $l_e \gg l_i$ , a uvedená libovolně příliš neovlivní velikost plochy ohraničené křivkou  $l$ . Pro integrál přes  $l_e$  dostaneme

$$\int_{l_e} \frac{j}{\gamma} \cdot dI = \int_{l_e} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \cdot dI,$$

$$R_c I(t) = \int_{l_e} \mathbf{E} \cdot dI + \mathcal{E}(t).$$

Tyto rovnice však ještě nezahrnují uplatnění indukovaného elektromotorického napětí. Po opravě ve smyslu (4.35a), resp. (4.35b) bude platit

$$R_c I(t) = \int_{l_e} \mathbf{E} \cdot dI + \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt}, \quad (4.36a)$$

popř.

$$R_c I(t) = \int_{l_e} \mathbf{E} \cdot dI + \mathcal{E}(t) - L \frac{dI}{dt}. \quad (4.36b)$$

Rovnici (4.36) můžeme dát jasnější smysl, využijeme-li vlastnosti elektrického pole. Podle článku 4.1.3 víme, že kvazistacionární elektrické pole je potenciální. Pro jeho intenzitu  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  bude tedy v každém okamžiku platit

$$\oint_l \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot dI = \int_{l_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot dI + \int_{l_i} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot dI.$$

Veličina

$$\int_{l_i} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot dI$$

však představuje rozdíl elektrického potenciálu (tj. okamžitou hodnotu napětí)  $U_C(t)$  mezi elektrodami kondenzátoru, který lze užitím (1.201) vyjádřit pomocí kapacity  $C$  a okamžité hodnoty náboje na kondenzátoru. Tedy

$$U_C(t) = \int_{l_i} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot dI = \frac{Q(t)}{C}. \quad (4.37)$$

Po dosazení do (4.36) dostaneme pro náš obvod rovnici

$$R_c I(t) + U_C(t) = \mathcal{E}(t) - \frac{d\Psi}{dt} \quad (4.38)$$

nebo

$$R_c I(t) + \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E}(t) - L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (4.38a)$$

Rovnice (4.38) a (4.38a) mají pro obvod znázorněný na obr. 4.11a stejný význam jako rovnice (3.30) pro stacionární vodivě uzavřený obvod. Je z nich možno vypočítat proud, známe-li parametry  $\mathcal{E}(t)$ ,  $R_c$ ,  $L$ ,  $C$  (a počáteční podmínky). Podobně jako v případě (4.34) a (4.35) mohou být i tyto rovnice převedeny na tvar lineární diferenciální rovnice (tentokrát druhého řádu), v nichž neznámou veličinou je proud jako funkce času. Uvědomíme-li si, že platí, viz (3.2),

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

dostaneme po zderivování rovnic (4.38)

$$R_c \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} + L \frac{d^2 I(t)}{dt^2}. \quad (4.39)$$

Právě provedená úvaha ukazuje, za jakých podmínek může vodiči spojenými s elektrodami kondenzátoru protékat proud. Při působení časově proměnných elektromotorických napětí je nutné tyto vodiče (spolu s připojeným kondenzátorem) považovat za součást uvažovaných obvodů přesto, že nereprezentují elektricky vodivé spoje. Je tedy zřejmé, že v kvazistacionárním přiblížení je užitečné zobecnit pojem elektrického obvodu. V tomto zobecněném pojetí je třeba za elektrický obvod považovat libovolné spojení (homogenních i nehomogenních) vodičů, které je charakterizováno jejich odpory, elektromotorickými napětími, vlastními i vzájemnými indukčnostmi a také kapacitami mezi jednotlivými částmi vodičů.

Z rovnic (4.34) až (4.39) a také z rovnice kontinuity vyplývá, že v daném okamžiku je proud v každém průřezu nerozvětvené části vodiče stejný. Pro výpočet proudů a napětí na těchto úsecích není proto zapotřebí uvažovat skutečný tvar těchto vodičů. Ke zjednodušení úvah o kvazistacionárních obvodech se proto zavádí tzv. přiblížení *soustředěných parametrů*. Předpokládáme, že vlastní indukčnosti vodičů lze reprezentovat cívkami velmi malých rozměrů zhotovenými z ideálních vodičů, přičemž jednotlivým dvojicím cívek připisujeme odpovídající hodnoty vzájemných indukčností. Podobně kapacity mezi jednotlivými vodiči nahrazujeme kondenzátory, a o odporech předpokládáme, že jsou soustředěny do velmi malých úseků vodičů, které tvoří prvky nazývané *rezistory*. Libovolný obvod pak můžeme reprezentovat určitým spojením těchto základních prvků (zdrojů, cívek, kondenzátorů a rezistorů). O vodičích, které je propojují předpokládáme, že jsou ideální; jejich odpory, indukčnosti i kapacity mezi nimi již považujeme za nulové. Uvažovaný obvod podle obr. 4.11a může pak být

při využití smluvených schematických značek překreslen do tvaru který, vidíme na obr. 4.11b.

Pro právě zavedený kvazistacionární obvod se soustředěnými parametry lze v podstatě reprodukovat úvahy článku 3.2.4 a odvodit Kirchhoffova pravidla.

Platnost *I. Kirchhoffova pravidla* ve tvaru uvedeném v čl. 3.2.4 je pro libovolný uzel a v každém okamžiku zřejmá, neboť pro kvazistacionární přiblížení požadujeme platnost rovnice kontinuity ve tvaru (3.16) (viz článek 4.1.3). Slovně může být jeho obsah vyjádřen takto:

*Algebraický součet proudů přetékajících do uzlu musí být v každém okamžiku nulový.*

Pokud jde o *II. Kirchhoffovo pravidlo*, je zřejmé, že na libovolnou smyčku v libovolně rozvětveném obvodu lze aplikovat stejný postup, který jsme použili v předchozí části tohoto článku k vyšetřování nerozvětveného obvodu. Dostali bychom výsledek:

*Součet napětí na všech odporech a kondenzátorech ve smyčce je v každém okamžiku roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce a elektromotorických napětí indukovaných ve všech cívkách podél smyčky.*

Rovnice (4.34) až (4.39), které vyjadřují toto tvrzení, je možné též považovat za vyjádření *II. Kirchhoffova pravidla* pro speciální případy uvažovaných nerozvětvených obvodů.

Při důsledné aplikaci přiblížení soustředěných parametrů můžeme zavést pojmy okamžitých napětí na jednotlivých prvcích obvodu, tj. na jednotlivých odporech, kapacitách a vlastních i vzájemných indukčnostech. Okamžitá hodnota napětí  $U_R(t)$  odporu  $R$  je zřejmě dána Ohmovým zákonem, okamžitá hodnota napětí  $U_C(t)$  na kondenzátoru  $C$  je dána vztahem (4.37). Tedy

$$U_R(t) = RI(t), \quad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}.$$

Okamžitou hodnotu napětí  $U_L(t)$  na indukčnosti  $L$  lze zřejmě definovat vztahem

$$U_L(t) = L \frac{dI(t)}{dt}. \quad (4.40)$$

Podle této definice  $U_L(t)$  představuje okamžitou hodnotu rozdílu potenciálu na svorkách indukčnosti. (Například pro indukčnost  $L$  v obvodu znázorněném na obr. 4.11b jde o rozdílný potenciálu mezi svorkami (2) a (3), který je kladný, jestliže proud tekoucí v naznačeném směru vzrůstá.)

Využitím uvedených pojmů lze rovnici (4.38) také vyjádřit ve tvaru

$$U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = \mathcal{E}(t) \quad (4.38b)$$

a *II. Kirchhoffovo pravidlo* slovně formulovat rovněž takto:

Součet napětí na všech odporech, kapacitách a indukčnostech zařazených do uzavřené smyčky je v každém okamžiku roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce.

Rozdíl mezi rovnicemi (4.38) a (4.38b) je ovšem jen formální. Obě mohou být převedeny na rovnici druhého řádu typu (4.39), v níž proud  $I(t)$  představuje neznámou hledanou funkci.

Viděli jsme, že zatímco aplikace Kirchhoffových pravidel na stacionární obvody vede obecně na lineární algebraické rovnice pro neznámé veličiny, v případě kvazistacionárních obvodů máme v podobné situaci co činit s lineárními diferenciálními rovnicemi (prvního či druhého řádu). Přesto jsou obecné metody řešení stacionárních a kvazistacionárních obvodů v mnohém podobné. (O obecných metodách řešení elektrických obvodů bude pojednáno v kapitole 8.) V následujících článcích tohoto oddílu probereme ještě některé speciální typy kvazistacionárních obvodů, důležité z praktického hlediska.

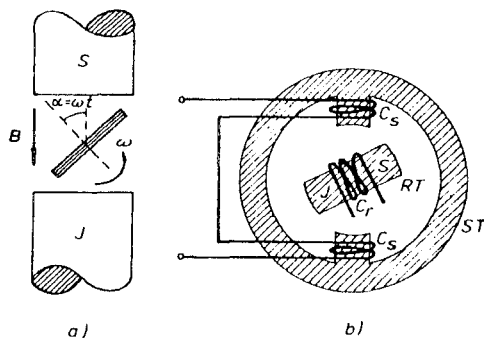
#### 4.2.2 Generace střídavého harmonického napětí, střídavé obvody

Zdrojem střídavého harmonického elektromotorického napětí nazýváme takové zařízení, které produkuje elektromotorické napětí, jehož časová závislost je dána vztahem

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.41)$$

v němž  $\mathcal{E}_0$  je amplituda napětí,  $\omega$  jeho úhlová frekvence a  $\varphi$  fázová konstanta. Probereme dva nejdůležitější principy, které se v technice ke generaci střídavých harmonických elektromotorických napětí užívají.

První způsob, užívaný zejména v energetice, pracuje na principu elektrického generátoru a využívá jevu elektromagnetické indukce ve vodičích pohybujících



Obr. 4.12 Generace střídavého napětí generátorem: a) princip činnosti, b) principiální uspořádání alternátoru.

se v magnetickém poli (srov. odst. 4.1.2b). Pro demonstraci principu činnosti uvažujme nejdříve rovinnou cívku o  $N$  závitěch rotující v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}$  konstantní úhlovou frekvencí  $\omega$  kolem osy kolmé k ose souměrnosti cívky a ke směru magnetického pole (viz obr. 4.12a). Magnetický tok  $\Phi$  průřezem cívky  $S$  bude záviset na čase podle vztahu

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BS \cos \omega t$$

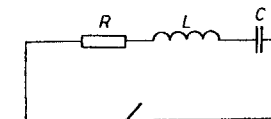
a v cívce se indukuje elektromotorické napětí

$$\mathcal{E}(t) = \omega BSN \sin \omega t. \quad (4.42)$$

Označením  $\mathcal{E}_0 = \omega BSN$  a vhodnou volbou fázové konstanty  $\varphi$  (tj. vhodnou volbou počátku odečítání času) je můžeme vyjádřit ve tvaru (4.41).

Z praktického hlediska je výhodnější konstrukce, kdy se střídavé elektromotorické napětí indukuje v nehybné cívce. Princip takového uspořádání, nazývaného *alternátor*, je uveden na obr. 4.12b. Sestává z tzv. *statoru ST* a *rotoru RT*. Stator je zhotoven z magneticky měkkého feromagnetika, na jehož pólových nástavcích tvořících plášť válcové dutiny je navinuta cívka  $C_s$  snímající indukované napětí. V dutině se pak otáčí magnet (nejčastěji elektromagnet buzený cívkou  $C_r$ ), který v magnetickém obvodu statoru budí střídavý magnetický tok. Vhodnou konstrukcí tvaru pólů lze zajistit, že se ve statorové cívce indukuje elektromotorické napětí, jehož průběh je s dostatečnou přesností dán vztahem (4.41).

V silnoproudé elektrotechnice se zpravidla užívají tzv. *vícefázové* (nejčastěji třífázové) *soustavy*, které spočívají ve vhodném propojení příslušného počtu zdrojů se synchronně proměnným a vzájemně fázově posunutým elektromotorickým napětím do jednoho systému ( $n$ -fázovou soustavu napětí lze například získat pomocí jediného  $2n$ -pólového alternátoru). Podrobněji se otázkami vícefázových soustav ani technickými náležitostmi konstrukce generátorů v této knize zabývat nebudeme a odkazujeme na doporučenou literaturu – např. [9].



Obr. 4.13 Schéma oscilačního obvodu.

Druhý způsob generace střídavého harmonického napětí využívá vlastních kmitů v obvodu s indukčností, odporem a kapacitou. Uvažujme obvod podle obr. 4.13 a předpokládejme, že ve výchozím okamžiku  $t = 0$ , kdy zapneme spínač, je kondenzátor  $C$  nabit na napětí  $U_{C0}$ . Po zapnutí spínače se kondenzátor počne vybíjet přes odpor  $R$  a indukčnost  $L$ , takže obvodem poteče proud  $I(t)$ . Protože

v obvodu nepůsobí žádné elektromotorické napětí, bude možné jej popsat rovnicemi (4.38) až (4.39), ve kterých položíme  $\mathcal{E}(t) = 0$ . Speciálně z (4.39) dostaneme pro proud  $I$  rovnici

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (4.43)$$

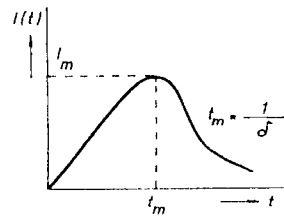
Její obecné řešení má tvar

$$I(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (4.44)$$

kde  $K_1, K_2$  jsou integrační konstanty a

$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - (4L)/C}}{2L}$$

jsou kořeny charakteristické kvadratické rovnice.



Obr. 4.14 Časová závislost proudu v aperiodickém stavu oscilačního obvodu.

Řešení (4.44) rovnice (4.43) má jak známo různý charakter v závislosti na hodnotě diskriminantu  $D = R^2 - (4L)/C$ . Pro  $D \geq 0$  jsou  $\alpha_1, \alpha_2$  reálné. Proud pak má průběh, který je kvalitativně zobrazen na obr. 4.14. Tento případ, který vyjadřuje tzv. *aperiodický stav* obvodu, nás však nyní nebude zajímat. Obrátíme pozornost ke zbylé možnosti  $D < 0$ . Zavedeme-li, jak je zvykem, reálné veličiny  $\delta = R/2L$ ,  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , dostaneme  $\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega_v$ . Pomocí nových integračních konstant  $K, \varphi$  můžeme pak řešení (4.44) psát ve tvaru

$$I(t) = K e^{-\delta t} \cos(\omega_v t + \varphi). \quad (4.45)$$

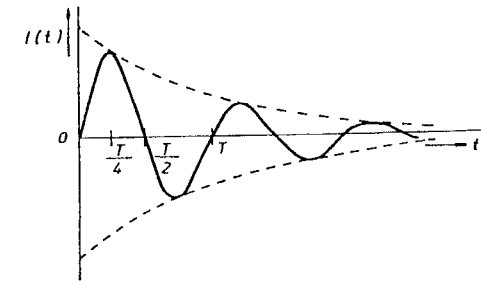
Výsledek (4.45) ukazuje, že proud v obvodu může mít charakter tlumených harmonických kmitů, které nazýváme *vlastními kmity obvodu*. Veličina  $\delta$  zřejmě charakterizuje rychlost jejich tlumení, a nazývá se proto *konstantou útlumu*; za dobu  $t = 1/\delta$  poklesne amplituda kmitů  $e$ -krát. Na hodnotě konstanty útlumu ovšem také závisí kruhová frekvence vlastních kmitů  $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

Uplatníme nyní v obecném řešení (4.45) předpokládané počáteční podmínky, které lze vyjádřit vztahy  $I(0) = 0$ ,  $U_{C,0} + L(dI/dt)_{t=0} = 0$ . Těmto počátečním

podmínkám vyhovuje například hodnota fázové konstanty  $\varphi = -\pi/2$ . Pro konstantu  $K$  dostaneme  $K = U_{C,0}/(\omega_v L)$ , takže z (4.45) obdržíme průběh proudu

$$I(t) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L} e^{-\delta t} \cos(\omega_v t - \pi/2) = \frac{U_{C,0}}{\omega_v L} e^{-\delta t} \sin \omega_v t, \quad (4.46)$$

kteřý je kvalitativně zobrazen na obr. 4.15. Pomocí tohoto vztahu je možné snadno kvalitativně diskutovat děje probíhající v obvodu. Kondenzátor, který je ve výchozím stavu nabitý na napětí  $U_{C,0}$ , se počne po zapojení spínače vybíjet a proud tekoucí obvodem rychle vzrůstá. S postupujícím vybíjením kondenzátoru klesá energie jeho elektrického pole a současně vzrůstá energie magnetického pole cívky. Po uplynutí čtvrtiny periody proud dosáhne maximální hodnoty. Kondenzátor je téměř vybitý a téměř všechna energie obvodu je soustředěna v magnetickém poli cívky. Jelikož je v tomto stavu  $dI/dt = 0$ , je napětí na cívce nulové. Od tohoto okamžiku počne proud klesat, čímž se v cívce indukuje elektromotorické napětí, které postupně nabíjí kondenzátor na opačnou polaritu. Po uplynutí poloviny periody je proud v obvodu nulový a všechna energie je opět soustředěna v elektrickém poli kondenzátoru. Kondenzátor se počne opět vybíjet a celý děj se opakuje.



Obr. 4.15 Tlumené kmitý v oscilačním obvodu.

Vlastní kmitý v obvodu jsou tedy podmíněny střídavou proměnou elektrického pole v magnetické a naopak. Současně ovšem dochází ke ztrátám v důsledku přeměny části energie v Jouleovo teplo, čímž postupně klesá amplituda kmitů. Tento pokles je samozřejmě tím pomalejší, čím menší je činitel tlumení  $\delta$ . V praxi užívaných obvodech je často možné dosáhnout stavu malého tlumení, kdy  $\delta \ll \omega_0$ . Vlastní kmitý pak mají kruhovou frekvenci  $\omega_v = \omega_0$  závislou jen na indukčnosti a kapacitě, která je dána vztahem

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (4.47)$$

jemuž někdy říkáme *Thomsonův vzorec*. Doba jejich trvání v obvodu může být mnohonásobně delší než perioda  $T$ .



Obvod  $R, L, C$  s malým tlumením, ve kterém mohou vznikat vlastní tlumené kmity, se nazývá *oscilačním obvodem*. Je možné doplnit takový obvod přidavným zařízením, které vhodným způsobem doplňuje ztráty energie, takže se v obvodu udržují trvale *netlumené kmity*. (Vhodným energeticky aktivním zařízením tohoto druhu může být například elektronka či tranzistor.) Obvod s netlumenými kmity může pak být například prostřednictvím vzájemné indukčnosti vázán s jinými obvody a může v nich budit harmonicky proměnné proudy. Z hlediska těchto sekundárních obvodů může být oscilační obvod považován za zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}(t)$ , které lze popsat vztahem (4.41).

Zdroje střídavého elektromotorického napětí harmonického průběhu představují patrně nejvíce užívaný typ zdrojů ve všech odvětvích elektrotechniky. Díky tomu mají také velký význam *střídavé obvody*. Rozumíme jimi libovolné spojení rezistorů, cívek a kondenzátorů, které je připojeno ke zdrojům střídavého elektromotorického napětí, nebo jsou v něm generovány střídavé proudy.

Střídavé obvody jsou speciálním případem kvazistacionárních obvodů. Platí pro ně tedy všechny zákonitosti odvozené v předchozím článku. Vzhledem k harmonickému průběhu elektromotorického napětí je však možné je vyjádřit v mnohem konkrétnějším a jednodušším tvaru. Tuto situaci budeme demonstrovat na jednoduchém, avšak dosti obecném a charakteristickém příkladu. Předpokládejme, že ke zdroji střídavého elektromotorického napětí (4.41) je připojena libovolná kombinace rezistorů, cívek a kondenzátorů, jejichž parametry jsou konstantní, nezávislé na protékajícím proudu (tj. vylučujeme např. cívky s feromagnetickými jádry). Z uvažovaného zdroje bude do obvodu dodáván obecně časově proměnný proud  $I(t)$ , pro který je možné užitím Kirchhoffových pravidel (viz čl. 4.2.1) sestavit příslušné diferenciální rovnice. Rozborem charakteru těchto rovnic (srov. článek 4.2.4) lze vždy ukázat, že za dostatečně dlouhou dobu po připojení zdroje bude mít proud  $I(t)$  protékající jednotlivými prvky harmonický průběh

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i). \quad (4.48)$$

Jeho amplituda  $I_0$  bude závislá jednak na amplitudě elektromotorického napětí, jednak na parametrech uvažovaného spojení a na frekvenci  $\omega$ . Podobný charakter bude mít okamžitá hodnota napětí na daném prvku

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u). \quad (4.49)$$

Pro poměr amplitudy napětí a proudu na daném prvku (či na uvažované kombinaci několika prvků) je možné vždy psát

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}. \quad (4.50)$$

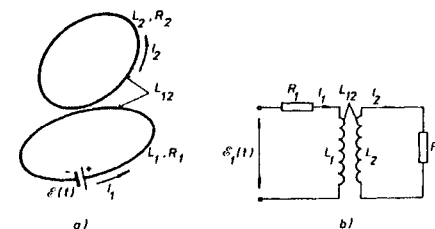
Veličina  $Z$  je pro uvažované spojení prvků (rezistorů, cívek, kondenzátorů) charakteristická, závisí obecně na frekvenci a nazývá se *impedancí* tohoto spojení.

Vztah (4.50) definující impedanci, je formálně shodný se vztahem (3.19) vyjadřujícím integrální tvar Ohmova zákona. Je proto možné ji považovat za veličinu v jistém smyslu analogickou odporu vodiče (její jednotkou je rovněž ohm). Je však nutné si uvědomit, že impedance ve smyslu vztahu (4.50) udává pouze relaci mezi amplitudami napětí a proudu. Souvislost mezi fázovými konstantami  $\varphi_i, \varphi_u$  je nutné určit z jiných parametrů obvodu.

Stav střídavého obvodu za dobu dostatečně dlouhou po zapnutí příslušných zdrojů elektromotorického napětí, kdy platí vztahy (4.48) až (4.50) a kdy je tedy možné zavést impedanci jednotlivých prvků, se nazývá *ustáleným stavem*. V opačném případě mluvíme o *stavu neustáleném*.<sup>33</sup> V článku 4.2.4 budou uvedeny příklady řešení střídavých obvodů v ustáleném i neustáleném stavu. V kapitole 8 pak bude podán systematický výklad metod řešení obecných střídavých obvodů v ustáleném stavu.

### 4.2.3 Indukčně vázané obvody, transformátor

Dvojice elektrických obvodů vázaných vzájemnou indukčností představuje další, v praxi velmi důležitý typ kvazistacionárních obvodů. Abychom poznali jejich vlastnosti, uvažujme nejdříve obecnou dvojici uzavřených vodičových smyček podle obr. 4.16a o vlastních indukčnostech  $L_1, L_2$  a odporech  $R_1, R_2$ . V první (primární) smyčce nechť působí obecně časově proměnný zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_1(t)$  a mezi oběma smyčkami nechť je vzájemná indukčnost  $L_{12}$ . V přiblížení soustředěných parametrů, diskutovaném v článku 4.2.1, může být vyšetřovaná soustava znázorněna schématem, jež vidíme na obr. 4.16b.



Obr. 4.16 a) indukčně vázané smyčky, b) schéma transformátoru.

Podle II. Kirchhoffova pravidla platí pro oba obvody rovnice

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} &= R_1 I_1, \\ -L_{12} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} &= R_2 I_2, \end{aligned} \quad (4.51)$$

<sup>33</sup> Jevy probíhající v obvodu v neustáleném stavu se někdy nazývají též *přechodovými jevy*.

ze kterých lze při známých počátečních podmínkách (a ovšem i všech parametrech obvodů) vypočítat časový průběh proudů  $I_1$  i  $I_2$ . Některé důležité závěry lze však z rovnic (4.51) získat i bez konkrétní znalosti průběhu  $\mathcal{E}_1(t)$ .

Všimněme si nejdříve situace, kdy je druhá (sekundární) smyčka rozpojena. Mezi konci jejích vodičů lze pak naměřit elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_{20} = L_{12}(dI_1/dt)$ . Bude-li odpor  $R_1$  dostatečně malý tak, že bude možné člen na pravé straně první rovnice (4.51) považovat přibližně za nulový, dostaneme

$$\frac{\mathcal{E}_1(t)}{\mathcal{E}_{20}(t)} \doteq \frac{L_1}{L_{12}}. \quad (4.52)$$

Velmi zajímavá je dále otázka, jak se proud sekundární smyčky projeví na chování smyčky primární. Tuto otázku je možné snadno a velmi názorně vyřešit ve speciální situaci, kdy je odpor  $R_2$  dostatečně malý tak, že můžeme v každém okamžiku pravou stranu druhé rovnice (4.51) přibližně položit rovnou nule. Platí pak

$$-L_{12} \frac{dI_1}{dt} \doteq L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

Po integraci (za předpokladu, že v čase  $t=0$ , kdy byl do primárního obvodu zapojen zdroj, byly oba proudy nulové) dostaneme mezi proudy  $I_1(t)$  a  $I_2(t)$  v libovolném okamžiku vztah

$$\frac{I_1(t)}{I_2(t)} \doteq -\frac{L_2}{L_{12}}. \quad (4.53)$$

Pomocí tohoto výsledku dostaneme z druhé rovnice (4.51)

$$-\frac{dI_2}{dt} = \frac{L_{12}}{L_2} \frac{dI_1}{dt} + \frac{R_2}{L_2} I_2 \doteq \frac{L_{12}}{L_2} \frac{dI_1}{dt} - \frac{L_{12}}{L_2^2} R_2 I_1$$

a po dosazení do rovnice první

$$\mathcal{E}_1(t) = L_1 \left( 1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) \frac{dI_1}{dt} + \left( R_1 + \frac{L_{12}^2}{L_2^2} R_2 \right) I_1. \quad (4.54)$$

Z výsledku (4.54) plynou dva důležité závěry. Za prvé srovnáním s rovnicí (4.35) a s dynamickým definičním vztahem vlastní indukčnosti (4.17) vidíme, že se primární smyčka chová tak, jako kdyby měla efektivní indukčnost

$$L_{1,ef} = L_1 \left( 1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \right). \quad (4.55)$$

Podobně jako pro libovolnou vlastní indukčnost musí i zde platit  $L_{1,ef} \geq 0$  (viz úloha Ú 4.5). Přítomnost sekundární uzavřené smyčky tedy zmenšuje efektivní indukčnost smyčky primární. Obvykle se zavádí činitel vazby  $k = |L_{12}| / \sqrt{L_1 L_2}$ . Lze tedy psát

$$L_{1,ef} = L_1(1 - k^2), \quad (4.56)$$

přičemž  $k \leq 1$ . V mezním případě  $k = 1$  je efektivní indukčnost primární smyčky nulová. Tento stav těsné vazby, kdy by oběma smyčkami protékal stejný magnetický tok, nelze ovšem ve skutečnosti dosáhnout; obě smyčky by se musely geometricky ztotožnit. Pro reálné obvody proto vždy platí  $k < 1$ ,  $|L_{12}| < \sqrt{L_1 L_2}$ . (srov. příklad 4.1.5d), i když hodnoty  $k$  blízké jedné může být vhodnou konstrukcí dosaženo.

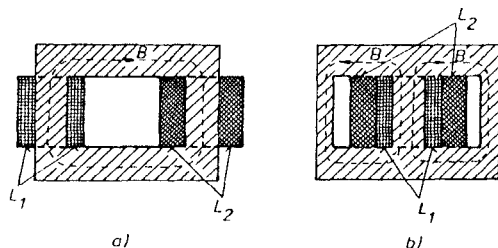
Ze srovnání výsledku (4.54) s rovnicí (4.35) pro osamocenou smyčku plyne i druhý závěr. Kromě zmenšení indukčnosti na efektivní hodnotu  $L_{1,ef}$  se přítomnost sekundárního obvodu projeví také vzrůstem efektivního odporu primárního obvodu o hodnotu  $(L_{12}^2/L_2^2)R_2$ . To odpovídá skutečnosti, že zdroj v primárním obvodu musí rovněž dodávat energii spotřebovanou při průchodu proudu sekundárním obvodem na Jouleovo teplo.

Soustava induktivně vázaných cívek konstruovaná pro různé obvody v jednotlivých odvětvích elektrotechniky se nazývá *transformátor*. Obecně může transformátor sestávat z více než dvou cívek s různými činiteli vzájemné vazby, v závislosti na účelu použití. Často je však žádoucí dosáhnout co nejtěsnější vazby; v ideálním případě  $k = 1$  mluvíme o *ideálním transformátoru*.

Pro dosažení maximální těsné vazby dvou cívek je nutné, aby plochami všech jejich závitů procházel společný magnetický tok. Relativně těsné vazby se například dosahuje mezi dvěma válcovými cívkami navinutými z tenkého vodiče těsně na společné kostře (viz 4.1.5e) nebo mezi podobně navinutými toroidními cívkami (srov. úlohu Ú 4.9). Vedle co nejtěsnější geometrie je možné činitele vazby zvýšit navinutím cívek na společné jádro zhotovené z materiálu o vysoké relativní permitivitě  $\mu_r \gg 1$  tak, aby tvořilo uzavřený magnetický obvod o co nejmenším magnetickém odporu (srov. čl. 3.5.5). Magnetický tok společný induktivně vázaným cívkám se pak uzavírá především tímto jádrem a těsná geometrie cívek přestává mít prvořadou důležitost. Na obrázku 4.17 jsou schematicky zobrazeny dvě nejužívanější konstrukce transformátorů. V případě obrázku 4.17a tvoří jádro jednoduchý magnetický obvod obdélníkového profilu, jímž se uzavírá magnetický tok. Primární a sekundární cívky jsou odděleně navinuty na protilehlých stranách jádra. U transformátoru podle obr. 4.17b jsou primární i sekundární cívky postupně navinuty na středním sloupku jádra. Společný magnetický tok procházející tímto sloupkem se pak uzavírá obvodem jádra, jak je na obrázku naznačeno.

Jádra transformátorů se zhotovují z magneticky uspořádaných feromagnetických či ferimagnetických materiálů (viz články 3.5.4 a 7.2.3). Vedle základního požadavku vysoké relativní permeability jsou na ně kladeny ještě požadavky další. Za prvé jde o to, že při změnách proudu v cívkách transformátoru se materiál jádra přemagnetovává, což je spojeno s přeměnou energie magnetického pole v teplo (srov. příklad 4.3.4b). Tyto procesy, označované jako *hysterezní ztráty*, jsou ovšem v transformátoru nežádoucí a je třeba je minimalizovat. Jádra transformátorů se tudíž zhotovují z magneticky měkkých materiálů s nízkým koeritivním polem.

Další faktor ovlivňující vlastnosti jádra transformátoru jsou tzv. *vířivé* (někdy též *Foucaultovy*) *proudy*. Tyto proudy jsou důsledkem zákona elektromagnetické indukce a indukují se v elektricky vodivém prostředí vždy, dochází-li v něm k časovým změnám magnetického pole.<sup>34</sup> V transformátorech se vířivé proudy projevují nežádoucím způsobem, je-li materiálem jádra elektricky vodivé kovové feromagnetikum. Elektricky vodivé jádro představuje totiž další vodivou smyčku induktivně vázanou s cívkami transformátoru. V důsledku indukovaných vířivých proudů vzniká v jádru Jouleovo teplo, pro něž je potřebná energie dodávána zdroji elektromotorického napětí působícími v obvodu transformátoru (srov. vztah (4.54)). Pro konstrukci jader je proto třeba volit materiály s co nejnižší elektrickou vodivostí a uspořádat geometrii způsobem, který by velikost vířivých proudů omezil. Klasickým materiálem je magneticky měkká ocel s příměsí křemíku, který snižuje její měrnou vodivost. Další omezení vířivých proudů se dosahuje tím, že se potřebné průřezy jádra skládá z tenkých, vzájemně elektricky izolovaných plechů.



Obr. 4.17 Nejužívanější typy transformátorových jader.

Pro ideální transformátor lze obecné závěry (4.52), (4.53) a (4.54) vyjádřit v konkrétnějším tvaru, který ovšem přibližně platí i pro reálné transformátory s těsnou vazbou  $k \approx 1$ . Situaci budeme demonstrovat na jednoduchém příkladu transformátoru, jehož primární a sekundární cívky mají postupně  $N_1$  a  $N_2$  závitů a který je zapojen do obvodu podle obr. 4.16b. (Předpokládáme přitom, že odpory  $R_1$  a  $R_2$  reprezentují celkové odpory primárního a sekundárního obvodu.) Za diskutovaných podmínek ideální těsné vazby platí zřejmě  $L_1/L_2 = N_1^2/N_2^2$  (srov. příklad 4.1.5e a úlohu Ú 4.9), odkud s ohledem na relaci  $|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}$  máme vztahy

$$\frac{L_1}{|L_{12}|} = \frac{|L_{12}|}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (4.57)$$

<sup>34</sup> Vířivé proudy se indukují též ve vodivém tělese pohybujícím se v magnetickém poli a jejich existence se projevuje v tlumení tohoto pohybu. Uvedený jev se využívá například při konstrukci měřicích přístrojů – srov. příklad 4.3.4d.

Jejich dosazením do (4.52) a (4.53) dostáváme známé výsledky

$$\left| \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} \right| \doteq \frac{N_1}{N_2}, \quad (4.58)$$

$$\left| \frac{I_1}{I_2} \right| \doteq \frac{N_2}{N_1}. \quad (4.59)$$

Výraz (4.58) říká, že v transformátoru s rozpojeným sekundárem (*transformátor naprázdno*) se velikosti elektromotorického napětí transformují v poměru počtu závitů primáru k sekundáru. Proudů se naopak v transformátoru se zanedbatelným odporem sekundáru (*transformátor nakrátko*) podle (4.59) transformují v opačném poměru. Po dosazení (4.57) do (4.54) dostaneme dále

$$\mathcal{E}_1(t) = L_1 \left( 1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) \frac{dI_1}{dt} + \left( R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 \right) I_1. \quad (4.60)$$

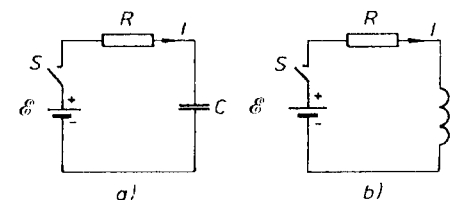
Sekundární odpor  $R_2$  se tedy do primárního obvodu transformuje v poměru čtverce počtu závitů. Z rovnic (4.60) rovněž plyne, že efektivní indukčnost ideálního transformátoru je nulová. Transformátor se tedy vůči zdroji  $\mathcal{E}_1(t)$  chová jako obvod s čistě ohmickým odporem hodnoty  $R_1 + (N_1/N_2)^2 R_2$ .

#### 4.2.4 Řešené příklady

##### a) Neustálený stav v obvodech s indukčností a kapacitou

Vyšetřme poměry v obvodech s kapacitou a indukčností, v nichž působí časově neproměnné zdroje elektromotorického napětí (viz obr. 4.18). Odpor  $R$  představuje celkový odpor působící v obvodech, včetně vnitřního odporu zdroje. Budeme předpokládat, že spínač  $S$  je sepnut v čase  $t = 0$ , takže počínaje tímto okamžikem začne v obvodu působit zdroj časově neproměnného elektromotorického napětí.

V případě obvodu s odporem a kapacitou (obr. 4.18a) dostaneme položením  $L = 0$  v (4.39) pro proud  $I(t)$  rovnici



Obr. 4.18 K řešení neustáleného stavu v obvodech s kapacitou a indukčností: a) sériový obvod s odporem a kapacitou, b) sériový obvod s odporem a indukčností.

$$R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0. \quad (4.61)$$

Její obecný integrál má tvar

$$I(t) = K e^{-(t/RC)}. \quad (4.62)$$

Hodnotu integrační konstanty  $K$  určíme z počátečních podmínek. Při zapnutí obvodu má kondenzátor nulový náboj, takže podle (4.39) musí platit  $I(0)R = \mathcal{E}$ . Dosazením do (4.62) dostaneme hledané partikulární řešení

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-(t/RC)}. \quad (4.63)$$

Proud tekoucí obvodem nabíjí kondenzátor  $C$ . Pro okamžitou hodnotu napětí  $U_C$  na kondenzátoru dostaneme z (4.37) podmínku  $I(t)R + U_C = \mathcal{E}$ , z níž po dosažení proudu podle (4.63) vyplyne

$$U_C = \mathcal{E} (1 - e^{-(t/RC)}). \quad (4.64)$$

Po uplynutí dostatečně dlouhé doby je kondenzátor nabit na napětí  $U_{C,\infty} = \mathcal{E}$  a obvodem již dále neteče proud. Vypnutí spínače pak již nemá vliv na poměry v obvodu; kondenzátor zůstane trvale nabit. V jeho dielektriku zůstane elektrostatické pole o energii  $W = (1/2)CU_{C,\infty}^2$ , která byla dodána zdrojem elektromotorického napětí.

Pro obvod znázorněný na obr. 4.18b platí rovnice (4.35). Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu. Její obecné řešení je dáno součtem libovolného partikulárního řešení a obecného řešení příslušné homogenní rovnice. Jelikož proud  $I_\infty = \mathcal{E}/R$  je triviálním řešením (4.35), lze obecné řešení psát ve tvaru

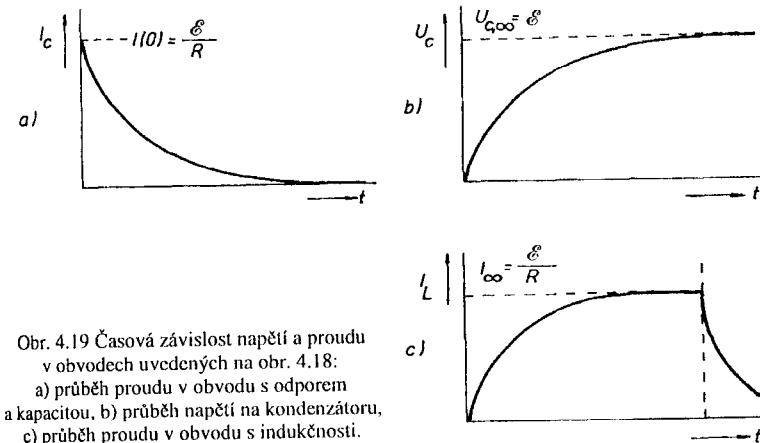
$$I(t) = K e^{-(R/L)t} + \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (4.65)$$

Bezprostředně po zapnutí spínače bude mít proud obvodem nepatrnou hodnotu, neboť bude platit  $L(dI/dt) \doteq \mathcal{E}$ . Hodnotu integrační konstanty lze tedy určit užitím počátečních podmínek  $I(0) = 0$  pro  $t = 0$ . Dostaneme pak hledané partikulární řešení

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-(R/L)t}). \quad (4.66)$$

Je z něj vidět, že proud v obvodu exponenciálně narůstá a asymptoticky se blíží k ustálené hodnotě  $I_\infty = \mathcal{E}/R$ . Na tuto ustálenou hodnotu proudu nemá již indukčnost  $L$  žádný vliv.

Při vypnutí spínače nastanou v obvodu složité poměry, neboť v indukčnosti  $L$  zaniká magnetické pole a jeho energie se musí nějakým způsobem zužitkovat. Nejčastěji nastává taková situace, že změnami proudu se v indukčnosti  $L$  indukuje elektromotorické napětí dostačující k tomu, aby mezi kontakty spínače zapálil jiskrový výboj. Tento výboj způsobí, že obvodem může téci proud ještě určitou dobu po vypnutí spínače a energie magnetického pole se částečně vyzáří a částečně přemění v Jouleovo teplo.



Obr. 4.19 Časová závislost napětí a proudu v obvodech uvedených na obr. 4.18: a) průběh proudu v obvodu s odporem a kapacitou, b) průběh napětí na kondenzátoru, c) průběh proudu v obvodu s indukčností.

Odpor výbojové dráhy můžeme schematicky popsat zařazením odporu  $R' \gg R$  paralelně ke kontaktům spínače. Proud obvodem po vypnutí spínače bude potom rovněž popsán obecným řešením (4.65), v němž však je odpor  $R$  nahrazen odporem  $R'$ . Po dosažení počátečních podmínek  $I = \mathcal{E}/R$  pro  $t = 0$  a po zanedbání členu  $\mathcal{E}/R'$  dostaneme pro průběh proudu

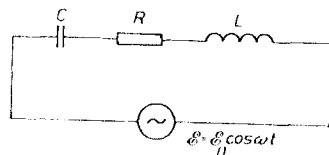
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-(R'/L)t}. \quad (4.67)$$

Vidíme tedy, že proud po vypnutí spínače exponenciálně klesá. Na obrázku 4.19 jsou pro ilustraci uvedeny grafické závislosti vypočítaných veličin. Obrázek 4.19a zobrazuje proud obvodem s kapacitou, obr. 4.19b znázorňuje průběh napětí  $U_C$  na kondenzátoru a konečně na obr. 4.19c vidíme průběh proudu v obvodu s indukčností.

#### b) Sériový rezonanční obvod

Vyšetřme vlastnosti sériového spojení odporu  $R$ , indukčnosti  $L$  a kapacity  $C$ , které je připojeno k ideálnímu zdroji střídavého elektromotorického napětí frek-

vence  $\omega$ , jehož okamžitá hodnota je dána vztahem (4.41), ve kterém jsme pro zjednodušení položili  $\varphi = 0$ . (viz obr. 4.20).



Obr. 4.20 Schéma sériového rezonančního obvodu.

Aplikací II. Kirchhoffova pravidla dostaneme pro vyšetřovaný obvod rovnici, kterou lze převést na lineární diferenciální rovnici druhého řádu typu (4.39), v níž je neznámou veličinou proud tekoucí obvodem

$$L \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R \frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{C} = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}. \quad (4.68)$$

Obecné řešení této rovnice lze, jak víme, vyjádřit jako sumu partikulárního řešení celé rovnice (4.68) a obecného řešení příslušné homogenní rovnice, tj. rovnice typu (4.43), které má obecný tvar, viz (4.44),

$$I(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Konkrétní poměry v obvodu závisí jednak na charakteru kořenů  $\alpha_1, \alpha_2$  charakteristické kvadratické rovnice a jednak na hodnotách integračních konstant  $K_1, K_2$ , jež jsou dány počátečními podmínkami. Příspěvek obecného integrálu (4.44) homogenní rovnice k celkovému proudu v obvodu závisí tedy mimo jiné na tom, ve kterém bodě periody elektromotorického napětí je zdroj k obvodu připojen.

Z diskuse vlastností řešení (4.44) provedené v článku 4.2.2 však plyne, že bez ohledu na konkrétní hodnoty parametrů obvodu či na hodnoty počátečních podmínek se jeho hodnota asymptoticky blíží k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Po dostatečně dlouhé době od zapnutí zdroje můžeme příspěvek obecného integrálu homogenní rovnice k celkovému proudu zanedbat. Obecný integrál homogenní rovnice ovlivňuje tedy proud jen v *neustáleném stavu* a nebudeme se jím dále zabývat.

Ustálený stav obvodu je tudíž určen jen partikulárním řešením celé nehomogenní rovnice (4.68). Je přirozené předpokládat, že po dostatečně dlouhé době od zapnutí zdroje bude charakter časové závislosti proudu v obvodu určen jen charakterem časové závislosti elektromotorického napětí. Partikulární řešení rovnice (4.68) budeme tedy hledat ve tvaru

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i), \quad (4.69)$$

přičemž hodnoty parametrů  $I_0$  a  $\varphi_i$ , určíme z požadavku, aby toto řešení rovnici (4.68) vyhovovalo. Po provedení příslušných derivací a dosazení do (4.68) dostaneme podmínku

$$I_0 \left[ \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \varphi_i - R \sin \varphi_i \right] \cos \omega t + \\ + \left[ I_0 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \varphi_i - R I_0 \cos \varphi_i + \mathcal{E}_0 \right] \sin \omega t = 0. \quad (4.70)$$

Má-li být tato podmínka splněna v libovolném okamžiku, musí být koeficienty u  $\cos \omega t$  a  $\sin \omega t$  rovny nule. Tedy

$$\left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right) \cos \varphi_i - R \sin \varphi_i = 0, \quad (4.71)$$

$$I_0 \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \sin \varphi_i - R I_0 \cos \varphi_i + \mathcal{E}_0 = 0,$$

což jsou rovnice pro hledané parametry  $\varphi_i$  a  $I_0$ . Z první rovnice (4.71) dostaneme pro  $\varphi_i$

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R} \quad (4.72)$$

a pro  $I_0$  platí

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \varphi_i \quad (4.73)$$

nebo (s využitím identity  $\cos \varphi_i = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_i)^{-1/2}$ ) také

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (4.74)$$

Srovnáním s definičním vztahem (4.50) dostáváme pro impedanci sériového spojení odporu, indukčnosti a kapacity

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}. \quad (4.75)$$

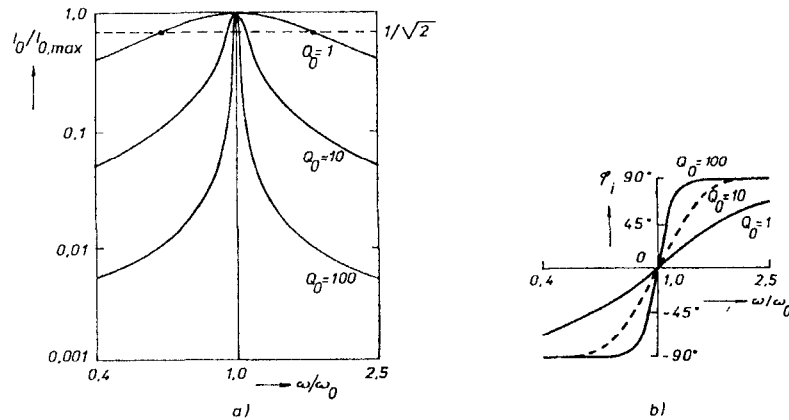
Z výsledku (4.75) vidíme, že impedance, a tedy i amplituda proudu je nemožná funkcí frekvence  $\omega$ . Impedance má minimální hodnotu  $Z_{\min} = R$ , platí-li  $\omega L = 1/\omega C$ , tj. je-li frekvence zdroje  $\omega$  rovna frekvenci  $\omega_0$  podle vztahu (4.47). Při této frekvenci má amplituda proudu maximální možnou hodnotu

$$I_{0, \max} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (4.76)$$

Právě vyšetřovaný obvod (viz obr. 4.20) se nazývá *sériovým rezonančním obvodem*. Závislost amplitudy proudu na frekvenci zdroje se nazývá *rezonanční křivkou obvodu*. V případě, že pro frekvenci zdroje platí (4.47)

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

říkáme, že obvod je v rezonanci.



Obr. 4.21 Rezananční křivky sériového rezonančního obvodu: a) redukovaná frekvenční závislost amplitudy napětí a proudu, b) redukovaná frekvenční závislost fázového úhlu.

Na obrázku 4.21 jsou uvedeny příklady tzv. *redukované rezonanční křivky*, která představuje závislost  $I_0/I_{0, \max}$  na  $\omega/\omega_0$ . Důležitým pojmem je tzv. *pološířka rezonanční křivky*  $\Delta\omega$  definovaná jako absolutní hodnota rozdílu frekvencí  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , při nichž má proud hodnotu  $I_0 = I_{0, \max}/\sqrt{2}$  (viz obr. 4.21a). Pro frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$  zřejmě platí

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = R, \quad (4.77)$$

$$\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L = R,$$

takže

$$\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (4.78)$$

Sečtením obou vztahů (4.77) dostaneme dále pro šířku rezonanční křivky výsledek

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}. \quad (4.79)$$

V relativní míře pak platí

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q_0}. \quad (4.80)$$

Veličina  $Q_0$  charakterizující relativní šířku rezonanční křivky se nazývá (*vlastním*) *činitelem jakosti obvodu*.

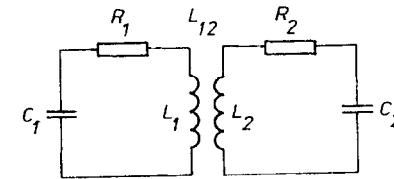
Pro obvod v rezonanci platí podle (4.72)  $\varphi_i = 0$ . Se vzdalováním od rezonance se konstanta  $\varphi_i$ , charakterizující fázový posuv proudu vůči elektromotorickému napětí zdroje, blíží hodnotám  $\pm\pi/2$ . Obrázek 4.21b demonstruje tuto závislost pro obvody o různém činitele jakosti.

### c) Vlastní kmitý indukčně vázaných oscilačních obvodů

Uvažme dvojici obvodů s indukčností, odporem a kapacitou, vázané vzájemnou indukčností  $L_{12}$  (viz obr. 4.22). Pro vyšetření charakteru vlastních kmitů těchto obvodů musíme řešit soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad (4.81)$$

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{I_2}{C_2} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt},$$



Obr. 4.22 Schéma indukčně vázaných rezonančních obvodů.

kterou dostaneme použitím II. Kirchhoffova pravidla. Pro jednoduchost se omezíme na dvojici identických obvodů s nulovým tlumením, tj. položíme  $L_1 = L_2 = L$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = 0$ . Místo (4.81) proto máme

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \omega_0^2 I_1 = -\frac{L_{12}}{L} \frac{dI_2}{dt}, \quad (4.82)$$

$$\frac{d^2 I_2}{dt^2} + \omega_0^2 I_2 = -\frac{L_{12}}{L} \frac{dI_1}{dt},$$

kde  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Zavedeme-li veličiny  $I^{(+)} = I_1 + I_2$ ,  $I^{(-)} = I_1 - I_2$ , dostaneme sečtením a odečtením posledních rovnic

$$\frac{d^2 I^{(+)}}{dt^2} + \omega_1^2 I^{(+)} = 0, \quad \frac{d^2 I^{(-)}}{dt^2} + \omega_2^2 I^{(-)} = 0, \quad (4.83)$$

v nichž jsme označili (srov. čl. 4.2.3)

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \frac{L_{1,2}}{L}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}. \quad (4.84)$$

Obecným řešením těchto rovnic je zřejmě

$$I^{(+)} = K_1^{(+)} e^{i\omega_1 t} + K_2^{(+)} e^{-i\omega_1 t}, \quad I^{(-)} = K_1^{(-)} e^{i\omega_2 t} + K_2^{(-)} e^{-i\omega_2 t}. \quad (4.85)$$

V obvodech existují tedy současně kmity o dvou frekvencích  $\omega_1$  a  $\omega_2$  daných vztahem (4.84).

Vázané oscilační obvody tvoří elektrickou analogii vázaných mechanických oscilátorů, neboť obě soustavy jsou popsány rovnicemi stejného typu. V elektrotechnice se obou prvků, i jejich vzájemné kombinace, hojně využívá především ke konstrukci frekvenčních filtrů.

## 4.3 Energie kvazistacionárního pole

### 4.3.1 Zákon zachování energie v kvazistacionárních soustavách

Dříve než přistoupíme k vlastnímu výkladu dané problematiky, krátce zrekapitulujeme, co bylo o energii vyloženo v předchozích kapitolách. V kapitole I byla věnována značná pozornost energii jednotlivých typů elektrostatických soustav (viz čl. 1.1.5, 1.2.8, 1.4.6 a 1.5.5). Nejdůležitější diskutovanou problematikou byly různé formy vyjádření energie elektrostatického pole, přičemž jsme tímto pojmem rozuměli záporně vzatou práci, kterou musely vykonat vnější síly při vytváření konečné konfigurace dané elektrostatické soustavy. Důležitý byl rovněž předpoklad, že veškerá uvedená práce byla vynaložena na překonání elektrostatických sil mezi náboji. Tyto síly pak mohou při pohybu nábojů samy konat práci na vrub energie elektrostatického pole; v elektrostatickém stavu, kdy jsou všechny náboje v klidu, je však energie elektrostatického pole konstanta a elektrostatické pole žádnou práci nekoná.

V oddílu 3.2 byly uvedené pojmy zobecněny pro případ stacionárního elektrického pole. Díky tomu, že stacionární elektrické pole je popsáno formálně totožnými rovnicemi jako pole elektrostatické, je energie stacionárního elektrického pole rovněž konstantní a může být vyšetřována analogickým

způsobem (viz článek 3.2.5). Kvalitativně novou skutečností je však platnost Jouleova zákona, který vyjadřuje zákon zachování energie pro stacionární pole ve vodiči. Stacionární elektrické pole ve vodiči může být trvale udržováno jen působením pole vtíštěných sil, které trvale konají práci, jež se spojitě mění v Jouleovo teplo. V následujících oddílech kapitoly 3, ve kterých byly probírány vlastnosti stacionárního magnetického pole, nebylo nic řečeno o jeho energii. Důvodem tohoto rozdílného postupu je skutečnost, že ve stacionárním přiblížení není možné vzít v úvahu jev elektromagnetické indukce, jehož započtení umožňuje nový, obecnější pohled na řešenou problematiku. Výklad vlastností energie kvazistacionárního pole bude naším úkolem tohoto oddílu. Zákonitosti platné pro energii stacionárního magnetického pole vyplynou ze získaných výsledků jako speciální případ pro časově nezávislé magnetické pole.

Energetickou bilanci kvazistacionární soustavy vyšetříme nejdříve na příkladu obvodu (smyčky) sestávajícího ze sériového spojení indukčnosti  $L$ , kapacity  $C$  a odporu  $R_c$ , ve kterém působí zdroj časově proměnného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}(t)$  (viz obr. 4.11). Budeme sledovat děje v tomto obvodu, které nastanou ve velmi krátkém časovém intervalu  $dt$ , ve kterém proud  $I(t)$  tekoucí obvodem přenese libovolným průřezem vodiče náboj  $dQ = I(t)dt$ . Vynásobením rovnice (4.38) tímto nábojem dostaneme

$$I(t)d\Psi + U_C dQ + R_c I^2(t) = \mathcal{E}(t)I(t)dt. \quad (4.86)$$

Platnost získaného výsledku jako celku je nepochybná, neboť rovnice (4.86) je důsledkem obecných zákonitostí platných pro kvazistacionární soustavu. Otázkou však zůstává fyzikální interpretace jednotlivých členů, která může být určena jen na základě experimentu. Tato interpretace musí být ovšem konzistentní s dříve vyloženými zákonitostmi pro elektrostatické a elektrické stacionární pole, jež můžeme chápat jako speciální případy pole kvazistacionárního.

Člen  $\mathcal{E}(t)I(t)dt$  na pravé straně je totožný s výrazem udávajícím práci dodanou do stacionárního obvodu vtíštěnými silami v časovém intervalu  $dt$  (srov. čl. 3.2.5). Experiment dále ukazuje, že platnost vztahů pro práci vtíštěných sil, uvedených v citovaném článku, zůstává zachována i pro kvazistacionární soustavu; výraz

$$N_z(t) = \mathcal{E}(t)I(t) \quad (4.87)$$

tedy představuje okamžitý výkon dodávaný zdrojem elektromotorického napětí (vtíštěnými silami) do kvazistacionárního obvodu. Podobná shoda je i u posledního členu na levé straně; výraz  $R_c I^2(t)$  podle (3.45) vyjadřuje okamžitý výkon přeměňovaný ve vodičích obvodu na Jouleovo teplo.

Další shodu s dříve vyloženými zákonitostmi představuje i druhý člen  $U_C dQ$  na levé straně, který je podle článku 1.4.6 totožný s výrazem reprezentujícím

změnu energie elektrostatického pole kondenzátoru, spojenou se změnou jeho náboje  $dQ$ . Tato shoda ovšem nepřekvapuje, neboť elektrostatické, elektrické stacionární i kvazistacionární pole je popsáno formálně shodnými rovnicemi. Veškerá dosavadní experimentální zkušenost dále potvrzuje, že (podobně jako v případě stacionárního elektrického pole) i pro vyjádření energie kvazistacionárního pole mohou být použity všechny postupy vyložené v člancích 1.2.8, 1.4.6 a 1.5.5.

Konečně zbývající první člen na levé straně (4.86) nemá v dosavadním výkladu obdobu. Je přirozené předpokládat, že reprezentuje energii  $dW_m$  potřebnou ke změně magnetického toku  $d\Psi$ . Tedy

$$dW_m = I d\Psi. \quad (4.88)$$

Experiment tento předpoklad plně potvrzuje. V následujícím článku budou podrobněji studovány procesy související s touto energií.

Dosud vyložená fakta umožňují formulovat konkrétní tvar zákona zachování energie pro kvazistacionární elektromagnetickou soustavu:

*Energie dodávaná polem vtištěných sil se mění jednak na Jouleovo teplo, jednak je vynakládána na změny elektrického a magnetického pole.*

Právě formulovaná věta o energii kvazistacionární soustavy a vzorec (4.88) mohou být využity pro vyjádření energie magnetického pole. V obecné formě je však tato problematika dosti složitá, neboť integrace vztahu (4.88) je možná jen při znalosti vlastností prostředí, v němž se pole nachází. Jednoduchá je situace pro lineární prostředí, kdy lze využít vztah (4.14). Po integraci diferenciálu (4.88) lze získat vzorec pro energii  $W_m$  magnetického pole buzeného smyčkou (zhotovenou z vodiče o malém průřezu) o vlastní indukčnosti  $L$ , již protéká proud  $I$  vytvářející celkový magnetický tok  $\Psi$ , viz (4.91),

$$W_m = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2.$$

Postup integrace i získaný výsledek je analogií vzorce (1.208) pro elektrostatickou energii nabitého vodiče. Podobnou analogií (a to opět v postupu i výsledku) je možnost vyjádřit energii magnetického pole v lineárním prostředí objemovým integrálem typu (1.266) z objemové hustoty energie, viz (4.100),

$$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2},$$

kteřá má i v kvazistacionární soustavě jen formální význam.

V následujícím článku je výraz (4.88) zobecněn pro libovolný počet smyček a problematika vyjádření energie magnetického pole (včetně odvození vztahů (4.91) a (4.100)) je diskutována v relativně obecné formě.

### 4.3.2 Obecné vyjádření energie magnetického pole

Postup použitý v předchozím článku lze jednoduše zobecnit. Uvažujme soustavu  $N$  smyček tvořených vodiči zanedbatelného průřezu protékány proudy  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . Energie  $\delta W_m$  potřebná ke změně celkových magnetických toků  $\delta \Psi_1, \delta \Psi_2, \dots, \delta \Psi_N$  jednotlivými smyčkami je podle předchozího článku zřejmě dána vztahem

$$\delta W_m = \sum_{i=1}^N I_i \delta \Psi_i. \quad (4.89)$$

Získaný výsledek představuje základní vztah pro výpočet energie magnetického pole. Je však třeba si na tomto místě uvědomit, že veškerá energie  $\delta W_m$  nemusí vždy reprezentovat energii vytvořeného magnetického pole, která může být soustavou navracena při jeho zrušení. V závislosti na konkrétních vlastnostech daného hmotného prostředí může být část energie  $\delta W_m$  spotřebována na nevratné procesy (především na přeměnu v teplo) spojené se změnou magnetizace látek. Procesy tohoto druhu se uplatňují především v nelineárních magnetikách jevících hysterezi (například ve feromagnetikách); konkrétní příklad takového chování bude vyšetřen v 4.3.4b.

V případě, kdy je celý prostor vyplněn lineárním prostředím, může být vztah (4.89) jednoduše použit k vyjádření energie magnetického pole. Označíme-li vlastní indukčnosti jednotlivých smyček  $L_1, L_2, \dots, L_N$ ,  $L_{ik}$  vzájemnou indukčnost mezi jejich libovolnou dvojicí a předpokládáme-li, že tyto indukčnosti nezávisí na protékajících proudech smyčkami, můžeme vztah (4.89) jednoduše integrovat. Pro integraci lze použít stejný postup, který byl použit v článku 1.4.6 pro získání výrazu (1.209). Integrujeme-li v mezích od nuly do konečných hodnot proudů  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , dostaneme pro energii magnetického pole

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Psi_i \quad (4.90a)$$

nebo, vyjádříme-li celkové magnetické toky jednotlivými smyčkami pomocí (4.16),

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k. \quad (4.90b)$$

Speciálně pro jedinou smyčku platí

$$W_m = \frac{1}{2} I \Psi = \frac{1}{2} L I^2. \quad (4.91)$$



Vztahy (4.90) představují analogii výrazu (1.209) pro energii elektrostatického pole soustavy vodičů. Podobně jako byla tato elektrostatická soustava (při dané geometrické konfiguraci) zadána potenciály a náboji jednotlivých vodičů, je naše magnetická soustava (při dané geometrii smyček) zadána jejich proudy a celkovými magnetickými toky. Hodnoty těchto toků mají však dobrý smysl jen tehdy, jsou-li všechny smyčky tvořeny vodiči zanedbatelného průřezu. Není-li tato podmínka splněna, nelze výrazy (4.88) až (4.91) použít a pro vyjádření energie je třeba volit jiný postup, který nyní naznačíme.

Magnetický tok  $\Psi_i$   $i$ -tou smyčkou lze podle (4.20) vyjádřit pomocí vektorového potenciálu

$$\Psi_i = \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.92)$$

příčemž naznačená integrace je brána přes celý obvod  $l_i$  smyčky. Podobně proud  $I_i$  můžeme vyjádřit pomocí proudové hustoty ve tvaru plošného integrálu typu (3.5)

$$I_i = \int_{\sigma_i} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (4.93)$$

příčemž naznačená integrace je uvažována přes libovolný průřez  $\sigma_i$  vodiče smyčky. Po dosazení do (4.89) můžeme energii  $\delta W_m$  vyjádřit ve tvaru

$$\delta W_m = \sum_i \int_{\sigma_i} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \oint_{l_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \int_{\sigma_i} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \oint_{l_i} \delta \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}.$$

Uvědomíme-li si, že platí  $dV = d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{l}$ , kde  $dV$  je element objemu vodiče, je zřejmé, že dvojí integraci v posledním výrazu, přes obvody a průřezy jednotlivých vodičů, lze nahradit jediným objemovým integrálem přes celý objem vodičů  $V_0$ . Aníž bychom se zabývali matematickou stránkou této operace, která je podrobněji popsána například v [6], můžeme výsledek napsat ve tvaru

$$\delta W_m = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{j} \cdot \delta \mathbf{A} dV. \quad (4.94)$$

Pro případ lineárního prostředí, kdy je vektorový potenciál  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  úměrný proudu, lze jednoduše provést integraci (4.94) a vypočítat energii magnetického pole. Integrace v mezích od nuly do konečného rozdělení proudu dá pro tuto energii výsledek

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (4.95)$$

Vztah (4.94), popř. (4.95), je alternativní k (4.89), popř. (4.90), pro vyjádření energie  $\delta W_m$ , popř.  $W_m$ . Je zřejmé, že ve volbě oboru integrace v (4.94) a (4.95) existuje značná libovůle. Vzhledem k tomu, že proudová hustota  $\mathbf{j}$  je nulová mimo vodiče uvažovaných proudových smyček, může být obor integrace  $V_0$  nahrazen libovolným objemem  $V$  obsahujícím celý objem vodičů, aniž se změni hodnoty integrálů.

Třetí obecnou možností je vyjádření energie magnetického pole pomocí vektorů magnetické indukce a intenzity magnetického pole. Východiskem pro toto vyjádření může být vztah (4.94), ve kterém proudovou hustotu  $\mathbf{j}$  nahradíme  $\text{rot } \mathbf{H}$  podle Ampèrova zákona (3.138). Integrovanou funkci  $\delta \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$  je pak možné dále upravit využitím identit vektorové analýzy. Podle (D 1.55) platí

$$\delta \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{rot}(\delta \mathbf{A}) + \text{div}(\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}),$$

odkud po záměně pořadí operací rotace a diferencování dostaneme

$$\delta \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} + \text{div}(\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}).$$

Energie  $\delta W_m$  může být tedy vyjádřena ve tvaru

$$\delta W_m = \int_V (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}) dV + \int_V \text{div}(\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) dV, \quad (4.96)$$

příčemž ve smyslu uvedené poznámky může být obor integrace  $V$  zvolen libovolně za předpokladu, že obsahuje objem  $V_0$  všech vodivých smyček uvažované soustavy. Tato libovůle ve volbě oboru integrace není již ovšem tak průhledná jako v případě samotného vztahu (4.94), neboť intenzita magnetického pole i magnetická indukce jsou obecně nenulové i v bodech s nulovou hustotou proudu. Z použitého postupu však vyplývá, že se změnou oboru integrace se změni jen podíl jednotlivých členů z pravé strany (4.96) na výsledné hodnotě  $\delta W_m$ . Sama tato hodnota je však na volbě  $V$  nezávislá.

Uvedenou skutečnost je možné využít ke zjednodušení (4.96), rozšíříme-li obor integrace na celý prostor. Použijeme-li totiž Gaussovu větu, můžeme druhý člen na pravé straně (4.96) převést na plošný integrál přes plochu  $S$  ohraničující objem  $V$ , který, jak víme, musí obsahovat všechny vodiče uvažované soustavy. Dostaneme tak

$$\delta W_m = \int_V (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}) dV + \oint_S (\mathbf{H} \times \delta \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.97)$$

Při rozšíření oboru integrace do nekonečna,  $V \rightarrow V_\infty$ , hodnota plošného integrálu klesne na nulu, neboť integrovaná funkce s  $r \rightarrow 0$  klesá jako  $r^{-3}$ , zatímco plocha  $S$  vzrůstá jen jako  $r^2$ . Celkem tedy platí

$$\delta W_m = \int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}) dV. \quad (4.98)$$

Získaný výsledek představuje vedle (4.89) a (4.94) další možnost obecného vyjádření přírůstku energie  $\delta W_m$  souvisejícího s odpovídající změnou magnetického pole. Jsou-li známy magnetické vlastnosti prostředí vyplňujícího prostor, je možné provést integraci (4.98) od počátečního nulového pole do jeho konečné hodnoty. Pro ideální (lineární) magneticky měkké prostředí popsané permeabilitou  $\mu$  dostaneme

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{V_m} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV. \quad (4.99)$$

Vztah (4.98) je analogický s výrazem (1.265) pro elektrostatické pole a podobně vztah (4.99) je analogický s (1.266). Je tedy rovněž možné v analogii s (1.267) chápat veličinu

$$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2} \quad (4.100)$$

jako objemovou hustotu energie magnetického pole. Avšak i v kvazistacionárním přiblížení platí o fyzikálním významu této veličiny totéž, co bylo o významu hustoty energie elektrostatického pole řečeno v kapitole I (srov. články 1.2.8, 1.4.6 a 1.5.5). Fyzikální význam má jen celková energie  $W_m$  a je lhostejné, kterým z výrazů (4.90), (4.95), (4.99) je vyjádřena.

Nakonec si ještě stručně všimneme potenciální energie magnetického tělesa ve vnějším magnetickém poli  $\mathbf{B}_0$ . Jelikož lze tento problém řešit v podstatě stejným způsobem jako problém potenciální energie dielektrického tělesa v elektrickém poli (srov. čl. 1.5.5), uvedeme jen výsledky. (Podrobněji je tato problematika rozvedena například v [7].) Přírůstek hledané potenciální energie  $\delta W$  je dán objemovým integrálem

$$\delta W = - \int_{V_m} (\mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{B}_0) dV, \quad (4.101)$$

přes objem  $V_m$  magnetického tělesa, v němž  $\mathbf{M}$  je jeho magnetizace. Hustotu přírůstku této energie  $\delta w$  lze pak vyjádřit vztahem

$$\delta w = - \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{B}_0. \quad (4.102)$$

Celkovou potenciální energii lze počítat jen v případě, známe-li vzájemnou souvislost  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{B}_0$ . Situace je jednoduchá v případě ideálně tvrdého a ideálně měkkého (lineárního) prostředí.

V případě *ideálně tvrdého magnetika* o magnetizaci  $\mathbf{M}_0$  dostáváme (srov. vztah (1.271) a rovněž (3.107))

$$W = - \int_{V_m} (\mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{B}_0) dV. \quad (4.103)$$

V případě *ideálně měkkého prostředí* dostáváme analogicky s (1.273)

$$W = - \frac{1}{2} \int_{V_m} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0) dV. \quad (4.104)$$

Na rozdíl od dielektrika však veličina  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0)$  může být kladná i záporná; záporných hodnot nabývá pro diamagnetická tělesa.

### 4.3.3 Obecné vyjádření sil v magnetickém poli

Pro obecné vyjádření sil působících na vodič v magnetickém poli lze vyjít přímo z definičního vztahu pro magnetickou indukci (srov. čl. 3.3.1). Pro sílu  $\mathbf{f}$  působící na jednotkový objem vodiče s proudovou hustotou  $\mathbf{j}$  platí (3.58)

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Síla  $\mathbf{F}$  působící na celý vodič, ve kterém se uzavírá daný proud, je pak dána integrálem přes jeho celý objem  $V$ . Tedy

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV. \quad (4.105)$$

Magnetická indukce  $\mathbf{B}$  v (3.58) představuje celkovou magnetickou indukci v daném bodě, která může být obecně buzena jak vnějšími zdroji, tak i jinými částmi vlastního vyšetřovaného vodiče. Je však zřejmé, že vlastní magnetické pole buzené tímto vodičem nemůže mít žádný dynamický účinek na vodič jako celek (pokud jej považujeme za tuhou soustavu). Při integraci naznačené ve vztahu (4.105) je proto možné se omezit jen na pole buzené vnějšími zdroji.

Pro vodiče ve tvaru tenkých proudových smyček je možné výraz (4.105) vyjádřit i v jiném tvaru. Uvážíme-li korespondenci  $\mathbf{j} dV \leftrightarrow I d\mathbf{l}$  (srov. čl. 3.3.3), můžeme místo (4.105) napsat

$$\mathbf{F} = I \int_l (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \quad (4.106)$$

Alternativně je možné vyjádřit síly působící na smyčku protékanou proudem i pomocí energie magnetického pole soustavy (srov. analogickou situaci v elektrostatickém poli – čl. 1.4.6). Uvažujme soustavu  $N$  tuhých nedeformovatelných smyček protékáných proudy  $I_1, I_2, \dots, I_N$ , v nichž působí vnější zdroje elektromotorických napětí  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_N$ . Vzorce (4.90) ukazují, že v lineárním prostředí je energie magnetického pole soustavy  $W_m$  jednoznačnou funkcí vzájemné konfigurace smyček. Označíme-li tedy  $\{\xi_i\}$  soubor zobecněných souřadnic pině popisujících jejich prostorové rozmístění, můžeme za uvedeného předpokladu napsat

$$W_m = W_m(\{\xi_i\}) \quad (4.107)$$

a energetickou bilanci soustavy při změně souřadnic využít k výpočtu sil působících na jednotlivé smyčky.

Předpokládejme, že jedna ze smyček změní svou polohu tak, že se její souřadnice  $\xi_i$  změní o hodnotu  $\Delta\xi_i$ , přičemž zbylé souřadnice zůstanou konstantní. Soustava zřejmě vykoná mechanickou práci  $\Delta A$ , již lze vyjádřit vztahem

$$\Delta A = G_{\xi_i} \Delta\xi_i,$$

v němž  $G_{\xi_i}$  představuje složku zobecněné síly příslušné souřadnici  $\xi_i$ . Při změně polohy smyčky se obecně změní také hodnoty magnetických toků tekoucích jednotlivými smyčkami o určité hodnoty  $\Delta\Psi_1, \dots, \Delta\Psi_N$  a pohyb smyčky vyvolá vznik indukovaného elektromotorického napětí ve všech smyčkách. Budeme-li předpokládat, že se posunutí smyčky uskuteční v časovém intervalu  $\Delta t$ , bude možné podle (4.86) vyjádřit energetickou bilanci každé smyčky vztahem

$$E_k I_k \Delta t = R_k I_k^2 \Delta t + I_k \frac{d\Psi_k}{dt} \Delta t.$$

Pro celou soustavu tedy dostaneme

$$\sum_{k=1}^N E_k I_k \Delta t = \sum_{k=1}^N R_k I_k^2 \Delta t + \sum_{k=1}^N I_k \Delta\Psi_k. \quad (4.108)$$

Označme  $\Delta W$  tu část energie dodané vnějšími zdroji elektromotorického napětí, která se nespouští na Jouleovo teplo

$$\Delta W = \sum_{k=1}^N E_k I_k \Delta t - \sum_{k=1}^N R_k I_k^2 \Delta t = \sum_{k=1}^N I_k \Delta\Psi_k. \quad (4.109)$$

S ohledem na zákon zachování energie v kvazistacionární soustavě (srov. čl. 4.3.1) je nutné soudit, že tato energie se spotřebuje jednak na změnu energie magnetického pole  $\Delta W_m$ , jednak na vykonání mechanické práce  $\Delta A$ . Musí tedy platit podmínka

$$\Delta W = \Delta W_m + \Delta A. \quad (4.110)$$

V praxi jsou důležité dva speciální případy. Za prvé budeme předpokládat, že při posunutí smyčky zůstanou zachovány toky jednotlivými smyčkami (tj. že  $\Delta\Psi_k = 0$  pro  $k = 1, \dots, N$ ). Potom z (4.109) plyne a podle (4.110) platí

$$\Delta A = -\Delta W_m. \quad (4.111)$$

Pro sílu  $G_{\xi_i}$  tedy dostáváme

$$G_{\xi_i} = - \left( \frac{\partial W_m}{\partial \xi_i} \right)_{I_k = \text{konst}}. \quad (4.112)$$

Za druhé necht' při posouvání smyčky zůstanou konstantní proudy  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . Pro změnu energie magnetického pole soustavy pak z (4.90) plyne

$$\Delta W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Delta\Psi_k$$

a podle (4.109) platí  $\Delta W = 2\Delta W_m$ . Po dosazení do podmínky (4.110) tedy dostaneme

$$\Delta A = \Delta W_m \quad (4.113)$$

a sílu  $G_{\xi_i}$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$G_{\xi_i} = + \left( \frac{\partial W_m}{\partial \xi_i} \right)_{I_k = \text{konst}}. \quad (4.114)$$

Právě vyložený postup založený na bilanci energie byl v elementárnější formě použit v článku 3.4.2 při odvozování vztahů (3.108)

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \times \nabla) \mathbf{B}_0,$$

$$\mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$$

pro sílu  $\mathbf{F}$  a moment síly  $\mathcal{M}$  působící na magnetický dipól s magnetickým momentem  $\mathbf{m}$  ve vnějším magnetickém poli  $\mathbf{B}_0$ . Je zřejmé, že tyto vzorce budou přibližně použitelné i pro vyjádření sil působících na útvary konečných rozměrů s pevným, na vnějším magnetickém poli nezávislým magnetickým momentem  $\mathbf{m}$  (tj. například na magneticky tvrdá zmagnetovaná tělesa či na proudové smyčky), pokud vnější magnetické pole nebude příliš nehomogenní.

#### 4.3.4 Řešené příklady

##### a) Síly působící mezi póly elektromagnetu

Uvažujme elektromagnet podle obr. 4.23, tvořený magnetickým obvodem z feromagnetického materiálu o vysoké relativní permeabilitě  $\mu_r$ , se vzduchovou mezerou délky  $l$ . Necht' proud  $I$  tekoucí cívkou vybudí v mezeře magnetické pole  $\mathbf{B}_0$ , které lze v prvním přiblížení považovat za homogenní.

Mezi póly magnetu bude působit síla  $\mathbf{F}$ , která může být snadno vypočtena užitím vztahu (4.112). Energie magnetického pole elektromagnetu může být vypočtena pomocí vztahu (4.99), přičemž integrovat je obecně třeba přes celý objem mezery i jádra. V případě  $\mu_r \gg 1$  je hustota energie magnetického pole

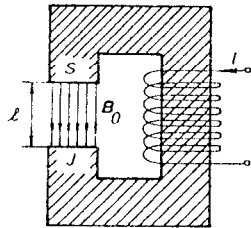
v jádru  $w_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 2 = B_0^2 / 2\mu_0\mu_r$ , mnohem nižší než ve vzduchové mezeře. Proto i když je objem jádra obecně větší než objem pole ve vzduchové mezeře, lze celkovou energii magnetického pole elektromagnetu v prvním přiblížení reprezentovat jen energií pole v mezeře. Označíme-li plochu pólů magnetu  $S$  a budeme-li pole v mezeře považovat za homogenní, dostaneme pro tuto energii přibližný výraz

$$W_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} Sl, \quad (4.115)$$

podle něhož je energie lineární funkcí délky mezery  $l$ . V uvedeném přiblížení předpokládáme, že hustota energie  $w_m$ , a tedy i magnetická indukce  $\mathbf{B}_0$ , jsou nezávislé na délce mezery. Pro výpočet síly  $F$  lze tedy použít vztah (4.112), čímž získáme výsledek

$$F = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} S. \quad (4.116)$$

Póly magnetu se tedy uvedenou silou přitahují.



Obr. 4.23 K výpočtu silového působení mezi póly elektromagnetu.

#### b) Hysterezní ztráty ve feromagnetiku

Již v úvodu článku 4.3.2, v komentáři ke vztahu (4.89) bylo zdůrazněno, že veškerá energie  $W_m$  spojená se změnou magnetického pole nemusí být rovna změně energie magnetického pole, která může být navrátna při jeho zániku. Situace závisí na konkrétních vlastnostech prostředí vyplňujícího prostor, v němž je magnetické pole vytvořeno. Typickým příkladem je chování feromagnetika, které nyní vyšetříme.

Vztah mezi magnetizací (respektive magnetickou indukcí) a intenzitou pole ve feromagnetiku je nejednoznačný a obvykle je popisován soustavou hysterezních smyček (srov. čl. 3.5.4). Předpokládejme například, že chceme vypočítat energii připadající na jednotkový objem feromagnetika, která je potřebná k jeho přemagnetování po klesající větvi hysterezní smyčky z bodu (B) do bodu (D) (viz obr. 3.33). Pro tento výpočet lze vyjít ze vztahu (4.98), provedeme-li inte-

graci energie  $\delta w_m$  připadající na jednotkový objem v mezích od  $B_{(B)}$  do  $B_{(D)}$ . Po integraci metodou per partes dostaneme

$$w_m = \int_{B_{(B)}}^{B_{(D)}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = [\mathbf{H}_{(D)} \cdot \mathbf{B}_{(D)} - \mathbf{H}_{(B)} \cdot \mathbf{B}_{(B)}] - \int_{B_{(B)}}^{B_{(D)}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}. \quad (4.117)$$

Při cyklickém přemagnetování (například opět z výchozího bodu  $B_{(m)}$ , kdy pracovní bod proběhne postupně celou hysterezní smyčkou, bude výchozí a konečné pole totožné. První člen v (4.117) bude tedy nulový a pro energii  $w_m$  dostaneme

$$w_m = -\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{H}. \quad (4.118)$$

Při průběhu jednoho cyklu hysterezní smyčky se energie magnetického pole nezmění. Celá energie  $w_m$  podle (4.118) se tedy spotřebovává na přemagnetování feromagnetika a je nevratně přeměněna v teplo. Obvykle se tato energie nazývá *hysterezními ztrátami* daného feromagnetika. Z geometrického významu integrálu (4.118) vyplývá, že hysterezní ztráty jsou dány plochou hysterezní smyčky.

#### c) Střední hodnota výkonu ve střídavém obvodu

V článku 4.3.1 bylo ukázáno, že okamžitá hodnota výkonu dodávaného zdroji elektromotorického napětí do kvazistacionárního obvodu je dána vztahem (4.87). Tato veličina je ovšem obecně časově závislá a není vhodná pro praktické použití. Jednoduchá situace nastává v ustáleném stavu střídavého obvodu, kdy je možné dodávaný výkon charakterizovat časově nezávislou střední hodnotou, kterou nyní vypočteme.

Předpokládejme, že zdroj dodává do obvodu elektromotorické napětí, jehož časový průběh je dán vztahem (4.41). V ustáleném stavu může být okamžitá hodnota proudu  $I(t)$  dodávaného do obvodu vyjádřena vztahem (4.48). Střední hodnotu výkonu za dobu jedné periody  $T = 2\pi/\omega$  můžeme získat jednoduchým výpočtem. Platí

$$\bar{N}_z = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) \mathcal{E}(t) dt = \frac{\mathcal{E}_0 I_0}{2} \cos|\varphi - \varphi_i|. \quad (4.119)$$

Jak je vidět, dodávaný výkon závisí nejen na amplitudách elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_0$  a proudu  $I_0$ , ale také na jejich vzájemném fázovém posuvu  $|\varphi - \varphi_i|$ . Veličina  $\cos|\varphi - \varphi_i|$  se nazývá *účinník*.

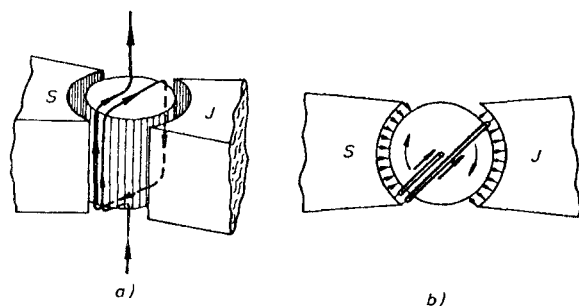
Často se pro vyjadřování střídavých napětí a proudů zavádí pojem *efektivních hodnot*  $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$ ,  $\mathcal{E}_{ef} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$ . Jejich užitím lze výkon  $\bar{N}_z$  vyjádřit vztahem

$$\bar{N}_z = \varepsilon_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos|\varphi - \varphi_r|. \quad (4.120)$$

Je zřejmé, že vztahy typu (4.119), popř. (4.120), lze vyjádřit nejen výkon  $\bar{N}_z$  dodávaný zdrojem do obvodu, ale také výkon ztracený na jednotlivých prvcích obvodu. Podobně lze výpočet střední hodnoty výkonu pomocí integrálu typu (4.119), i zavedení efektivní hodnoty napětí a proudu zobecnit pro případ nesinusových periodických průběhů (srov. čl. 8.3.1).

#### d) Magnetoelektrický měřicí přístroj

Silových účinků magnetického pole na vodiče protékané proudem využívá většina analogových přístrojů pro měření napětí a proudu. Nejužívanější z nich je tzv. magnetoelektrický systém (nazývaný též systém Deprezův–d'Arsonvalův), jehož princip je uveden na obr. 4.24. Pólové nástavce trvalého magnetu jsou vytvářeny tak, aby mezi nimi vznikla válcová dutina, v níž je vloženo rovněž válcové jádro z feromagnetického materiálu. Podle výsledků příkladu 3.5.7a vznikne v mezeře mezi pólovými nástavci a jádrem radiální magnetické pole  $\mathbf{B}$ . V této mezeře je dále umístěna obdélníková cívka, která je otočná kolem osy totožné s osou jádra. Cívka je zavěšena buď na torzním vlákně, nebo je uložena v hrotových ložiskách doplněných spirálovými pružinami sloužícími jako převody. Závěs torzního vlákna, respektive spirálové pružiny slouží zároveň k vymezení rovnovážné klidové polohy cívky. Při jejím vychýlení z této klidové polohy vzniká vlivem elastické deformace vlákna či pružiny tzv. *direkční moment*, který se snaží navrátit cívku do klidové polohy. Výchylka cívky z klidové polohy, charakterizovaná úhlem  $\alpha$ , tvoří měřicí údaj přístroje. Je indikována buď mechanicky (ručkou), nebo opticky, pomocí zrcátka.



Obr. 4.24 Princip uspořádání magnetoelektrického měřicího přístroje.

Mechanické vlastnosti systému jsou charakterizovány jednak momentem setrvačnosti  $\mathcal{J}_s$  cívky, jednak silovými momenty na ni působícími: momentem magnetických sil buzených proudem protékajícím cívkou  $\mathcal{Q}_m$ , direkčním momentem  $\mathcal{Q}_d$  a brzdícím momentem  $\mathcal{Q}_b$ .

Podstatnou vlastností dané konstrukce přístroje je, že moment magnetických sil působících na cívku je nezávislý na její poloze, tj. na úhlu  $\alpha$  jejího vytočení z rovnovážné polohy. Na cívku o  $N$  závitů, výšce  $l$  a šířce  $b$ , jejíž plocha  $S$  je tedy rovna  $S = lb$ , působí podle čl. 3.4.2 (při dané geometrii magnetického pole) moment

$$\mathcal{Q}_m = BlbNI = K_m I. \quad (4.121)$$

Direkční moment  $\mathcal{Q}_d$  může být vyjádřen vztahem

$$\mathcal{Q}_d = -K_d \alpha, \quad (4.122)$$

v němž  $K_d$  je konstanta určená vlastnostmi závěsného systému. Brzdící moment je dán jednak odporem vzduchu při pohybu cívky, zejména je však dán indukovanými proudy vznikajícími při pohybu vodivých součástí cívky v magnetickém poli. Snadno se přesvědčíme, že výsledný brzdící moment bude úměrný úhlové rychlosti cívky. Tedy

$$\mathcal{Q}_b = -K_b \frac{d\alpha}{dt}. \quad (4.123)$$

Užitím 2. impulsové věty dostaneme pohybovou rovnici cívky

$$\mathcal{J}_s \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + K_b \frac{d\alpha}{dt} + K_d \alpha = K_m I. \quad (4.124)$$

Jde vlastně o rovnici torzního kyvadla, charakter jejíhož řešení závisí na hodnotách kořenů charakteristické rovnice. Matematická stránka řešení (4.124) je podobná jako řešení rovnice (4.43) pro vlastní kmity obvodu  $RCL$ . V zásadě existují dva typy řešení: periodické a aperiodické. Získá-li cívka systému v nulovém okamžiku určitou hybnost, která ji vychýlí z klidové polohy, pak v aperiodickém stavu se vrací do klidové polohy způsobem kvalitativně zobrazeným na obr. 4.14. V periodickém stavu naopak koná tlumené kmity kolem rovnovážné polohy, jejichž perioda  $T_0$  je dána známým vztahem (srov. obr. 4.15)

$$T_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{J}_s}{K_d}}. \quad (4.125)$$

Důležitý je tzv. *kritický aperiodický stav*, který představuje rozhraní mezi periodickým a aperiodickým stavem a odpovídá dvojnému kořenu charakteristické rovnice. V tomto stavu zaujímá systém rovnovážnou klidovou polohu nejrychlejším možným způsobem.

Magnetoelektrický měřicí přístroj umožňuje několik typů použití: především jako měřidlo časově neproměnného proudu, dále jako měřidlo náboje (proudového impulsu) a konečně jako měřidlo napěťového impulsu. Probereme stručně všechna tato použití.

**Měření proudu** představuje základní a nejdůležitější typ použití studovaného přístroje. Předpokládáme, že v časovém okamžiku  $t = 0$  zapneme do cívky měřicího přístroje měřený, časově neproměnný proud  $I$ . Cívka systému se účinkem momentu  $\mathcal{M}_m$  počne vychylovat ze své rovnovážné polohy  $\alpha = 0$ . Konkrétní charakter jejího pohybu bude ovšem záviset na stupni tlumení systému. Asymptotické řešení pohybové rovnice (4.124) pro  $t \rightarrow \infty$  však bude na tlumení nezávislé. Z rovnice (4.124) je zřejmé, že za dostatečně dlouhou dobu po zapnutí proudu zaujme novou, časově neproměnnou polohu charakterizovanou výchylkou

$$\alpha_0 = \frac{K_m}{K_d} I. \quad (4.126)$$

Z výsledku (4.126) plyne, že výchylka  $\alpha_0$  je přímo úměrná protékajícímu proudu  $I$ . Magnetoelektrický měřicí přístroj má tedy lineární stupnici, což představuje jednu z jeho nejdůležitějších předností. Z praktického hlediska je žádoucí, aby tlumení systému bylo blízké kritickému stavu, v němž systém zaujme nejrychleji novou rovnovážnou polohu. U méně citlivých robustnějších přístrojů je tohoto stavu dosaženo vhodnou konstrukcí pohyblivých částí. Tlumicí účinek proudů indukovaných ve vlastním obvodu přístroje při pohybu cívky je v tomto případě zanedbatelný a kritický aperiodický stav je v zásadě nezávislý na odporu obvodu, do kterého je přístroj zapojen. U citlivých přístrojů (galvanometrů) je naopak příspěvek proudů indukovaných ve vlastním obvodu dominantní a pro dosažení kritického aperiodického stavu je třeba dodržet určitou, konstrukcí přístroje jednoznačně určenou, hodnotu celkového odporu obvodu, do kterého přístroj zapojujeme. Tento tzv. *aperiodický odpor* musí být spolu s dalšími parametry (vnitřní odpor cívky, citlivost, perioda vlastních kmitů  $T_0$ ) výrobcem udán. Uvedené parametry určují užité vlastnosti přístroje.

**Měření náboje** (proudového impulsu) tvoří další způsob klasické a dříve hojně užívané aplikace magnetoelektrického systému. Přístroj určený pro tento typ měření se obvykle nazývá *balistický galvanometr*. Podmínkou pro možnost měření celkového náboje prošlého v daném časovém intervalu  $\tau \equiv (0, \tau)$  cívku přístroje je  $\tau \ll T_0$ . Je-li tato podmínka splněna, můžeme předpokládat, že celý měřený náboj projde cívku přístroje dříve, než se cívka stačí znatelně vychýlit ze své klidové polohy. Předpokládáme-li dále platnost počátečních podmínek  $\alpha = 0, d\alpha/dt = 0$  pro  $t = 0$ , můžeme pohybovou rovnici (4.124) jednoduše integrovat. Platí

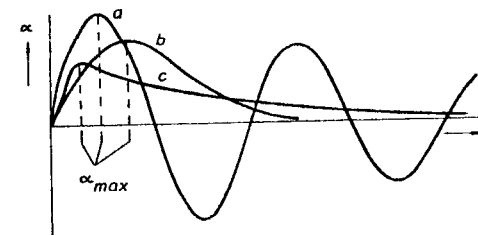
$$\mathcal{I}_s \int_0^\tau \frac{d^2\alpha}{dt^2} dt + K_b \int_0^\tau \frac{d\alpha}{dt} dt = K_m \int_0^\tau I(t) dt = K_m Q,$$

$$\mathcal{I}_s \left[ \frac{d\alpha}{dt} \right]_0^\tau + K_b [\alpha]_0^\tau = K_m Q.$$

Uplatníme-li uvedené počáteční podmínky a předpoklad  $\alpha \doteq 0$  pro  $t = \tau$ , dostaneme výsledek

$$\mathcal{I}_s \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)_{t=\tau} = K_m Q, \quad (4.127)$$

kteří ukazuje, že celkový moment hybnosti (popř. maximální úhlová rychlost) udělený proudovým impulsem měřicímu systému je za uvedených předpokladů úměrný celkovému prošlému náboji.



Obr. 4.25 Časová závislost výchylky balistického galvanometru: a) periodický stav, b) kritický aperiodický stav, c) přetlumený aperiodický stav.

Jak jsme viděli v předchozím výkladu, z mechanického hlediska představuje měřicí systém magnetoelektrického přístroje torzní kyvadlo. Jeho maximální výchylka  $\alpha_{\max}$  je úměrná úhlové rychlosti, kterou systém má při průchodu rovnovážnou polohou. Podle (4.127) tedy lze psát

$$\alpha_{\max} = C_b Q. \quad (4.128)$$

Maximální výchylka  $\alpha_{\max}$  měřicího systému tedy může být využita k měření prošlého náboje  $Q$ . Konstanta  $C_b$  se nazývá *balistická konstanta* přístroje.

Pro měření náboje může být použit systém v periodickém i aperiodickém stavu. Časový průběh výchylky v jednotlivých režimech je kvalitativně zobrazen na obr. 4.25. Pro měření se obvykle využívají první maximální výchylky, které jsou vyznačeny na obrázku. Je zřejmé, že hodnota balistické konstanty závisí na stupni tlumení. Je proto třeba balistickou konstantu určovat vždy pro dané zapojení s daným celkovým odporem obvodu. Dále je zřejmé, že pro měření náboje se hodí zejména přístroje s dlouhou periodou vlastních kmitů  $T_0$ . Přístroje používané pro tento účel v praxi mají zpravidla  $T_0 \geq 10$  s.

**Měření napětíového impulsu.** V odstavci 4.1.2c bylo ukázáno, že při změně magnetického toku cívku projde příslušným obvodem elektrický náboj, který je úměrný této změně toku. Balistický galvanometr může být tedy použit k měření změny magnetického toku, je-li tato změna dostatečně rychlá ve srovnání s dobou vlastních kmitů  $T_0$  přístroje. Magnetoelektrický měřicí systém však dovoluje ještě další způsob použití, který není závislý na rychlosti změny. Pro tento účel se dříve konstruovaly speciální přístroje se zanedbatelným směrem momentem, které se z důvodů uvedených níže nazývají *fluxmetry*.

Předpokládejme, že uvedený přístroj je zapojen v obvodu, ve kterém po určité omezenou dobu působí časově proměnné elektromotorické napětí  $\mathcal{E}(t)$ . Označíme-li  $R_c$  celkový odpor obvodu a zanedbáme-li jeho indukčnost, bude okamžitá hodnota proudu tekoucího cívkou přístroje rovna  $I(t) = \mathcal{E}(t)/R_c$ . Cívka se účinkem tohoto proudu vychýlí ze své původní polohy. Její pohyb se však bude utlumovat působením tlumících mechanismů systému a přestane-li elektromotorické napětí působit, cívka se po určité době zastaví v nové poloze. Za uvedených podmínek lze pohybovou rovnici (4.124) opět jednoduše integrovat v časovém intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$ , na jehož počátku i konci je měřicí systém v klidu, přičemž měřicí cívka změnila svoji polohu o úhel  $\Delta\alpha$ . Platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2\alpha}{dt^2} dt + K_b \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\alpha}{dt} dt = \frac{K_m}{R_c} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(t) dt,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d\alpha}{dt} \right]_{t_1}^{t_2} + K_b [\alpha]_{t_1}^{t_2} = \frac{K_m}{R_c} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(t) dt.$$

Celková výchylka přístroje  $\Delta\alpha = \alpha(t_2) - \alpha(t_1)$  je tedy úměrná napětíovému impulsu působícímu v obvodu, v podstatě nezávisle na době po kterou napětí působí, neboť z právě získaného výsledku dostáváme

$$\Delta\alpha = \frac{K_m}{K_b R_c} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(t) dt. \quad (4.129)$$

Vztah (4.129) platí ovšem přesně pouze za předpokladu, že direkční moment systému je skutečně nulový. Ve skutečnosti však nelze otočné uložení cívky s přírady o absolutně nulovém direkčním momentu realizovat. Proto v závislosti na jakosti konstrukce daného přístroje existuje určité omezení shora pro časový interval měření  $\Delta t$ .

Právě popsaná metoda se nejčastěji užívala pro měření magnetického toku či jeho změn, přičemž měřený napětíový impuls vznikal při změně magnetického toku měrnou cívkou (srov. odstavec 4.1.2c). Vzhledem k tomu, že dnes existují jiné a přesnější metody pro měření magnetického pole a magnetického toku, má právě popsané použití magnetoelektrického systému spíše jen historický význam.

Naproti tomu jeho použití pro měření proudu a do jisté míry i použití pro měření proudového impulsu si přes bouřlivý rozvoj nových elektronických a číslicových metod svůj význam zachovává. Pro podrobnější poučení o konstrukci jednotlivých typů přístrojů, jejich parametrech a konkrétních způsobech použití odkazujeme na citovanou literaturu, především [5].

#### ÚLOHY KE KAPITOLE 4

Ú 4.1: Pevná obdélníková smyčka se vzdaluje od velmi dlouhého přímého vodiče protékajícího proudem  $I$  rychlostí  $v$  kolmou k vodiči, přičemž dvě protilehlé strany smyčky délky  $l$  zůstávají rovnoběžné s vodičem. Určete velikost indukovaného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$  ve smyčce v okamžiku, kdy vzdálenost vzdálenější strany je  $a_2$ .

Ú 4.2: Kovový kotouč poloměru  $R$  rotuje s frekvencí  $f$  kolem své osy rotační symetrie v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B}$  rovnoběžném s osou rotace. Jaký bude potenciální rozdíl mezi středem a okrajem kotouče?

Ú 4.3: Určete maximální elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$ , které se může indukovat v rovinné cívce se 4 000 závitů o středním poloměru 12 cm, rotující s frekvencí 30 Hz v zemském magnetickém poli  $B \approx 5 \cdot 10^{-5}$  T.

Ú 4.4: Dvě dlouhé, rovnoběžné a dokonale vodivé kolejnice vzdálené od sebe o vzdálenost  $b = 0,5$  m jsou umístěny v homogenním magnetickém poli  $B = 0,5$  T kolmém k rovině kolejnic a jsou na jednom z konců spojeny odporem  $R = 0,2 \Omega$ . Po těchto kolejnicích klouže dokonale vodivá tyč rychlostí  $v = 4$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ . Určete velikost indukovaného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$ , sílu  $F$  potřebnou k udržení dané konstantní rychlosti tyče, mechanický výkon  $N_M$  a tepelný výkon  $N_Q$  soustavy.

Ú 4.5: Dokažte, že vlastní indukčnost  $L$  smyčky protékající proudem  $I$  je kladná. Důkaz proveďte na základě úvah o energii při zanedbání ohmického odporu smyčky.

Ú 4.6: Uvažujte dvě vodivé smyčky  $l_1, l_2$ , kterými protékají proudy  $I_1, I_2$ . Pomocí vyjádření energie magnetického pole této soustavy dokažte, že koeficienty vzájemné indukčnosti smyček  $L_{12}, L_{21}$  jsou symetrické, tj. že platí  $L_{12} = L_{21}$ .

Ú 4.7: Vyjádřete vlastní indukčnost toroidní cívky o  $N$  závitěch navinuté na železném jádru čtvercového profilu s vnějším poloměrem  $r_1$  a vnitřním poloměrem  $r_2$ . Permeabilitu jádra  $\mu$  považujte za konstantu nezávislou na intenzitě pole. Při výpočtu předpokládejte, že platí  $r_1 - r_2 \ll r_2$ , tj. že magnetické pole může být v celém průřezu jádra považováno za homogenní.

Ú 4.8: Řešte předchozí úlohu pro případ, kdy pole uvnitř jádra nelze považovat za homogenní.

Ú 4.9: Předpokládejte, že na toroidním jádru z úlohy Ú 4.7 jsou těsně na sobě navinuty dvě jednovrstvé cívky o počtech závitů  $N_1, N_2$ . Určete vzájemnou indukčnost těchto cívek.

Ú 4.10: Cívkou o odporu  $R = 100 \Omega$  protéká stacionární proud  $I$ . V určitém okamžiku jsou přírady cívky zkratovány a je zjištěno, že za dobu 0,01 s klesne proud na desetinu původní hodnoty. Určete vlastní indukčnost cívky  $L$ .

Ú 4.11: Velmi dlouhý dutý vodič o průměru  $2a_0$  je ohnut způsobem podle obr. 3.36, takže vzdálenost mezi rovnoběžnými částmi je  $2r$ . Vodičem protéká stacionární proud  $I$ . Určete energii magnetického pole připadající na

jednotkovou délku přímé části vodičů a užitím získaného výsledku vyjádřete indukčnost  $L_0$  připadající na jednotkovou délku.

Ú 4.12: Dvě cívky o vlastních indukčnostech  $L_1$ ,  $L_2$  a vzájemné indukčnosti  $L_{12}$  jsou zapojeny do série. Určete:

a) výsledné indukčnosti  $L^{(+)}$ ,  $L^{(-)}$  obou cívek v závislosti na orientaci jejich propojení,

b) energii magnetického pole  $W_m$  za předpokladu, že cívkami protéká proud  $I$ ,

c) interakční energii obou cívek  $W_{int}$ .

Ú 4.13: Vyjádřete interakční energii dvou elementárních magnetických dipólů  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$ , jejichž vzájemná poloha je určena vektorem  $\mathbf{R}$ .

Ú 4.14: Permanentní magnet podkovovitého tvaru s obdélníkovým průřezem pólů 1 cm krát 2 cm unese železná závaží hmotnosti 1,2 kg. Určete magnetickou indukci  $B$  v blízkosti čelních ploch pólů magnetu.

## 5 Elektromagnetické pole

V této kapitole dovršíme fenomenologický popis elektrických a magnetických polí v jeho vrcholné syntetické podobě vyjádřené soustavou Maxwellových rovnic. Na tato pole nebudeme již klást omezující podmínky, budeme je považovat za obecně libovolně proměnná v čase i prostoru, tj. za nestacionární. Předpoklad o nestacionárním charakteru elektrického a magnetického pole má za následek jejich vzájemnou závislost, vazbu, vyjádřenou odpovídajícími členy v Maxwellových rovnicích.

Uvedená skutečnost vede k přirozenému předpokladu o existenci obecnějšího elektromagnetického pole; vzájemně závislé nestacionární elektrické a magnetické pole tvoří jeho součásti. Elektrostatické pole, stacionární elektrické a magnetické pole a kvazistacionární elektrické a magnetické pole probíraná v předchozích kapitolách jsou jen zvláštními případy tohoto obecného pole. Jak uvidíme, je představa o elektromagnetickém poli nejen teoretickou syntézou těchto zvláštních případů, ale i důsledkem dalších nezávislých experimentálních poznatků, především poznatků o elektromagnetických vlnách. Obecné elektromagnetické pole je dokonce pojem v jistém smyslu primární, neboť má smysl i v mikroskopickém měřítku, zatímco dříve vyšetřované typy statických, stacionárních a kvazistacionárních polí mají smysl jen v makroskopickém pohledu a jsou středními hodnotami tohoto mikroskopického elektromagnetického pole.

Maxwellova teorie dovršuje nejen syntézu elektrických a magnetických jevů, ale i jevů optických. Světlo představuje jen část širokého spektra elektromagnetických vln. Formálně matematickým výrazem této skutečnosti je to, že v Maxwellových rovnicích vystupuje vedle relativní permitivity a permeability, popisujících elektrické a magnetické vlastnosti prostředí, konstanta  $c$  daná vztahem  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  a představující rychlost světla ve vakuu. Zatímco permitivita vakua  $\epsilon_0$  a permeabilita vakua  $\mu_0$  jsou konstanty zavedené uměle v soustavě jednotek SI, má jejich součin fyzikální smysl převrácené hodnoty čtverce rychlosti světla ve vakuu a jeho přítomnost v Maxwellových rovnicích je zdůvodněna fyzikálně.

Poznamenejme (viz též čl. 1.1.1), že takové postupné „sjednocování interakcí“, kdy se ukazuje, že elektrické, magnetické a optické jevy jsou vlastně projevy obecnější interakce elektromagnetické, odpovídá vývoji současného fyzikálního poznání. V osmdesátých letech dvacátého století bylo teoreticky i experimentálně prokázáno, že elektromagnetické působení je opět zvláštním případem ještě obecnější tak zvané elektroslabé interakce. Tato interakce zahrnuje vedle elektromagnetických též tak zvané slabé síly projevující se při beta radioaktivním rozpadu atomových jader a též v některých jaderných reakcích za účasti neutrina. Pro tyto slabé síly je charakteristické, že se mění při zrcadlovém zobrazení a vnášejí tak do přírody prostorovou asymetrii. Je pravděpodobné,



že i elektroslabé interakce se ukáží být zvláštním případem obecnějších interakcí zahrnujících i silné jaderné síly a gravitaci.

Také v této kapitole, podobně jako v kapitolách 1, 3 a 4, budeme zpočátku pojednávat o *makroskopickém elektromagnetickém poli*, které můžeme přímo pozorovat a měřit našimi přístroji. Je to právě pole, které vystupuje v *Maxwellových rovnicích*. Naproti tomu v kapitole 2 jsme uvažovali pole pohybujících se bodových elektrických nábojů ve vakuu a vycházeli jsme přitom ze speciální teorie relativity. Pole takto idealizovaných soustav pohybujících se nábojů nás přivádí k mikroskopickému modelu látkového prostředí, které můžeme považovat prostě za soustavu nábojů rozložených určitým (velmi komplikovaným) způsobem ve vakuu a pohybujících se určitým (velmi komplikovaným) způsobem v prostoru a čase. Tyto náboje pak vytvářejí v každém bodě prostoru a v každém okamžiku *mikroskopické elektromagnetické pole*, charakterizované rychlými změnami a často obrovskými intenzitami. Toto pole popisované takzvanými *Lorentzovými rovnicemi* bude předmětem našeho zájmu v poslední oddílu 5.4 a tam také ukážeme souvislost mezi polem mikroskopickým a makroskopickým.

## 5.1 Maxwellovy rovnice

V kapitole 4 jsme na základě experimentálních výsledků formulovali obecný zákon elektromagnetické indukce. Podle tohoto zákona vzniká v uzavřeném obvodu elektrický proud vždy, když se jakýmkoliv způsobem mění magnetický indukční tok plochou ohraničenou obvodem. K vysvětlení uvedeného proudu jsme zavedli pojem indukovaného elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$  daného vztahem (4.2). Ve všech případech uvažovaných v předchozí kapitole byl jev elektromagnetické indukce vázán vždy na určitý elektrický obvod, tedy pojímán integrálně.

Změna magnetického indukčního toku plochou obvodu může být vyvolána uměle vnějšími vlivy jako například mechanickým otáčením smyčky protékáné proudem ve vnějším magnetickém poli nebo změnami magnetické indukce generované vnějšími zdroji. Pomalu proměnný elektrický proud takto vznikající v obvodu vytváří proměnné elektrické pole, které můžeme pozorovat například mezi deskami kondenzátoru vloženého do obvodu a které jsme nazvali polem kvazistacionárním (viz článek 4.1.3). Experiment ukazuje, že takové pole je s dostatečnou přesností potenciální a vyhovuje vztahu (1.61), popř. (1.63) a (1.50). Soustava rovnic pro časově proměnné elektrické a magnetické pole vytvářené kvazistacionárním, pomalu proměnným elektrickým proudem se pak neliší od stacionárního elektrického a magnetického pole diskutovaného v oddílech 3.2 a 3.3. Přitom však jev elektromagnetické indukce modifikuje okrajové podmínky řešení těchto rovnic (viz čl. 4.1.3). Zabýváme-li se pouze studiem obvodů s kvazistacionárními proudy (a například průmyslové kmitočty

50 nebo 60 hertzů u střídavých proudů předpoklad kvazistacionárnosti velmi dobře splňují), stačí zahrnout jev elektromagnetické indukce zavedením pojmu impedance do Ohmova a Jouleova zákona.

Přejdeme-li však k dostatečně vysokým kmitočtům, setkáme se s novými experimentálními jevy, jakým je například vyzařování elektromagnetických vln obvodem. Dodávaná energie se přitom mění jednak v Jouleovo teplo, jednak je unášena do prostoru. Tato skutečnost ukazuje, že kvazistacionární přiblížení nevyčerpává hloubku souvislosti mezi elektrickým a magnetickým polem a že je třeba přejít k ještě obecnějšímu popisu. Zbývá udělat poslední krok, o němž se zasloužil právě Maxwell. Je přitom pozoruhodné, že toto poslední zobecnění provedl Maxwell na základě teoretických úvah dříve, než byly vlastnosti obecného elektromagnetického pole a elektromagnetických vln experimentálně pozorovány a prozkoumány.

Maxwellovo zobecnění zahrnuje dvě nové základní koncepce – představu o *indukovaném elektrickém poli* a o *posuvném proudu*.

### 5.1.1 Indukované elektrické pole

Představa o indukovaném elektrickém poli vznikla hlubokým domyšlením Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Maxwell si položil otázku, je-li pro vznik jevu elektromagnetické indukce přítomnost uzavřené vodivé smyčky podstatná, popřípadě je-li vůbec nutná přítomnost jakéhokoliv vodiče. Jde například o to, jak se bude chovat částice nesoucí náboj  $Q$  umístěná ve vakuu za přítomnosti proměnného magnetického pole.

Má-li zákon elektromagnetické indukce platit zcela obecně, je nutné předpokládat, že časově proměnné magnetické pole je schopné vyvolat konvekční proud volných nabitých částic stejně dobře, jako je schopné vyvolat kondukční proud ve vodičích. Proto časově proměnné magnetické pole bude na uvedenou nabitou částici působit silou  $F$ , která je úměrná časové změně magnetického pole a není závislá na pohybu částice. Tuto sílu je možné popsat pomocí nového typu elektrického pole  $E_i$  které se nazývá indukovaným elektrickým polem. Platí tedy

$$F = Q E_i. \quad (5.1)$$

Bude-li v daném bodě prostoru nenulové také stacionární elektrické pole  $E_s$ , vyvolané daným rozložením okolních nábojů, bude mít výsledná intenzita elektrického pole v místě částice hodnotu  $E = E_s + E_i$ . Celkovou sílu  $F$  působící na částici pohybující se rychlostí  $v$  bude možné opět vyjádřit Lorentzovým vzorcem (3.56)

$$F = Q(E + v \times B).$$

Zde však má intenzita pole  $E$  nový, obecnější smysl. Představuje celkovou intenzitu elektrického pole daného jednak okamžitým rozložením nábojů v pro-

storu, jednak hodnotou indukovaného elektrického pole, u něhož nemůžeme bezprostředně ukázat, které elektrické náboje jej vytvářejí. Toto celkové elektrické pole nazýváme *nestacionárním elektrickým polem*.

Existence indukovaného elektrického pole byla v Maxwellově době ovšem hypotézou. Maxwell předpokládal, že každá časová změna magnetického pole vyvolává vznik pole elektrického. Vznik indukovaného elektrického proudu je pak třeba považovat za projev tohoto elektrického pole v těch případech, kdy jsou v daném místě přítomni vhodní nositelé proudu. V dnešní době lze předpokládat uvedenou Maxwellovu hypotézu za plně experimentálně potvrzenou ve všech jejích důsledcích.

Nestacionární elektrické pole již ovšem není polem potenciálním. Abychom to ukázali, uvažujme libovolnou uzavřenou křivku  $l$ , nehybnou vůči pozorovací soustavě souřadnic. Při přenesení jednotkového náboje podél této křivky vykoná elektrické pole práci

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (5.2)$$

Na druhé straně je třeba předpokládat, že podél křivky působí v  $z$   $y$  indukované elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_F$ , které je v případě nehybné křivky dáno vztahem (4.3). Protože přenesení náboje podél křivky reprezentuje určitý proud  $I$ , můžeme zmíněnou práci vyjádřit také jako práci vykonanou tímto indukovaným elektromotorickým napětím. Za předpokladu, že přenesení náboje proběhne v krátkém časovém intervalu  $\Delta t$ , je podle (3.41) tato práce rovna  $\mathcal{E}_F I \Delta t$ . Součin  $I \Delta t$  představuje přenesený náboj, který jsme uvažovali jako jednotkový. Srovnáním obou způsobů vyjádření pak dostaneme

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.3)$$

Plošný integrál na pravé straně (5.3) může být počítán přes libovolnou plochu  $S$ , která je zvolenou křivkou  $l$  ohraničena.

Užitím Stokesovy věty vektorové analýzy (D 1.45) lze levou stranu rovnice (5.3) vyjádřit rovněž pomocí plošného integrálu. Bude pak platit

$$\int_S \left( \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.4)$$

Vzhledem k libovolnosti plochy  $S$  můžeme vztah (5.4) zapsat též v diferenciálním tvaru jako

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Vidíme tedy, že obecně nestacionární elektrické pole není potenciální, a není jej tedy možné ani vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole – potenciálu.

Ve vztahu (5.5) se poprvé setkáváme s diferenciální rovnicí, která vzájemně svazuje vektor intenzity elektrického pole a vektor magnetické indukce. Kdybychom nyní přepsali soustavu rovnic pro stacionární, respektive kvazistacionární elektrické a magnetické pole (viz čl. 4.1.3) a nahradili v ní rovnici  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  vztahem (5.5), dostali bychom

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{D} = \rho, & \text{div } \mathbf{B} = 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Vzniká otázka, nakolik adekvátně popisuje soustava rovnic (5.6) nestacionární, časově obecně proměnné elektromagnetické pole. Pokud jde o rovnici  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  víme, že představuje diferenciální tvar Gaussova zákona, jehož platnost jsme postulovali pro libovolně se pohybující náboje (srov. čl. 2.2.1). Ve shodě s Maxwellem provedeme nyní další zobecnění a budeme požadovat, aby Gaussov zákon platil ve stejném tvaru, tj. ve tvaru (1.247), respektive (1.248) i pro obecně nestacionární elektrické pole.

Požadavek platnosti Gaussova zákona  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  pro nestacionární elektrické pole zahrnuje ovšem nutnost rozlišovat i v tomto obecném případě volné a vázané náboje a předpokládat platnost vztahu mezi vektorem elektrické indukce a vektorem elektrické polarizace (1.246)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

který zůstává definičním vztahem vektoru elektrické indukce.

Rovnice  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , kterou zapisujeme v integrálním tvaru jako, viz (3.72),

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

vyjadřuje ve stacionárním případě neexistenci magnetických nábojů (srov. čl. 3.3.3). Obecný zákon elektromagnetické indukce však vyžaduje, aby vztah (3.72) zůstal zachován i v nestacionárním případě. Jen tehdy má totiž velikost magnetického indukčního toku plochou ohraničenou danou smyčkou jednoznačný význam. Zobecnění platnosti rovnic  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  a  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  na obecný nestacionární případ je dnes navíc potvrzeno celou dosavadní experimentální zkušeností.

Zbývá zjistit, zda rovnice  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$  představující diferenciální tvar Ampèrova zákona platí rovněž pro nestacionární pole. Snadno nahlédneme, že tomu tak není. Z této rovnice totiž plyne (viz (D 1.68))

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (5.7)$$

zatímco z rovnice kontinuity (3.15) pro nestacionární případ máme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Soustava rovnic (5.6) není tedy ještě konečným slovem a nepopisuje úplně nestacionární elektromagnetické pole. Zbývá vhodným způsobem zobecnit poslední z těchto rovnic. Také tento mimořádně hluboký myšlenkový krok provedl Maxwell a ukážeme jej v následujícím článku. „Estetické“ neuspokojení se soustavou (5.6) vyvolává i její určitá nesymetrie; zatímco rotace intenzity elektrického pole závisí na změně magnetické indukce, ve výrazu pro rotaci magnetické indukce se analogický člen neobjevuje.

Experimentální zkušenost ukazuje, že i neúplná soustava (5.6) má své oprávnění za určitých podmínek, a to pro ne příliš rychle proměnné pole. Je to tedy soustava rovnic pro *kvazistacionární elektromagnetické pole*. S kvazistacionárním elektrickým polem jsme se již setkali v kapitole 4. Tam jsme jej však chápali v poněkud jiném významu. Šlo o elektrické pole vyvolané elektrickými náboji, jejichž rozložení v prostoru je ovlivněno působením elektromagnetické indukce v uzavřených obvodech. Uvedli jsme, že toto elektrické pole je potenciální a splňuje rovnici (1.50). Hovořili jsme též o kvazistacionárním magnetickém poli v tom smyslu, že jsme předpokládali platnost Ampèrova zákona (3.138) i pro nepříliš rychle proměnné proudy. Vazba mezi těmito kvazistacionárními poli se tedy neprojevila ve formulaci Maxwellových rovnic, ale výhradně prostřednictvím indukovaného elektromotorického napětí v obvodu.

Odpoutáme-li se od uzavřeného elektrického obvodu, nabude zákon elektromagnetické indukce diferenciální podoby (5.5) a elektrické pole přestane být potenciálním. Přesný obsah výrazu „kvazistacionární pole“ není bohužel ustálen, a je proto třeba vždy blíže vymezit toto pole pomocí příslušných matematických vztahů.

Zobecnění zákona elektromagnetické indukce a jeho vyjádření v diferenciálním tvaru (5.5) umožňuje nový pohled na výsledek experimentu vyloženého na konci článku 4.1.2. Indukovaný elektrický proud ve smyčce obepínající dlouhý solenoid či toroid (viz obr. 4.6) můžeme chápat jako důsledek působení indukovaného elektrického pole  $\mathbf{E}$  na volné nositele náboje ve vodiči smyčky.

Uvedený experiment dokumentuje, že indukované elektrické pole vzniká i v místech s nulovou magnetickou indukcí. Indukované elektrické pole  $\mathbf{E}$  má nyní zřejmě význam indukované vtištěné intenzity  $\mathbf{E}_i$ , kterou jsme pro popis jevu elektromagnetické indukce fenomenologicky zavedli v článku 4.1.2. Ze srovnání výrazu (4.13) pro indukované elektromotorické napětí s výrazem (3.28) udávajícím obecný vztah mezi elektromotorickým napětím a vtištěnou intenzitou obdržíme pro intenzitu indukovaného elektrického pole vztah

$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.8)$$

Tento výsledek znovu dokumentuje užitečnost vektorového potenciálu pro popis elektromagnetického pole (viz článek 5.1.4).

### 5.1.2 Magnetické pole posuvného proudu

Vraťme se nyní k rovnici  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$  a pokusme se upravit její pravou stranu tak, aby nebyla v rozporu s rovnicí kontinuity. Předpoklad obecné platnosti Gaussova zákona  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$  umožňuje upravit rovnici kontinuity (3.15) na tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Vidíme tedy, že veličina

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.9)$$

splňuje vždy podmínku

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_c = 0 \quad (5.10)$$

podobně jako hustota stacionárního proudu. To přivedlo Maxwella na myšlenku, že touto veličinou je třeba nahradit hustotu volného makroskopického proudu  $\mathbf{j}$  v Ampèrově zákonu (3.138)  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ . Dostáváme tak rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_c, \quad (5.11)$$

popř.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.12)$$

Rovnice (5.11), popř. (5.12), představují *zobecněný Ampèrov zákon v diferenciálním tvaru*. Popisují nestacionární magnetické pole a jejich fyzikální obsah nelze vysvětlit na základě dříve vyložených zákonitostí elektrických a magnetických jevů. Představují tedy nový fyzikální zákon, jehož platnost, dnes již plně experimentálně potvrzenou, předpověděl právě Maxwell. Zbývá ovšem vyjasnit fyzikální smysl veličin vystupujících v rovnicích (5.11), popř. (5.12), a vyjasnit tak fyzikální obsah samotného pojmu *nestacionární magnetické pole*.

Jelikož stacionární a kvazistacionární magnetické pole jsou speciálními případy obecného pole nestacionárního, je možné považovat za samozřejmé, že i nestacionární magnetické pole se bude projevovat jednak silovými účinky na pohybující se náboje a jednak elektromagnetickou indukcí. Veličinou bezprostředně vyjadřující oba tyto fyzikální projevy bude opět vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$ . Silové účinky budou vyjádřeny Lorentzovým vzorcem (3.56), který bude i nadále představovat definiční vztah pro intenzitu elektrického pole  $\mathbf{E}$  a pro magnetickou indukci  $\mathbf{B}$ . Zákon elektromagnetické indukce zůstane vyjádřen vztahem (5.5). Pro popis nestacionárního magnetického pole v látkovém

prostředí si podrží svůj význam i intenzita magnetického pole  $\mathbf{H}$ , pro jejíž definici zůstanou zachovány vztahy (3.136)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Velikost  $\mathbf{j}_c$  můžeme považovat za celkovou hustotu makroskopického nestacionárního proudu. Je to obecně časově proměnná veličina, jejíž definiční vztah (5.9) lze užitím (1.246) rozepsat do tvaru

$$\mathbf{j}_c = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (5.13)$$

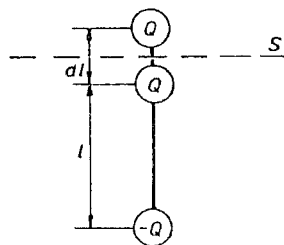
Vidíme, že  $\mathbf{j}_c$  zahrnuje hustotu volného (kondukčního a konvekčního) proudu  $\mathbf{j}$ , která popisuje transport volných nábojů, dále se v něm objevuje člen označovaný jako hustota polarizačního proudu (3.12)

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

který popisuje transport vázaných nábojů v látce při změně její elektrické polarizace (viz článek 3.1.2) a konečně obsahuje člen

$$\mathbf{j}_M = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.14)$$

nazývaný hustota Maxwellova proudu (někdy také hustota posuvného proudu ve vakuu). Polarizační a Maxwellův proud nazýváme někdy souhrnně *posuvným proudem*.



Obr. 5.1 Model posuvného proudu v dielektriku.

Polarizační proud v dielektriku si můžeme názorně představit jako oscilaci elementárních dipólů (viz obr. 5.1). Uvažme model homogenního dielektrika tvořeného orientovanými elementárními dipóly. Každý takový dipól nechť představuje dvojici opačných bodových nábojů velikosti  $Q$  oddělených vzdáleností  $l$ , a má tedy dipólový moment o velikosti  $p = Ql$ . Nechť vázané, například kladné náboje vykonávají kmitavý pohyb tak, že střídavě protínají myšlenou plochu  $S$

a vytvářejí tak makroskopický střídavý proud. Hustotu těchto nábojů označme  $\rho_p$  a koncentraci dipólů označme  $N$ . Bude-li rychlost pohybu nábojů  $\mathbf{v}_p$ , dostaneme pro posuvný proud

$$\mathbf{j}_p = \rho_p \mathbf{v}_p = NQ \frac{d\mathbf{l}}{dt} = N \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (5.15)$$

Hustota Maxwellova proudu  $\mathbf{j}_M$  má skutečně fyzikální rozměr proudové hustoty. Jde o zvláštní, nový typ proudu, který není přímo spojen s pohybem elektrických nábojů (!), nýbrž s časovou změnou elektrického pole. Právě tento Maxwellův proud umožňuje uzavřít obvod střídavého proudu, v němž je zapojen kondenzátor s vakuovou mezerou mezi deskami, podobně jako kmity pružné nepropustné membrány v trubici s kapalinou mohou zprostředkovat proměnný tok kapaliny trubicí. Maxwellův proud zřejmě tedy může (a musí) existovat pouze v případě nestacionárního elektrického pole.

Zavedením celkového proudu  $I_c$  o hustotě  $\mathbf{j}_c$  (5.13) můžeme zobecnit i Ampèrův zákon (3.137) v integrálním tvaru, na jehož pravé straně je nyní třeba uvažovat celkový proud tekoucí plochou ohraničenou křivkou  $l$ :

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_c. \quad (5.16)$$

V tomto tvaru platí Ampèrův zákon zcela obecně, nezávisle na způsobu rozložení proudu v uvažované ploše a na volbě této plochy. Z tvaru rovnic (5.16), popř. (5.12), a z fyzikálního významu veličin  $I_c$  a  $\mathbf{j}_c$  je zároveň vidět fyzikální smysl provedeného zobecnění: V nestacionárním magnetickém poli popsaném rovnicemi (5.16), popř. (5.12), jsou vedle magnetických účinků volných proudů zahrnuty i magnetické účinky polarizačního a Maxwellova proudu. Kvazistacionární magnetické pole, u něhož se magnetické účinky polarizačního a Maxwellova proudu zanedbávají, popisuje správně elektromagnetické jevy jen v situaci, kdy platí

$$\mathbf{j} \gg \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.17)$$

Pro elektromagnetické pole ve vakuu platí

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}; \quad (5.18)$$

dvojice vektorů  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  se liší pouze konstantami bez fyzikálního obsahu.<sup>35</sup> Rovnice (5.12) může být pak vyjádřena pomocí veličin  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , popisujících bezprostředně účinky pole, ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.19)$$

<sup>35</sup> V Gaussově absolutní soustavě jednotek platí pro pole ve vakuu  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  a všechny čtyři vektory mají též fyzikální rozměr (viz (D 2.6)).

Jak se snadno přesvědčíme, veličina  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  má fyzikální rozměr rychlosti. V článku 5.3.1 uvidíme, že na rozdíl od konstant  $\epsilon_0$  a  $\mu_0$  má  $c$  jasný fyzikální význam: představuje totiž rychlost šíření elektromagnetických vln ve vakuu.

### 5.1.3 Úplná soustava Maxwellových rovnic

V předchozích dvou článcích jsme ukázali, jak lze zobecnit rovnice popisující vlastnosti makroskopického elektrického a magnetického pole na případ nestacionárního, časově libovolně proměnného pole. Viděli jsme, že v tomto případě elektrické pole závisí vedle rozložení elektrických nábojů též na změnách magnetického pole a magnetické pole vedle rozložení elektrických proudů také na změnách elektrického pole. To nás opravňuje zavést pojem jediného, a to *elektromagnetického pole*. Důsledkem tohoto zobecnění je pak předpověď existence elektromagnetických vln, které jsou dnes ve všech svých vlastnostech podrobně experimentálně i teoreticky prozkoumány.

Při odvozování rovnic elektromagnetického pole jsme v celém průběhu výkladu postupovali induktivní metodou, tj. vycházeli jsme z experimentálních fakt a pozorování a přecházeli od případů speciálních ke stále obecnějším. Při každém takovém kroku jsme upozorňovali, že formulaci zákonů a rovnic platných pro případ speciální nelze automaticky přenášet na případ obecnější, i když se to zdá sebevíce „samozřejmé“ a zdánlivě není důvodu o obecnější platnosti získaných vztahů pochybovat. Každé zobecnění je třeba znovu experimentálně ověřovat, důsledky z něho plynoucí porovnávat s praktickou zkušeností. Postup, který jsme použili, odpovídá zároveň i historické cestě, na níž byly poznatky o elektromagnetismu v průběhu několika století získávány.

Vlastnosti makroskopického elektromagnetického pole se tak podařilo nakonec shrnout do čtyř obecně platných fyzikálních zákonů. Jsou jimi *zákon Gaussův, zákon Ampèrův zobecněný na případ celkového, nestacionárního proudu, Faradayův zákon elektromagnetické indukce a zákon o neexistenci magnetických nábojů*.

Tyto zákony byly formulovány v integrálním tvaru v této podobě:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, & \quad \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, & \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Velichina  $Q$  značí volný náboj v objemu ohraničeném plochou  $S$ , veličina  $I$  proud procházející smyčkou  $l$ .

V diferenciálním tvaru představují tyto zákony soustavu čtyř parciálních diferenciálních rovnic, *Maxwellových rovnic elektromagnetického pole*:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, & \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Rovnice uvedené v prvním řádku se někdy nazývají první sérií Maxwellových rovnic a udávají vzájemný vztah mezi vektory elektromagnetického pole, objemovou hustotou volných nábojů  $\rho$  a hustotou volných proudů  $\mathbf{j}$ . Rovnicím v druhém řádku se říká druhá série Maxwellových rovnic, vyznačují obecně platné vlastnosti vektoru intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$ . Všimněte si, že pro vektory  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$  takového obecné vlastnosti formulovat nelze.

Při formulování soustavy Maxwellových rovnic jsme se omezili na případ elektromagnetického pole v prostředí nacházejícím se v klidu vůči pozorovací soustavě souřadnic. Indukovaná elektromotorická napětí, popř. další jevy vznikající v pohybujících se vodičích, je třeba popsat pomocí dodatečných vnějších vtištěných sil. Vyčerpávající popis vlastností makroskopického elektromagnetického pole v pohybujícím se prostředí lze nalézt v učebnicích teorie elektromagnetického pole, v nichž jsou uplatněna hlediska teorie relativity (viz například [3]).

Z Maxwellových rovnic vyplývá obecná rovnice continuity proudu (3.15), kterou jsme v článku 3.1.3 formulovali jako výraz obecného zákona zachování náboje. Dostaneme ji po aplikaci operace divergence na rovnici pro  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ , vyjádříme-li  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  pomocí hustoty volných nábojů  $\rho$ . Tento výsledek nás ovšem nepřekvapuje, neboť jak jsme viděli v předchozím článku, bylo zobecnění rovnice pro  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  motivováno právě požadavkem platnosti rovnice continuity v obecném tvaru.

Maxwellovy rovnice (5.21) představují soustavu parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Takové rovnice mají nekonečně mnoho různých řešení a k vyčlenění jednoznačného fyzikálního řešení je nutné doplnit hraniční podmínky. Pohlížíme-li na soustavu (5.21) jako na rovnice k určení vektorů  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$  při zadaném rozložení volných nábojů a proudů, jde o soustavu lineárních nehomogenních rovnic. Můžeme též řešit opačnou lineární úlohu, zjišťovat objemovou hustotu nábojů a hustotu proudů při zadaném elektromagnetickém poli. Tato úloha, zejména v podobě určování pohybu bodových nábojů v elektrických a magnetických polích, má velký praktický význam v elektronice a budeme se jí zabývat v kapitole 6. Nejobecněji můžeme vzít v úvahu, že náboje a proudy se pohybují vlivem sil elektromagnetického pole, ale zároveň samy toto pole i ovlivňují. Tím vzniká velmi složitá nelineární úloha, která nebyla v celé obecnosti dosud vyřešena.

Čtyři neznámé vektorové funkce  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  představují dvanáct neznámých funkcí skalárních a počet osmi (složkových) Maxwellových rovnic je zřejmě k jejich určení nedostatečný. Víme však, že v látkovém prostředí existují materiálové vztahy. V určité aproximaci mohou být vyjádřeny funkčními závislostmi  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$  a  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ . Pro mnoho látek můžeme dokonce předpokládat platnost lineárních vztahů

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.22)$$

a k určení vektorů  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$  stačí tedy znát permitivitu  $\varepsilon$  a permeabilitu  $\mu$  prostředí. V neizotropních lineárních prostředích, kde vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$ , popř.  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  nemusí mít též směr, je třeba znát složky tenzoru permitivity, resp. permeability. Vztahy (5.22) můžeme v souladu s (1.255) a (3.136) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}_m = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}, \quad (5.23)$$

kde  $\chi_e$  a  $\chi_m$  jsou i elektrická a magnetická susceptibilita prostředí.

V kapitole 3 byl prokázán značně obecný charakter Ohmova zákona, viz (3.26),

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^*).$$

Výrazy (5.22) a (3.26) jsou příkladem lineárních materiálových vztahů, které umožňují nahradit údaje o prostorovém rozložení vektorů  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{H}$  v látkovém prostředí znalostí takzvaných materiálových konstant  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  (popřípadě ještě vtištěné intenzity  $\mathbf{E}^*$ ).

Doplníme-li soustavu Maxwellových rovnic materiálovými vztahy, zjednoduší se úloha na hledání vektorů  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  a  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  (tedy šesti skalárních funkcí), jejichž fyzikální význam je dán Lorentzovým vzorcem (3.56). Ve vakuu, kde nejsou přítomny elektrické náboje a proudy a kde platí  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ , nabudou Maxwellovy rovnice zvláště jednoduchého a symetrického tvaru

$$\begin{array}{l} \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array} \quad (5.24)$$

Právě vytčený postup lze využít k určení průběhu polí pouze v těch bodech, v jejichž bezprostředním okolí se parametry prostředí mění spojitě. V oblastech, kde dochází k jejich nespojitým změnám (například na plošném rozhraní dvou typů prostředí), však Maxwellovy rovnice v podobě (5.21) selhávají. V těchto případech je třeba průběh pole vyšetřit užitím integrálních vztahů (5.20). Jak víme, pomocí těchto vztahů byly ve speciálních případech odvozeny podmínky pro změnu tečných, popř. normálových, složek vektorů  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  při přechodu rozhraním dvou prostředí (1.80), (1.82), (3.84), (3.139). Protože integrální

vztahy pro toky vektorů  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$  uzavřenými plochami zůstávají v platnosti i v případě nestacionárního pole, budou z nich odvozené podmínky

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \sigma, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (5.25)$$

také obecně platné. V integrálních vztazích pro cirkulace vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  podél uzavřených křivek se nyní objevují nové členy s parciálními derivacemi  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  a  $\partial \mathbf{D} / \partial t$ . Provedeme-li však analogické odvození s křivkami tvaru malých obdélníků přimykajících k vyšetřované ploše jako v odstavcích 1.2.6 a 3.5.3 a uvážíme-li konečné hodnoty vektorů  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{D}$  a jejich derivací, zjistíme, že tyto nové členy výsledkem neovlivní. Můžeme tedy opět psát

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{j}_s. \quad (5.26)$$

Použijeme-li pojmů plošné divergence a rotace zavedených v dodatku D1, můžeme podmínky na rozhraní vyjádřit v jednoduché a symetrické podobě

$$\begin{array}{l} \text{Div } \mathbf{D} = \sigma, \quad \text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_s, \\ \text{Rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{Div } \mathbf{B} = 0. \end{array} \quad (5.27)$$

Na pravé straně zde přitom vystupují plošná hustota volných nábojů  $\sigma$  a lineární hustota volných plošných proudů  $\mathbf{j}_s$ . Existují-li v látkovém prostředí (dielektriku či magnetiku) pouze vázané náboje a proudy, budou tyto hustoty ovšem nulové a podmínky na rozhraní se dále zjednoduší.

Z matematického hlediska je třeba vztahy (5.27) považovat za hraniční podmínky, kterým musí řešení Maxwellových rovnic (5.21) na plochách nespojitosti vždy vyhovovat. Pro určení konkrétního průběhu elektromagnetického pole dané soustavy mají proto stejnou důležitost jako Maxwellovy rovnice samotné.

#### 5.1.4 Potenciály elektromagnetického pole

V předchozích kapitolách jsme uváděli, že vektorové pole, jehož rotace je v určité oblasti rovna nulovému vektoru, může být vyjádřeno jako gradient nějakého skalárního pole  $\varphi$ . Tak jsme zavedli například elektrostatický potenciál vztahem (1.50), ale i magnetostatický potenciál vztahem (3.157) a podobně jsme mohli zavést i potenciál stacionárního elektrického pole. Zavedením skalárního potenciálu jsme zjednodušili výpočet elektrického pole, neboť místo rovnic pro tři složky vektoru intenzity pole stačilo řešit Laplaceovu rovnici (1.86), popř. Poissonovu rovnici (1.85), pro jedinou skalární funkci. Podotkneme, že jsme přitom nepřisuzovali hodnotě potenciálu přímý fyzikální smysl a definovali jsme jej nejednoznačně, s přesností na aditivní konstantu.

Naopak pro solenoidální vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, jsme v článku 3.3.3 (viz též dodatek D1) zavedli vektorový potenciál tak, aby zmíněné solenoidální pole bylo rovno rotaci tohoto vektorového potenciálu.

Také pomocí vektorového potenciálu jsme zjednodušili výpočet magnetického pole a dospěli opět k vektorové Poissonově rovnici (3.79). Vektorový potenciál byl definován s přesností na libovolné aditivní pole  $\mathbf{A}$  splňující podmínku  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ .

Obecné elektromagnetické pole není ani potenciální, ani solenoidální. Vzniká otázka, není-li možné i v tomto případě zavést potenciály pole tak, abychom usnadnili výpočet a hlouběji prozkoumali obecné vlastnosti tohoto pole.

Soustava Maxwellových rovnic (5.21) ukazuje, že vektorové pole  $\mathbf{B}$ , které je nyní ovšem vázáno s elektrickým polem  $\mathbf{E}$ , je solenoidální, a můžeme tedy zavést vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  vztahem  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Tento vektorový potenciál bude nyní ovšem představovat nestacionární vektorové pole  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Po jeho dosazení do rovnice pro  $\text{rot } \mathbf{E}$  dostaneme

$$\text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}. \quad (5.28)$$

I když elektrické pole  $\mathbf{E}$  není potenciální, ukazuje se být potenciálním pole  $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ . Můžeme tedy zavést skalární potenciál  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , který bude opět nestacionární, vztahem

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \varphi. \quad (5.29)$$

Zavedeme-li nyní tyto potenciály do první série Maxwellových rovnic, stačí vyřešit pouze tyto dvě rovnice (jednu vektorovou a jednu skalární) pro potenciály a výsledné pole určit ze vztahů

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.30)$$

Druhá série Maxwellových rovnic vystupuje tedy pouze jako určitá obecná podmínka kladená na elektromagnetické pole, která bude při tomto postupu splněna automaticky. Navíc na oba potenciály  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  bude možné klást dodatečné požadavky, které nám usnadní nalézt jednoznačného řešení pro pole  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ .

Naznačený postup provedeme za zjednodušujícího předpokladu, že mezi vektory  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$  platí lineární materiálové vztahy (5.22). Dosazením (5.30) do první série Maxwellových rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= -\frac{\rho}{\epsilon}, \\ \text{rot rot } \mathbf{A} &= \mu \mathbf{j} - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \text{grad } \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (5.31)$$

a tyto rovnice upravíme pomocí vzorců vektorové analýzy (D.1.56) a (D.1.58) na tvar

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A}, \quad (5.32)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} + \text{grad} \left( \text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Soustava rovnic (5.32) je dosti složitá a zavedením potenciálů jsme si v obecném případě nepomohli. Kdybychom však mohli požadovat, aby potenciály  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$  splňovaly podmínku

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (5.33)$$

odpadne druhý člen na pravé straně druhé z rovnic (5.32) a tyto rovnice se radikálně zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon}, \\ \Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Soustava (5.34) představuje čtyři takzvané *nehomogenní vlnové rovnice* (jednu dvojici rovnic skalární a jednu vektorovou). Metody řešení těchto rovnic jsou podrobně studovány matematickou fyzikou.

Jsou-li v nějaké oblasti prostoru hustota volných nábojů a hustota volných proudů nulové, přejde soustava rovnic (5.34) na rovnice *homogenní*

$$\begin{aligned} \Delta \varphi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

kteří popisují šíření elektromagnetických vln v prostoru. (Tyto rovnice představují vlastně zobecnění Laplaceových rovnic na nestacionární případ.) Nehomogenní rovnice (5.34) pak navíc popisují vyzářování a pohlcování těchto vln, které je důsledkem tzv. budících členů na pravé straně rovnic.

Podmínka (5.33), kterou jsme omezili potenciály, se nazývá *podmínkou Lorentzovou* a možnost jejího uplatnění vyjadřuje důležitou vlastnost elektromagnetického pole. Připomeňme, že ve stacionárním poli přejde tato podmínka v požadavek  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , který jsme využili v kapitole 3. Elektromagnetické potenciály nejsou určeny jednoznačně, a můžeme je proto nahradit novými potenciály  $\varphi'$ ,  $\mathbf{A}'$  podle vztahů

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } A, \quad (5.36)$$

kde  $A$  je libovolná funkce.

Transformace (5.36) se nazývají *kalibrační* (též *cejchovací*), protože se při nich nemění měřitelné veličiny  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ . Snadno si ověříme, že podle (5.30) a (D 1.64)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\text{grad } \varphi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\text{grad } \varphi + \text{grad} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\text{grad } A) \\ &= -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } A = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Elektromagnetické pole je, jak říkáme, *kalibračně invariantní*, a tím se řadí k neobyčejně významné třídě polí studovaných ve fyzice elementárních částic.

Uplatníme-li Lorentzovu podmínku na potenciály  $\varphi'$ ,  $\mathbf{A}'$ , dostaneme

$$\text{div } \mathbf{A}' + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \text{div } \mathbf{A} + \text{div grad } A + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (5.38)$$

Vidíme tedy, že k tomu, abychom mohli řešit Maxwellovy rovnice metodou potenciálů za použití Lorentzovy podmínky, musí existovat řešení nehomogenní vlnové rovnice pro  $A$ :

$$\Delta A - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = - \left( \text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \quad (5.39)$$

Na pravé straně této rovnice vystupuje zadaná funkce souřadnic a času. V matematické fyzice se ukazuje, že tato rovnice má dokonce nekonečně mnoho řešení, a tak je možné vždy příslušnou funkci  $A$  zvolit a Lorentzovu podmínku použít.

## 5.2 Energie a hybnost elektromagnetického pole

### 5.2.1 Poyntingova věta

Podle veškeré dosavadní zkušenosti jsou fyzikální jevy v souladu se zákony zachování energie a hybnosti. Pro danou soustavu je však vždy nutné určit konkrétní možné formy energie a jejich přeměn. Uvažujme nyní fyzikální soustavu nabitých částic v elektromagnetickém poli. Předpokládejme například, že v prostoru je určitým způsobem rozložen volný elektrický náboj s objemovou hustotou  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , jehož pohyb je popsán polem rychlostí  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Určeme energii, kterou uvažované elektromagnetické pole dodá tomuto náboji.

Podle Lorentzova vzorce (3.56) můžeme vyjádřit hustotu síly  $\mathbf{f}$ , kterou elektromagnetické pole působí na takto rozložený prostorový náboj

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5.40)$$

Pro výkon  $n$  dodávaný elektromagnetickým polem do jednotkového objemu plyne

$$n = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.41)$$

Vyjádříme-li proudovou hustotu  $\mathbf{j}$  z Maxwellovy rovnice pro rot  $\mathbf{H}$  (5.21), můžeme výraz (5.41) upravit na tvar

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Z Maxwellovy rovnice pro rot  $\mathbf{E}$  (5.21) můžeme skalárním vynásobením  $\mathbf{H}$  vytvořit obdobu výrazu na pravé straně (5.42)

$$\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.43)$$

a sečtením (5.42) a (5.43) výraz pro hustotu výkonu  $n$  symetrizovat na tvar

$$n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E}) - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (5.44)$$

Podle (D 1.55) platí

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}, \quad (5.45)$$

takže dostáváme výsledek

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (5.46)$$

Rovnice (5.46) nemá zatím jasný fyzikální smysl. Víme o ní pouze tolik, že člen na její levé straně vyjadřuje výkon dodaný polem do jednotkového objemu, takže zbylé členy musí mít také fyzikální rozměr hustoty výkonu. Dále víme, že rovnice je přímým důsledkem obecných Maxwellových rovnic, takže jako celek musí platit pro libovolné elektromagnetické pole.

Abychom mohli podat její fyzikální interpretaci, budeme uvažovat poněkud konkrétnější situaci. Především předpokládejme, že v uvažovaném prostředí platí materiálové vztahy  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , přičemž konstanty  $\varepsilon$ ,  $\mu$  nezávisí na čase. Jde tedy o lineární měkké prostředí. Poslední člen na pravé straně (5.46) pak můžeme upravit na



$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \right]. \quad (5.47)$$

Zavedeme označení

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (5.48)$$

Vztah (5.46) lze pak zapsat kompaktním způsobem jako

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (5.49)$$

Všimněme si, že veličina  $w$  má fyzikální rozměr *objemové hustoty energie* a je součtem výrazů (1.267) a (4.100), které jsme interpretovali jako hustotu energie elektrického a magnetického pole. Veličina  $\mathbf{S}$  představuje vektor kolmý k vektorům intenzity elektrického a magnetického pole a má rozměr *hustoty toku energie*  $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ . Navíc v části prostoru bez volných nábojů, kde  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ , má rovnice (5.49) tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (5.50)$$

který je formálně shodný s rovnicí kontinuity proudu (3.15). Tato rovnice, jak víme, vyjadřuje zákon zachování elektrického náboje, a je proto nasnadě interpretovat rovnici (5.50) jako diferenciální (lokální) tvar zákona zachování energie v té části prostoru, v níž nepůsobí zdroje energie ani nenastávají její ztráty.

Konkretizujme dále, že proudová hustota  $\mathbf{j}$  představuje hustotu kondukčního proudu ve vodiči splňujícím Ohmův zákon v obecném tvaru (3.26). Potom můžeme psát

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{j^2}{\gamma} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*, \quad (5.51)$$

kde  $\mathbf{E}^*$  představuje vtištěnou (elektromotorickou) intenzitu. Rovnici (5.49) pak přepíšeme na

$$\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j} = \frac{j^2}{\gamma} + \frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (5.52)$$

Zvolme nyní libovolnou uzavřenou plochu  $\Sigma$ , již nemohou pronikat částice a která ohraničuje objem  $V$ , a vypočtěme objemový integrál z pravé i levé strany poslední rovnice:

$$\int_V \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j} dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV + \frac{d}{dt} \int_V w dV + \int_V \operatorname{div} \mathbf{S} dV. \quad (5.53)$$

Poslední člen na pravé straně můžeme převést na plošný integrál užitím Gaussovy věty (D 1.32). Dostaneme výsledek

$$\int_V \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j} dV = \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV + \frac{d}{dt} \int_V w dV + \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{\Sigma}. \quad (5.54)$$

Tato rovnice zřejmě představuje energetickou bilanci v objemu  $V$ . Člen na levé straně vyjadřuje výkon dodávaný do objemu  $V$  vtištěnými intenzitami  $\mathbf{E}^*$ . Část této energie se v tomto objemu nevratně mění na Jouleovo teplo; vyjadřuje to první člen na pravé straně. Integrál v druhém členu představuje součet integrálů (1.266) a (4.99), a lze jej tedy chápat jako energii elektromagnetického pole připadající na objem  $V$ . Celý druhý člen pak bude mít význam časové změny energie. Poslední člen na pravé straně představuje tok vektoru  $\mathbf{S}$  plochou  $\Sigma$ . Nabízí se proto možnost interpretovat jej jako energii vytékající z objemu  $V$ .

Je-li možné právě uvedenou interpretaci jednotlivých členů rovnice (5.54) považovat za správnou, vyjadřuje tato rovnice zákon zachování energie v objemu  $V$ . Rovnice pak říká: *Výkon dodaný do objemu vtištěnými intenzitami se spotřebuje jednak na Jouleovo teplo a na změnu energie elektromagnetického pole, jednak část tohoto výkonu vyteče plochou  $\Sigma$  ohraničující objem  $V$ .*

Rovnice (5.54) byla odvozena J. H. Poyntingem, který také podal její interpretaci, uvedenou v předchozím výkladu. Nazývá se proto často *Poyntingovou větou*. Veličina  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  vyjadřující hustotu toku energie se nazývá *Poyntingův vektor*. Přesto, že rovnice (5.54) jako celek je důsledkem Maxwellových rovnic a její platnost je za uvedených podmínek nesporná, musíme uvedenou interpretaci jednotlivých jejích členů považovat za předpoklad, který vyžaduje experimentální ověření. Dosavadní experimentální zkušenost není však s touto interpretací v rozporu.

Připomeňme, že při odvozování výrazů (1.267) a (4.99) pro hustotu energie stacionárního či kvazistacionárního elektrického, respektive magnetického pole jsme zdůrazňovali, že jsme fyzikálně oprávněni hovořit pouze o celkové energii těchto polí v daném objemu, která odpovídá práci vynaložené na jejich vytvoření. Pojem objemové hustoty energie statických, resp. stacionárních polí byl přes svou plauzibilitu pouhým předpokladem, interpretací bez možnosti dát mu přímý experimentálně zdůvodněný smysl. Jiná situace je ovšem u obecného elektromagnetického pole. Poyntingův vektor zde představuje skutečnou, měřitelnou hustotu toku energie, jíž odpovídají změny skutečné objemové hustoty energie dané prvním z výrazů (5.48).

Tato hustota energie elektromagnetického pole v měkkém lineárním prostředí zahrnuje ovšem jak energii samotného pole, tak i energii vynaloženou na polarizaci a magnetizaci prostředí. V případě vakua má elektromagnetické pole hustotu energie

$$w = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{E^2}{c^2} + B^2 \right) \quad (5.55)$$

a hustota jejího toku je rovna

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (5.56)$$

### 5.2.2 Hybnost elektromagnetického pole

Viděli jsme, že elektromagnetické pole působí na nabitě částice silou o objemové hustotě (5.40), která mění jejich energii. Z mechaniky však víme, že podle zákona síly se bude měnit také hybnost těchto částic. Můžeme proto usoudit, že i pro hybnost bude platit obdoba Poyntingovy věty (5.54), vyjadřující zákon zachování: *Hybnost dodávaná ohraničenému objemu V bude předávána jednak částicím, jednak elektromagnetickému poli v tomto objemu a může též ubývat vlivem toku hybnosti plochou  $\Sigma$  ven z tohoto objemu. Nositelem tohoto toku hybnosti mohou být přitom jak částice, tak elektromagnetické pole.*

Hustota toku nějaké skalární veličiny představuje vektor. Jde-li přitom o veličinu vytékající z daného uzavřeného objemu, v němž nemůže ani vznikat, ani zanikat, bude úbytek této veličiny roven toku plochou  $\Sigma$  ohraničující tento objem. Omezíme se dále na případ objemu, jehož hranicí nepronikají částice. Pro energii  $W$  elektromagnetického pole v objemu  $V$  bude v tomto případě její bilance vyjádřena vztahem

$$-\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V (w + w_p) dV = \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}, \quad (5.57)$$

kde  $\mathbf{S}$  je Poyntingův vektor,  $w$  hustota energie pole a  $w_p$  hustota energie částic. Podle (5.41) platí

$$\frac{\partial w_p}{\partial t} = n = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (5.58)$$

takže v diferenciálním tvaru přechází (5.57) na (5.49).

Podobně budeme postupovat v případě hybnosti. Označme předpokládanou *objemovou hustotu hybnosti* elektromagnetického pole  $\mathbf{g}$ , hybnost částic v jednotkovém objemu  $\mathbf{p}$ , celkovou hybnost v objemu  $V$  symbolem  $\Pi$  a tok hybnosti elektromagnetického pole plochou  $\Sigma$  jako  $\boldsymbol{\Xi}$ . Potom můžeme vyjádřit bilanci hybnosti vztahem

$$-\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V (\mathbf{g} + \mathbf{p}) dV = \boldsymbol{\Xi}. \quad (5.59)$$

Víme, že tok skalární veličiny danou plochou je dán integrálem skalárního součinu dvou vektorů charakterizujících jediné dva význačné směry – směr proudění dané veličiny (vyjadřuje jej vektor hustoty toku) a směr normály k dané ploše. Hustota toku skalární veličiny je tedy vektor. Složitější je ovšem situace, uvažujeme-li tok nějaké vektorové veličiny, například hybnosti. V tomto případě přibývá další směr daný vektorem hybnosti. Hustota toku vektorové veličiny má pak charakter tenzoru, tedy veličiny určené dvěma indexy  $i, k$ , kde hodnoty 1, 2, 3 těchto indexů odpovídají složkám ve směru os  $x, y, z$ . Při přechodu k jiné soustavě souřadnic se složky tenzorů transformují jako součiny odpovídajících složek vektorů.

V uvažovaném případě můžeme  $i$ -tou složku toku hybnosti elektromagnetického pole plochou  $\Sigma$  vyjádřit integrálem

$$\Xi_i = \oint_{\Sigma} \sigma_{ik} d\Sigma_k, \quad (5.60)$$

kde  $\sigma_{ik}$  představuje takzvaný *tenzor napětí* a v integrálu se rozumí sčítání přes index  $k$  od 1 do 3. Složky tenzoru napětí mají fyzikální rozměr objemové hustoty energie, který je též jako rozměr tlaku či mechanického napětí, tj.  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ . Je to tenzor dobře známý z mechaniky kontinua, kde udává sílu působící na jednotku plochy – tlakovou, tahovou nebo smykovou.

Plošný integrál na pravé straně (5.60) lze pomocí věty tenzorového počtu analogické k větě Gaussově převést na integrál objemový

$$\oint_{\Sigma} \sigma_{ik} d\Sigma_k = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (5.61)$$

Výraz

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{iz}}{\partial z} \quad (5.62)$$

můžeme považovat za  $i$ -tou složku vektoru, který má charakter divergence tenzorové veličiny  $\sigma_{ik}$ .

Bilanci  $i$ -té složky hybnosti můžeme tedy podle (5.59) až (5.61) vyjádřit v integrálním tvaru jako

$$\frac{d}{dt} \int_V p_i dV = -\frac{d}{dt} \int_V g_i dV - \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV \quad (5.63)$$

a v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad (5.64)$$

Podle Newtonova zákona síly bude pro hustotu síly  $\mathbf{f}$  danou (5.40) platit

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (5.65)$$

Vyjádříme-li hustoty  $\rho$  a  $\mathbf{j}$  z Maxwellových rovnic (5.21), dostaneme

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \left( \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}. \quad (5.66)$$

K pravé straně (5.66) přičteme nulové vektory

$$\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \left( \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \times \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad (5.67)$$

kteří z Maxwellových rovnic vyplývají. Tak dostaneme symetrický výraz pro hustotu síly

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + [\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H}]. \quad (5.68)$$

Nyní porovnáme složkovou rovnici (5.64) a vektorovou rovnici (5.68). Vidíme, že tyto rovnice si budou odpovídat, bude-li objemová hustota hybnosti elektromagnetického pole rovna

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \varepsilon \mu \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (5.69)$$

a podaří-li se upravit výraz v hranaté závorce na pravé straně rov. (5.68) na tvar  $\partial \sigma_{ik} / \partial x_k$ . Tato poněkud komplikovanější úprava, kterou zde nebudeme provádět (viz např. [3]), vede na tenzor

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - E_i D_k - H_i B_k = w \delta_{ik} - E_i D_k - H_i B_k \quad (5.70)$$

nazývaný *Maxwellovým tenzorem napětí* ( $\delta_{ik}$  je Kroneckerův symbol rovný nule při  $i \neq k$  a rovný jedné při  $i = k$ ).

Objemová hustota hybnosti (5.69) zahrnuje ovšem jak hybnost elektromagnetického pole, tak i hybnost vázaných nábojů v látkovém prostředí. Ve vakuu máme

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (5.71)$$

Hustota hybnosti souvisí tedy jednoduchým vztahem (5.71) s hustotou toku energie. Tento vztah má ve speciální teorii relativity obecnou platnost.

Uvedené výsledky svědčí o tom, že elektromagnetickému poli lze přiřadit takové mechanické veličiny, jako je objemová hustota energie, hustota toku energie, objemová hustota hybnosti, tenzor napětí, a jak lze ukázat (viz např. [3]), i hustota momentu hybnosti. Všechny tyto vlastnosti elektromagnetického pole jsou přitom v dobré shodě s experimentální zkušeností, která je potvrzuje se stále větším stupněm jistoty. Není proto důvodu považovat elektromagnetické pole za méně hmotný objekt, než jsou látková tělesa.

### 5.2.3 \*Termodynamické vztahy v přítomnosti elektromagnetického pole

Termodynamika se zabývá fenomenologickým popisem obecných vlastností a zákonitostí chování makroskopických fyzikálních soustav, především vlastnostmi jejich rovnovážných stavů a přechodů mezi těmito stavy. Makroskopické soustavy jsou tvořeny velkým množstvím částic zaujímajících určitý objem a vystavených působení vnitřních i vnějších sil. Termodynamika přitom pohlíží na tyto soustavy částic (plyn, kapalinu, těleso v pevném skupenství, dielektrikum, magnetikum apod.) jako na kontinuum a odhlíží od jejich vnitřní struktury.<sup>36</sup> Základní termodynamická metoda spočívá ve vyšetřování bilance výměny energie a ve vyšetřování možných forem její výměny v dané soustavě. Termodynamika přitom rozeznává dvě základní formy výměny energie. První z nich je tzv. *koherentní výměna energie*, kdy všechna energie může být přeměněna v mechanickou práci spojenou se změnami makroskopických souřadnic soustavy. Druhá, *nekoherentní* forma výměny energie se nazývá teplo a jejím charakteristickým rysem je, že (obecně řečeno) všechna v mechanickou práci přeměněna být nemůže.

Termodynamické metody mohou být použity k vyšetřování vlastností libovolné fyzikální soustavy. Mají tudíž i nezastupitelné místo pro studium soustav vykazujících elektromagnetické jevy. Úkolem tohoto článku není řešení konkrétních úloh v takových soustavách, ale jen formulace základních termodynamických vztahů za přítomnosti elektromagnetického pole. V tomto smyslu představuje doplnění úvah prezentovaných v článku 5.2.1. Dříve však, než přistoupíme k vlastnímu plnění uvedeného úkolu, krátce zrekapitulujeme nejzákladnější obecné termodynamické pojmy a zákony.

Stav dané termodynamické soustavy je obecně určen jednak stavem jednotlivých jejích součástí, jednak vnějšími podmínkami. Pro popis tohoto stavu je pak možné zavést tzv. *vnitřní* a *vnější* makroskopické *parametry*. Je-li například soustava tvořena určitým množstvím plynu, může být za vnitřní parametr považován jeho tlak, který je funkcí stavu jednotlivých molekul. Za vnější parametr

<sup>36</sup> Mikroskopickým výkladem termodynamických vlastností makroskopických soustav se zabývá statistická fyzika.

může být naopak považován objem určený rozměry nádoby, v níž je plyn uzavřen. Ve stavu *termodynamické rovnováhy* (nebo ve stavu k ní blízkém) může být zavedena teplota  $T$  soustavy a hodnoty vnitřních parametrů jsou určeny jen hodnotami vnějších parametrů a teplotou.

Termodynamika používá k charakterizování stavu vyšetřované soustavy tzv. *stavové veličiny*. Nejdůležitější z nich jsou *vnitřní energie*  $U$  a *entropie*  $S$ , pomocí nichž lze vyjádřit základní termodynamické zákony. Důležitá je přitom skutečnost, že ve stavu termodynamické rovnováhy (nebo ve stavu k ní blízkém) jsou stavové veličiny rovněž jednoznačnou funkcí jen vnějších parametrů a teploty.

Při změně vnějších parametrů  $\xi_i$ , dochází obecně ke změně stavu soustavy. Okolní tělesa mohou přitom působit na soustavu silami a konat mechanickou práci. Při malé změně vnějších parametrů  $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots$  může být tato práce  $W$  vyjádřena vztahem

$$\delta W = \sum_i G_i \delta \xi_i, \quad (5.72)$$

v němž  $G_i$  představují zobecněné síly příslušející jednotlivým parametrům  $\xi_i$ . Okolní tělesa však mohou soustavě dodávat současně i teplo. *První zákon termodynamiky* vyjadřuje energetickou bilanci mezi soustavou a okolními tělesy. Říká, že teplo  $\delta Q$  a práce  $\delta W$  dodané dané soustavě se rovnají změně její vnitřní energie  $\delta U$ . Tedy

$$\delta U = \delta Q + \delta W. \quad (5.73)$$

Změna tepla dodaného soustavě souvisí se změnou entropie  $S$ . Podle *druhého zákona termodynamiky* nemůže entropie soustavy klesat; při nevratných procesech entropie vzrůstá, při vratných procesech zůstává konstantní. Výrazem druhého základního zákona termodynamiky je nerovnost

$$\frac{\delta Q}{T} \leq \delta S. \quad (5.74)$$

Rovnost ve vztahu (5.74) přichází v úvahu pro vratné (kvazirównovážné) procesy.

V daném rovnovážném stavu je stavovou veličinou rovněž tzv. *volná energie* definovaná vztahem

$$F = U - TS. \quad (5.75)$$

Její význam spočívá v tom, že umožňuje přímo vyjádřit zobecněné síly  $G_i$  působící na soustavu a i její entropii. Platí

$$G_i = \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \right)_{T = \text{konst}}, \quad S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{\xi_i = \text{konst}}. \quad (5.76)$$

Zvláštní význam mezi termodynamickými procesy mají tzv. *adiabatické procesy*, při nichž stav soustavy není ovlivňován přenosem tepla z okolí. Adiabatické procesy nastávají tedy především v tepelně izolovaných soustavách, mohou však za ně být považovány i krátkodobé procesy v libovolných soustavách, při nichž lze přenos tepla s okolím zanedbat. Při vratném adiabatickém procesu se nemění entropie soustavy a  $\delta S = \delta Q/T = 0$ . Potom podle (5.73) máme

$$\delta U = \delta W. \quad (5.77)$$

Práce vnějších sil je tedy rovna změně vnitřní energie.

Obraťme nyní pozornost k řešení vlastního úkolu tohoto článku, tj. k formulaci termodynamických vztahů za přítomnosti elektromagnetického pole. Za tímto účelem budeme uvažovat makroskopickou soustavu vymezenou uzavřenou plochou  $\Sigma$ , která se nachází ve vnějším elektromagnetickém poli. Při formulaci termodynamických vztahů budeme vedle sil jiné fyzikální povahy, kterými na soustavu působí okolní tělesa, uvažovat ještě působení elektromagnetického pole přes hraniční plochu  $\Sigma$ , jehož charakter musí být ovšem v souladu s výsledky článku 5.2.1. Jelikož elektromagnetické pole představuje stejně reálnou fyzikální substanci jako látka, budeme pole uvnitř plochy považovat za součást naší soustavy.

Uvedené vymezení termodynamické soustavy přináší zcela novou fyzikální situaci. Experiment totiž ukazuje, že látky libovolného skupenství mohou vzhledem k svým vnitřním stupňům volnosti nejen *absorbovat*, ale i *spontánně emitovat* elektromagnetické záření, jehož intenzita i spektrální složení je silně závislé na teplotě. Obecně řečeno, i toto záření by mělo být považováno za součást uvažované soustavy a měly by být na ně aplikovány zákony termodynamiky. Uvedené záření má ovšem nekoherentní charakter a je – jak víme – odpovědné za přenos tepla mezi tělesy o různých teplotách. Ve stavu termodynamické rovnováhy mluvíme o *rovnovážném záření*. Z hlediska makroskopické teorie může být považováno za fluktuace mikroskopických polí, a nebudeme je proto do dalších úvah zahrnovat.<sup>37</sup>

Interakce *koherentního elektromagnetického pole* s danou soustavou může být popsána na základě obecného vztahu (5.46) vyjadřujícího energetickou bilanci. Po integraci přes objem soustavy  $V$  a po převedení prvního členu pravé strany na plošný integrál přes plochu  $\Sigma$  ohraničující soustavu dostaneme

$$- \oint_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{\Sigma} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV. \quad (5.78)$$

<sup>37</sup> Aplikace zákonů termodynamiky na rovnovážné záření vede k požadavku obecné relace mezi intenzitou záření a koeficientem absorpce (tzv. Kirchhoffovy zákony) a k odvození závislosti integrální intenzity na teplotě (Stefanův-Boltzmannův zákon). O těchto otázkách je možné se poučit například v [1]. Experimentálně je možné vliv rovnovážného tepelného záření na vyšetřovanou soustavu vyloučit jejím obklopením tělesem udržovaným na teplotě, která je rovna teplotě soustavy.

Integrál na levé straně představuje výkon  $N$  dodávaný elektromagnetickým polem soustavě (tok nějaké veličiny vstupující danou plochou do uzavřeného objemu se bere jako záporný, tok vystupující jako kladný). Práce  $\delta W$  vykonaná polem za krátký časový interval  $\delta t$  bude pak rovna

$$\delta W = N \delta t. \quad (5.79)$$

Pro zjednodušení vyloučíme z úvah soustavu obsahující volné nositele proudu. Vezmeme-li v úvahu výsledky čl. 5.2.1 o objemovém rozložení energie v elektromagnetickém poli (srov. též články 1.5.5 a 4.3.2), můžeme vyjádřit objemovou hustotu energie  $\delta w$  dodávanou elektromagnetickým polem jako

$$\delta w = \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (5.80)$$

Z tvaru (5.80) je vidět, že podle (5.72) lze intenzity  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  považovat za obecné síly, zatímco vektory indukce  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$  hrají roli vnějších parametrů. Užitím uvedených výsledků je možné již jednoduše vyjádřit vnitřní i volnou energii soustavy. Vztáhneme-li všechny stavové veličiny na jednotkový objem a příslušné jejich hustoty označíme analogickými malými písmeny, dostaneme při vynechání neelektromagnetických interakcí

$$\delta u = T \delta s + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}, \quad \delta f = -s \delta T + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B}. \quad (5.81)$$

Podle (5.76) pak platí<sup>38</sup>

$$E_i = \left( \frac{\partial f}{\partial D_i} \right)_{T = \text{konst}}, \quad H_i = \left( \frac{\partial f}{\partial B_i} \right)_{T = \text{konst}}. \quad (5.82)$$

V případě vratných adiabatických procesů lze s ohledem na (5.77) intenzity určovat přímo z vnitřní energie.

Vnitřní (resp. volná) energie soustavy, jak jsme ji zavedli, zahrnuje jak energii látkového prostředí ve vnějším poli, tak energii pole, které by existovalo bez přítomnosti tohoto látkového prostředí. Je účelné energii těchto polí  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  od energie soustavy odečíst, a najít tak energii odpovídající pouze termodynamickému stavu tělesa. Pro dielektrikum jsme se zabývali touto otázkou v závěru článku 1.5.5, pro magnetikum v článku 4.3.2. Zjistili jsme, že hustoty přírůstku energie tělesa lze vyjádřit pomocí vektoru polarizace, resp. magnetizace jako

<sup>38</sup> Alternativně je možné přejít k termodynamickému potenciálu

$$\varphi = f - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}; \quad (5.83)$$

potom platí

$$D_i = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial E_i} \right)_{T = \text{konst}}, \quad B_i = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial H_i} \right)_{T = \text{konst}}. \quad (5.84)$$

$$\delta w_e = -\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}_0, \quad \delta w_m = -\mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{B}_0. \quad (5.85)$$

Změna celkové volné energie tělesa po odečtení změny energie vnějšího pole bude

$$\delta \mathcal{F} = \int_V (\delta f - \epsilon_0 \mathbf{E}_0 \cdot \delta \mathbf{E}_0 - \mu_0 \mathbf{H}_0 \cdot \delta \mathbf{H}_0) dV = - \int_V (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}_m \cdot \delta \mathbf{H}_0) dV. \quad (5.86)$$

Jsou-li vnější pole homogenní, dostaneme

$$\delta \mathcal{F} = -\delta \mathbf{E}_0 \cdot \int_V \mathbf{P} dV - \delta \mathbf{H}_0 \cdot \int_V \mathbf{P}_m dV = -\mathbf{p}_e \cdot \delta \mathbf{E}_0 - \mathbf{p}_m \cdot \delta \mathbf{H}_0 \quad (5.87)$$

( $\mathbf{p}_e$  a  $\mathbf{p}_m$  jsou celkový elektrický a magnetický dipólový moment tělesa).

Pro diferenciál volné energie pak můžeme psát

$$d\mathcal{F} = -S dT - \mathbf{p}_e \cdot d\mathbf{E}_0 - \mathbf{p}_m \cdot d\mathbf{H}_0. \quad (5.88)$$

Vidíme, že v soustavě tvořené látkovým tělesem ve vnějším elektrickém a magnetickém poli představují celkový elektrický a magnetický dipólový moment tělesa obecné síly a intenzity vnějších polí pak vnější parametry.

## 5.3 Elektromagnetické vlny

### 5.3.1 Rovinná elektromagnetická vlna

V nauce o vlnění se zavádí pojem *postupné rovinné vlny*. Tato vlna popisuje takový stav neomezeného spojitého prostředí, kdy hodnota určité veličiny  $f$ , vyjadřující lokální vlastnosti tohoto prostředí, závisí na čase  $t$  a poloze  $\mathbf{r}$  podle funkce typu

$$f(\xi) = f(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt). \quad (5.89)$$

Zde  $\mathbf{s}$  je jednotkový vektor stálého směru a  $v$  značí reálný parametr. Z tvaru funkce (5.89) vyplývá, že v daném okamžiku  $t$  má veličina  $f$  stejnou hodnotu ve všech bodech roviny  $\pi$  kolmé k vektoru  $\mathbf{s}$  a dané rovnicí

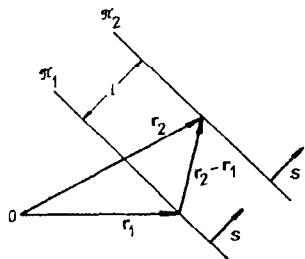
$$\xi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{konst}. \quad (5.90)$$

Tato rovina se nazývá *rovinou konstantní fáze* (rovinou vlnoplochou); fázi rozumíme přitom argument  $\xi$  funkce  $f$ . Parametr  $v$  má rozměr rychlosti a nazývá se *fázovou rychlostí vlny*.

Uvažme dvě různé roviny konstantní fáze  $\pi_1$  a  $\pi_2$  dané rovnicí (5.90) a odpovídající dvěma okamžikům  $t_1$  a  $t_2$ . Z obrázku 5.2 je zřejmé, že vzdálenost těchto dvou rovin je rovna

$$l = \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = v(t_2 - t_1). \quad (5.91)$$

Máme tedy rovinnou postupnou vlnu šířící se ve směru vektoru  $\mathbf{s}$  rychlostí  $v$ .



Obr. 5.2 Vlnoplochy rovinné vlny.

Budeme nyní uvažovat Maxwellovy rovnice pro případ, že celý prostor je vyplněn homogenním nevodivým prostředím o permitivitě  $\epsilon$  a permeabilitě  $\mu$ , ve kterém nejsou přítomny žádné volné náboje. Máme tedy

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Dvojnásobnou aplikací operace rotace dostaneme po snadné úpravě pro vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  analogické vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{D} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Vzhledem k obecnému vztahu vektorové analýzy (D 1.58) a nulovosti divergence  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{B}$  dostaneme z (5.93)

$$\Delta \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad \Delta \mathbf{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (5.94)$$

Všechny složky vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  vyhovují tedy parciální diferenciální rovnici pro funkci  $f$  tvaru

$$\Delta f - \epsilon \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (5.95)$$

Jak víme, této rovnici vyhovují i potenciály elektromagnetického pole (5.35). Dosadíme do této rovnice funkci (5.89), která popisuje šíření postupné rovinné vlny ve směru  $\mathbf{s}$ . Dostaneme

$$(1 - \epsilon \mu v^2) \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (5.96)$$

Vidíme tedy, že rovnice (5.95) bude splněna za předpokladu, že fázová rychlost vlny bude rovna

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (5.97)$$

Uvedená rovnice představuje homogenní vlnovou rovnici a řešení typu (5.89) je pouze jedním z mnoha řešení této rovnice. Protože jde o rovnici lineární, bude i každá superpozice řešení typu postupných rovinných vln jejím řešením. Rovinná vlna (5.89) představuje tedy důležitý jednoduchý typ vlny, s nímž se setkáváme v mnoha oblastech fyziky a jehož zkoumání umožňuje analyzovat i případy šíření vln složitějšího průběhu.

Složky vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  elektromagnetického pole se mohou šířit prostorem v podobě rovinné vlny fázovou rychlostí (5.97), která pro případ vakua přechází v rychlost světla ve vakuu  $c$ . Možnost existence elektromagnetického pole šířícího se v podobě vlny v prostoru bez elektrických nábojů vzbuzovala v Maxwellově době údiv a nedůvěru a teprve objev těchto vln znamenal velkolepé potvrzení Maxwellovy teorie. Maxwell si rovněž uvědomil, že shoda konstanty<sup>39</sup>  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  vyplývající z rovnic elektromagnetického pole, s rychlostí světla ve vakuu není náhodná a vyslovil odtud hypotézu o *elektromagnetické povaze světla*. Šíření elektromagnetických vln (světla) v látkovém prostředí se obvykle charakterizuje (absolutním) indexem lomu  $n$  definovaným vztahem

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (5.98)$$

Protože pro většinu látek  $\mu_r \approx 1$ ,  $\epsilon_r \geq 1$ , je  $n \geq 1$  a elektromagnetické vlny se šíří v látkovém prostředí pomaleji než ve vakuu.

Libovolná dvojice funkcí  $\mathbf{E}(\xi)$ ,  $\mathbf{B}(\xi)$  s  $\xi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt$  nemusí ještě vyhovovat soustavě Maxwellových rovnic (5.92) jako celku. K tomu je třeba, aby ještě

<sup>39</sup> Číselně ji určili W. Weber a R. Kohlrausch v roce 1855.

splňovaly další podmínky. Abychom tyto podmínky našli, uvědomme si, že mezi prostorovými derivacemi a časovou derivací funkce  $\mathbf{E}(\xi)$  platí vztahy

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = -\frac{s_x}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} = -\frac{s_y}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -\frac{s_z}{v} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (5.99)$$

Proto můžeme rotaci  $\mathbf{E}$  vyjádřit pomocí časové derivace

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{v} \left( \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) \quad (5.100)$$

a porovnáním s Maxwellovou rovnicí pro rot  $\mathbf{E}$  dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = v \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.101)$$

Integrací, jestliže položíme integrační konstantu rovnu nule, získáme výsledek

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} (\mathbf{s} \times \mathbf{E}). \quad (5.102)$$

Analogickým postupem lze vypočítat

$$\mathbf{E} = -v (\mathbf{s} \times \mathbf{B}). \quad (5.103)$$

Podmínky (5.102), (5.103) tedy říkají, že průběh intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$  ve tvaru rovinné vlny

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (5.104)$$

budou řešením Maxwellových rovnic jedině tehdy, budou-li oba vektory v každém okamžiku a každém bodě navzájem kolmé a také kolmé ke společnému směru šíření  $\mathbf{s}$ . V tomto smyslu je rovinná elektromagnetická vlna *příčná*, *transverzální*. Z uvedených podmínek dále vyplývá, že vektory  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  tvoří v napsaném pořadí pravotočivý ortogonální systém.

V tomto okamžiku si hloubavý čtenář klade otázku, proč neexistují také rovinné vlny, u nichž by vektory  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  tvořily levotočivý systém; jak známo v přírodě se realizují všechny možnosti, které nejsou zakázány některým přírodním zákonem. V daném případě jde však o určité nedorozumění způsobené okolností, že vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}$  není polárním vektorem, ale pseudovektorem (viz dodatek D 1). Přejdeme-li totiž od pravotočivé kartézské soustavy souřadnic  $x, y, z$  k levotočivé pomocí inverze  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ , změní vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{s}$  znaménko, zatímco pseudovektor  $\mathbf{B}$  nikoliv. Z trojice vektorů  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  se přitom stane levotočivý ortogonální systém. Je zřejmé, že taková změna soustavy souřadnic se nijak neprojeví ve fyzikálních důsledcích a že oba tyto popisy jsou zcela rovnocenné. Přesně vzato bychom neměli znázorňovat pseudovektor  $\mathbf{B}$  šipkou jako vektor  $\mathbf{E}$ . Pseudovektor nám udává smysl rotace kolem přímky, ale jeho orientace závisí na tom, zda volíme levotočivou nebo pravotočivou souřadnicovou soustavu.

Vidíme tedy, že rovinná elektromagnetická vlna má vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  uspořádány vzhledem ke směru šíření symetricky a nedává možnost jejich alternativního uspořádání.

Velikost vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  jsou spojeny vztahem

$$E = v B. \quad (5.105)$$

Poměr velikostí vektorů intenzity  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  definuje *charakteristickou impedanci*  $Z$  prostředí. Podle (5.105), (5.97) a materiálových vztahů z (5.92) je

$$Z = \frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (5.106)$$

Charakteristická impedace vakua je číselně rovna

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \mu_0 c = 120\pi \text{ } (\Omega) = 377 \text{ } (\Omega) \quad (5.106a)$$

a velmi málo se liší od charakteristické impedace vzduchu.

Při popisu šíření elektromagnetických vln můžeme tedy vlastnosti prostředí charakterizovat fázovou rychlostí  $v$  (respektive indexem lomu  $n$ ) a charakteristickou impedancí  $Z$ . Vezmeme-li v úvahu vztah (5.105), můžeme vyjádřit hustotu energie  $w$  a hustotu toku energie  $\mathbf{S}$  zavedené vztahem (5.48) pro rovinnou vlnu jako

$$w = \frac{E^2}{\mu v^2}, \quad \mathbf{S} = \frac{E^2}{\mu v} \mathbf{s} = w v \mathbf{s}. \quad (5.107)$$

### 5.3.2 Monochromatická rovinná vlna

Nejčastěji se setkáváme s případem periodických rovinných vln, kdy hodnoty funkce (5.89) se opakují vždy po uplynutí doby  $T$  rovné *periodě* funkce  $f(\xi)$ .

Veličina

$$\lambda = vT \quad (5.108)$$

vyjadřující vzdálenost dvou nejbližších vlnoploch, v nichž se funkční hodnota mění synchronně, se nazývá *vlnovou délkou*. Převrácenou hodnotu periody vlny nazýváme *kmitočtem* (frekvencí) vlny  $\nu$ , převrácenou hodnotu vlnové délky *vlnočtem*  $\sigma$ :

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \sigma = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.109)$$

Kmitočet udává počet kmitů za jednotku času, vlnočet počet vln připadajících na jednotku délky.

Podle matematické teorie Fourierovy analýzy (srov. článek 8.3.1) můžeme každou periodickou funkci vyjádřit jako superpozici funkcí harmonických. Za nejjednodušší rovinnou vlnu můžeme tedy považovat takovou, u níž se vektory polí mění podle harmonického zákona:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(k\xi + \alpha) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - kv t + \alpha). \quad (5.110)$$

Konstantní vektor  $\mathbf{E}_0$  představuje *amplitudu vlny*, veličinu  $k$  nazýváme *vlnovým číslem* (úhlovým vlnočtem), vektor  $\mathbf{k} = k \mathbf{s}$  *vlnovým vektorem*, veličinu

$$\omega = kv \quad (5.111)$$

*úhlovým kmitočtem* (úhlovou frekvencí) a číslo  $\alpha$  *fázovou konstantou* (počáteční fází). V těchto označeních pak můžeme psát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha). \quad (5.112)$$

Z periodicity harmonické funkce plyne, že úhlový kmitočt souvisí s periodou  $T$  a kmitočtem v vztahem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (5.113)$$

a vlnové číslo s vlnovou délkou  $\lambda$  a vlnočtem  $\sigma$  vztahem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma. \quad (5.114)$$

Rovnice (5.111) představuje tzv. *disperzní vztah* pro rovinnou monochromatickou elektromagnetickou vlnu a vyjadřuje souvislost časového a prostorového průběhu vlny. Pro jiné typy vln může disperzní vztah nabývat složitější podoby, zejména může fázová rychlost  $v = \omega/k$  být funkcí úhlového kmitočtu  $\omega$  nebo vlnového čísla  $k$ . V takových případech mluvíme o časové a prostorové *disperzi* vlny.

Známe-li průběh intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  rovinné harmonické vlny v prostoru a čase, najdeme vektor magnetické indukce  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  pomocí (5.102). Dostaneme

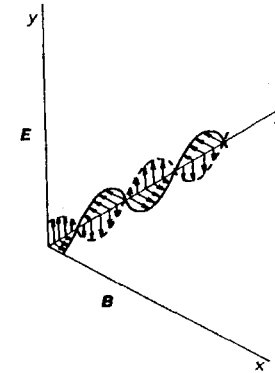
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{vk} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha), \quad (5.115)$$

kde

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0. \quad (5.116)$$

Vidíme, že vektor  $\mathbf{B}$  je zadáním vektoru  $\mathbf{E}$  plně určen. Elektrické a magnetické pole vlny se mění v každém okamžiku a v každém bodě prostoru s touž fází. Vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  zůstávají navzájem kolmé a společně kolmé ke směru šíření vlny. Situace je znázorněna na obr. 5.3.

Zvolme kartézskou osu  $z$  ve směru šíření vlny  $\mathbf{k}$ . Vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  leží tedy v rovině  $xy$ . Při splnění všech dosud odvozených obecných vztahů zůstává ještě neurčitost v poloze vektoru  $\mathbf{E}$  vůči osám  $x, y$ . Není totiž zřejmé, bude-li vektor  $\mathbf{E}$  při šíření vlny zachovávat svůj směr v prostoru, nebo zda jej bude měnit.



Obr. 5.3 Rozložení elektrického a magnetického pole v rovinné postupné vlně v zadaném okamžiku.

Složky vektoru  $\mathbf{E}$  do směru os  $x$  a  $y$  můžeme obecně vyjádřit takto

$$E_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t + \alpha_1), \quad E_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \alpha_2). \quad (5.117)$$

$E_{x0}$  a  $E_{y0}$  jsou amplitudy kmitů ve směru souřadných os,  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$  obecně různé fázové konstanty. Označme  $kz - \omega t + \alpha_1 = \varphi$ ,  $\alpha_2 - \alpha_1 = \delta$ , takže

$$E_x = E_{x0} \cos \varphi, \quad E_y = E_{y0} \cos(\varphi + \delta) = E_{y0} (\cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta). \quad (5.118)$$

Vyjádříme-li z (5.118)  $\sin \varphi$  a  $\cos \varphi$  a použijeme-li vztah  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , dospějeme k rovnici

$$\left( \frac{E_x}{E_{x0}} \right)^2 + \left( \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (5.119)$$

Proměnné  $E_x$  a  $E_y$  nám v této rovnici udávají trajektorii pohybu koncového bodu vektoru  $\mathbf{E}$  v rovině  $xy$ . Rovnice (5.119) představuje přitom rovnici elipsy se středem v počátku souřadnic. Plyne odtud, že monochromatická vlna je obecně *elipticky polarizována*. Bude-li  $\delta = n\pi$ , kde  $n$  je celé číslo, přejde (5.119) na



$$E_y = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x. \quad (5.120)$$

V tom případě bude vektor  $\mathbf{E}$  oscilovat podél přímky daného směru vzhledem k osám souřadnic. Říkáme, že taková vlna je *lineárně polarizována*. Bude-li  $\delta = (n + 1/2)\pi$ , dostaneme

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 = 1. \quad (5.121)$$

Bude-li navíc  $E_{x0} = E_{y0}$ , bude koncový bod vektoru  $\mathbf{E}$  opisovat kružnici a vlna bude *kruhově polarizována*. Může být přitom jak pravotočivá, tak levotočivá.

### 5.3.3 Vyzářování elektromagnetických vln

K vyzářování elektromagnetických vln dochází při nestacionárním pohybu elektrických nábojů. Z matematického hlediska bychom přitom museli řešit nehomogenní vlnové rovnice typu (5.34), což představuje poměrně obtížnou úlohu. Naznačíme proto jen některé vlastnosti nejjednoduššího z takových řešení, *dipólového záření ve vlnové zóně*.

Vraťme se k článku 1.3.2, kde jsme pomocí multipólového rozvoje hledali elektrostatický potenciál náboje rozloženého v objemu  $V$ , a to ve vzdálenostech  $R$  značně převyšujících rozměry objemu  $V$ . Uvažujme opět takový objem a předpokládejme, že náboje se v tomto objemu pohybují, takže objemová hustota náboje i proudová hustota jsou nestacionární:  $\rho(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ . Necht' je pro jednoduchost celkový náboj v objemu  $V$  nulový:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0. \quad (5.122)$$

Víme, že pro statický náboj bude potenciál dán výrazem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{R}, \quad (5.123)$$

kde  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}$  je polohový vektor bodu, v němž potenciál určujeme, a  $\mathbf{r}'$  probíhá objem  $V$ . Analýza nehomogenní vlnové rovnice ukazuje, že i pro nestacionární pole bude skalární potenciál podobného tvaru s tím rozdílem, že při integrování je třeba uvažovat časovou závislost  $\rho$  v retardovaném čase  $t' = t - (R/v)$ . S retardovaným časem jsme se již setkali v článku 2.2.4 v souvislosti s Liénardovými–Wiechertovými potenciály a jeho zavedení je logický důsledek konečné rychlosti šíření elektromagnetického pole. Máme tedy

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} dV'. \quad (5.124)$$

Omezíme se opět na přiblížení velkých vzdáleností. Rozvineme-li integrand v (5.124) do Taylorova rozvoje a ponecháme jen členy nejnižších řádů, dostaneme

$$\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} = \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{v}\right)}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \left( \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{v}\right)}{r} \right) + \dots \quad (5.125)$$

Označme proměnnou  $t - r/v = \tau$ . Potenciál je pak možné aproximovat jako

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon r} \int_V \rho dV - \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', \tau) dV \right). \quad (5.126)$$

První člen na pravé straně (5.126) je podle (5.122) roven nule, druhý můžeme vyjádřit pomocí proměnného dipólového momentu soustavy

$$\mathbf{p}(t') = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') dV'. \quad (5.127)$$

Dostáváme tedy skalární potenciál v *dipólovém přiblížení*

$$\varphi_d(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\mathbf{p}(\tau)}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}}{r^3} + \frac{\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}}{v r^2} \right). \quad (5.128)$$

Tečkou jsme označili derivaci  $\mathbf{p}$  podle celého argumentu  $t' = t - R/v$ , derivace se bere v okamžiku  $\tau$ . Potenciál (5.128) je možné interpretovat jako retardovaný potenciál buzený časově proměnným dipólem  $\mathbf{p}(t)$  umístěným v počátku. Vidíme, že první člen (5.128) je formálně shodný s elektrostatickým potenciálem (1.121).

Nestacionární elektromagnetické pole určujeme ze skalárního a vektorového potenciálu podle vztahů (5.30). Je tedy ještě třeba znát vektorový potenciál  $\mathbf{A}$  v odpovídajícím přiblížení. Také vektorový potenciál je třeba určovat integrací proudové hustoty v retardovaném čase. Podle (3.80) máme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{R} dV'. \quad (5.129)$$

V dipólovém přiblížení dostáváme člen

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dV. \quad (5.130)$$

V případě stacionárního pole, kdy platí  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  a všechny proudové smyčky musí být v objemu  $V$  uzavřeny, bude integrál na pravé straně (5.130) roven nule. V nestacionárním poli však existuje posuvný proud, který v objemu  $V$  vyrovnává časové změny rozložení náboje proměnného elektrického dipólu. Použijeme-li výraz pro hustotu posuvného proudu (3.12), dostaneme

$$\int_V \mathbf{j}_p(\mathbf{r}', \tau) dV = \int_V \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{p}(\tau). \quad (5.131)$$

Můžeme tedy napsat vektorový potenciál (5.130) ve tvaru

$$\mathbf{A}_d(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{p}(\tau)}{r} \right) \quad (5.132)$$

a porovnat jej se skalárním potenciálem (5.128). V prvním, dipólovém přiblížení popisují potenciály  $\varphi_d$  a  $\mathbf{A}_d$  vyzařování elektromagnetického pole soustavou nábojů uzavřených v objemu  $V$  a charakterizovaných proměnným dipólovým momentem  $\mathbf{p}(t)$ . Takovým systémem je například anténa.

Vektory elektrického a magnetického pole najdeme z potenciálů  $\varphi_d$  a  $\mathbf{A}_d$  pomocí vztahů (5.30). Výpočet není principiálně obtížný, ale je pracný. Uvedeme tedy pouze výsledek, přičemž se omezíme na členy úměrné první mocnině  $1/r$ , které převažují v dostatečně vzdálenosti od počátku. Tuto oblast nazýváme *vlnovou zónou* a je v ní splněna podmínka  $r \gg \lambda$ , kde  $\lambda$  je vlnová délka. Vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  jsou zde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}}{4\pi\epsilon v^2 r}, \quad (5.133)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{s} \times \ddot{\mathbf{p}}}{v r},$$

kde  $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r$  je jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{r}$ .

Elektromagnetické pole ve vlnové zóně má tvar rozbíhavé kulové (sférické) vlny, neboť plochy konstantní fáze vyhovují rovnici

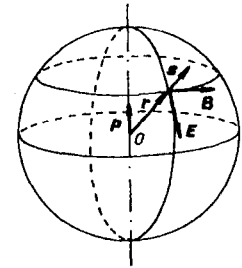
$$\tau = t - \frac{r}{v} = \text{konst} \quad (5.134)$$

a jsou to kulové plochy rozpínající se fázovou rychlostí  $v$ .

Ve vlnové zóně má pole podobné vlastnosti jako rovinná vlna. Je příčně vzhledem ke směru šíření  $\mathbf{s}$  (snadno si ověříme, že  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0$ ,  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = 0$ ) a platí pro ně

$$\mathbf{s} \times \mathbf{E} = v \mathbf{B}, \quad E = v B. \quad (5.135)$$

Vzájemná poloha vektorů  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  je znázorněna na obr. 5.4.



Obr. 5.4 Orientace elektrického a magnetického pole vůči směru šíření v kulové vlně.

Vidíme, že k vyzařování elektromagnetických vln do prostoru dochází tehdy, je-li druhá derivace časově proměnného elektrického dipólového momentu  $\mathbf{p}$  nenulová. Směr vektoru  $\mathbf{p}$  určuje také charakter polarizace vlny. Protože je pole  $\mathbf{E}$  kolmé ke směru  $\mathbf{s}$ , je možné ho vyjádřit pomocí složky  $\ddot{\mathbf{p}}_{\perp}$ , tedy projekce vektoru  $\ddot{\mathbf{p}}$  do roviny tečné k vlnoploše:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\ddot{\mathbf{p}}_{\perp}(\tau)}{4\pi\epsilon v^2 r}. \quad (5.136)$$

Hustota toku energie ve vlnové zóně je podle (5.48), (5.106) a (5.135)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu v} \mathbf{E} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{Z} E^2 \mathbf{s}. \quad (5.137)$$

Tok energie tedy míří směrem  $\mathbf{s}$ , jeho hustota má velikost

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_{\perp}(\tau)|^2}{16\pi^2 \epsilon^2 v^4 Z r^2} \quad (5.138)$$

a klesá se čtvercem vzdálenosti. Energie procházející každým okamžikem kulovou plochou o velkém poloměru  $r$  nezávisí tedy na  $r$ . Tato energie generovaná dipólem  $\mathbf{p}$  je elektromagnetickým polem unášena nenávratně pryč. Právě takové pole nazýváme *elektromagnetickým zářením*.

Nyní budeme poněkud konkretizovat časový průběh změny elektrického dipólu, Nechť je tento dipól lineárně polarizován (má konstantní směr  $\mathbf{p}_0$ , jímž proložíme osu  $z$ ) a mění se v čase podle harmonického zákona

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cos \omega t. \quad (5.139)$$

Potom

$$\ddot{\mathbf{p}}_{\perp}^2 = \omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \omega t, \quad (5.140)$$

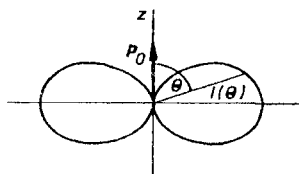
kde  $\theta$  je úhel mezi vektory  $\mathbf{p}_0$  a  $\mathbf{s}$ . Poyntingův vektor dostáváme jako

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr)}{16\pi^2 \epsilon^2 v^4 Z r^2} \mathbf{s} = \frac{v k^4 p_0^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr)}{16\pi^2 \epsilon r^2} \mathbf{s}. \quad (5.141)$$

Jeho časově střední hodnota je rovna

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{v k^4 p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon r^2} \mathbf{s}. \quad (5.142)$$

Absolutní hodnotu  $\langle \mathbf{S} \rangle$  nazýváme intenzitou záření  $I(\theta)$  v daném směru a její úhlové rozložení je vyjádřeno vyzářovacím diagramem (viz obr. 5.5). Dipól vyzářuje s maximální intenzitou ve směru  $\theta = \pi/2$ , zatímco ve směrech  $\theta = 0, \pi$  je intenzita záření nulová.



Obr. 5.5 Vyzářovací diagram lineárně polarizovaného dipólu.

Celkový časově střední výkon vyzářovaný dipólem do prostoru najdeme integrováním intenzity záření  $I(\theta)$  ve sférických souřadnicích  $r, \varphi, \theta$  přes celý prostorový úhel  $4\pi$ :

$$\langle P \rangle = \int_{4\pi} I(\theta) r^2 d\Omega = \frac{v k^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{v k^4 p_0^2}{12\pi \epsilon} \quad (5.143)$$

(platí  $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ ).

### 5.3.4 Řešené příklady

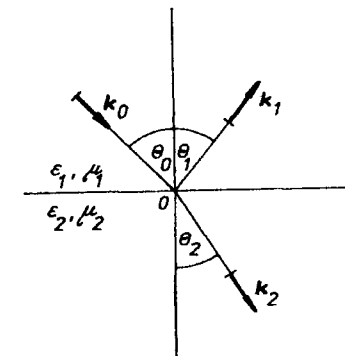
#### a) Odraz a lom elektromagnetických vln

Nechť monochromatická lineárně polarizovaná rovinná elektromagnetická vlna dopadá na rozhraní dvou nevodivých prostředí charakterizovaných materiálovými konstantami  $\epsilon_1, \mu_1$  a  $\epsilon_2, \mu_2$  či indexy lomu  $n_1, n_2$ . Označme vlnové vektory dopadající, odražené a lomené vlny  $\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ , rovinu určenou normálou k roz-

hraní  $\mathbf{n}$  a vektorem  $\mathbf{k}_0$  nazvěme rovinou dopadu. Z důvodu symetrie je zřejmé, že všechny tři vlny budou rovinné a že i vektory  $\mathbf{k}_1$  a  $\mathbf{k}_2$  budou ležet v rovině dopadu (viz obr. 5.6).

Tečné složky elektrického pole na rozhraní musí být spojitě, takže pro libovolné  $t$  a  $\mathbf{r}$  musí pro body rozhraní platit

$$E_{0t} \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} + \alpha_0) + E_{1t} \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \alpha_1) = E_{2t} \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \alpha_2). \quad (5.144)$$



Obr. 5.6 Odraz a lom lineárně polarizované rovinné vlny na rovinném rozhraní dvou dielektrických prostředí.

Podmínku (5.144) nelze splnit jinak, než když

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad k_{0t} = k_{1t} = k_{2t}, \quad \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2, \quad (5.145)$$

takže

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2. \quad (5.146)$$

Odtud s použitím disperzních vztahů

$$\omega = v_1 k_0 = v_1 k_1 \quad (5.147)$$

plyne zákon odrazu

$$\theta_0 = \theta_1 \quad (5.148)$$

a Snellův zákon lomu

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}. \quad (5.149)$$

Podmínky na rozhraní umožňují určit také vzájemný poměr amplitud dopadající, odražené a lomené vlny. Z (1.277) a (3.139) pro vektory amplitud plyne

$$\mathbf{n} \cdot [\varepsilon_1 (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) - \varepsilon_2 \mathbf{E}_2] = 0, \quad (5.150a)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2] = \mathbf{0}, \quad (5.150b)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{s}_1 \times \mathbf{E}_1) - \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \mathbf{s}_2 \times \mathbf{E}_2] = 0, \quad (5.150c)$$

$$\mathbf{n} \times \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (\mathbf{s}_0 \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{s}_1 \times \mathbf{E}_1) - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \mathbf{s}_2 \times \mathbf{E}_2 \right] = \mathbf{0}, \quad (5.150d)$$

kde  $\mathbf{s}_i = \mathbf{k}_i / k_i$ .

Zkoumejme nyní zvlášť případ dopadající vlny polarizované kolmo k rovině dopadu a polarizované v rovině dopadu. V prvním případě je podmínka (5.150a) splněna identicky a z (5.150b) plyne

$$\frac{E_2}{E_0} = \frac{E_1}{E_0} + 1. \quad (5.151)$$

Ze (5.150c) plyne též rovnice a (5.150d) nám po úpravě a suvážením  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_1 = -\cos\theta_1$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_2 = \cos\theta_2$  dá

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left( \frac{E_1}{E_0} - 1 \right) \cos\theta_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \frac{E_2}{E_0} \cos\theta_2 = 0. \quad (5.152)$$

Řešením soustavy rovnic (5.151) a (5.152) dostaneme poměry amplitud  $E_1/E_0$ ,  $E_2/E_0$ . V elektrických prostředích můžeme aproximovat  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , a výsledek se tím podstatně zjednoduší. Dostaneme vztahy

$$\left( \frac{E_1}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}, \quad \left( \frac{E_2}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{2 \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}. \quad (5.153)$$

Obdobný výpočet pro vlnu polarizovanou v rovině dopadu nebudeme provádět (viz např. [6]), dostali bychom

$$\left( \frac{E_1}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \left( \frac{E_2}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2 \cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (5.154)$$

Výrazy (5.153) a (5.154) se nazývají *Fresnelovy vzorce*. Při kolmém dopadu plyne z (5.153) i z (5.154), tedy bez ohledu na polarizaci vlny,

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad \frac{E_2}{E_0} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (5.155)$$

V praxi se obvykle používá jak koeficient odrazu  $R$ , tak i koeficient propustnosti  $T$  úměrný čtverci amplitud. Tak pro koeficienty odrazu vlny polarizované kolmo a tečně k rovině dopadu podle (5.153) a (5.154) máme

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)}, \quad R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (5.156)$$

Pro koeficienty  $T_{\perp}$ ,  $T_{\parallel}$  platí, že  $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$ ,  $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$ .

Ze vzorců (5.156) plynou zajímavé fyzikální důsledky. Bude-li  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ , potom  $R_{\parallel} = 0$  a tečně polarizovaná vlna bude procházet rozhraním bez odrazu. Podle zákona (5.149) to nastane při úhlu dopadu  $\theta_0 = \theta_B$ , pro nějž platí

$$\operatorname{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.157)$$

Úhlu  $\theta_B$  se říká *Brewsterův úhel*.

Bude-li  $\theta_2 \geq \pi/2$ , dojde k *totálnímu odrazu* vlny na rozhraní. Pro mezní úhel  $\theta_0 = \theta_T$  dostáváme

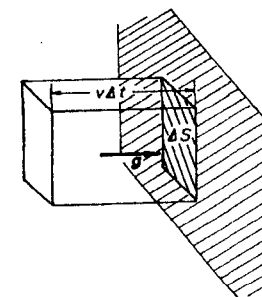
$$\sin\theta_T = \frac{n_2}{n_1}. \quad (5.158)$$

Vidíme, že k totálnímu odrazu může dojít jen při přechodu z prostředí o větším indexu lomu do prostředí s menším indexem lomu, a to při libovolné polarizaci vlny.

#### b) Tlak záření

Při studiu vlastností elektromagnetického pole jsme zjistili, že tomuto poli přísluší objemová hustota energie  $w$  a hustota hybnosti  $\mathbf{g}$  daná podle (5.71) a (5.107) jako

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{v^2} = \frac{w}{v} \mathbf{s}. \quad (5.159)$$



Obr. 5.7 K výkladu tlaku záření.

Uvažujme elektromagnetické záření, které dopadá kolmo na povrch látkového tělesa, v němž se toto záření zcela pohltí. Přitom záření odevzdá za dobu  $\Delta t$  na části povrchu tělesa  $\Delta S$  hybnost obsaženou v objemu  $\Delta V = v \Delta t \Delta S$  (viz obr. 5.7). Tato hybnost je rovna

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{g} \Delta V = w \Delta t \Delta S \mathbf{s}. \quad (5.160)$$

Odpovídající síla působící na těleso je

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = w \Delta S \mathbf{s} \quad (5.161)$$

a záření tedy vyvíjí na jednotku plochy povrchu tělesa tlak rovný hustotě energie rovinné vlny  $w$ .

Je-li povrch tělesa dokonale odrazivý, změní se hybnost záření při odrazu na opačnou a tlak se zdvojnásobí. Je-li koeficient odrazu povrchu  $R$ , bude tento tlak roven  $(1 + R)w$ .

Experimentální důkaz existence tlaku světla podal P. N. Lebeděv v r. 1899. Tlak záření běžných světelných zdrojů představuje ovšem nesmírně malou veličinu a jeho měření je mimořádně obtížné. Sluneční záření dopadající na povrch Země přináší výkon o plošné hustotě kolem 1 kilowattu na čtvereční metr, což odpovídá tlaku  $3 \cdot 10^{-6}$  Pa. Naproti tomu současné výkonné lasery jsou schopny vyvinout okamžitou plošnou hustotu výkonu až  $10^{19}$  wattů na čtvereční metr, a tedy tlak záření  $3 \cdot 10^{10}$  Pa!

### c) Povrchový jev (skinefekt)

Dosud jsme uvažovali pouze o šíření elektromagnetických vln v nevodivém prostředí. Má-li prostředí nenulovou vodivost  $\gamma$ , můžeme zapsat Maxwellovu rovnici pro rot  $\mathbf{H}$  s užitím Ohmova zákona  $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$  jako

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.162)$$

Použijeme-li tuto rovnici v soustavě Maxwellových rovnic (5.92), dostaneme analogickým postupem místo rovnic (5.94) pro vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  rovnice typu

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (5.163)$$

Rovnice (5.163) se nazývá *zobecněná vlnová rovnice* a na rozdíl od vlnových rovnic (5.94) popisuje šíření tlumené elektromagnetické vlny. Vzhledem k vodivosti prostředí mění se část energie vlny v Jouleovo teplo a amplituda vlny postupně slábně.

Pro velmi dobré vodiče a nepříliš vysoké kmitočty ( $\omega \ll \gamma \epsilon$ ) můžeme v rovnici (5.162) zanedbat posuvný proud. Potom z rovnic

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.164)$$

s uvážením toho, že uvnitř vodiče  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ , dostaneme

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (5.165)$$

Má-li vlna v čase harmonický průběh, můžeme položit

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \quad (5.166)$$

a po dosazení do (5.165) získáme rovnici pro časově nezávislý vektor  $\mathbf{E}_0$

$$\Delta \mathbf{E}_0 - i\omega \mu \gamma \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.167)$$

Nechť se pole šíří ve směru osy  $z$  a vektor  $\mathbf{E}_0$  míří podél osy  $x$ . Pak z (5.167) máme obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{d^2 E_0}{dz^2} - i\omega \mu \gamma E_0 = 0 \quad (5.168)$$

s řešením

$$E_0 = C_1 e^{\alpha_1 z} + C_2 e^{\alpha_2 z}, \quad (5.169)$$

kde

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{i\omega \mu \gamma} = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} (1 + i) = \pm (1 + i) \delta. \quad (5.170)$$

Je tedy

$$E_0 = C_1 e^{\delta z} e^{i\delta z} + C_2 e^{-\delta z} e^{-i\delta z}. \quad (5.171)$$

Aby pole nenarůstalo do nekonečna, musíme položit  $C_1 = 0$  a z (5.166) a (5.171) máme

$$E_x = C_2 e^{-\delta z} e^{i(\omega t - \delta z)}. \quad (5.172)$$

To odpovídá proudové hustotě

$$j_x = \gamma E_x = j_0 e^{-\delta z} e^{i(\omega t - \delta z)}. \quad (5.173)$$

Získané výsledky lze jednoduše aplikovat ve dvou situacích. Při kolmém dopadu elektromagnetické monochromatické rovinné vlny na hranici poloprostoru zaplněného vodivým prostředím bude složka elektrického pole rovnoběžná s rozhraním při pronikání do vodiče zmenšovat svou amplitudu s koeficientem útlumu

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}. \quad (5.174)$$

Za druhé při protékání střídavého elektrického proudu vodičem v kvazistacionárním přiblížení bude velikost proudové hustoty (5.173) klesat exponenciálně v závislosti na vzdálenosti od povrchu vodiče. Převážná část proudu poteče tedy v povrchové vrstvě tloušťky  $1/\delta$ . Jde o takzvaný *povrchový jev* (*skinefekt*, z angl. skin = kůže) a projevuje se tím výrazněji, čím vyšší je kmitočet pole (v rámci použitého přiblížení) a vodivost vodiče.

## 5.4 \*Lorentzovy rovnice

Při popisu elektromagnetických jevů jsme dosud (s výjimkou kapitoly 2) sledovali makroskopický (fenomenologický) přístup v jeho historické souvislosti a postupně jsme dospěli od poli statických a stacionárních k obecnému poli elektromagnetickému. To je makroskopicky popsáno soustavou Maxwellových rovnic (5.21) shrnujících bohatou experimentální zkušenost. Elektrické a magnetické pole jsme z počátku zaváděli víceméně formálně jako vhodný prostředek popisu silového působení elektrických nábojů a proudů a teprve obecné nestacionární pole charakterizované Maxwellovými rovnicemi se nám ukázalo být zcela reálným fyzikálním objektem. Toto pole souvisí s pohybem elektrických nábojů a proudů, ale může existovat i nezávisle na nich jako elektromagnetická vlna šířící se prostorem.

Je třeba si uvědomit, že Maxwellova teorie vznikala v době, kdy nebylo téměř nic známo o mikrofyzikální struktuře látek. Je proto nutné ji považovat za teorii fenomenologickou, založenou na výsledcích experimentálního studia chování makroskopických objektů. Vliv látkového prostředí na chování elektromagnetického pole je v Maxwellově teorii popsán zavedenými materiálovými konstantami, jako jsou relativní permitivita, relativní permeabilita a konduktivita (měrná vodivost). Maxwellova teorie sama není schopna nic říci o hodnotách těchto konstant ani o jejich závislosti na parametrech elektromagnetického pole či jiných fyzikálních podmínkách. V rámci makroskopické teorie je tedy nutné je určovat experimentálně.

Maxwellova teorie elektromagnetického pole zaznamenala velké úspěchy především předpovědí existence elektromagnetických vln, na jejichž základě bylo možné vypracovat i elektromagnetickou teorii světla. Zároveň však již v posledních desetiletích devatenáctého století byly provedeny některé experimenty, které umožnily vytvoření představ o existenci „elementárních atomových kvant elektřiny“. Na základě studia vedení proudu zředěnými plyny byl objeven elektron, čímž byla tato hypotéza potvrzena. Pak již byla zřejmá potřeba nové mikroskopické teorie, která by za prvé byla schopna popisovat elektromagne-

tické jevy v mikroskopickém měřítku a která by za druhé umožnila kvantitativní výpočet makroskopických materiálových konstant na základě chování mikroskopických objektů – elektronů, atomů, molekul apod.

První mikroskopickou teorii elektromagnetických jevů vytvořil H. A. Lorentz v devadesátých letech devatenáctého století. Výchozím bodem jeho teorie byla v té době již přijímaná představa o atomové struktuře látek. Lorentz předpokládal, že látkové prostředí je složeno z elementárních (mikroskopických) kladných a záporných elektrických nábojů, které jsou zdrojem každého elektromagnetického pole. Lorentz dále předpokládal, že toto pole může být považováno za elektromagnetické pole ve vakuu a může být popsáno odpovídajícími rovnicemi Maxwellova typu.

I když v Lorentzově době nebyla ještě známa struktura atomu a atomového jádra, měla tato teorie značný význam a stala se východiskem pro řešení řady fundamentálních problémů tehdejší fyziky. Jednou z jejích zásluh je samotné vymezení úkolu mikroskopické teorie jako teorie modelové. Elektrický náboj tvořící zdroj elektromagnetického pole je z hlediska této teorie chápán jako jedna z primárních charakteristik jeho mikroskopických nositelů. Chování těchto nositelů je podmíněno jejich fyzikální podstatou a nemůže být odvozeno jen z rovnic elektromagnetického pole. Je-li však vytvořen model postihující některé podstatné stránky chování uvedených objektů, mohou již být rovnice elektromagnetického pole použity nejen k určení tohoto pole, ale také k určení zpětného působení elektromagnetického pole na nositele náboje. Dalším, možná ještě významnějším, přínosem Lorentzovy teorie je, že umožnila hlubší poznání nejobecnějších vlastností elektromagnetického pole, což nakonec vedlo k vytvoření teorie relativity.

V kapitole 2 jsme viděli, že model bodových (nebo bezstrukturně objemově rozprostřených) nábojů ve vakuu pohybujících se jednoduchým zadaným způsobem, umožňuje na základě Coulombova zákona a relativistických Lorentzových transformací dospět k soustavě rovnic (2.77), formálně shodné se soustavou Maxwellových rovnic pro  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Model použitý v kapitole 2 nevyžaduje rozlišování mezi makroskopickým a mikroskopickým přístupem. Naproti tomu z něho ovšem nelze bez dalšího experimentálního nebo teoretického zdůvodnění dělat závěry pro reálné pole v látkovém prostředí.

### 5.4.1 Mikroskopický popis elektromagnetického pole

Základem Lorentzovy mikroskopické teorie je předpoklad, že jediným zdrojem elektromagnetického pole jsou mikrofyzikální částice, které jsou nositeli náboje. Tento předpoklad umožnil popsat libovolné elektromagnetické pole pomocí prostorového rozložení a pohybu těchto elementárních nábojů ve vakuu.

Lorentz předpokládal, že i v mikroskopickém měřítku lze zavést veličinu  $\rho^{(m)}(\mathbf{r}, t)$  vyjadřující okamžitou hodnotu objemové hustoty náboje v daném

bodě. Dále předpokládá, že pohyb mikroskopických nábojů je možné popsat polem rychlosti  $\mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ <sup>40</sup>, takže můžeme zavést hustotu mikroskopického proudu

$$\mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = \rho^{(m)}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}^{(m)}(\mathbf{r}, t). \quad (5.175)$$

Pohybující se elementární náboje vytvářejí podle Lorentzových předpokladů mikroskopická elektromagnetická pole, jejichž vektory  $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$  jsou s veličinami  $\rho^{(m)}$ ,  $\mathbf{v}^{(m)}$ ,  $\mathbf{j}^{(m)}$  ve vztahu popsaném rovnicemi Maxwellova typu. Podle uvedeného pojetí je možné toto mikroskopické pole považovat za pole ve vakuu, takže platí relace  $\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$ . Libovolné elektromagnetické pole ve vakuu je možné popsat pouze dvěma vektorovými funkcemi: vektorem intenzity elektrického pole a vektorem magnetické indukce. Odvoláme-li se na soustavu Maxwellových rovnic (5.21), můžeme rovnice pro mikroskopická pole napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e} &= \frac{\rho^{(m)}}{\epsilon_0}, & \operatorname{rot} \mathbf{b} &= \mu_0 \rho^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{b} &= 0. \end{aligned} \quad (5.176)$$

Rovnice (5.176) se nazývají *Lorentzovými rovnicemi*. Vzhledem k tomu, že popisují pole ve vakuu, jsou formálně poněkud jednodušší než rovnice Maxwellovy a z fyzikálního hlediska obecnější. Lze na ně pohlížet jako na primární, tj. výchozí, a makroskopické Maxwellovy rovnice z nich vyvodit. Elektromagnetické pole popisované Lorentzovými rovnicemi je z fyzikálních důvodů principiálně nestacionární, neboť mikročástice jsou v neustálém komplikovaném pohybu.

Vektory  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{b}$  mají v rámci Lorentzovy teorie opět význam veličin popisujících silové účinky na pohybující se mikroskopické náboje. Platí pro ně definiční rovnice analogická s rov. (3.56); objemová hustota síly působící na tyto náboje je dána výrazem

$$\mathbf{f} = \rho^{(m)} (\mathbf{e} + \mathbf{v}^{(m)} \times \mathbf{b}). \quad (5.177)$$

<sup>40</sup> Kvantová mechanika později ukázala, že mechanický pohyb mikročástic nelze popisovat jako pohyb po určitých drahách určitými rychlostmi a že je třeba respektovat vlnový charakter pohybu těchto částic. Pomocí vlnové funkce lze však definovat hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v dané oblasti prostoru v daném čase a tímto způsobem zavést mikroskopickou hustotu náboje a proudu. Vlnový charakter pohybu mikročástic je třeba respektovat především tehdy, je-li koncentrace těchto částic vysoká, jako je tomu v pevných látkách. Naproti tomu v plynech, zředěném plazmatu a elektrolytech lze pohyb nositelů náboje studovat z hlediska klasické fyziky.

Předpoklad o platnosti Lorentzových rovnic (5.176) zahrnuje v sobě i požadavek, aby také v mikroskopickém měřítku platil zákon zachování náboje. Jednoduchým postupem (srov. čl. 5.1.2) dostaneme z (5.176) rovnici kontinuity

$$\operatorname{div}(\rho^{(m)} \mathbf{v}^{(m)}) + \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} = 0. \quad (5.178)$$

Zdůrazněme ještě nakonec, že veličiny  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho^{(m)}$ ,  $\mathbf{v}^{(m)}$ ,  $\mathbf{j}^{(m)}$  vystupující v rovnicích mikroskopického pole mají jiný fyzikální smysl než analogické veličiny  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{j}$ , se kterými jsme dosud pracovali při vyšetřování makroskopického pole. Například mikroskopická hustota náboje  $\rho^{(m)}$  představuje veličinu udávající okamžité rozložení nábojů v prostoru, které je dáno okamžitými polohami jednotlivých mikroskopických nositelů náboje (elektronů, atomových jader apod.). Je zřejmé, že její hodnota se bude měnit o mnoho řádů již v rámci rozměrů jednoho atomu, tj. na vzdálenosti  $10^{-10}$  m, a dokonce i uvnitř atomového jádra s rozměry  $10^{-15}$  m. Podobně vektory  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{b}$  vyjadřují okamžité hodnoty pole v daném bodě. Pomocí vztahu (5.177) by bylo možné vyjádřit okamžitou hodnotu síly, která by působila na jediný elektron umístěný v libovolném bodě prostoru i uvnitř látkového prostředí. Vektory makroskopických polí  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  takovou možnost nedávají a podobná mikroskopická pole nejsou ani dostupná přímým experimentálním měřením.

Mikroskopická teorie vyjádřená Lorentzovými rovnicemi otevírá ovšem zcela nový obzor, nové otázky a problémy na další strukturní úrovni. Můžeme se ptát na zákonitosti pohybu mikročástic, na možnost existence dalších sil vedle elektromagnetických, působících mezi těmito částicemi, a na jejich možnou souvislost se silami elektromagnetickými, na fyzikální vlastnosti vakua a zda vakuum ovlivňuje pohyb mikročástic a další. Tyto otázky se však již vymykají z rámce klasické fyziky a v Lorentzově době na ně nebylo možné dát odpověď.

#### 5.4.2 Odvození Maxwellových rovnic z rovnic Lorentzových

Při makroskopickém popisu jevů vždy neuvažujeme diskrétní atomovou strukturu látek. Danou konkrétní látku považujeme za kontinuum a předpokládáme, že veličiny popisující její fyzikální stav se mění spojitě v celém objemu látky. Je pak jasné, že se tyto makroskopické veličiny mění jen nepatrně na vzdálenostech srovnatelných s rozměry atomů či molekul.

Pokud jde o elektromagnetické pole, víme, že k jeho vyčerpávajícímu makroskopickému popisu musíme zavést veličiny  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$  vystupující v Maxwellových rovnicích, které mají uvedené vlastnosti makroskopických veličin. Na druhé straně, za Lorentzova předpokladu, že jediným zdrojem elektromagnetického pole jsou mikro-fyzikální částice nesoucí elektrický náboj a jestliže

je toto pole správně popsáno mikroskopickými veličinami  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho^{(m)}$ ,  $\mathbf{v}^{(m)}$ , musí mít uvedené makroskopické veličiny význam časových a prostorových středních hodnot příslušných veličin mikroskopických. Kromě toho musí po vystředování z Lorentzových rovnic vyplynout rovnice Maxwellovy.

Ukažme si, že takový postup je skutečně možný. Nejdříve si však všimneme samotného problému výpočtu střední hodnoty libovolné mikroskopické veličiny  $f(\mathbf{r}, t)$ . Abychom vypočítali její prostorovou i časovou střední hodnotu v bodě  $\mathbf{r}(x, y, z)$  a v okamžiku  $t$ , uvažme malý objem  $\Delta V$ , uvnitř něhož leží bod  $\mathbf{r}$ , a dále uvažujme malý časový interval  $\Delta\tau$ . Slovo „malý“ je třeba chápat ve fyzikálním smyslu – objem  $V$  musí být dostatečně malý z makroskopického hlediska (například vzhledem k uvažovaným makroskopickým rozměrům tělesa), ale zároveň dostatečně velký z mikroskopického hlediska (musí obsahovat velký počet mikročástic). Podobně časový interval  $\Delta\tau$ , velmi krátký z makroskopického hlediska, musí být podstatně delší, než je například „perioda oběhu“ elektronů v atomu.

Střední hodnotu  $\langle f \rangle$  funkce  $f$  v daném bodě  $\mathbf{r}$  v okamžiku  $t$  budeme definovat jako integrál

$$\langle f(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta\tau \Delta V} \int_{\Delta\tau} \int_{\Delta V} f(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau) d\tau d\xi d\eta d\zeta. \quad (5.179)$$

Tato střední hodnota nesmí přitom záviset na volbě objemu  $\Delta V$  a intervalu  $\Delta\tau$ , pokud mají uvedený charakter. Proměnné  $x, y, z, t$  vystupují v integrálu (5.179) jako parametry. Budeme vždy předpokládat, že funkce  $f$  umožňuje záměnu pořádku derivování podle  $x, y, z, t$  a integrování podle  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ . Potom platí

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial y} \langle f \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial z} \langle f \rangle, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle. \quad (5.180)$$

Aplikujme nyní proces středování na mikroskopické veličiny vystupující v Lorentzových rovnicích. S ohledem na (5.180) je zřejmé, že střední hodnoty  $\langle \mathbf{e} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{b} \rangle$ ,  $\langle \rho^{(m)} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{v}^{(m)} \rangle$  budou rovněž vyhovovat Lorentzovým rovnicím

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \langle \mathbf{e} \rangle &= \frac{\langle \rho^{(m)} \rangle}{\epsilon_0}, & \operatorname{rot} \langle \mathbf{b} \rangle &= \mu_0 \langle \rho^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} \rangle + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{e} \rangle &= -\frac{\partial \langle \mathbf{b} \rangle}{\partial t}, & \operatorname{div} \langle \mathbf{b} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.181)$$

V těchto rovnicích je zřejmé třeba interpretovat střední hodnotu  $\langle \mathbf{e} \rangle$  jako intenzitu makroskopického elektrického pole  $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$  a podobně střední hodnotu  $\langle \mathbf{b} \rangle$

jako makroskopickou magnetickou indukci  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$ . Pokud jde o střední hustotu náboje  $\langle \rho^{(m)} \rangle$ , je přirozené chápat ji jako celkovou makroskopickou hustotu náboje v daném bodě. V kapitole I jsme ukázali, že z makroskopického hlediska je třeba rozlišovat mezi volnými a vázanými náboji. Použijeme-li již zavedeného označení jejich hustot  $\rho_0$  a  $\rho_p$ , můžeme psát

$$\langle \rho^{(m)} \rangle = \rho = \rho_0 + \rho_p \quad (5.182)$$

nebo podle (1.168) také

$$\langle \rho^{(m)} \rangle = \rho_0 - \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (5.183)$$

Poněkud složitější je otázka interpretace střední hodnoty mikroskopického proudu  $\langle \mathbf{j}^{(m)} \rangle = \langle \rho^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} \rangle$ . Je samozřejmé, že tato veličina musí v sobě zahrnovat především celkovou hustotu makroskopického proudu v daném bodě, tedy součet hustot kondukčního a konvekčního proudu  $\mathbf{j}$  a hustoty posuvného (polarizačního) proudu  $\mathbf{j}_p$ . Podrobnější rozbor této otázky však ukazuje,<sup>41</sup> že střední hodnotu nelze redukovat na prostý součet veličin  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_p$ . Kromě nich je nutné doplnit další člen, který již nevyjadřuje skutečný makroskopický transport náboje. Platí tedy

$$\langle \mathbf{j}^{(m)} \rangle = \langle \rho^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} \rangle = \mathbf{j} + \mathbf{j}_p + \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (5.184)$$

kde  $\mathbf{M}$  představuje makroskopickou magnetizaci látky v daném bodě.

Poslední člen v (5.184) jsme v článku 3.5.2 nazvali *hustotou vázaných (magnetizačních) proudů*  $\mathbf{j}_m$ . Nyní jsme pomocí Lorentzových rovnic získali konkrétnější představu o jejich významu. Vázané proudy představují střední hodnotu určité části mikroskopických proudů, které se uzavírají v „obvodech“ mikroskopických rozměrů – uvnitř jader, atomů, molekul. Přesto, že tato veličina nereprezentuje žádný přenos náboje v makroskopickém měřítku (a v případě takzvaných spinových momentů dokonce ani přenos náboje v prostoru), a nevyjadřuje tudíž ani žádný makroskopický proud, přispívá k hodnotám makroskopického magnetického pole.

Z rovnic (5.181) již velmi snadno obdržíme Maxwellovy rovnice. Stačí dosadit z (5.183) a (5.184), vzít v úvahu vyjádření polarizačního proudu v dielektriku (3.12)

<sup>41</sup> Středování mikroskopických polí při přechodu k poli makroskopickému představuje dosti složitý problém. V tradiční formě jsou tyto otázky diskutovány například v knize: R. Becker, F. Santer: Theorie der Elektrizität. III. Band, B. G. Teubner, Stuttgart 1968. Velmi podrobná analýza přechodu od mikroskopického k makroskopickému poli, včetně některých modernějších přístupů je uvedena v monografii: S. R. de Groot, L. G. Suttorp: Foundation of Electrodynamics, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1972, ruský překlad: Nauka, Moskva 1982.



$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

a zavést vektor elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a vektor intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  pomocí vztahů, viz (3.136),

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Soustavu Maxwellových rovnic (5.21) jsme tedy získali jednak induktivní cestou zobecňování experimentální zkušenosti vyjádřenou v základních zákonech elektromagnetického pole, jednak na základě mikroskopického modelu středováním rovnic Lorentzových. Ovšem i Lorentzovy rovnice se opírají o zmíněnou experimentální zkušenost. Rovněž Maxwellovy rovnice lze odvodit z obecnějších fyzikálních principů, k nimž patří takzvané principy variační, na nichž je dnes založena teoretická fyzika. Tyto principy dovedou popsat z jednotného hlediska jak pohyby částic, tak i vlastnosti pole a jejich vzájemnou interakci. Také tyto obecné principy jsou však výsledkem dlouhé cesty zobecňování experimentálních poznatků a nejsou dány apriorně.

Jakmile dospějeme k matematické formulaci obecných principů nebo rovnic elektromagnetického pole a pohybu částic, můžeme již postupovat deduktivní cestou, matematicky odvozovat další vztahy mezi materiálními objekty (včetně vztahů dosud neznámých) a řešit konkrétní situace při nesčetných aplikacích ve fyzice a v technice. Souhlas těchto konkrétních předpovědí s výsledky experimentu nás stále utvrzuje v přesvědčení o správnosti výchozích předpokladů a rovnic. Případný nesouhlas by ovšem mohl signalizovat neúplnost či nedostatečnou obecnost výchozích vztahů.

#### ÚLOHY KE KAPITOLE 5

Ú 5.1: Určete úhlovou frekvenci a polarizaci elektromagnetické vlny, která vznikne jako superpozice dvou monochromatických rovinných vln se stejnými amplitudami a velmi blízkými frekvencemi, jež jsou kruhově polarizovány v opačném smyslu a šíří se jedním směrem. Návod: zvolte osu  $z$  jako směr šíření, pak

$$\mathbf{E}_1 = [E_0 \cos(kz - \omega_1 t), E_0 \sin(kz - \omega_1 t), 0],$$

$$\mathbf{E}_2 = [E_0 \cos(kz - \omega_2 t), -E_0 \sin(kz - \omega_2 t), 0].$$

Ú 5.2: Silný svazek světla pulsního laseru dopadá kolmo na dokonale absorbující povrch a přenáší výkon o hustotě  $10^{14} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Světelnou vlnu můžeme považovat za rovinnou, harmonickou, lineárně polarizovanou. Určete amplitudu intenzity elektrického pole vlny.

Ú 5.3: Jaká je tloušťka povrchové skinové vrstvy v měděném vodiči pro elektromagnetickou vlnu o vlnové délce  $1 \text{ m}$ ?

Ú 5.4: Elektromagnetická vlna vyzařovaná elementárním dipólem se šíří ve vakuu. Amplituda intenzity elektrického pole ve vlnové zóně ve směru kolmém k ose dipólu je ve vzdálenosti  $1 \text{ m}$  rovna  $10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . Určete celkový vyzařovaný výkon dipólu  $I$ .

Ú 5.5: Relativní permitivita ionosféry závisí na kmitočtu dopadající elektromagnetické vlny vztahem  $\epsilon_r = 1 - (ne^2)/(\epsilon_0 m \omega^2)$ , kde  $n$  je koncentrace,  $e$  náboj a  $m$  hmotnost elektronu. Nechť tato vlna dopadá na ionosféru pod úhlem  $\pi/4$ . Určete minimální vlnovou délku pro totální odraz, je-li koncentrace elektronů v ionosféře  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ .

## 6 Pohyb částice v elektromagnetickém poli

V předchozích kapitolách byly dosti podrobně popsány vlastnosti silového působení elektromagnetického pole na objekty charakterizované jejich nábojem či elektrickým nebo magnetickým dipólovým momentem. Uvedená interakce ovlivňuje pohyb takových elektricky či magneticky aktivních hmotných objektů a studium tohoto pohybu má značný význam nejen pro poznání vlastností elektromagnetického pole, ale i pro rozvoj mnohých experimentálních metod a zařízení v experimentální fyzice a technice.

Je samozřejmé, že elektromagnetické pole může nejen ovlivňovat pohyb uvažovaného hmotného objektu jako celku, ale může měnit i jeho vnitřní strukturu, což se projeví změnami hodnot elektrických a magnetických momentů. Obráceně, studovaný objekt bude elektromagnetické pole zpětně ovlivňovat, takže popis jeho pohybu v plné obecnosti může představovat značně komplikovaný problém. V úvahách této kapitoly budeme oba posledně jmenované vlivy zanedbávat. Parametry studovaného objektu budeme považovat za zcela nezávislé na vnějším elektromagnetickém poli a naopak budeme předpokládat, že zpětné ovlivnění elektromagnetického pole je natolik malé, že pole můžeme považovat za nezávislé na poloze, respektive na rychlosti a zrychlení studovaného objektu.

Za uvedených předpokladů budeme v oddílech 6.1 a 6.2 postupně studovat zákonitosti pohybu nabitě částice a částice gyromagnetické a v oddílu 6.3 probereme nejdůležitější aplikace získaných poznatků.

### 6.1 Nabitá částice v elektromagnetickém poli

#### 6.1.1 Pohybová rovnice

Uvažujme částici o klidové hmotnosti  $m_0$  nesoucí náboj  $q$ , která se pohybuje ve vakuu v elektromagnetickém poli popsaném intenzitou elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetickou indukcí  $\mathbf{B}$ . Obecnou pohybovou rovnicí této částice snadno získáme dosadíme-li do pohybové rovnice (2.16) Lorentzovu sílu (3.56). Rovnice má tvar

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.1)$$

kde je  $\mathbf{p}$  hybnost částice a  $\mathbf{v}$  její rychlost. Platí zcela obecně i pro vysoké rychlosti. V nerelativistickém přiblížení, kdy je rychlost  $\mathbf{v}$  malá ve srovnání s rychlostí světla, místo (6.1) dostáváme

$$m_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.2)$$

Budeme-li polohu částice popisovat ve zvolené pravouhlé soustavě souřadnic pomocí polohového vektoru  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ , můžeme pohybovou rovnici vyjádřit jako jednu vektorovou diferenciální rovnici pro neznámou funkci  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

nebo (po rozepsání do složek) jako trojici diferenciálních rovnic pro neznámé složky polohového vektoru  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$

$$\begin{aligned} m_0 \ddot{x} &= qE_x + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_x, \\ m_0 \ddot{y} &= qE_y + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_y, \\ m_0 \ddot{z} &= qE_z + q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_z, \end{aligned} \quad (6.3a)$$

přičemž jsme, jak je v mechanice zvykem, tečkami nad příslušnými symboly označili časové derivace.

Z tvaru rovnic (6.2) až (6.3a) je patrná jejich důležitá vlastnost. V elektromagnetickém poli libovolné prostorové a časové závislosti je pohyb částice určen jen jejím ným nábojem  $q/m_0$ .

#### 6.1.2 Energie a hybnost částice

Užitím vztahu (3.56) pro Lorentzovu sílu lze snadno vypočítat práci, kterou elektromagnetické pole dodá pohybuující se nabitě částici. Během velmi krátkého časového intervalu  $dt$  se částice posune o  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$  a Lorentzova síla  $\mathbf{F}$  vykoná práci  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt$ . Jelikož platí  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , je vykonaná práce rovna  $q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) dt$ . Okamžitý výkon dodávaný elektromagnetickým polem částici lze tedy vyjádřit jako  $q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$ . Předpokládáme-li dále, že v soustavě nenastávají žádné další přeměny energie, musí být dodaná práce spotřebována na zvýšení kinetické energie částice. Pro časovou změnu této kinetické energie  $dW_k/dt$  tedy musí platit

$$\frac{dW_k}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}). \quad (6.4)$$

Vztah (6.4) představuje obecné vyjádření zákona zachování energie pro vyšetřovanou soustavu. Musí tedy platit v každé situaci, například při libovolné, tj.

i relativistické, rychlosti částice. Skutečnost, že časová změna kinetické energie částice nezávisí na magnetickém poli nepřekvapí; s podobnou situací jsme se již setkali v článku 5.2.1 při vyšetřování Poyntingovy věty.

Obecná pohybová rovnice (6.1) spolu s rovnicí (6.4) dovolují jednoduše vyjádřit vztah mezi změnou kinetické energie a časovou změnou hybnosti částice. Vynásobíme-li pohybovou rovnici (6.1) skalárně rychlostí  $\mathbf{v}$  a uvědomíme-li si opět, že  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ , dostaneme

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})$$

a po dosažení z (6.4) získáme výsledek

$$\frac{dW_k}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (6.5)$$

Z hlediska Newtonovy formulace klasické mechaniky jsou mechanické účinky elektromagnetického pole v plné obecnosti vyjádřeny Lorentzovou silou a pohybová rovnice (6.1) popisuje zcela obecně mechanické účinky elektromagnetického pole na nabitou částici. Její důsledky jsou v rámci nekvantové mechaniky v plné shodě s veškerou experimentální zkušeností. Poněkud jiný pohled na uvedený problém poskytuje analytická mechanika, v níž pojem síly není primárním pojmem.

Existuje několik možných způsobů formulace zákonů mechaniky bez použití pojmu síly. Pro speciální případ pohybu volné nabitě částice v elektromagnetickém poli ukážeme postup využívající tzv. *Lagrangeovy rovnice II. druhu*, které budeme formulovat v kartézských souřadnicích.

Zmíněné Lagrangeovy rovnice jsou diferenciální rovnice, kterým musí vyhovovat tzv. *Lagrangeova funkce L*. Pro volnou částici studovanou v kartézských souřadnicích  $\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  mají tvar (viz. např. [12, 15])

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (6.6)$$

kde  $\dot{x}_i = dx_i/dt$  a  $i = 1, 2, 3$ . Pro částici pohybující se v potenciálním poli je Lagrangeova funkce rozdílem kinetické  $W_k$  a potenciální  $U(\mathbf{r}, t)$  energie částice;  $L = W_k - U(\mathbf{r}, t)$ . Je-li působení pole na částici závislé na její rychlosti, je nutné Lagrangeovu funkci vyjádřit pomocí zobecněné potenciální funkce  $\bar{U}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  závislé na rychlosti. Tedy

$$L = W_k - \bar{U}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t). \quad (6.7)$$

Lagrangeova funkce částice v elektromagnetickém poli může být jednoduše vyjádřena pomocí elektromagnetických potenciálů  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . V nerelativistickém přiblížení, tj. při malých rychlostech, platí (viz např. [15])

$$L = \frac{m_0}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - q[\varphi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]. \quad (6.8)$$

Ukážeme, že z Lagrangeových rovnic (6.6) vyplývá pro Lagrangeovu funkci (6.8) pohybová rovnice (6.2). Platí totiž

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_0 \dot{x}_i + qA_i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + q \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}).$$

Uvědomíme-li si dále, že derivaci podle souřadnic provádíme při konstantní rychlosti  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  a použijeme-li (D 1.53), dostaneme

$$\text{grad}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) = (\dot{\mathbf{r}} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}.$$

Jelikož totální derivaci vektorového potenciálu  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  podle času lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \text{grad}) \mathbf{A},$$

obdržíme po dosažení do (6.6) vektorovou rovnici

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = -q \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right) + q(\mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}). \quad (6.9)$$

První člen na pravé straně však je podle (5.28) roven  $q\mathbf{E}$  a rot  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ , čímž již dostáváme pohybovou rovnici (6.2).

Důležitou veličinou v analytické mechanice je tzv. *zobecněná hybnost  $\bar{\mathbf{p}}$* , jejíž jednotlivé složky jsou definovány vztahem

$$\bar{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.10)$$

Za předpokladu Lagrangeovy funkce tvaru (6.8) dostáváme pro zobecněnou hybnost

$$\bar{\mathbf{p}} = m_0 \mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (6.11)$$

Kinetická energie částice  $W_k = (m_0 v^2)/2$  pak může být pomocí zobecněné hybnosti vyjádřena vztahem

$$W_k = \frac{(\bar{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2}{2m_0}. \quad (6.12)$$

Veličina

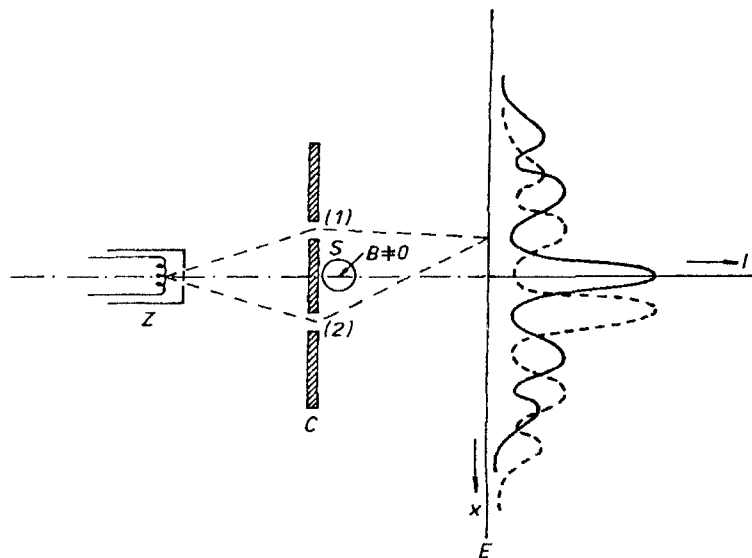
$$\mathcal{H} = \frac{(\bar{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2}{2m_0} + q\varphi \quad (6.13)$$

vyjadřuje celkovou energii částice v elektromagnetickém poli a nazývá se *Hamiltonovou funkcí*. Uplatňuje se při popisu chování mikročástic v elektromagnetickém poli pomocí tzv. *Hamiltonových kanonických rovnic* (viz opět [15]) a má značný význam pro formulaci kvantové mechanických rovnic vyjadřujících chování nabitých částic v elektromagnetickém poli.

Z dosud provedených úvah jsme viděli, že mechanické účinky elektromagnetického pole na nabitou částici mohou být popsány buď pohybovou rovnicí (6.1), respektive (6.2), nebo například Lagrangeovými rovnicemi pro Lagrangeovu funkci  $L$ . V prvním případě je elektromagnetické pole

popisováno vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ , ve druhém případě elektromagnetickými potenciály  $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ . V rámci nekvantové fyziky jsou oba popisy fyzikálně zcela ekvivalentní. Jak bylo již uvedeno v článku 3.3.3 při výkladu vlastností vektorového potenciálu stacionárního magnetického pole, nemění na uvedeném závěru nic ani skutečnost, že elektromagnetické potenciály nejsou určeny jednoznačně. Je ovšem nutné si uvědomit, že přímý fyzikální smysl nemohou mít vzhledem k této nejednoznačnosti samotné hodnoty potenciálů, ale jen veličiny kalibračně invariantní (srov. čí. 5.1.4), které však mohou být pomocí potenciálů vyjádřeny.

Uvedená ekvivalence popisu přestane platit v kvantové mechanice, která ve srovnání s mechanikou klasickou představuje obecnější teorii. Stav částice je v kvantové mechanice popsán (obecně komplexní) vlnovou funkcí, která je vedle své amplitudy charakterizována i fází. Pohybové rovnice klasické mechaniky můžeme chápat jako limitní rovnice pro střední hodnoty kvantově mechanických veličin, ve kterých je informace o fázi vlnové funkce vystředována. Fáze vlnové funkce je však důležitá při studiu jevů mikrosvěta, v nichž se uplatňuje vlnový charakter pohybu částic. Jedním z takových důležitých jevů je interference.



Obr. 6.1 K výkladu Bohmova–Aharonovova jevu.

Podstatné přitom je, že fáze vlnové funkce částice může být ovlivněna vektorovým potenciálem i v té části prostoru, v níž je magnetická indukce nulová. Jinými slovy řečeno, interakce mikročástice s elektromagnetickým polem nemůže být z hlediska kvantové mechaniky redukována jen na silové účinky popsané Lorentzovou silou (3.56). V tomto smyslu má skutečnost, že kvantově mechanické rovnice vycházejí z Hamiltonovy funkce vyjádřené elektromagnetickými potenciály, hlubší fyzikální význam.

Jedním z konkrétních projevů uvedených souvislostí je tzv. *Bohmův–Aharonovův jev*, který spočívá ve sledování interference elektronů po průchodu dvěma štěrbinami (1) a (2), za kterými je umístěn velmi dlouhý solenoid  $S$  (viz obr. 6.1). Podstatou jevu je, že interferenční obrazec, pozorovaný na stínítku  $E$ , je závislý na tom, teče-li vinutím solenoidu proud, i když se elektrony

pohybují „jen“ v prostoru s nulovou magnetickou indukcí, avšak s nenulovým vektorovým potenciálem (srov. příklad 3.3.5e).<sup>42</sup>

Nakonec bychom chtěli ještě upozornit, že podobnost mezi experimentálním uspořádáním pro studium Bohmova–Aharonovova jevu a pro pozorování elektromagnetické indukce ve smyčce obklopující velmi dlouhý solenoid (viz. příklad 4.1.2c) je jen formální a nemá hlubší fyzikální souvislost. Na rozdíl od Bohmova–Aharonovova jevu je elektromagnetická indukce v uvedeném uspořádání plně popsána klasickými rovnicemi elektromagnetického pole, a to ekvivalentně buď pomocí vektorového potenciálu (srov. čí. 5.1.1), nebo například pomocí obecných rovnic elektromagnetického pole v integrálním tvaru (5.12), v nichž vystupují jen vektory intenzit  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  a indukci  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ .

### 6.1.3 Pohyb v časově neproměnném homogenním poli

Pro časově neproměnná homogenní pole lze pohybovou rovnici jednoduše integrovat. Probereme postupně několik takových situací.

#### a) Homogenní elektrické pole

Omezíme se na nerelativistický případ. Má-li pak částice na počátku působení elektrického pole polohu  $\mathbf{r}_0$  a rychlost  $\mathbf{v}_0$ , lze postupnou integrací rovnice (6.3) vyjádřit obecnou časovou závislost rychlosti  $\mathbf{v}(t)$  a polohy  $\mathbf{r}(t)$  částice. Platí

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q}{m_0} \mathbf{E}t + \mathbf{v}_0, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q}{2m_0} \mathbf{E}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (6.15)$$

Speciálně, je-li intenzita elektrického pole orientována ve směru počáteční rychlosti, je pohyb částice přímočarý a částice je rovnoměrně urychlována (či zpomalována) se zrychlením  $q\mathbf{E}/m_0$ . Je-li naopak počáteční rychlost  $\mathbf{v}_0$  kolmá k  $\mathbf{E}$ , snadno se z (6.15) přesvědčíme, že dráhou částice je parabola.

V obecnějším případě libovolné rychlosti lze pohybovou rovnici (6.1) jednoduše integrovat, položíme-li směr jedné osy soustavy souřadné do směru intenzity elektrického pole. Použitím relativistických vztahů (2.17) až (2.20) lze jednoduše vyjádřit časovou závislost rychlosti částice. Pro rovnoběžnou orientaci počáteční rychlosti a intenzity pole je tento problém řešen v úloze Ú 6.1.

<sup>42</sup> Podrobnější elementární rozbor vlivu vektorového potenciálu na fázi vlnové funkce v geometrii popisovaného experimentu je uveden například ve známé Feynmannově učebnici: „The Feynman Lectures on Physics“, vol 2, Addison-Wesley, 1964 (ruský překlad Izd. Mir, Moskva 1966), která v současné době postupně vychází i v českém překladu: „Feynmannovy přednášky z fyziky s řešenými příklady I., II., III.“, Fragment, Praha 2000, 2001, 2002. Experimentální studium Bohmova–Aharonovova jevu bylo v nedávné době opakováno s přesvědčivými výsledky (viz G. Möllenstedt, H. Schmid, H. Lichte: Electron Microscopy 1982, Vol. I, Symposia of Physical Sciences, Hamburg 1982). V této souvislosti je třeba si uvědomit, že realizace takového experimentu není technicky snadná. Plyne to například i z toho, že solenoid použitý v citované práci měl průměr menší než 50  $\mu\text{m}$ !

b) *Homogenní magnetické pole*

Magnetické pole nechť je orientováno ve směru osy  $z$ . Uvažme nejdříve speciální situaci, kdy počáteční rychlost částice  $v_0$ , mnohem menší než rychlost světla  $c$ , je kolmá ke směru  $z$ , tj. leží v rovině  $xy$ . Lorentzova síla bude mít konstantní velikost  $qv_0B$  a bude stále kolmá ke směru rychlosti. Magnetické pole nebude tedy podle (6.2) měnit velikost rychlosti částice, ale bude její dráhu zakřivovat konstantním dostředivým zrychlením  $a = (qv_0B)/m_0$ . Částice tedy bude konat rovnoměrný kruhový pohyb v rovině  $xy$  s úhlovou frekvencí

$$\omega_c = \frac{q}{m_0} B \quad (6.16)$$

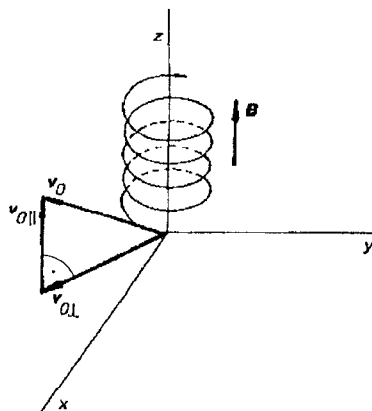
nazývanou *cyklotronová frekvence*. Poloměr kružnice  $R_0$ , po které se částice bude pohybovat, tzv. *cyklotronový poloměr*, je zřejmě dán vztahem

$$R_0 = \frac{v_0}{\omega_c}. \quad (6.17)$$

V případě libovolné orientace počáteční rychlosti  $v_0$  bude Lorentzova síla  $F$  dána jen složkou  $v_{0,\perp}$  do roviny  $xy$  kolmé ke směru magnetického pole;  $F = v_{0,\perp}B$ . Částice tedy bude v rovině  $xy$  konat rovnoměrný kruhový pohyb se stejnou cyklotronovou frekvencí  $\omega_c$  a poloměrem

$$R_0 = \frac{v_{0,\perp}}{\omega_c} \quad (6.18)$$

a současně rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru osy  $z$  s rychlostí  $v_{0,\parallel}$ . Výsledkem bude pohyb po šroubovici (viz obr. 6.2).



Obr. 6.2 Pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli.

Právě vyšetřený charakter pohybu zůstane zachován i při velkých rychlostech. Skutečně, jelikož magnetické pole nemůže měnit velikost hybnosti částice, ale jen její směr, faktor

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad (6.19)$$

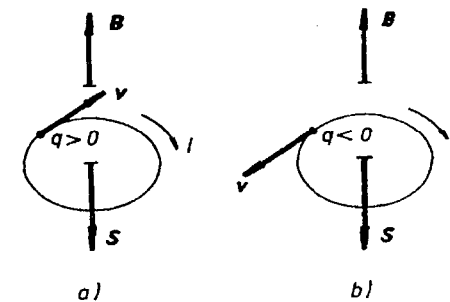
který závisí jen na čtverci rychlosti, a tedy jen na velikosti hybnosti, bude zachovávat svoji hodnotu po celou dobu pohybu. Mezi časovou změnou hybnosti a časovou změnou rychlosti tedy bude platit vztah (srov. čl. 2.1.3)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.20)$$

Pohybová rovnice při velkých rychlostech se tedy liší jen faktorem (6.19), kterým musí být rovněž korigována cyklotronová frekvence  $\omega_c$ . Dostáváme pro ni místo (6.16)

$$\omega_c = \frac{q}{m_0} B \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \quad (6.21)$$

Je zajímavé, a i důležité, si všimnout směru rotace nabitě částice. Z výrazu pro Lorentzovu sílu je možné se přesvědčit, že nezávisle na znamení náboje  $q$  částice rotuje v takovém smyslu, že orientujeme-li plochu  $S$  opisované smyčky podle pravidla pravotočivého šroubu vzhledem ke směru proudu  $I$  reprezentovaného částicí (viz obr. 6.3), bude směr vektoru  $S$  mířit proti směru magnetického pole  $B$ . Opačně vůči směru magnetického pole tedy bude orientován i vektor magnetického momentu  $m = IS$ , který rotující částici reprezentuje.



Obr. 6.3 Orientace dráhy nabitě částice při pohybu v magnetickém poli: a)  $q > 0$ , b)  $q < 0$

c) *Vzájemně kolmé elektrické a magnetické pole*

V tomto odstavci vyšetříme pohyb nabitě částice (v nerelativistickém přiblížení) za současného působení homogenního elektrického pole  $\mathbf{E} \equiv (0, E, 0)$  a homogenního magnetického pole  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Po dosazení speciálního tvaru pole do pohybové rovnice (6.3a) dostaneme

$$\begin{aligned} m_0 \frac{dv_x}{dt} &= qBv_y, \\ m_0 \frac{dv_y}{dt} &= qE - qBv_x, \\ m_0 \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Za předpokladu, že počáteční rychlost  $\mathbf{v}_0$  bude mít nulovou složku do směru osy  $z$ , bude se pohyb částice odehrávat pouze v rovině  $xy$ . Budeme uvažovat tuto speciální situaci. Pohyb je pak zcela popsán prvními dvěma rovnicemi (6.22) a analýza jejich řešení může být zjednodušena zavedením komplexní rychlosti  $u = v_x + i v_y$ , neboť obě rovnice přejdou v jedinou komplexní pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt}u + i \frac{q}{m_0}Bu = i \frac{q}{m_0}E. \quad (6.23)$$

Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici, jejíž obecné řešení získáme jako součet obecného řešení příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení celé rovnice (6.23). Obecné řešení homogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$u = C e^{\alpha t}. \quad (6.24)$$

Po dosazení do rovnice dostaneme pro konstantu

$$\alpha = -i \frac{q}{m_0}B = -i \omega_c. \quad (6.25)$$

Triviálním partikulárním řešením rovnice (6.23) je  $u = E/B$ , takže obecné řešení může být zapsáno ve tvaru

$$u = C e^{-i\omega_c t} + \frac{E}{B}, \quad (6.26)$$

kde  $C$  je obecně komplexní konstanta. Lze ji vyjádřit pomocí reálných konstant  $D, \delta$  ve tvaru  $C = D \exp(i\delta)$  a výsledek má pak tvar

$$v_x = D \cos(\omega_c t + \delta) + \frac{E}{B}, \quad (6.27)$$

$$v_y = -D \sin(\omega_c t + \delta).$$

Dále vyšetříme konkrétní průběh dráhy pro speciální tvar počátečních podmínek, kdy v čase  $t = 0$  je částice v počátku s nulovou rychlostí, tj. platí  $x_0 = y_0 = z_0$  a  $v_{x,0} = v_{y,0} = 0$ . Z rovnic (6.27) pak plyne

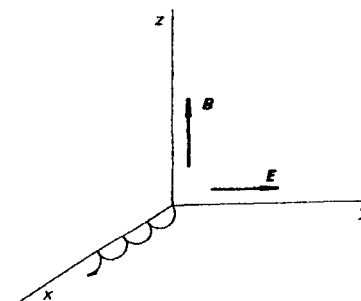
$$v_x = \frac{E}{B}(1 - \cos \omega_c t), \quad (6.28a)$$

$$v_y = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

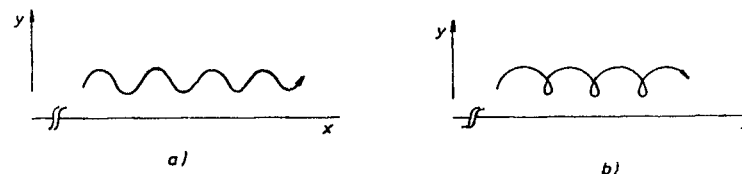
a po další integraci a uplatnění počátečních podmínek dostaneme pro časovou závislost souřadnic

$$x = \frac{E}{\omega_c B}(\omega_c t - \sin \omega_c t), \quad (6.28b)$$

$$y = \frac{E}{\omega_c B}(1 - \cos \omega_c t).$$



Obr. 6.4 Pohyb nabitě částice ve vzájemně kolmém elektrickém a magnetickém poli.



Obr. 6.5 Dráha nabitě částice ve vzájemně kolmém elektrickém a magnetickém poli při nenulové počáteční rychlosti: a) zkrácená cykloida, b) prodloužená cykloida.

Výrazy (6.28b) představují parametrické vyjádření *cykloidy*. Za uvedených počátečních podmínek je tedy dráhou částice obyčejná cykloida (viz obr. 6.4). Je-li počáteční rychlost  $v$  rovinně  $xy$  nenulová, může mít dráha tvar zkrácené či prodloužené cykloidy, jak kvalitativně zobrazují obrázky 6.5a a 6.5b.

Nezávisle na počátečních rychlostech  $v_{x,0}$ ,  $v_{y,0}$  je podle (6.27) střední hodnota rychlosti  $v_D$  ve směru osy  $x$ , tj. ve směru kolmém k  $\mathbf{E}$ , rovna

$$v_D = \frac{E}{B}. \quad (6.29)$$

Pozoruhodné je, že tato rychlost, nazývaná *driftovou rychlostí*, je nezávislá na znamení náboje částice.

#### 6.1.4 Pohyb v nehomogenním osově symetrickém magnetickém poli

Výsledky získané v odstavci 6.1.3b mohou být použity i v případě nehomogenního magnetického pole, pokud nehomogenita není příliš veliká. Pohyb si zachovává charakter šroubovice, její poloměr a stoupání však není obecně konstantní.

Uvažujeme osově symetrické magnetické pole, jehož osou symetrie je osa  $z$  (viz obr. 6.6). Díky osové symetrii je zřejmé, že pole má nenulovou jen podélnou složku  $B_z$  a radiální složku  $B_r$ . Pohybuje-li se částice po šroubovici s proměnným stoupáním i poloměrem, má nenulovou podélnou složku rychlosti  $v_z = dz/dt$ , radiální složku  $v_r = dr/dt$  a samozřejmě i cirkulační složku  $v_\varphi = r d\varphi/dt$ . Cirkulační pohyb částice je možné popsat pomocí druhé impulsové věty. Pro časovou změnu složky  $z$  momentu hybnosti  $L_z = m_0 \omega r^2$  musí tedy platit rovnice

$$\frac{d}{dt}(m_0 \omega r^2) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z, \quad (6.30)$$

kterou je možné, po zavedení radiální složky rychlosti  $v_r = v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi$  a magnetické indukce  $B_r = B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi$ , vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d}{dt}(m_0 \omega r^2) = q r (v_z B_r - v_r B_z). \quad (6.31)$$

Pozoruhodné je, že pravou stranou poslední rovnice lze vyjádřit pomocí magnetického toku  $\Phi$  tekoucího plochou ohraničenou dráhou částice. Je možné se o tom snadno přesvědčit, vyjádříme-li magnetický tok  $\Phi$  pomocí vektorového potenciálu vztahem typu (3.59a). V našem případě osově symetrického pole je cirkulační složka vektorového potenciálu  $A_\varphi$  nezávislá na úhlu  $\varphi$ , takže platí<sup>43</sup>

<sup>43</sup> Znamení magnetického toku závisí ovšem na orientaci integrační dráhy  $l$ . Jeli tato orientace dána směrem proudu reprezentovaného pohybující se částicí (srov. odstavec 6.3b), je magnetický tok zápornou veličinou.

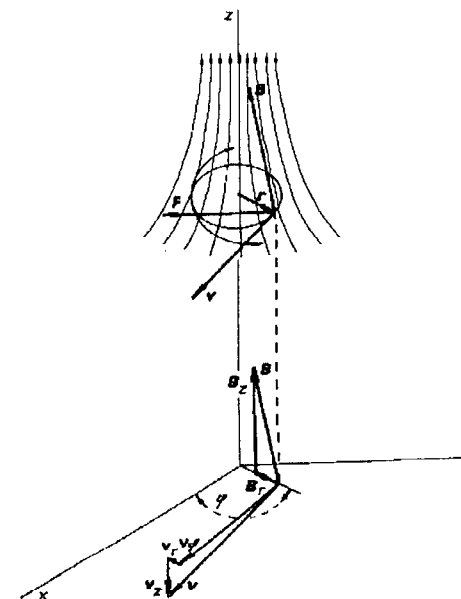
$$\Phi = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r A_\varphi. \quad (6.32)$$

Složky magnetické indukce  $B_z$ ,  $B_r$  na pravé straně (6.31) lze rovněž vyjádřit pomocí vektorového potenciálu. Díky osové symetrii pole je možné z obecných vzorců pro operaci rotace ve válcových souřadnicích získat

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi), \quad B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}. \quad (6.33)$$

Po dosazení do (6.31) pak využitím (6.32) dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_0 \omega r^2 &= -q \left[ v_r \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) + v_z \frac{\partial}{\partial z}(r A_\varphi) \right] \\ &= -q \left[ \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z}(r A_\varphi) \right] \\ &= -q \frac{d}{dt}(r A_\varphi) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (6.34)$$



Obr. 6.6 Pohyb částice v osově symetrickém nehomogenním magnetickém poli. K výkladu Buschovy věty.

Výsledek ukazuje, že časová změna součtu momentu hybnosti částice a magnetického toku vymezeného její dráhou je nulová. Hodnota této veličiny zůstává tedy při pohybu částice konstantní.

$$m_0 \omega r^2 + \frac{q}{2\pi} \Phi = \text{konst.} \quad (6.35)$$

Vztah (6.35) se v literatuře často nazývá *Buschovou větou*.

## 6.2 Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli

### 6.2.1 Pohybová rovnice

V příkladech 3.4.6a a 3.4.6b byla demonstrována souvislost mezi magnetickým dipólovým momentem a momentem hybnosti pro nabitou částici konající rovnoměrný kruhový pohyb a pro rotující nabitou kouli. Pro uvedené soustavy byla zavedena veličina zvaná gyromagnetický poměr. Experimentální zkušenost ukazuje, že vztah mezi těmito veličinami má hlubší fyzikální význam. Často totiž nastává situace, kdy daná magneticky aktivní soustava vytvářející magnetické pole, jež je možné popsat polem magnetického dipólu  $\mathbf{m}$ , má rovněž určitý moment hybnosti  $\mathbf{L}$ , přičemž mezi oběma momenty platí přímá úměrnost

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{L}. \quad (6.36)$$

Konstanta úměrnosti se nazývá *gyromagnetický poměr* a sama soustava se nazývá *gyromagnetickou*. Vedle makroskopických objektů mohou gyromagnetické vlastnosti jevit i objekty mikroskopické, a to jak elementární částice (například elektron), tak částice složené, například atomy či molekuly – viz článek 7.1.4.

Gyromagnetická částice je ve vnějším magnetickém poli  $\mathbf{B}$  podrobena silovému působení. Moment síly  $\mathcal{M}$  působící na částici o magnetickém momentu  $\mathbf{m}$  je dán vztahem (3.108)

$$\mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

a její pohybová rovnice může být sestavena pomocí 2. impulsové věty, podle níž je časová změna momentu hybnosti rovna momentu vnějších sil. Tedy

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (6.37)$$

Využitím vztahu (6.36) může být pohybová rovnice vyjádřena jen pomocí magnetického momentu. Dostaneme tak konečný výsledek

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma(\mathbf{m} \times \mathbf{B}). \quad (6.38)$$

Z tvaru rovnice (6.38) je na první pohled vidět gyroskopické chování částice. Zejména je vidět, že časová změna magnetického momentu  $d\mathbf{m}/dt$  je vždy kolmá k oběma vektorům  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{B}$ . Ve speciálním případě nulového magnetického pole plyne z pohybové rovnice (6.38)  $\mathbf{m} = \text{konst.}$  Magnetický moment je tedy v dané inerciální soustavě nehybný.

### 6.2.2 Larmorova precese

Nalezneme řešení pohybové rovnice (6.38) pro případ homogenního, časově neproměnného magnetického pole  $\mathbf{B}_0$ , které nechť je orientováno v kladném směru osy z kartézské soustavy souřadné  $S \equiv (x, y, z)$ , v níž provádíme zkoumání a o níž předpokládáme, že je inerciální. Platí tedy  $\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$ .

Hledané řešení lze nejsnáze a nejnázorněji získat přechodem k neinerciální soustavě  $S' \equiv (x', y', z')$  rotující konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy z. Pohybovou rovnici (6.38) lze do této soustavy snadno přetransformovat, vezmeme-li v úvahu způsob transformace časové derivace libovolné vektorové funkce času, který je znám z mechaniky (viz například [12]). Označíme-li  $\delta\mathbf{m}(t)/\delta t$  derivaci veličiny  $\mathbf{m}(t)$  vztáženou k soustavě  $S'$ , platí

$$\frac{d\mathbf{m}(t)}{dt} = \frac{\delta\mathbf{m}(t)}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}.$$

Pro dosazení do (6.38) můžeme pohybovou rovnici ihned vyjádřit v rotující soustavě  $S'$ . Ponecháme-li obvyklé značení derivace ( $d/dt$ ) i v této soustavě, můžeme napsat

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma(\mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{ef}}), \quad (6.39)$$

přičemž jsme zavedli efektivní magnetické pole

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = \mathbf{B}_0 + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\gamma}. \quad (6.40)$$

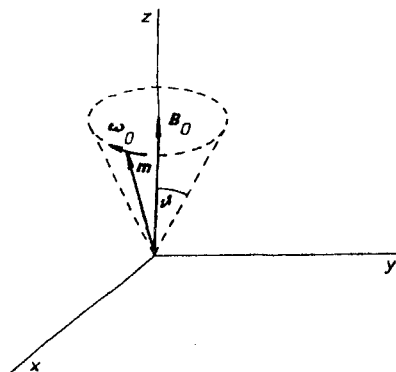
Vidíme tedy, že v rotující soustavě souřadné má pohybová rovnice formálně shodný tvar jako v soustavě inerciální. Rozdíl je pouze v tom, že kromě skutečného pole  $\mathbf{B}_0$  v ní vystupuje ještě zdánlivé pole  $\boldsymbol{\omega}/\gamma$ . Částice se chová tak, jako kdyby na ni působilo efektivní pole dané vztahem (6.40).

Na volbu úhlové rychlosti  $\omega$  nebylo dosud kladeno žádné omezení. Její hodnota může tedy být zcela libovolná a může být určitým způsobem zvolena. Jednoduchá situace nastane, zvolíme-li pro ni hodnotu  $\boldsymbol{\omega}_0$ , pro niž je  $\mathbf{B}_{\text{ef}} = \mathbf{0}$ . Tedy

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\gamma \mathbf{B}_0. \quad (6.41)$$



V této speciálně zvolené rotující soustavě souřadné bude mít pohybová rovnice (6.39) triviální tvar a magnetický moment  $\mathbf{m}$  bude podle článku 6.2.1 v této soustavě nehybný. Předpokládáme-li, že svírá s osou  $z'$  jistý úhel  $\vartheta$  daný počátečními podmínkami, snadno určíme také pohyb v inerciální soustavě  $S$ . Vektor magnetického momentu  $\mathbf{m}$  bude v této soustavě opisovat kuželovou plochu s vrcholovým úhlem  $2\vartheta$ ; bude tedy konat precesní pohyb s úhlovou frekvencí  $\omega_0$  danou vztahem (6.41) (viz obr. 6.7). Tento typ pohybu se nazývá *Larmorova precese* a frekvence  $\omega_0$  se nazývá *Larmorova frekvence*.



Obr. 6.7 Larmorova precese magnetického momentu  $\mathbf{m}$ .

## 6.3 Příklady použití

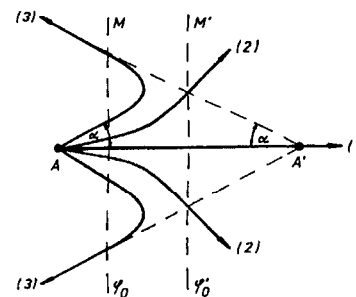
### 6.3.1 Principy částicové optiky

Zákonitosti pohybu nabitých částic v elektrickém a magnetickém poli mohou být využity k fokusaci rozbíhavých svazků těchto částic. Vhodná konfigurace elektrických a magnetických polí může ovlivňovat jejich trajektorie podobným způsobem jako ovlivňují čočky a zrcadla šíření světelných svazků. Je tak možné vytvářet elektrické a magnetické čočky a zrcadla.

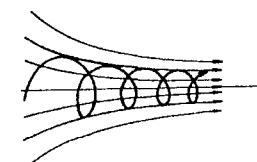
Obor fyziky, který studuje strukturu svazků nabitých částic při jejich interakci s makroskopickými elektrickými a magnetickými poli se nazývá *částicová optika*. (Podle typu používaných částic mluvíme například o elektronové či iontové optice.) Za zakladatele tohoto oboru může být považován německý fyzik H. Busch. V analogii s obyčejnou světelnou optikou můžeme i v případě optiky částicové mluvit o optice *geometrické* a *fyzikální*. Zatímco geometrická částicová optika pracuje se svazky drah „bodových“ částic s daným nábojem a hmotností, fyzikální částicová optika bere v úvahu vlnový charakter jejich pohybu, a musí tedy uvažovat zákonitosti šíření De Broglieových vln v prostoru vymeze-

ném daným experimentálním uspořádáním (viz například [1]). Zákonitosti částicové optiky mají v současné době velmi významná uplatnění v mnoha oborech experimentální fyziky, v elektronice a v mnoha dalších technických disciplínách. Za všechny lze jmenovat elektronovou mikroskopii a elektronovou difrakci, což jsou jedny z nejvýznamnějších metod pro studium mikrostruktury anorganických, organických i biologických objektů. Kromě toho studium zákonitosti pohybu volných mikročástic, především elektronů, přispělo významnou měrou k formulování základních postulátů kvantové mechaniky<sup>44</sup>.

Jako demonstraci využití zákonitostí vyložených v oddílu 6.1 si všimneme některých principů, na jejichž základě je možné konstruovat prvky částicové optiky – zrcadla a čočky. Nejjednodušší příklad rovinného elektrostatického zrcadla je elektrostatické pole tvořené dvojicí rovnoběžných mřížek  $M, M'$  udržovaných na potenciálech  $\varphi_0$  a  $\varphi'_0$ ,  $\varphi_0 > \varphi'_0$ . Elektronů vycházející z bodu  $A$  jsou elektrickým polem vytvořeným v prostoru mezi mřížkami odchylovány (viz obr. 6.8). Charakter dráhy závisí ovšem na velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ , i na jejím směru. Například elektrony ( $I$ ) vyletující kolmo k rovině mřížek se pohybují po přímých drahách a jsou elektrickým polem jen brzděny. V závislosti na velikosti počáteční rychlosti jsou buď navraceny zpět, nebo prolétávají do prostoru za mřížkou  $M'$ . Dráhy elektronů vyletujících šikmo jsou naproti tomu zakřivovány (srov. odstavec 6.1.3a). V závislosti na velikosti a směru počáteční rychlosti mohou buď elektrickým polem prolétnout (2), nebo jsou navraceny zpět (3). Trajektorie odražených elektronů s danými počátečními parametry  $v_0$ ,  $\alpha$  leží na kuželové ploše s vrcholem v bodě  $A'$  a vrcholovým úhlem  $2\alpha$ . V analogii se světelnou geometrickou optikou můžeme bod  $A'$  považovat za neskutečný obraz bodu  $A$  vytvořený uvažovanými elektrony. Poloha obrazu  $A'$  závisí ovšem jak na úhlu  $\alpha$ , tak na velikosti počáteční rychlosti  $v_0$ . Uvedené závislosti představují postupně analogie kulové a barevné vady zrcadla.



Obr. 6.8 Elektrostatické zrcadlo.



Obr. 6.9 Magnetické zrcadlo.

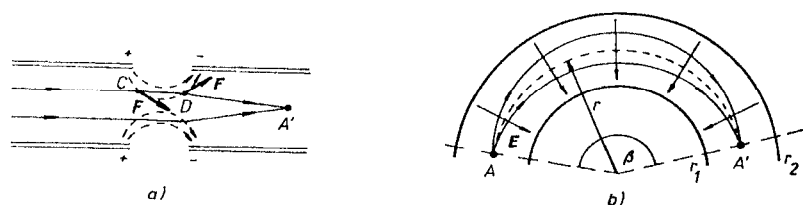
<sup>44</sup> Jde například o známý klasický Davissonův–Germerův experiment (viz např. [1]) věnovaný studiu difrakce pomalých elektronů na povrchu krystalu.

Vlastnosti rovinného zrcadla pro nabitě částice může mít i *nehomogenní magnetické pole*. Princip jeho činnosti vyložíme na příkladu osově symetrického pole využitím výsledků článku 6.1.4. Částice vlétne do takového magnetického pole se pohybuje po šroubovici (viz obr. 6.9). Vzhledem k nenulové radiální složce pole je však nenulová i složka síly

$$F_x = -v_\varphi B_r \quad (6.42)$$

ve směru šroubovice, jejímž účinkem se podélná rychlost částice zmenšuje. Šroubovice se tedy postupně zhušťuje a za vhodných podmínek může rychlost částice v podélném směru změnit i znamení, takže šroubovice začne postupovat opačným směrem. Částice je tedy vytlačována do míst s méně intenzivním magnetickým polem. Magnetická zrcadla založená na uvedeném jevu se často užívají ve fyzice plazmatu k odizolování vysoce energetických částic od stěn daného zařízení.

Jak bylo již uvedeno na začátku tohoto článku, mohou být elektrická a magnetická pole použita k fokusování rozbíhavých svazků nabitých částic. Obrázek 6.10 ukazuje jednoduché příklady takové funkce podélného a příčného elektrického pole. Podélné pole mezi dvojicí válcových elektrod podle obr. 6.10a částice jednak urychluje v podélném směru, jednak je odchyluje ve směru příčném; nejdříve směrem k ose soustavy (např. v bodě *C*), později směrem od osy (např. v bodě *D*). Díky urychlovacímu účinku však síly mířící od osy působí kratší dobu, takže převažuje účinek sil zakřívujících dráhu částice k ose soustavy. Původně rovnoběžný svazek monorychlostních částic bude tedy fokusován do určitého bodu *A'* na ose.



Obr. 6.10 Fokusace svazku nabitých částic elektrickým polem: a) podélné elektrické pole, b) příčné elektrické pole.

Ve válcovém kondenzátoru podle obr. 6.10b, mezi jehož elektrodami o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$  je napětí  $U$ , existuje radiální elektrické pole s průběhem intenzity podle vztahu (1.110). Dráha částice nesoucí náboj  $q < 0$ , vstoupivší do prostoru kondenzátoru v bodě *A* s tangenciální rychlostí  $v_0$ , je tímto polem zakřívována (viz obr. 6.10b). V případě, že radiální elektrická síla  $qE$  je rovna odstředivé síle  $m_0 v_0^2 / r$ , tj. platí-li

$$qE = \frac{m_0 v_0^2}{r}, \quad (6.43)$$

pohybuje se částice po souosé kružnici o poloměru  $r$  a může tedy bez obtíží proletět celým prostorem kondenzátoru. Naopak dráhy částic s menší počáteční rychlostí budou zakřívovány více a dráhy částic s rychlostí větší budou zakřívovány méně. Umístíme-li tedy například v okolí bodu *A'* vhodnou clonu, může válcový kondenzátor sloužit jako filtr částic. Snadno se přesvědčíme, že volbou napětí elektrod je možné vytvořit filtr částic s danou kinetickou energií  $W_k$ , reprezentovanou urychlovacím napětím  $U_a$  podle vztahu  $qU_a = W_k$ ; užitím (1.110) a (1.235) můžeme totiž podmínku (6.43) přepsat na tvar

$$U = 2U_a \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.44)$$

Pozoruhodné je, že radiální pole válcového kondenzátoru může i fokusovat sbíhavý svazek nabitých částic. Dráhy částic vstupujících do elektrického pole v bodu *A* s kinetickou energií vyhovující podmínce (6.44), jejichž směr rychlostí má jisté odchylky od tangenciálního směru, se po opsání určitého oblouku opět ocitnou v bodě *A'* (viz obr. 6.10b). Kvantitativní analýza uvedené vlastnosti není jednoduchá a nebudeme ji provádět. Zajímavé je, že délka oblouku mezi body *A* a *A'* je nezávislá na parametrech částic. Pro úhel  $\beta$  platí obecně  $\beta \approx 127^\circ$ .

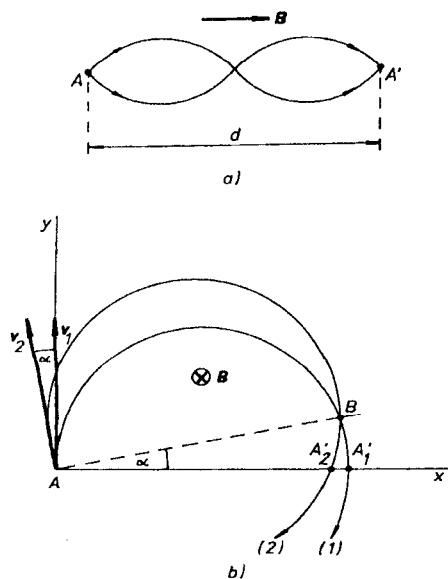
Vedle elektrického pole může být k fokusování rozbíhavých svazků nabitých částic použito i pole magnetické, a to jak pole podélné, tak i příčné. Fokusační účinek podélného homogenního pole snadno pochopíme na základě výsledků odstavce 6.1.3b. Cyklotronová frekvence  $\omega_c$ , a tudíž i doba oběhu částice po šroubovici nezávisí na její počáteční rychlosti. Postupná rychlost částice ve směru pole je dána průmětem počáteční rychlosti do tohoto směru. Z uvedených vlastností pohybu ihned vyplývá, že rozbíhavý svazek částic, které vstupují do podélného magnetického pole v bodě *A* se stejnou absolutní hodnotou rychlostí  $v_0$ , jejíž směr se málo odchyľuje od směru pole, se po jednom oběhu spirály opět setká v bodě *A'* (viz obr. 6.11a) ležícím ve vzdálenosti

$$d \approx \frac{2\pi v_0}{\omega_c}. \quad (6.45)$$

Podélné magnetické pole se často užívá ke konstrukci čoček v částicové optice. Obvykle se užívá osově symetrické nehomogenní magnetické pole vytvářené prstencovými pólovými nástavci magnetu.

Na základě výsledků odstavce 6.1.3b snadno pochopíme i fokusační účinky příčného homogenního pole. Částice vstupující do homogenního magnetického pole počáteční rychlostí  $v_0$ , ležící v rovině kolmé k magnetickému poli, se pohy-

buje po kružnici s úhlovou frekvencí  $\omega$  danou vztahem (6.16), přičemž poloměr této kružnice je dán vztahem (6.17). Z uvedeného příkladu vyplývá, že příčné magnetické pole může (podobně jako příčné elektrické pole) sloužit jako filtr částic v závislosti na jejich rychlosti. Pro demonstraci fokusačních účinků uvažujeme dvě stejné částice, které vstupují do magnetického pole v bodě  $A$  s počátečními rychlostmi stejné velikosti  $v_0$ , jejichž směr se však liší o malý úhel  $\alpha$ . Obě částice se budou pohybovat po cyklotronových kružnicích stejného poloměru  $R_0 = v_0/\omega$ , jež se zřejmě protnou v bodě  $B$  (obr. 6.11b) a osu  $x$  protnou v bodech  $A'_1$  a  $A'_2$ . Pro vzdálenost  $\overline{A'_1 A'_2}$  platí podle obrázku  $\overline{A'_1 A'_2} = 2R_0(1 - \cos\alpha)$ . Pro malý úhel  $\alpha$  oba body  $A'_1$ ,  $A'_2$  přibližně splývají v jediný bod, který může být považován za obraz bodu  $A$ . Příčné homogenní magnetické pole se tedy chová podobně jako válcová čočka, zcela analogicky jako radiální elektrické pole ve válcovém kondenzátoru zobrazeném na obr.6.10b.



Obr. 6.11 Fokuse svazku nabitých částic magnetickým polem: a) podélné magnetické pole, b) příčné magnetické pole.

### 6.3.2 Urychlovače nabitých částic

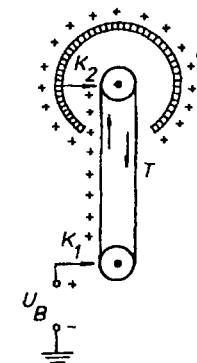
Tato zařízení umožňující urychlit nabitě částice daného druhu (elektrony, protony, ionty) na požadovanou energii, mají dnes význam nejen ve fyzice, ale i v řadě dalších oborů. Urychlovače používané ve fyzice vysokých energií pro studium nových zákonitostí stavby a struktury hmoty patří k největším experi-

mentálním zařízením ve fyzice vůbec. Urychlovače částic na vysoké energie jsou rovněž potřebné v jaderné fyzice, zejména pro studium jaderných reakcí a pro přípravu umělých radioizotopů, přičemž takto připravované radioizotopy jsou nepostradatelné pro aplikace v analytice, biologii, medicíně a jinde. Menší urychlovače iontů mají však dnes značný význam i v technologii, například pro implantaci definovaného množství příměsí při výrobě elektronických prvků, pro studium a analýzu povrchů látek a pro mnohé další účely. Významné je i využívání urychlených částic k získávání krátkovlnného záření (například v rentgenových lampách, ale i v cyklických urychlovačích).

Principiálně nejjednodušší způsob urychlování nabitých částic spočívá v použití statických elektrických polí. Takové urychlovače se nazývají *elektrostatické*. Další typy, které využívají časově proměnných polí, se rozdělují do dvou základních skupin, a to na urychlovače *lineární* a *cyklické*. Často užívané urychlovače mají přitom několik principů, z nichž základní je *cyklotron* s jeho modifikacemi (*synchrotron*, *fázotron*) a *betatron*. V následujícím textu tohoto článku probereme fyzikální principy činnosti nejdůležitějších z nich.<sup>45</sup>

#### a) Elektrostatické urychlovače

V malých zařízeních se potřebné elektrické pole získává pomocí běžných elektrických zdrojů a částice se urychlují průchodem určitým potenciálním rozdílem. Takové zdroje jsou schopné dosáhnout napětí do  $10^6$ V. Větší potenciálové rozdíly mohou produkovat speciální zařízení, jejichž klasickým reprezentantem je elektrostatický *van de Graaffův generátor*, zkonstruovaný v r. 1931. Tento přístroj využívá ke své činnosti skutečnosti, že intenzita pole v dutině vodiče je nulová a že náboj může být rozmístěn jen na vnějším povrchu vodičů.



Obr. 6.12 Princip činnosti van de Graaffova generátoru.

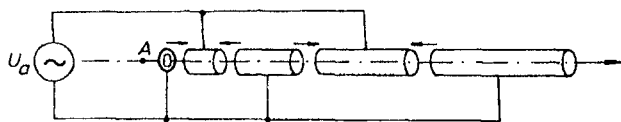
<sup>45</sup> Podrobněji je možné se o této problematice poučit ve speciální literatuře. Kromě učebnice [1], lze v českém jazyce doporučit knihu Č. Šimáně, M. Seidl: Urychlovače iontů a elektronů, SNTL, Praha 1959, z cizojazyčné literatury například monografii J. J. Livingood: Principles of Cyclic Particle Accelerators, D. Van Nostrand Comp., Princeton, 1961, ruský překlad: Izd. inostr. lit., Moskva 1963, nebo novější knihu E. Wilson: An Introduction to Particle Accelerators, Oxford University Press, Oxford 2001.

Principiální schéma generátoru je uvedeno na obr. 6.12. Sestává především z izolované duté elektrody  $E$ , do jejíž dutiny zasahuje transportní pás  $T$ , zhotovený z nevodivého materiálu (v klasickém případě z impregnovaného hedvábí), který pomocí sběračů  $K_1$ , a  $K_2$  přenáší náboj na vnitřní povrch elektrody  $E$ . Náboj se okamžitě přemísťuje na povrch vnější, čímž se může elektroda nabíjet na principiálně libovolné napětí. Ve skutečnosti je mez tohoto napětí dána elektrickou pevností okolního prostředí. Proto se generátor plní vhodným plynem (například dusíkem) pod zvýšeným tlakem. Budicí napětí  $U_B$  se získává z elektronického zdroje. Dosahované napětí generátoru činí několik megavoltů.

V poslední době se konstruuji tzv. *tandemové urychlovače*, které umožňují dvě následná urychlení iontů jediným van de Graaffovým urychlovačem. Ionty dané polaritu po prvním urychlení potenciálem urychlovače procházejí zvláštním prostorem, ve kterém při interakci s vhodnými atomy mění polaritu, takže mohou být ve druhé urychlovací dráze znovu urychlovány daným potenciálem. Uvedeným způsobem lze tedy částice získávají urychlení na dvojnásobnou energii.

#### b) Lineární (rezonační) urychlovač

V tomto typu urychlovače se nabitě částice urychlují střídavým elektrickým polem. Urychlovač klasického typu je tvořen soustavou vodivých elektrod ve tvaru trubice, které jsou připojeny ke společnému zdroji střídavého napětí  $U_a$  způsobem znázorněným na obr. 6.13. Napětí  $U_a$  vytvoří v prostoru mezi sousedními elektrodami elektrické pole, jehož směr se v daném okamžiku střídá, jak je znázorněno na obrázku šipkami. Uvnitř elektrod je pole v podstatě nulové. Urychlovaná částice se pohybuje danou počáteční rychlostí z bodu  $A$  ve směru společné osy elektrod. Délka jednotlivých elektrod je volena tak, aby se za dobu průletu částice jejich vnitřkem vždy změnila polarita napětí zdroje  $U_a$ . Elektrické pole mezi elektrodami tedy částici vždy urychluje. Při daném počtu elektrod  $n$  je celkové urychlovací napětí rovno  $nU_a$ . Urychlovací elektrické pole se navíc využívá k fokusaci svazku (srov. obr. 6.10a).

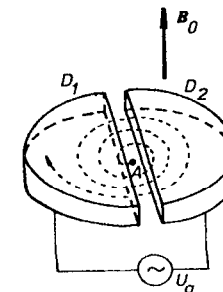


Obr. 6.13 Schéma lineárního urychlovače.

V současné době existuje řada modifikací v konstrukci lineárních urychlovačů. Obvykle se k jejich konstrukci využívá mikrovlnné techniky a urychlovací elektrické pole se budí v rezonátorech či vlnovodech. Konstruuji se urychlovače jak pro elektrony, tak pro těžké částice (například protony). Dosahované energie jsou až řádu  $10^3$  MeV.

#### c) Cyklotron

Cyklotron je základním typem tzv. *cyklických urychlovačů*, ve kterých se urychlované částice pohybují po kruhových drahách. K urychlování se – podobně jako u lineárních urychlovačů – používá střídavé elektrické pole. Principiální uspořádání cyklotronu je uvedeno na obr. 6.14. Urychlovací elektrické pole vzniká mezi elektrodami (tzv. *duanty*)  $D_1$  a  $D_2$  ve tvaru dutých polovin válce umístěných v homogenním magnetickém poli  $B_0$  rovnoběžném s jejich osou. Částice přivedená do bodu  $A$  s počáteční tangenciální rychlostí  $v_0$  se pohybuje po kruhové dráze konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_k$  podle (6.16). Má-li urychlovací střídavé napětí  $U_a$  frekvenci  $\omega_a = \omega_k$ , může být částice vždy při průletu prostorem mezi elektrodami urychlována. S rostoucí rychlostí částice však vzrůstá cyklotronový poloměr podle vztahu (6.17), takže částice se pohybuje po spirálové dráze a po určitém počtu oběhů  $n$  opustí urychlovač (viz obr. 6.14). Celkový urychlovací potenciál je přitom roven  $2nU_{a,max}$ , kde  $U_{a,max}$  je amplituda urychlovacího napětí.



Obr. 6.14 Principiální uspořádání cyklotronu.

Cyklotrony se zpravidla užívají k urychlování těžkých částic (protonů či iontů). V uvedeném základním uspořádání s konstantními hodnotami  $B_0$ ,  $U_{a,max}$ ,  $\omega_a$  je činnost cyklotronu omezena na energie, při nichž se ztlačně neuplatní relativistický vzrůst hybnosti částice (viz (2.17)), neboť v takové situaci závisí cyklotronová frekvence na rychlosti (viz vztah (6.21)). Dosahovaná energie protonů činí několik desítek MeV. Postupným snižováním frekvence  $\omega_a$  v procesu urychlování je možné udržovat urychlovací napětí ve fázi s průletem částice a dosáhnout tak řádově vyšších energií. Urychlovače těžkých částic pracující v impulsním režimu s proměnnou frekvencí urychlovacího napětí se nazývají *fázotrony*.

Relativistický vzrůst hybnosti částice s energií však umožňuje stabilizovat její dráhu v cyklotronu i při konstantních hodnotách  $\omega_a$ ,  $B_0$ . Skutečně, posune-li se fáze průletu částice natolik, že prostorem mezi duanty prolétává v časech, kdy urychlovací napětí mění polaritu, není již dále urychlována a pohybuje se po kruhové dráze konstantního poloměru. Je zřejmé, že tento stav je stabilní, neboť

vzniklé odchylky rychlosti jsou urychlovacím napětím automaticky korigovány. Postupným zvyšováním magnetického pole je možné pak energii částic dále zvyšovat. Urychlovače pracující s konstantní frekvencí  $\omega_a$  a proměnným magnetickým polem se nazývají *synchrotrony*. Používají se pro urychlování elektronů až do energií 1000 MeV.

Pro urychlování protonů na velmi vysoké energie se konstruují urychlovače značných rozměrů, u nichž je nezbytná stabilizace dráhy. Pro tyto účely se kombinuje princip fázotronu i synchrotrou. Pulsní urychlovače pracující s proměnnou frekvencí i magnetickým polem se nazývají *synchrofázotrony*. Dosahované energie v současné době činí až tisíce GeV.

#### d) Betatron

Betatron je speciální typ urychlovače elektronů, které jsou urychlovány elektrickým polem indukovaným při změně pole magnetického. Pozoruhodné je, že v osově symetrickém magnetickém poli vhodného průběhu existuje stabilní kruhová dráha elektronů se středem na ose symetrie. Elektrony po ní obíhají při vzrůstajícím magnetickém poli a jsou indukovaným elektrickým polem urychlovány na konečnou energii.

Podmínkou stability kruhové dráhy poloměru  $r_0$ , jejíž rovina je kolmá k ose symetrie osově symetrického pole  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , je rovnost dostředivé síly  $m_0 v^2/r_0$  se silou magnetického pole  $|e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})| = evB$ . Odtud plyne pro velikost hybnosti  $p = m_0 v$  podmínka

$$p = er_0 B(r_0, t). \quad (6.46)$$

Na druhé straně, jelikož velikost hybnosti může měnit jen elektrické pole  $\mathbf{E}$ , z pohybové rovnice (6.1) plyne

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (6.47)$$

V osově symetrickém poli je velikost indukovaného elektrického pole  $E$  v daném okamžiku na celém obvodu dráhy  $l$  konstantní. Podle (5.20) tudíž platí

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r_0 E = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}, \quad (6.48)$$

kde  $\Phi(t)$  je okamžitá absolutní hodnota magnetického toku tekoucího plochou ohraničenou dráhou elektronu, která může být jednoduše vyjádřena pomocí střední hodnoty magnetické indukce  $\bar{B}(t)$  na ploše dráhy vztahem  $\Phi(t) = \bar{B}(t)\pi r_0^2$ . Dosazením vztahů (6.46) a (6.48) do (6.47) dostaneme

$$\frac{\partial B(r_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{B}(t)}{\partial t}. \quad (6.49)$$

Integraci (6.49) podle času za předpokladu, že v čase  $t=0$  je  $B(r_0, t) = \bar{B}(t) = 0$ , dostaneme výsledek

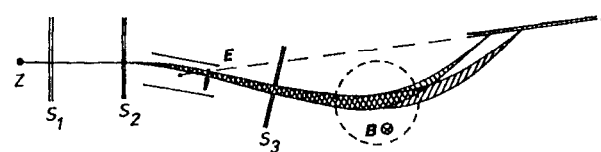
$$B(r_0, t) = \frac{1}{2} \bar{B}(t). \quad (6.50)$$

Podmínkou existence stabilní dráhy elektronu v betatronu tedy je, aby střední hodnota magnetické indukce na dráze  $l$  byla rovna polovině střední hodnoty magnetické indukce  $\bar{B}$  na ploše drahou ohraničené. Tato tzv. *Wideröeho podmínka* je značně obecná a neřeší otázku stability dráhy elektronů v betatronu v plném rozsahu. Při konstrukci betatronu je třeba navíc řešit otázky fokuse svazku a stability dráhy s ohledem na rozptyl počáteční rychlosti elektronů, na vliv zbytkové atmosféry v přístroji a na jiné faktory. Těmito otázkami, které kladou další podmínky na průběh magnetického pole v okolí dráhy, se již nebudeme zabývat.

Betatron je velmi efektivní zařízení pro urychlování elektronů na energii desítek MeV, i když bylo realizováno několik přístrojů dosahujících energie převyšující 100 MeV. Pro tyto vyšší energie je však výhodnější používat lineární urychlovače a zejména synchrotrony.

#### 6.3.3 Hmotnostní spektroskopie

Skutečnost, že v pohybové rovnici částice (6.1) vystupuje její měrný náboj  $q/m_0$ , může být využita k separaci částic podle měrného náboje, a v případě souboru částic se stejným nábojem, též k jejich separaci podle hmotnosti. Obor experimentální fyziky řešící tuto problematiku se nazývá *hmotnostní spektroskopie*. První hmotnostní spektrometr zkonstruoval v roce 1917 F. W. Aston. Jeho práce a práce jeho následovníků měla velký význam především pro rozvoj jaderné fyziky, neboť umožnila studovat izotopické složení prvků. Astonův spektrometr využíval k separaci částic vzájemně kolmé stacionární elektrické a magnetické pole. V současné době, kdy metody hmotnostní spektroskopie našly široké uplatnění v mnoha dalších oborech, existuje řada typů spektrometrů využívajících jak stacionární, tak časově proměnná pole.



Obr. 6.15 Schéma Astonova hmotnostního spektrometru.

Všimneme si kvalitativně principu činnosti Astonova spektrometru, jehož schéma je znázorněno na obr. 6.15. Soubor studovaných iontů vycházejících ze

zdroje  $Z$  je nejdříve kolimován pomocí dvojice štěrbin  $S_1$  a  $S_2$ . Svazek pak dále prochází homogenním příčným polem  $\mathbf{E}$  a pak, po vyčlenění jeho určité části štěrbinou  $S_3$ , k němu kolmým homogenním magnetickým polem  $\mathbf{B}$ . Obě vzájemně kolmá pole odkláňají částice v jedné rovině, přičemž orientace polí je volena tak, aby zakřivení dráhy elektrickým a magnetickým polem mělo opačný směr. Jak jsme poznali v odstavci 6.1.3a, částice se v elektrickém poli pohybují po parabolických drahách a jsou separovány podle veličiny  $q/m_0v^2$ . V magnetickém poli se částice pohybují po kružnicích, jejichž poloměr  $R_0$  je dán vztahem (6.17):  $R_0 = m_0v/qB$ . Tedy částice, které byly elektrickým polem více odkloněny, se v magnetickém poli pohybují po kružnici s menším poloměrem (viz obr. 6.15). Magnetické pole je tedy schopno fokusovat původně rozbíhavý svazek v určité rovině  $C$ . Podrobná kvantitativní analýza činnosti spektrometru (která není jednoduchá a nebudeme jí provádět) ukazuje, že v různých místech roviny  $C$  se fokusují částice s různým měrným nábojem  $q/m_0$ . Spektrometr je schopen s určitou rozlišovací schopností tyto částice separovat.

Skutečnost, že poloměr cyklotronové kružnice závisí na měrném náboji, se využívá i u hmotnostního spektrometru nazývaného *omegatron*, který se často používá pro analytické účely. Jde vlastně o typ malého cyklotronu, ve kterém se studovaný soubor iontů urychluje vysokofrekvenčním elektrickým polem kolmým ke statickému poli magnetickému (srov. odst. 6.3.2a). Geometrie uspořádání je volena tak, že částice, jejichž cyklotronová frekvence odpovídá frekvenci urychlovacího elektrického pole, po proběhnutí odpovídající spirálovou dráhou dopadnou na sběrnou elektrodu, na níž reprezentují určitý elektrický proud, který se registruje.

Častým a velmi důležitým použitím hmotnostní spektroskopie ve fyzikální laboratorní praxi jsou přístroje určené k hledání netěsnosti vakuových systémů. Jde vlastně o jednoúčelové hmotnostní spektrometry zařízené na detekci plynů, které se za normálních podmínek v atmosféře téměř nevyskytují. (Nejvíce se k uvedenému účelu užívá helium). Přístroj se vakuově těsně připojí ke studovanému systému a analyzuje se obsah helia v jeho zbytkové atmosféře za současného ofoukávání jednotlivých částí povrchu vakuové soustavy plyným heliem. Vzrůst obsahu helia ve zbytkové atmosféře zkoumaného zařízení pak signalizuje netěsnost. Jedním z dobře použitelných typů hmotnostních spektrometru pro tento účel je právě *omegatron*.

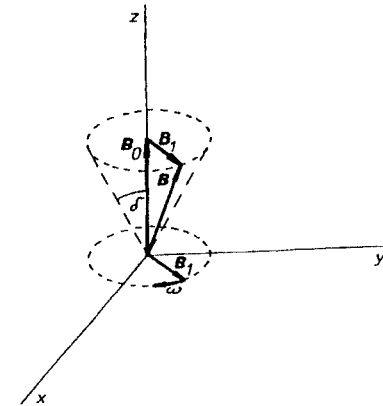
### 6.3.4 Magnetická rezonance

Magnetickou rezonancí se nazývá specifický typ pohybu gyromagnetické částice, na kterou vedle stacionárního magnetického pole  $\mathbf{B}_0$  působí v kolmé rovině ještě střídavé magnetické pole  $\mathbf{B}_1$ , jehož frekvence  $\omega$  je blízká Larmorově frekvenci částice  $\omega_0 = \gamma B_0$  ve statickém poli  $\mathbf{B}_0$  (srov. čl. 6.2.2). Abychom vyšetřili základní vlastnosti magnetické rezonance, budeme uvažovat situaci, kdy na gyromagnetickou částici s magnetickým momentem  $\mathbf{m}$  a gyromagnetickým poměrem  $\gamma$  působí jednak stacionární magnetické pole  $\mathbf{B}_0$  orientované ve směru osy  $z$  inerciální (laboratorní) souřadné soustavy  $S$ , jednak pole  $\mathbf{B}_1$ , jehož vektor ro-

tuje konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  v rovině  $xy$ . Výsledné pole  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$  tedy vykonává precesní pohyb s úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy  $z$ , přičemž pro úhel precese platí  $\tan \delta = B_1/B_0$  (viz obr. 6.16).

Pohyb částice v daném magnetickém poli je možné jednoduše vyšetřovat opakováním postupu použitého v článku 6.2.2. Zavedeme-li totiž novou soustavu souřadnou  $S' \equiv (x', y', z')$  rotující úhlovou rychlostí  $\omega$  kolem osy  $z$  tak, aby platilo  $\mathbf{B}_1 \parallel x'$ , můžeme pohyb částice popsat pohybovou rovnicí typu (6.39), přičemž pro efektivní pole  $\mathbf{B}_{\text{ef}}$  tentokrát dostáváme

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \mathbf{k}' + B_1 \mathbf{i}', \quad (6.51)$$



Obr. 6.16 K výkladu magnetické rezonance. Precese výsledného magnetického pole v laboratorní soustavě souřadnic.

kde  $\mathbf{i}'$  a  $\mathbf{k}'$  značí jednotkové vektory ve směru os  $x'$  a  $z'$ . Protože v rotující soustavě  $S'$  působí na částici časově neproměnné efektivní pole, mohou být pro popis pohybu částice přímo využity výsledky článku 6.2.2; částice bude v soustavě  $S'$  konat precesní pohyb kolem směru pole  $\mathbf{B}_{\text{ef}}$  s novou Larmorovou frekvencí (viz obr. 6.17a)

$$\omega'_0 = \gamma B_{\text{ef}}. \quad (6.52)$$

Vůči původní inerciální soustavě  $S$  bude částice konat dosti složitý pohyb. K precesi s úhlovou frekvencí  $\omega'_0$  přibude rotace s úhlovou frekvencí  $\omega$ ; výsledkem bude tedy procesní pohyb doplněný nutací, který se vyskytuje rovněž při pohybu setrvačníků. Působení střídavého pole  $\mathbf{B}_1$  se projeví periodickou změnou úhlu precese.

Zvláštní situace nastane, bude-li frekvence střídavého pole rovna Larmorově frekvenci ve statickém poli, tj. bude-li platit  $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$ . Složka efektivního

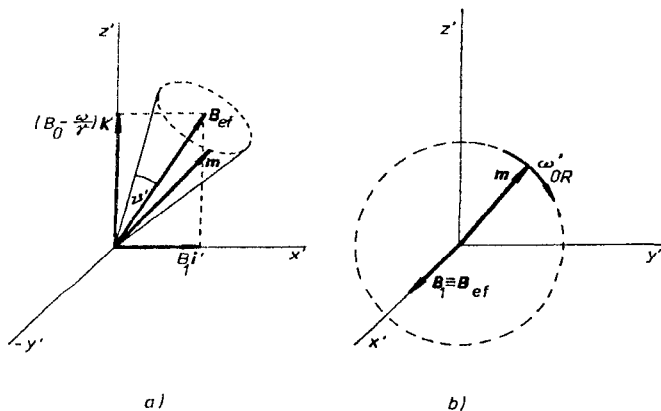
magnetického pole ve směru osy  $z$  daná vztahem (6.51) bude rovna nule, takže pro efektivní pole v soustavě  $S'$  dostaneme

$$\mathbf{B}_{\text{ef}} = \mathbf{B}_1. \quad (6.53)$$

V této rotující soustavě bude tedy magnetický moment konat precesi kolem směru pole  $\mathbf{B}_1$ , tj. kolem osy  $x$ , s úhlovou frekvencí

$$\omega'_{\text{OR}} = \gamma B_1. \quad (6.54)$$

Úhel precese je dán počátečními podmínkami. Speciálně, pokud bylo v čase  $t=0$   $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}_0$ , je úhel precese  $\vartheta' = \pi/2$  a magnetický moment rotuje v rovině  $y'z'$ . Mění tedy periodicky svou paralelní a antiparalelní orientaci vůči statickému magnetickému poli.



Obr. 6.17 K výkladu magnetické rezonance. Precese magnetického momentu v rotující soustavě souřadnic: a) mimo stav magnetické rezonance, b) ve stavu magnetické rezonance.

Uvedený stav se nazývá *magnetickou rezonancí*. V tomto stavu, kdy frekvence střídavého pole  $\omega$  je rovna Larmorově frekvenci  $\omega_0 = \gamma B_0$ , má střídavé pole maximální možný vliv na chování částice. Střídavé pole  $\mathbf{B}_1$  libovolně malé amplitudy může výrazně měnit orientaci magnetického momentu částice vůči libovolně velkému poli  $\mathbf{B}_0$ .

Jev magnetické rezonance má značný praktický význam. Její historicky první použití byla tzv. *Rabiho metoda* pro měření magnetických momentů atomových jader na základě vyšetřování vlivu střídavého magnetického pole na pohyb svazku atomů či molekul (viz např. [1]). Později byl jev magnetické rezonance pozorován i v kondenzovaných látkách, a to jak pro magnetické momenty elektronového obalu atomu, tak pro magnetické momenty jader. Vznikl tak samo-

statný a dnes již rozsáhlý obor spektroskopie magnetické rezonance, který má nezastupitelné místo při studiu mikrostruktury anorganických i organických látek. Na jevu magnetické rezonance vodíkových jader je založena i dnes velmi rozšířená a účinná lékařská diagnostika – *nukleární rezonanční tomografie*.<sup>46</sup>

## ÚLOHY KE KAPITOLE 6

Ú 6.1: Částice o měrném náboji  $q/m_0$  vletne do homogenního elektrického pole  $\mathbf{E}$  s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}_0$  rovnoběžnou se směrem pole. Vyjádřete obecnou časovou závislost hybnosti částice. V případě nulové počáteční rychlosti vyjádřete též časovou závislost okamžité rychlosti a energie částice.

Ú 6.2: Elektron vletí do homogenního magnetického pole rychlostí  $v = 5 \cdot 10^6$  m/s a začne se pohybovat po šroubovici o poloměru  $R_0 = 5$  cm a stoupání  $s = 30$  cm. Určete velikost magnetické indukce.

Ú 6.3: Lze uspořádat elektrické a magnetické pole tak, aby na částici pohybující se rychlostí  $v$  nepůsobila žádná síla? V kladném případě uveďte způsob takového uspořádání a rozhodněte, může-li být využito jako rychlostní filtr, který by propouštěl jen částice o dané velikosti rychlosti  $v$ .

Ú 6.4: Elektrony urychlované v synchrotronu se pohybují po kruhové dráze, jejíž celková délka činí 240 m. Na dráze se nachází  $10^{11}$  elektronů o rychlosti v podstatě rovné rychlosti světla. Jaký proud  $I$  protéká urychlovací dráhou?

Ú 6.5: Mezi duanty cyklotronu je maximální urychlovací napětí  $U_{n,\text{max}} = 3 \cdot 10^4$  V. Magnetické pole cyklotronu  $B = 0,8$  T. Určete rozdíl poloměrů drah protonu  $\Delta R$  po čtvrtém a devátém oběhu.

Ú 6.6: Předpokládejme, že magnetické pole v betatronu lineárně vzrůstá po dobu  $10^{-3}$  s tak, že elektron při jednom oběhu stabilní dráhy o poloměru  $R_0 = 5$  cm získá energii 20 eV. Určete počet oběhů  $n$  za dobu  $10^{-3}$  s, celkovou dráhu  $l$ , kterou elektron urazí, a energii  $W$ , kterou získá.

<sup>46</sup> O metodách magnetické rezonance a o jejich využití je možné se poučit například v učebnici V. Prosser a kol.: *Experimentální metody biofyziky*, Academia, Praha 1989, kapitola 7.







## 7 Elektrické a magnetické vlastnosti látek

V kapitolách 1 až 5 jsme viděli, že úloha o makroskopickém elektromagnetickém poli v látkovém prostředí je jednoznačně řešitelná jen tehdy, je-li znám stav tohoto prostředí. Nejobvyklejší postup spočívá v zadání materiálových vztahů, tj. v zadání souvislosti mezi elektrickou a magnetickou polarizací a elektrickou vodivostí na jedné straně a intenzitami elektrického a magnetického pole na straně druhé. V článcích 1.5.4, 3.2.2 a 3.5.4 bylo naznačeno, že uvedené souvislosti mohou být pro různé typy prostředí značně rozmanité, pro mnohá prostředí však mohou být aproximovány relativně jednoduchými relacemi. V nejhrubší aproximaci může jít o relace lineární, charakterizované elektrickou a magnetickou susceptibilitou (respektive permitivitou a permeabilitou) a elektrickou vodivostí.

Makroskopická fenomenologická teorie elektromagnetického pole nemůže o těchto materiálových vztazích či materiálových parametrech nic bližšího říci. Pro jejich specifikaci je proto nutné hledat jiné přístupy. Základní je experimentální studium chování látek v elektrickém a magnetickém poli, přičemž získané výsledky mohou být vyjádřeny zmíněnými empirickými materiálovými parametry. V další etapě mohou být tyto výsledky analyzovány různými postupy umožňujícími jejich hlubší pochopení, popř. nalezení jejich závislosti na konkrétních fyzikálních podmínkách. Mezi základní postupy patří aplikace zákonů termodynamiky, formulace fenomenologických stavových rovnic prostředí a vypracování jeho mikroskopických modelových teorií. Každý z uvedených postupů má své specifické možnosti a oprávnění. Poslední z nich je však nejuniverzálnější a odpovídá duchu Lorentzovy mikroskopické teorie diskutované v oddílu 5.4.

Právě popsaná problematika je obsahem této kapitoly. Základní tematiku tvoří oddíly 7.2 až 7.5, ve kterých je uveden přehled experimentálních poznatků o chování látek různého typu v elektrickém a magnetickém poli. V tomto smyslu uvedené oddíly navazují na výklad článků 1.5.4, 3.2.2, 3.2.3 a 3.5.4, v nichž byla vyložena nejnnutnější fakta potřebná pro řešení konkrétních úloh. Vzhledem k tomu, že jde o problematiku značně rozsáhlou a různorodou, je současně zřejmé, že se výklad neobejde bez uplatnění mikroskopických pohledů, které jsou nutné pro zvýšení srozumitelnosti, umožní pochopit fyzikální podstatu jednotlivých jevů a jejich vzájemné souvislosti a pomohou tyto jevy utřídit. Tato

mikrostrukturální hlediska budou v oddílech 7.2 až 7.5 použita vesměs jen na kvalitativní či polokvantitativní úrovni zejména u těch jevů a vlastností, jejichž kvantitativní mikrostrukturální teorie přesahují rámec této učebnice. Východisko pro takto pojatý výklad tvoří oddíl 7.1, jenž obsahuje stručný přehled kvantově mechanických výsledků o elektronových stavech v atomech, molekulách a kondenzovaných látkách. Čtenář, který je s těmito fakty seznámen, může oddíl 7.1 vynechat.

Kapitolu uzavírá oddíl 7.6 obsahující výběr kvantitativních modelových mikroskopických teorií některých vlastností látek. Cílem tohoto oddílu je ukázat úlohu a význam modelové mikroskopické teorie ve fyzice. Výklad zpravidla začíná teoriemi založenými na klasických modelech. Konfrontací jejich výsledků s experimentem jsou pak diskutovány meze platnosti těchto modelů, eventuálně jsou provedeny jejich nutné korekce.

### 7.1 \*Elektronová struktura látek

#### 7.1.1 Energie elektronů v atomech a molekulách

Nejdůležitější interakcí určující energii elektronu ve volném atomu je, jak víme, elektrická interakce mezi tímto elektronem a jádrem. Elektrickou interakcí (srov. kapitolu 1) je ovšem energie určena až na libovolnou konstantu, kterou je třeba zvolit. Obvykle se za nulovou považuje energie elektronu s nulovou rychlostí, který je nekonečně vzdálen od jádra. Potom elektrony s celkovou kladnou energií můžeme považovat za volné a naopak elektrony s energií zápornou za vázané v atomech. Z kvantové mechaniky vyplývá (viz např. [1]), že volné elektrony mohou mít spojité spektrum energie, zatímco elektrony vázané v atomu se mohou nacházet jen ve stavech s určitými diskretními hodnotami energie, které tvoří diskretní spektrum.

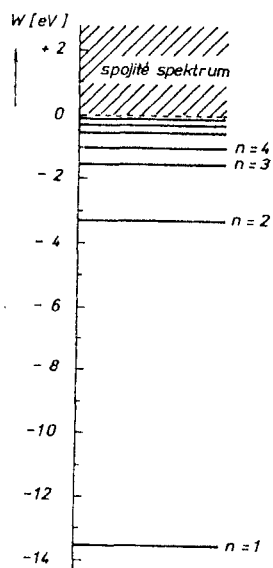
V nejjednodušším atomu s jedním elektronem, tj. v atomu vodíku, je (v přiblížení nerelativistické kvantové mechaniky) energie elektronu  $W_n$  určena jen tzv. *hlavním kvantovým číslem*  $n$ , které může nabývat hodnot přirozených čísel  $n = 1, 2, 3, \dots$  Platí

$$W_n = -\frac{hR_\omega}{n^2}, \quad (7.1)$$

kde  $R_\omega = (\mu_0 c^2 / 4\pi)^2 (m_e e^4 / 2h^3) \doteq 2,067 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1}$  je tzv. *Rydbergova úhlová frekvence*,  $\hbar = h/2\pi$  a  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  je Planckova konstanta<sup>47</sup>. Na obrázku

<sup>47</sup> V literatuře je frekvencovanější tzv. Rydbergova konstanta  $R_\infty \doteq 1,0973 \text{ m}^{-1}$ , pro niž platí  $R_\omega = 2\pi c R_\infty$ . Podrobnější údaje o významu těchto veličin najde čtenář například v [2].

7.1 vidíme zjednodušené schéma energetických hladin elektronu v atomu vodíku odpovídajících vztahu (7.1). Stavy odpovídající těmto energiím se nazývají *stacionární stavy* a elektrony v těchto stavech nevyzařují energii. Naopak při přechodu mezi různými stacionárními stavy musí elektron odevzdat či získat určitou energii, obvykle ve formě kvanta elektromagnetického záření – fotonu. Jak je z obrázku vidět, nejnižší energii má elektron ve stavu  $n = 1$ , který se nazývá *základní stav*. Elektron v tomto stavu musí získat energii alespoň  $W_i = \hbar R_\infty = 13,6$  eV, aby se z atomu uvolnil. Tato energie se nazývá *ionizační energie*. Příslušný rozdíl potenciálu, kterým musí elektron projít, aby získal tuto energii, se nazývá *ionizační potenciál*.



Obr. 7.1 Zjednodušené schéma energetických hladin atomu vodíku.

Vedle energie má elektron v atomu ještě určité diskrétní hodnoty momentu hybnosti svázané s jeho pohybem kolem atomového jádra. Ve stavu s danou hodnotou hlavního kvantového čísla  $n$  je velikost tohoto tzv. *orbitálního momentu*  $L_l$  určena „vedlejším“ kvantovým číslem  $l$ , které může nabývat hodnot  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Platí

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \quad (7.2)$$

Orbitální moment v daném stacionárním stavu má určitou jen jedinou složku do daného, předem zvoleného směru, určeného například směrem vnějšího pole, do kterého položíme osu  $z$  soustavy souřadné. Při dané hodnotě kvantového čísla  $l$

je velikost této složky určena tzv. *magnetickým kvantovým číslem*  $m_l$ , které může nabývat  $2l + 1$  hodnot  $m_l = l, (l-1), (l-2), \dots, -l$ . Platí

$$L_{l,z} = \hbar m_l, \quad m_l = l, (l-1), (l-2), \dots, -l. \quad (7.3)$$

Můžeme tedy uzavřít: *Orbitální stav elektronu v atomu vodíku je určen třemi kvantovými čísly:  $n, l, m_l$ . Hlavní kvantové číslo  $n$  určuje energii stacionárního stavu podle vztahu (7.1), vedlejší kvantové číslo  $l$  určuje velikost orbitálního momentu hybnosti podle vztahu (7.2) a magnetické kvantové číslo  $m_l$  určuje „orientaci“ tohoto momentu vůči danému směru podle vztahu (7.3).*<sup>48</sup>

Jeho vlastností jsou (podobně jako vlastnosti orbitálního momentu) podřízeny obecným kvantovými pravidly pro moment hybnosti. To znamená, že velikost spinu a jeho možné složky jsou popsány dvěma kvantovými čísly: spinovým kvantovým číslem  $s$  a magnetickým kvantovým číslem  $m_s$ . Z experimentu i z relativistické kvantové mechaniky vyplývá  $s = 1/2$ . V analogii s (7.2) a (7.3) pak pro velikost spinu  $L_s$  a pro jeho složku  $L_{s,z}$  do daného význačného směru platí

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad s = \frac{1}{2}, \quad (7.4)$$

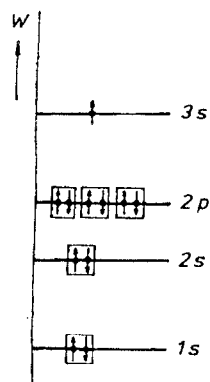
$$L_{s,z} = \hbar m_s, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Protože kvantové číslo  $s = 1/2$  je pro elektron jednoznačně dáno, může se při změně stavu elektronu měnit jen „prostorová orientace“ spinu, která je určena magnetickým spinovým kvantovým číslem  $m_s$ . Toto kvantové číslo tvoří, vedle zmíněných kvantových čísel  $n, l, m_l$ , čtvrtý parametr charakterizující stav elektronu vázaného v atomu vodíku.

V případě atomů s více elektrony zůstává situace kvalitativně stejná. Stavy jednotlivých elektronů vázaných v atomu jsou popsány čtveřicí uvedených kvantových čísel, přičemž energie elektronů v těchto stavech může nabývat opět jen určité diskrétní hodnoty. Podstatný rozdíl je však v tom, že při určování elektronových stavů je vedle elektrické interakce elektronu s jádrem třeba uvažovat ještě další vzájemné interakce mezi elektrony. Nejdůležitější je elektrická (coulombovská) interakce mezi elektrony, která vede především k tomu, že energie daného stacionárního stavu závisí nejen na hlavním kvantovém čísle  $n$ , ale také na vedlejším kvantovém čísle  $l$ .

<sup>48</sup> Existence spinu elektronu neplyne z kvantové mechaniky v nerelativistickém přiblížení. Jeho existence a vlastnosti byly v letech 1925–1927 dodatečně postulovány pro vysvětlení pozorovaných experimentálních faktů. Později (v r. 1928) vyplynula existence spinu elektronu z Diracovy relativistické teorie.

Z právě uvedených faktů vychází obvyklé značení elektronových stavů v atomu, které rozlišuje jen stavy s různou energií, a využívá tudíž kvantových čísel  $n$  a  $l$ . Soubor elektronových stavů s danou hodnotou hlavního kvantového čísla se nazývá *slupkou elektronového obalu* uvažovaného atomu. Podle historicky zavedené symboliky jsou jednotlivé slupky, které odpovídají hodnotám  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  postupně označovány písmeny K, L, M, N, .... V dané slupce může existovat několik skupin elektronových stavů lišících se kvantovým číslem  $l$  (a tedy i energií). Tyto skupiny stavů se nazývají *podslupky* a pro hodnoty  $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  se pro označení podslupky používají postupně symboly s, p, d, f, ... Například tedy ve slupce M existují podslupky 3s, 3p, 3d.

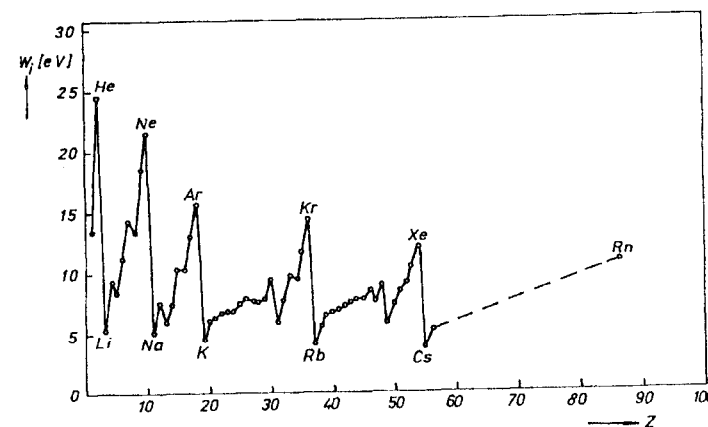


Obr. 7.2 Elektronová struktura atomu sodíku.

Pro elektronovou strukturu atomu s více elektrony má principiální význam způsob obsazování možných stavů, který musí vyhovovat tzv. *Pauliho principu*. Tento princip je důsledkem nerozlišitelnosti částic v kvantové mechanice a pro případ elektronů v atomu říká, že v daném stavu popsaném kvantovými čísly  $n, l, m_l, m_s$  se může nalézat nejvýše jeden elektron. V základním stavu, tj. ve stavu, ve kterém může setrvávat libovolně dlouho, má atom nejnižší možnou energii, a jsou tedy v souladu s Pauliho principem obsazeny stavy s nejnižší energií. Na obrázku 7.2 je uveden příklad elektronové struktury neutrálního atomu Na, který obsahuje 11 elektronů. Atom má plně obsazeny slupky K a L obsahující postupně 2 a 8 elektronů. Ve slupce M, která má 18 elektronových stavů, je jen jediný elektron ve stavu 3s.

Pro chemické a elektrické vlastnosti atomu je důležitá prostorová symetrie rozložení náboje v elektronovém obalu a zejména její odchylky od symetrie kulové. Z tohoto hlediska mají zvláštní postavení stavy typu „s“, jimž samotným odpovídá kulově symetrické rozložení náboje. Rovněž zcela zaplněné podslupky mají tuto vlastnost; zdrojem odchylek od kulově symetrického rozložení náboje jsou tedy částečně zaplněné podslupky typu p, d, f, ...

Na stupni zaplnění periferní podslupky jsou rovněž silně závislé schopnosti atomu tvořit ionty. Tuto skutečnost jasně dokumentuje obr. 7.3<sup>49</sup>, ve kterém je vynesena závislost ionizační energie  $W_i$ , potřebné pro vznik kladných iontů, na atomovém čísle  $Z$ . Je vidět, že tato závislost sleduje periodicitu Mendělejevovy tabulky, která je dána stupněm zaplněnosti periferní podslupky. Nejsnáze tvoří kladné ionty alkalické kovy, zatímco nejvyšší ionizační energii mají inertní plyny. Z obrázku je rovněž vidět, že nesnadno tvoří kladné ionty i atomy s téměř zaplněnou periferní podslupkou, především atomy halogenových prvků. Tyto atomy mají naopak schopnost udržet nadbytečné elektrony a tvořit ionty záporné.



Obr. 7.3 Ionizační energie neutrálních atomů.

Uvedenou vlastnost lze kvalitativně vyložit jednoduchou úvahou: V elektricky neutrálním atomu je kladný náboj jádra vykompenzován záporným nábojem elektronů. Elektrické pole jednotlivých nabitých částic v atomu je však plně vykompenzováno a atom se chová jako elektricky neutrální útvar jen v dostatečně velké vzdálenosti, přičemž stupeň kompenzace závisí na symetrii rozložení náboje elektronů (srov. vlastnosti multipólového rozvoje elektrického pole – čl. 1.3.1). V prostoru samotné periferní podslupky zůstává část kladného náboje jádra lokálně nevykompenzována, čímž vzniká možnost lokalizace nadbytečného elektronu. Vzniklý záporný iont může být energeticky výhodnější než příslušný neutrální atom. Tato vlastnost se nazývá *afinita atomu k elektronu* a příklady hodnot  $W_a$  (tj. rozdílu energie neutrálního atomu v základním stavu a energie záporného iontu) pro některé prvky jsou uvedeny v tabulce 7.1

<sup>49</sup> Jde o experimentálně zjištěné hodnoty převzaté z publikace *Tablitsy fizičeskich veličin*, redaktor I. K. Kikoin, Atomizdat, Moskva 1967.

Z uvedeného příkladu je patrné, že existence volného atomu s nezaplňenou podslupkou nemusí být energeticky výhodná, přičemž afinita daného atomu k elektronu se může projevit i vytvořením molekuly. V principu existují dvě mezní situace v charakteru vazby atomů v molekule: vazba *heteropolární* (iontová) a vazba *homopolární*. Molekuly s heteropolární vazbou vznikají z atomů různého druhu, z nichž jeden má tendenci tvořit kladné ionty a druhý ionty záporné. Molekulu si pak můžeme představit jako soustavu kladných a záporných iontů, které jsou přitahovány elektrickou silou; příkladem může sloužit molekula NaCl. Naopak homopolární molekuly vznikají z atomů stejného či podobného typu. Typickými příklady jsou molekuly  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  a jiné. Charakteristickým rysem homopolární vazby jsou kolektivizované stavy elektronů podílejících se na vazbě. Fyzikální podstatu homopolární vazby však nelze vyložit na základě klasických představ. Důležitou roli při jejím vzniku má tzv. *výměnná interakce* mezi vazebními elektrony, která je čistě kvantově mechanickým důsledkem elektrické interakce a je odpovědná i za řadu vlastností kondenzovaných látek (například za magnetické uspořádání – viz článek 7.2.3).

Tabulka 7.1 Afinita některých atomů k elektronu

atom	H	He	Na	Cl	N	O	K	Br
afinita k elektronu $W_a$ (eV)	0,754	0,08	0,35	3,82	0,2	1,46	0,3	3,37

Podobně jako v případě atomů, odpovídají i jednotlivým stacionárním stavům molekuly diskrétní hodnoty energie. Situace je zde poněkud složitější, neboť stav molekuly jako celku je určen nejen vlastními stavy elektronu, ale také vzájemným pohybem atomů v molekule, popř. pohybem celé molekuly. Změna stavu elektronu je vždy doprovázena změnami kmitů atomů a změnami rotačního pohybu molekuly. Proto má energetické spektrum molekuly jako celek zmíněný diskrétní charakter. Avšak na rozdíl od energetického spektra atomu, které je zpravidla tvořeno soustavou vzájemně dosti vzdálených hladin, sestává energetické spektrum molekuly ze skupin blízkých hladin. Mluvíme o tzv. *pásovém spektru*.

Tabulka 7.2 Disociační energie některých molekul

molekula	$H_2$	$N_2$	CO	$O_2$	HCl	NaCl
disociační energie $W_D$ (eV)	4,48	9,76	11,1	5,1	4,43	4,2

Molekuly mohou být (stejně jako atomy) ionizovány. Molekula může popsáním mechanismem zachytit jeden či více nadbytečných elektronů, čímž vznikne záporný iont. Naopak, ztratí-li molekula jeden či více elektronů, vznikne iont kladný. Například ionizační energie potřebná pro vznik iontu  $H_2^+$  činí 15,43 eV. Na druhé straně afinita molekuly  $H_2$  k elektronu činí 0,72 eV.

Získají-li atomy energii, která převyšuje energii jejich vazby v molekule, může dojít k jejímu rozdělení. Mluvíme o *disociaci molekuly* a energii potřeb-

nou k disociaci nazýváme *disociační energii*. Jako příklad uvádíme v tabulce 7.2 disociační energii  $W_D$  některých dvouatomových molekul.

### 7.1.2 Energie elektronů v kondenzovaných látkách

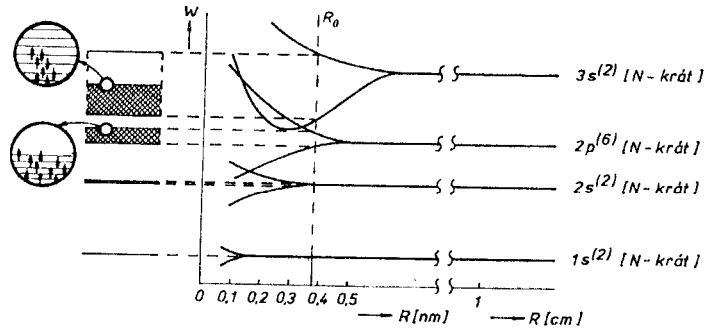
V předchozím článku jsme viděli, že pro objasnění chování elektronů v atomu a molekule jsou podstatné zákony kvantové mechaniky. Jejich důsledkem především bylo, že elektrony v atomech mohou existovat jen v určitých stavech s definovanými diskrétními hodnotami energie a orbitálního a spinového momentu hybnosti, přičemž tyto možné stavy jsou obsazovány v souladu s Pauliho principem. Současně jsme viděli, že při přechodu od atomu k molekule se energetické spektrum značně zkomplikovalo vlivem podstatně větší variability pohybového stavu molekuly. V tomto článku nás bude zajímat otázka, jaké energie mohou mít elektrony v kondenzovaných látkách. V principu je tuto otázku v plném rozsahu schopna řešit kvantová mechanika. Ve skutečnosti ovšem, protože jde o problém velmi mnoha částic, je možné použít jen aproximativní metody různého přiblížení vypracované použitím zákonů kvantové mechaniky, které jsou aplikované pomocí počítačů. Na tomto místě můžeme uvést jen kvalitativně některé příklady výsledků takových výpočtů. Budeme sledovat myšlenkový pokus vzniku kovového krystalu sodíku,<sup>50</sup> který nám umožní pochopit podstatu problému.

Jak víme, sodík má za pokojové teploty kubickou prostorově centrovanou strukturu s mřížkovou konstantou  $a = 0,43$  nm. Vzdálenost nejbližších sousedů v krystalové mřížce činí  $R_0 = 0,37$  nm, hustota  $\rho_M = 968$  kg·m<sup>-3</sup>. V krystalu o objemu 1 cm<sup>3</sup> je tedy přibližně  $N = 3 \cdot 10^{22}$  atomů. Předpokládejme nejdříve, že jednotlivé atomy jsou navzájem značně vzdáleny, například na vzdálenost  $R = 1$  cm. Elektrony každého atomu se nacházejí ve stavech popsanych v pravé části obr. 7.4 (srov. obr. 7.2).

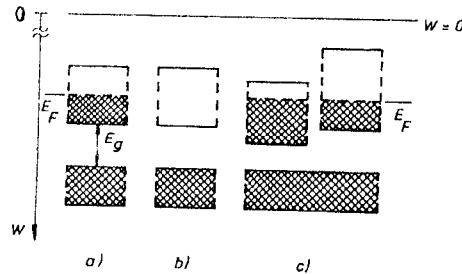
Sledujme nyní myšlenkový proces, při kterém se atomy postupně sblíží až na vzdálenost  $R_0 = 0,37$  nm, takže vznikne krystal kovového sodíku. Je zřejmé, že elektrony sousedních atomů, a to především elektrony ve vnějších podslupkách, se budou stále více ovlivňovat. Výpočet ukazuje, že každá z dovolených energetických hladin atomu se rozštěpí  $N$ -krát, takže vzniknou kvazispojité intervaly dovolených energií oddělených intervaly  $E_g$  energií zakázaných; v literatuře se obvykle mluví o *dovolených a zakázaných pásech* (viz obr. 7.4). Šířka výše položených pásů dovolených energií bývá řádově jednotky až desítky eV. Například u sodíku je šířka pásu 3s rovna 6,24 eV. Naproti tomu pásy vzniklé z hladin vnitřních podslupek jsou zpravidla značně užší. Například pás 1s sodíku má šířku jen asi  $10^{-19}$  eV.

<sup>50</sup> Sledujeme volně výklad uvedený v knize V. Frci: Fyzika pevných látek. SPN, Praha 1978.

Vezmeme-li v úvahu počty elektronových stavů v jednotlivých podslupkách atomu sodíku, snadno určíme počty stavů v jednotlivých dovolených páslech krystalu sodíku: pásy 1s, 2s, 3s mají  $2N$  stavů, pás 2p má  $6N$  stavů. V páslech 1s, 2s a 2p jsou všechny možné stavy zaplněny, zatímco pás 3s je zaplněn jen zpoloviny. „Pod lupou“ na obr. 7.4 vidíme strukturu dvou periferních pásů a charakter zaplňování jejich jednotlivých hladin. Předpokládáme-li šířku pásu 10 eV a počet hladin v pásu  $N \sim 10^{22}$ , můžeme odhadnout průměrný rozdíl energií nejbližších hladin v pásu  $\Delta E \sim 10^{-21}$  eV.



Obr. 7.4 K výkladu vzniku pásové struktury energie elektronů v krystalu sodíku.



Obr. 7.5 Příklady pásové struktury různých typů pevných látek: a) prosté (například alkalické) kovy, b) izolanty, c) kovy se složitější elektronovou strukturou (například tranzitivní kovy).

Způsob zaplnění pásů dovolených energií, který jsme viděli u sodíku, je charakteristický pro kovy, jež mají vnější (periferní) pás zaplněn vždy jen zčásti. Jiná situace nastává u krystalických látek, jejichž atomy mají periferní slupku zcela zaplněnou. Takové látky mají v základním stavu, tj. například při teplotě absolutní nuly, jednotlivé pásy dovolených energií buď zcela zaplněné, nebo zcela prázdné. U látek se složitější elektronovou strukturou může nastat překrytí dvou pásů odpovídajících různým atomovým podslupkám. V základním stavu jsou pak oba tyto pásy zaplňovány elektrony do stejných hodnot energie, která

se nazývá *Fermiho energií*  $E_F$  (srov. čl. 7.1.3). Na obrázku 7.5 je uvedeno srovnání pásové struktury uvedených tří typů krystalických látek.

Detailnější výpočty elektronových stavů v pevných látkách ukazují, že elektrony tvořící úzké pásy zůstávají silně lokalizovány v jednotlivých atomech. Naopak elektrony tvořící široké pásy mají značnou pravděpodobnost „samovolného přeskočení“ z jednoho atomu na druhý. O elektronech z nejbližších periferních pásů lze s dobrým přiblížením předpokládat, že se mohou v podstatě volně pohybovat v celém objemu krystalu. Tento pohyb je ovšem chaotický, může však mít značné rychlosti. Například střední rychlost chaotického pohybu elektronů v pásu šířky 10 eV činí řádově  $10^6$  m.s<sup>-1</sup>.

Právě popsaný charakter elektronové struktury krystalických pevných látek má principiální důležitost pro pochopení většiny jejich fyzikálních vlastností, mezi jiným i elektrické vodivosti. Podstata problému spočívá v tom, že elektrony ve zcela zaplněných páslech se na elektrické vodivosti nemohou podílet, i když může jít o elektrony do značné míry nelokalizované. Elektrické pole nemůže totiž těmto elektronům udělit dodatečnou energii potřebnou pro uspořádaný pohyb v makroskopickém měřítku, neboť v daném pásu nejsou již k dispozici potřebné volné stavy. Naproti tomu v částečně zaplněném pásu, ve kterém jsou jednotlivé energetické hladiny velmi blízko u sebe, stačí nepatrný vliv elektrického pole k lomu, aby některé elektrony získaly potřebnou energii pro uspořádaný pohyb v makroskopickém měřítku. Látky, jejichž pásová struktura má charakter znázorněný na obr. 7.5a, respektive 7.5c, jsou tedy vodiče, zatímco látky s elektronovou strukturou uvedenou na obr. 7.5b jsou nevodivé. Periferní částečně zaplněný pás vodičů se nazývá *vodivostním pásem*. Nejbližší nižší (zcela zaplněný) pás se nazývá *pásem valenčním*.

Vedle krystalů existuje velké množství amorfních pevných látek, popř. látek s nedokonalě vyvinutou krystalovou strukturou. Přesto, že v takových látkách nemohou být elektronové stavy popisovány tak jednoduše jako v krystalech, dovolené a zakázané pásy energií v nich existují a lokální hustota možných elektronových stavů je zpravidla určována lokálním uspořádáním. I v těchto látkách může být proud v principu realizován elektrony i děrami. Otázky elektrické vodivosti různého typu látek budou podrobněji diskutovány v oddílu 7.3.

### 7.1.3 Elektronový plyn

Model elektronového plynu představuje velmi důležitou aproximaci pro popis chování nelokalizovaných (volných) elektronů v pevných látkách, zejména v kovech. Předpoklad o existenci volných elektronů v kovech první zavedl německý fyzik P. Drude v roce 1900, tedy krátce po objevu elektronu J. J. Thomsonem (1897). Podle jeho představ existuje v kovu jistý počet elektronů, které jsou jen velmi volně vázány k jednotlivým atomům a které se uvnitř kovu chovají v prvním přiblížení jako molekuly ideálního plynu. Drude proto předpoklá-

dal, že k popisu chování těchto volných elektronů je možné použít stejné statistické metody, které byly v té době s úspěchem používány pro vysvětlení mnohých vlastností plynů.

Situace volných elektronů v kovech je ovšem složitější než situace molekul v plynu, neboť kromě vzájemné interakce mezi elektrony, je nutné uvažovat interakci s ionty krystalové mřížky. Druhého model předpokládá, že kladné částice kompenzující záporný náboj volných elektronů v kovu, tj. ionty krystalové mřížky jsou mnohem těžší než elektrony a jsou v prvním přiblížení nehybné. Interakce každého volného elektronu s ionty krystalové mřížky a s jinými volnými elektrony je dána jen občasnými srážkami, které mají charakter pružných srážek. Při nich mění elektrony náhle směr svého pohybu a jejich prostřednictvím dochází také k výměně energie jednak mezi elektrony navzájem a jednak mezi elektrony a krystalovou mřížkou, takže tyto srážky umožňují ustavení termodynamické rovnováhy v kovu jako celku. V době mezi následujícími srážkami se elektrony pohybují zcela volně. V nulovém vnějším poli je jejich pohyb zcela neuspořádaný, takže střední hodnota rychlosti v libovolném směru je nulová.

Klasický model elektronového plynu předpokládá, že tento chaotický pohyb elektronů je možné popsat metodami klasické kinetické teorie plynů. Pro rozdělení rychlostí elektronů se tedy předpokládá platnost rozdělení Boltzmannova typu, takže hustota pravděpodobnosti  $f_B(\mathbf{v})$  rychlosti  $\mathbf{v}$  s danými složkami  $\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$  je dána vztahem (viz například [10])

$$f_B(\mathbf{v}) = \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m_e v^2}{2k_B T} \right), \quad (7.5)$$

ve kterém  $m_e$  značí hmotnost elektronu a  $k_B$  Boltzmannovu konstantu.<sup>51</sup> Dalším důležitým předpokladem modelu je možnost zavést střední dobu volného pohybu elektronu  $\bar{\tau}$  mezi následujícími srážkami, o níž se předpokládá, že nezávisí na poloze a rychlosti elektronu. Zavedeme-li střední rychlost elektronu  $\bar{v}_0$ , můžeme pak vyjádřit i střední volnou dráhu

$$\bar{l} = \bar{v}_0 \bar{\tau}. \quad (7.6)$$

V článku 7.6.5 uvidíme, že i když klasický model elektronového plynu představuje velmi hrubou aproximaci popisu volných elektronů, je schopen správně vyloužit řadu vlastností kovů. Na druhé straně uvidíme, že v mnohých případech

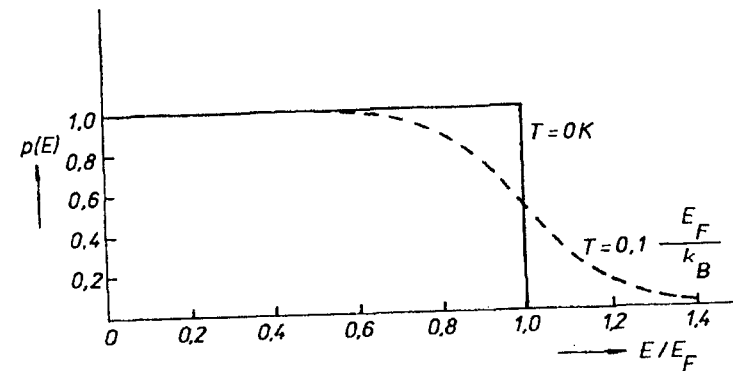
<sup>51</sup> Hustota pravděpodobnosti  $f_B(\mathbf{v})$  nezávisí ovšem na směru rychlosti  $\mathbf{v}$ . Častěji se proto vyjadřuje hustota pravděpodobnosti  $g(v)$  pro rychlost o dané velikosti  $v$ . Platí pro ni vztah

$$g(v) = 4\pi \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp\left( -\frac{m_e v^2}{2k_B T} \right) \quad (7.5a)$$

nazývaný Maxwelllovým–Boltzmannovým rozdělením.

dává tento model výsledky, které jsou v rozporu s experimentem. Avšak přesto, že jsou dnes známá omezení jeho platnosti, zachovává si svůj význam především proto, že při své jednoduchosti dává v prvním přiblížení kvalitativně správnou a názornou představu o chování volných elektronů v kovech a vytváří východisko pro přesnější modely vycházející z kvantově mechanických zákonitostí.

Nezákladnějším nedostatkem klasického modelu je, že Maxwelllovo–Boltzmannovo rozdělení nerespektuje Pauliho princip, který musí být při obsazování jednotlivých elektronových stavů respektován. Německý fyzik A. Sommerfeld odstranil tuto hlavní obtíž tím, že klasické rozdělení rychlostí nahradil kvantově mechanickým rozdělením Fermiho–Diracovým. Vytvořil tak nový model elektronového plynu a z něho vycházející další přiblížení elektronové teorie, která v mnohem větší míře vystihuje elektronové vlastnosti pevných látek.



Obr. 7.6 Průběh Fermiho–Diracova rozdělení.

Fermiho–Diracovo rozdělení určuje pravděpodobnost obsazení jednotlivých stavů v částečně zaplněném vodivostním pásu. Zvláště jednoduchá situace nastává při teplotě absolutní nuly, kdy je soustava v základním stavu s nejnižší možnou energií. Všechny stavy s energií menší než Fermiho energie  $E_F$  jsou plně obsazeny elektrony, zatímco stavy s energií vyšší jsou neobsazené (srov. obrázky 7.4 a 7.5). Pravděpodobnost  $p$  obsazení daného stavu je tedy buď jedna, nebo nula (viz obr. 7.6). Se vzrůstem teploty vzrůstá i energie elektronového plynu. Některé elektrony mohou získat vyšší kinetickou energii, takže přejdou do stavů nad Fermiho energii, naopak některé stavy s nižší energií se uprázdňují. Pro pravděpodobnost  $p(E)$  obsazení stavu s kinetickou energií  $E = m_e v^2/2$  lze odvodit výraz

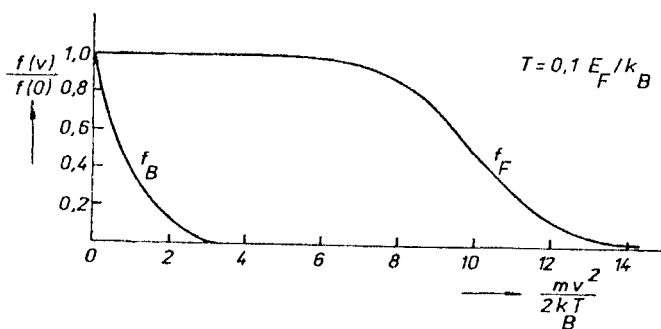
$$\rho(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu_F}{k_B T}\right) + 1}, \quad (7.7)$$

ve kterém  $\mu_F$  značí tzv. *chemický potenciál*. Při  $E = \mu_F$  platí  $\rho(E) = 1/2$ ; pro nepřilíš vysoké teploty lze u kovů položit  $\mu_F = E_F$ . Obrázek 7.6 ukazuje vedle křivky pro  $T = 0$  též průběh pravděpodobnosti  $\rho$  pro  $T = 0,1 E_F/k_B$ .

Vezme-li se v úvahu hustota možných stavů v okolí dané rychlosti  $\mathbf{v}$ , je možné vyjádřit normovanou hustotu pravděpodobnosti  $f_F(\mathbf{v})$  pro obsazení stavů v okolí dané rychlosti  $\mathbf{v}$ . Platí pro ni vztah<sup>52</sup>

$$f_F(\mathbf{v}) = \frac{m_e}{4\pi h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{m_e v^2/2 - \mu_F}{k_B T}\right) + 1}, \quad (7.8)$$

který je analogií klasického vztahu (7.5). Markantní rozdíl obou typů rozdělení je patrný z obr. 7.7, ve kterém jsou ve stejném měřítku vyneseny relativní změny  $f_B(\mathbf{v})$  a  $f_F(\mathbf{v})$  v závislosti na relativní hodnotě kinetické energie  $m_e v^2/2k_B T$  opět pro teplotu  $T = 0,1 E_F/k_B$ . Fermiho–Diracovo rozdělení přejde v klasické rozdělení typu (7.5) jen při dostatečně vysokých teplotách, kdy mají elektrony dostatečně velkou energii, takže platí  $(E - \mu_F) \gg k_B T$ , a je tudíž možné ve jmenovateli (7.7) zanedbat první člen rovný jedné proti exponenciálnímu členu.



Obr. 7.7 Srovnání klasického a Fermiho–Diracova rozdělení.

<sup>52</sup> Odvození vztahu (7.7) lze nalézt ve standardních učebnicích statistické fyziky. Odvození normovací konstanty v (7.8) spíše v elementárních učebnicích fyziky pevných látek. V českém jazyce viz například A. J. Dekker: Fyzika pevných látek. Academia, Praha 1966, nebo C. Kittel: Introduction to Solid State Physics, český překlad Úvod do fyziky pevných látek. Academia, Praha 1985.

### 7.1.4 Elektrické a magnetické momenty atomů a molekul

Atomy a molekuly jsou elektricky a magneticky aktivní útvary, a mohou tedy ve svém okolí vytvářet vlastní elektrické a magnetické pole. Pro jejich popis se nejčastěji používá multipólový rozvoj (srov. články 1.3.2 a 3.4.3), takže jsou charakterizovány hodnotami příslušných multipólových momentů, které tvoří parametry jednotlivých stacionárních stavů těchto atomů, respektive molekul.

Pro mnohé účely je plně dostačující charakterizovat danou soustavu prvním nenulovým členem multipólového rozvoje. V případě elektricky neutrálních atomů či molekul je tímto členem člen dipólový, charakterizovaný elektrickým dipólovým momentem  $\mathbf{p}$  a magnetickým dipólovým momentem  $\boldsymbol{\mu}$ . Tyto momenty jsou dány vztahy, viz (1.146) a (3.110),

$$\mathbf{p} = \int_{\mathbf{v}} \mathbf{r}' \rho(r') dV',$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(r') dV',$$

v nichž  $\rho(r')$  a  $\mathbf{j}(r')$  představují objemové hustoty náboje a proudu. Tyto hustoty reprezentují „pohybový stav“ jednotlivých nabitých částic v daném stacionárním stavu atomu či molekuly. Pro popis chování vyšetřovaných atomů či molekul v časově neproměnných (nebo pomalu proměnných) polích jsou podstatné střední hodnoty uvedených dipólových momentů, k jejichž výpočtu musí být ovšem brány v úvahu kvantově mechanické zákonitosti.

Přesto, že oba dipólové momenty  $\mathbf{p}$  a  $\boldsymbol{\mu}$  jsou dány zcela analogickými vztahy (1.146) a (3.110), jsou v jejich vlastnostech podstatné rozdíly, neboť zatímco elektrický dipólový moment  $\mathbf{p}$  je *polární* vektor, magnetický dipólový moment  $\boldsymbol{\mu}$  je vektor *axiální* (viz dodatek D 1). Vektory  $\mathbf{p}$  a  $\boldsymbol{\mu}$  se tedy chovají různě při operaci inverze. Z obecných kvantově mechanických vlastností elektronových stavů v atomu při operaci inverze plyne, že *střední hodnota elektrického dipólového momentu volného atomu v nulovém vnějším elektrickém poli je vždy nulová*. Tato vlastnost je důsledkem toho, že elektrony v atomu se pohybují ve středově symetrickém elektrickém poli jádra a snadno pochopíme i názorně, že těžiště elektronového náboje leží v těžišti náboje jádra.

Uvedená vlastnost však již nemusí obecně platit pro molekuly, u nichž obecně není zachována středová symetrie elektrického pole jader. Symetrické molekuly s nulovým dipólovým momentem se nazývají *nepolárními*, naopak molekuly s nenulovým dipólovým momentem *polárními*. Nejnázorněji si vznik dipólového momentu můžeme představit u dvouatomových molekul s iontovou vazbou. Molekulu tohoto typu můžeme v prvním přiblížení považovat za sou-



stavu kladného a záporného iontu. Její dipólový moment je roven součinu náboje iontu a jejich vzájemné vzdálenosti. Mezi nepolární molekuly patří symetrické dvouatomové molekuly jako  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  a jiné, ze tříatomových molekul například oxid uhličitý  $CO_2$ . Jako příklady polárních molekul lze uvést oxid uhelnatý  $CO$  s dipólovým momentem  $p = 0,36 \cdot 10^{-30}$  C.m, dále chlorovodík  $HCl$  s dipólovým momentem  $p = 3,6 \cdot 10^{-30}$  C.m. Z tříatomových molekul má značně vysokou hodnotu dipólového momentu molekula vody  $H_2O$ , a to  $p = 6,13 \cdot 10^{-30}$  C.m.

Jiná situace nastává v případě magnetických momentů atomů, přičemž existence vlastního magnetického momentu atomu souvisí s jeho vlastním momentem hybnosti. (Kvalitativně byly tyto otázky diskutovány již v článku 3.5.1, s poukazem na výsledky příkladů 3.4.6a a 3.4.6b.) Elektron ve stacionárním stavu s vedlejším kvantovým číslem  $l$  má orbitální moment hybnosti, jehož velikost a možné složky do daného směru jsou dány vztahy (7.2) a (7.3). Orbitální magnetický moment elektronu v tomto stavu je určen gyromagnetickým poměrem  $\gamma_l = e/2m_e$  (srov. příklad 3.4.6a). Velikost  $\mu_l$  a možné složky magnetického momentu do daného směru  $\mu_{l,z}$  jsou dány postupně vztahy

$$\mu_l = \gamma_l L_l, \quad (7.9)$$

$$\mu_{l,z} = \gamma_l L_{l,z}. \quad (7.10)$$

S ohledem na vztahy (7.2) a (7.3) lze obě tyto veličiny vyjádřit pomocí Bohrova magnetonu (viz článek 3.5.1) a kvantových čísel  $l$  a  $\mu_l$ . Platí

$$\mu_l = \frac{eh}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (7.9a)$$

$$\mu_{l,z} = \frac{eh}{2m_e} m_l = \mu_B m_l. \quad (7.10a)$$

Analogické vztahy platí i pro magnetický spinový moment elektronu, který je možné vyjádřit pomocí *spinového gyromagnetického poměru*  $\gamma_s = e/m_e$  (viz opět článek 3.5.1). Využitím vztahů (7.4) můžeme opět vyjádřit velikost spinového magnetického momentu  $\mu_s$  a jeho možné složky do daného směru  $\mu_{s,z}$  pomocí Bohrova magnetonu a kvantových čísel  $s$  a  $m_s$ . Platí tedy

$$\mu_s = \frac{eh}{m_e} \sqrt{s(s+1)}, \quad (7.11)$$

$$\mu_{s,z} = \frac{eh}{m_e} m_s.$$

Uvědomíme-li si, že  $s = 1/2$ ,  $m_s = \pm 1/2$ , vidíme že složky spinového magnetického momentu do daného směru mohou nabývat jen hodnot  $\pm \mu_B$ .

V článku 7.1.1 jsme viděli, že zcela zaplněné atomové podslupky mají nulový orbitální i spinový moment hybnosti. Podle právě uvedených vztahů mají tyto podslupky i nulový magnetický dipólový moment. Volný atom obsahující jen zcela zaplněné nebo zcela prázdné podslupky má tedy nulový celkový vlastní magnetický moment. V principu mohou existovat dva typy atomů s částečně zaplněnými podslupkami, a tedy s nenulovým magnetickým momentem, a to buď atomy s částečně zaplněnou periferní podslupkou, nebo tzv. *přechodové atomy* s částečně zaplněnou některou vnitřní podslupkou. Jako příklady prvního typu mohou sloužit již zmíněné atomy vodíku a sodíku. Mezi nejznámější reprezentanty atomů druhého typu patří prvky skupiny železa (Sc, Ti, V, Cr, Mn, Co, Ni) s částečně zaplněnou podslupkou 3d nebo prvky vzácných zemin (Ce, Pr, Nd,...) s částečně zaplněnou podslupkou 4f.

Orbitální a spinové magnetické momenty elektronů nezaplňených podslupek se skládají podle pravidel plynoucích z kvantové mechaniky. Výsledný magnetický moment atomu je pak opět v relaci s jeho celkovým momentem hybnosti. Možné hodnoty složky magnetického momentu atomu do daného směru mohou mít řádovou velikost jednotek Bohrova magnetonu  $\mu_B$ .

Nakonec ještě připomínáme, že všechny úvahy tohoto článku se týkaly jen vlastních momentů volných atomů, respektive molekul. Ve vnějších elektrických či magnetických polích dochází ke změnám v elektronových stavech, čímž vznikají dodatečně indukované momenty. Podobné procesy nastávají i u volných elektronů, tedy u elektronového plynu. Některé elementární úvahy o podobných otázkách budou uvedeny v oddílech 7.2 a 7.6, v následujícím textu této kapitoly však budeme uvažovat jen výsledný příspěvek atomů či molekul k makroskopickému poli v látce. Střední hodnotu magnetického momentu připadající na atom či molekulu budeme považovat za klasickou vektorovou veličinu ve smyslu oddílu 3.4 a budeme ji označovat symbolem  $\mathbf{m}$ .

## 7.2 Dielektrická a magnetická polarizace

V kapitolách 1 a 3 jsme ukázali, že vliv látkového prostředí na elektrické a magnetické pole je popsán vektory elektrické polarizace  $\mathbf{P}_e(\mathbf{r})$  a magnetické polarizace  $\mathbf{P}_m(\mathbf{r})$  (respektive magnetizace  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ), jejichž hodnoty jsou závislé na intenzitách příslušných polí v daném látkovém prostředí. Dále jsme poznali, že pro dosti velké množství látek je možné tuto závislost dobře aproximovat lineárními vztahy mezi okamžitými hodnotami uvedených veličin, čímž jsou definovány tzv. materiálové konstanty – elektrická a magnetická susceptibilita, respektive permitivita a permeabilita.

Uvedené definiční vztahy pro elektrickou susceptibilitu  $\chi_e$ , respektive permitivitu  $\epsilon$  (1.255), (1.259) a pro magnetickou susceptibilitu  $\chi_m$ , respektive

permeabilitu  $\mu$  (3.140) až (3.142) jsou zcela analogické. Uvidíme dále, že určité analogie jsou i ve vlastnostech elektrických a magnetických materiálových konstant, i když v původu elektrických a magnetických momentů atomů a molekul jsou podstatné rozdíly (srov. článek 7.1.4). Na druhé straně však jsou tyto vlastnosti v mnohém rozdílné. Pro zdůraznění podobnosti i rozdílu jsou dielektrické a magnetické vlastnosti jednotlivých typů látek vykládány ve vzájemné návaznosti v jednotlivých článcích tohoto oddílu.

### 7.2.1 Dielektrika

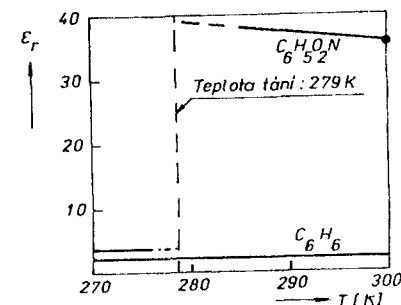
Tabulka 7.3 uvádí příklady experimentálních hodnot statické relativní permittivity  $\epsilon_r$  lineárních dielektrik různého skupenství [11]. Jak je vidět z tabulky, mění se její hodnoty pro jednotlivé typy látek v širokém rozmezí. Relativní permittivita plynů je jen nepatrně větší než jedna, což zřejmě souvisí s malým počtem molekul v jednotce objemu ve srovnání s látkami v kondenzovaném stavu. Velké hodnoty permittivity se nejčastěji vyskytují u kapalin, u nichž v některých případech dosahuje její hodnota několika desítek. V případě pevných lineárních dielektrik naopak jen zřídka přesahuje hodnotu deseti. Obrázek 7.8 demonstruje různý charakter chování permittivity při změně skupenství benzenu  $C_6H_6$  a nitrobenzenu  $C_6H_5O_2N$ . Obě látky mají téměř stejnou teplotu tání. Avšak zatímco v případě benzenu se permittivita nijak nemění, v případě nitrobenzenu několika-

Tabulka 7.3 Permittivita vybraných látek při pokojové teplotě

skupenství	látka	teplota (K)	relativní permittivita $\epsilon_r$
plyny při tlaku 101,3kPa	dusík $N_2$	300	1,000 528
	helium He	300	1,000 066
	kyslík $O_2$	300	1,000 486
kapaliny	aceton ( $C_3H_6O$ )	295	21,4
	benzen ( $C_6H_6$ )	↓	2,284
	etylalkohol ( $C_2H_6O$ )		25,1
	chloroform ( $CHCl_3$ )		4,8
	toluen ( $C_7H_8$ )		2,38
	nitrobenzen ( $C_6H_5O_2N$ )	↑	35,72
	voda ( $H_2O$ )	295	81
pevné látky	diamant (C)	295	13,1
	kamenná sůl (NaCl)	↓	5,9
	jantar		2,8
	korund		10
	polystyren		2,4
	trolitul		2,53
	tetrafluoretylen	↑	2,12
	skla	295	3,7 ÷ 7

Pro pochopení mechanismů polarizace látek má velký význam studium teplotní závislosti permittivity. V případě lineárních dielektrik lze tuto závislost obvykle dobře vyjádřit vztahem

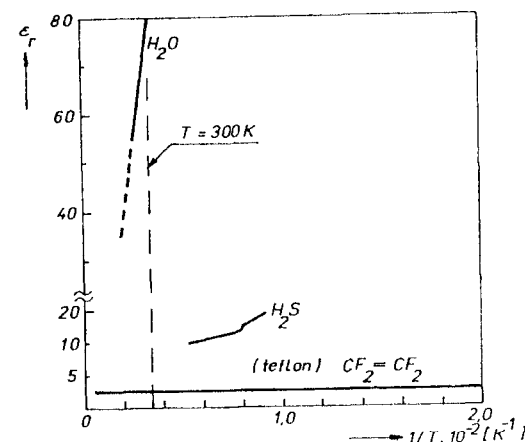
$$\epsilon_r = \epsilon_{r,n} + \frac{C}{T}, \quad (7.12)$$



Obr. 7.8 Příklady teplotní závislosti relativní permittivity benzenu ( $C_6H_6$ ) a nitrobenzenu ( $C_6H_5O_2N$ ) při přechodu z pevné fáze do kapalné fáze.

ve kterém  $T$  je absolutní teplota a  $\epsilon_{r,n}$ ,  $C$  teplotně nezávislé konstanty. Permittivita tedy jeví přímkovou závislost ve tvaru  $1/T$ , jak pro některé látky demonstruje obr. 7.9. Jednotlivé členy na pravé straně (7.12) zřejmě souvisí s různými mechanismy polarizace. Jak obrázek dále ukazuje, látky s nízkou celkovou hodnotou permittivity vykazují rovněž malou závislost na teplotě.

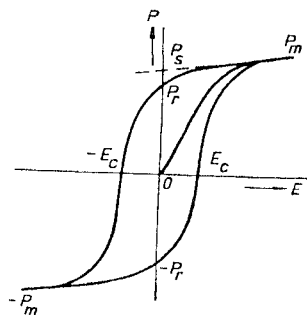
Jak bylo již řečeno v čl. 1.5.4, krystaly s jinou než kubickou symetrií mohou být dielektricky anizotropní. Elektrická susceptibilita (respektive permittivita) je



Obr. 7.9 Teplotní závislost permittivity některých látek.

symetrický tenzor druhého řádu (srov. vztah (1.261)). Pro úplný popis chování takových látek v elektrickém poli je zapotřebí obecně udat tři hlavní hodnoty tenzoru permitivity; v případě struktur s osovou symetrií jsou dvě hlavní hodnoty stejné, takže se počet potřebných údajů redukuje na dva. Například krystal korundu  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , s trigonální symetrií, má hlavní hodnoty permitivity  $\epsilon_{r,c} = 11,54$ ,  $\epsilon_{r,a} = \epsilon_{r,b} = 9,34$ .

Elektrická susceptibilita a permitivita byly zavedeny v kapitole I pro popis chování látek ve statickém poli. Pro popis časově proměnného elektrického pole v lineárním dielektriku je však třeba zkoumat i vlastnosti dielektrika v závislosti na rychlosti časových změn pole. Nejčastěji užívaným postupem je studium chování dielektrik ve střídavém poli v závislosti na jeho frekvenci. Z měření tohoto druhu pak získáme frekvenční spektrum permitivity, respektive elektrické susceptibility. U látek s vysokou statickou permitivitou klesá zpravidla její hodnota již při relativně nízkých frekvencích. Například statická permitivita vody je  $\epsilon_{r,s} = 81$ ; při frekvenci  $\sim 10^{10}$  Hz však již značně klesá a při velmi vysokých (například optických) frekvencích má permitivitu  $\epsilon_{r,\infty} = 1,77$ . Podobně kamenná sůl (NaCl) má statickou permitivitu  $\epsilon_{r,s} = 5,9$ , zatímco při velmi vysokých frekvencích  $\epsilon_{r,\infty} = 2,25$ . Naproti tomu tetrafluoretylen má relativní permitivitu  $\epsilon_r = 2,12$  téměř frekvenčně nezávislou až do velmi vysokých frekvencí. Důležité je, že v oborech se silnou frekvenční závislostí permitivity nastávají při periodickém přepolarizování ztráty energie, kterou musí dodávat zdroje elektrického pole.



Obr. 7.10 Hysterezní smyčka feroelektrika.

Malou co do počtu, ale důležitou skupinu dielektrik tvoří tzv. *feroelektrické látky*. Pro ně je charakteristický anomální vztah mezi vektorem polarizace a intenzitou pole. Uvedená anomálie byla poprvé zjištěna u tzv. *Seignettovy soli* (vínan sodnodraselný  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ ); později byla nalezena u řady dalších typů látek, jejichž klasickým představitelem je titaničitan barnatý  $\text{BaTiO}_3$ .

Feroelektrické chování se vyskytuje pouze v určitém teplotním oboru, který je pro danou látku charakteristický, teplota  $T_C$  omezující uvedený obor se nazývá *feroelektrickou Curieovou teplotou*. Charakteristická závislost vektoru

polarizace na intenzitě pole je pro feroelektrické látky dána tzv. *feroelektrickou hysterezní smyčkou* (viz obr. 7.10). Polarizace vzorku feroelektrické látky, který byl ve výchozím stavu makroskopicky nepolarizován, roste se vzrůstajícím polem nejdříve podle křivky  $OP_m$ . Vzrůst je dosti rychlý, pokud polarizace nedosáhne určité nasycené hodnoty  $P_s$ . Při následujícím snižování pole klesá polarizace podle jiné křivky  $P_mP_s$ , takže nulovému poli odpovídá od nuly různá remanentní polarizace  $P_r$ . Dalšího snižování polarizace může být dosaženo přiložením pole opačného směru. Hodnota intenzity pole, při níž klesne polarizace opět na nulu, se nazývá feroelektrickým koercitivním polem. Při dalším zvyšování pole nabývá polarizace opačného směru a vzrůstá podle křivky  $-E_c-P_m$  do své nasycené hodnoty a při opětovném snižování pole se proces opakuje podle křivky  $-P_mP_m$ . Opětné cyklické změny intenzity pole vyvolávají cyklické změny polarizace určené jednotlivými větvemi smyčky, která je určena body  $P_m, -E_c, -P_m, E_c, P_m$ . Žádné cyklické změny elektrického pole v daných mezích nemohou již převést vzorek do původního stavu, kdy nulovému poli odpovídala nulová hodnota polarizace. Pro titaničitan barnatý je při pokojové teplotě koercitivní pole v řádu  $10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , spontánní polarizace  $P_s \sim 0,26 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Průběh elektrické polarizace feroelektrik při cyklickém polarizování je podobný chování feromagnetik (srov. článek 3.5.4). Feroelektrický stav je charakterizován tím, že jednotlivé elementární buňky krystalu mají nenulový elektrický dipólový moment. V nulovém nebo malém elektrickém poli jsou tyto dipólové momenty orientovány v určitých, krystalograficky význačných směrech. Celý objem krystalu se rozpadá na určitý počet oblastí, které se nazývají *feroelektrické domény*, z nichž každá je charakterizovaná určitou orientací výsledného dipólového momentu. Výsledný elektrický moment vzorku je pak dán vektorovým součtem momentů jednotlivých domén. Vnější elektrické pole relativně malých hodnot může značně ovlivnit rozdělení domén a vyvolat tak značně velkou výslednou polarizaci. Podobně jako u feromagnetik (srov. vztah (3.145)) je možné zavést pojem efektivní permitivity jako poměr příslušných velikostí polarizace a intenzity pole. Takto zavedená veličina, která se obvykle uvažuje jen pro křivku prvotního polarizování, je ovšem obecně závislá na intenzitě elektrického pole. Může nabývat značně velikých hodnot ( $10^3$  i více).

Jak plyne z tvaru hysterezní smyčky, může mít feroelektrický krystal nenulovou makroskopickou polarizaci i bez přítomnosti vnějšího elektrického pole. Může tedy principiálně sloužit jako zdroj elektrostatického pole. Ve skutečnosti je však tento způsob využití komplikován tím, že vázané náboje, které vznikají na povrchu krystalu v důsledku jeho polarizace, jsou postupně neutralizovány jednak konečnou vodivostí krystalu, jednak absorbováním nábojů přítomných v obklopující atmosféře.

Nad feroelektrickou Curieovou teplotou přechází feroelektrická látka do tzv. *paraelektrického stavu*, který je charakterizován silným poklesem permitivity

při při zvyšování teploty. Chování permitivity v paraelektrickém stavu je zpravidla možné velmi dobře popsat vztahem

$$\epsilon_r = \frac{\xi}{T - \Theta}, \quad (7.13)$$

v němž  $\xi$  je tzv. feroelektrická Curieova konstanta charakteristická pro daný materiál a  $\Theta$  parametr blízký Curieově teplotě  $T_C$ . Vztah (7.13) je feroelektrickou analogií *Curieova-Weissova zákona* pro paramagnetickou susceptibilitu feromagnetik (viz čl. 7.2.3).

Kromě feroelektrik existuje ještě jiný typ látek, které mohou mít trvalý elektrický moment. Látky tohoto druhu se nazývají *elektrety*. Jsou obvykle tvořeny směsí organických pryskyřic, popř. vosků, s dalšími organickými nebo anorganickými dielektriky. „Trvalý“ elektrický moment lze například získat při tuhnutí této směsi v silném elektrickém poli, neboť vlastní elektrické momenty některých molekul (popřípadě makroskopických částic) zůstanou po zatuhnutí orientovány ve směru pole. Takto získaný nerovnovážený stav pak může být v látce zachován po velmi dlouhou dobu.

Každý feroelektrický krystal vykazuje rovněž tzv. *piezoelektrický jev* spočívající v tom, že elasticou deformací se mění elektrická polarizace krystalu. Feroelektrické krystaly vykazují i tzv. *elektrostrikci*, což je jev inverzní k jevu piezoelektrickému: při změně elektrického pole, které má za následek změnu elektrické polarizace, dochází ke vzniku elektrostrikční deformace. Piezoelektrické chování však mohou jevit i krystaly, které nejsou feroelektrické. Klasickým představitelem takových látek je krystalický křemen, na němž byl piezoelektrický jev P. Curieem v r. 1880 objeven.

Piezoelektrický jev je příkladem situace, kdy je elektrická polarizace vyvolána působením „neelektrických“ sil. Fenomenologicky lze tento jev popsat lineárním vztahem mezi deformující silou a vzniklou elektrickou polarizací. Příslušná konstanta úměrnosti se nazývá *piezoelektrickou konstantou*. V současné elektronice má piezoelektrický jev významné uplatnění. Jednak je možné na jeho základě konstruovat elektromechanické měniče pro měřicí a regulační techniku, zejména však piezoelektrické mechanické rezonátory slouží jako stabilizační prvky frekvence elektronických oscilátorů.

Dielektrické vlastnosti látek lze vyložit na základě popisu mechanismů umožňujících vznik elektrických momentů atomů, molekul či elementárních buněk krystalů působením vnějšího elektrického pole, popř. jiných sil. Tyto procesy se popisují veličinou nazývanou *polarizovatelnost* a mohou mít různou fyzikální povahu. Existující tři základní typy takových mechanismů: *elektronová polarizovatelnost*, *iontová polarizovatelnost* a *orientační dipolární polarizovatelnost*. Elektronová polarizovatelnost zahrnuje deformaci elektronového obalu atomu v elektrickém poli, která má za následek posunutí těžšího elektronového náboje a vznik indukovaného elektrického momentu každého atomu. Iontovou polarizovatelností se rozumí vzájemné posunutí jednotlivých iontů například v molekule, čímž rovněž vzniká změna jejího dipolového momentu. Oba uvedená

mechanismy nastávají ve všech typech látek, tedy i v látkách nepolárních. Konečně orientační polarizovatelností rozumíme změnu prostorové orientace vlastních momentů (například polárních molekul) účinkem vnějšího pole.

Podíl jednotlivých mechanismů na celkové permitivitě dané látky lze často rozlišit na základě studia její teplotní a frekvenční závislosti. V oddílu 7.6 uvidíme, že elektronová a iontová polarizovatelnost dává v zásadě teplotně nezávislý příspěvek, zatímco orientační polarizovatelnost příspěvek nepřímo úměrný teplotě. Orientační polarizovatelnost tvoří ve většině případů rovněž hlavní příspěvek ke statické permitivitě polárních látek. Jelikož však je tento mechanismus zpravidla spojen s pohybem značně hmotných útvarů (například molekul), přestává být efektivní při vyšších frekvencích. Polární látky se tudíž obvykle vyznačují značně rozdílnými hodnotami mezi statickou a vysokofrekvenční permitivitou. Pohyblivost polárních molekul se může značně zvýšit při přechodu látky z pevného do kapalného skupenství. Tímto způsobem lze kvalitativně pochopit větší hodnoty permitivity polárních látek v kapalném skupenství.

Další zajímavou vlastnost dielektrických vlastností látek představuje existence feroelektrického jevu. Přesto, že makroskopické projevy feroelektrik jsou do značné míry podobné chování feromagnetik, je fyzikální podstata obou jevů zásadně odlišná, neboť vlastní elektrické momenty feromagnetik, je fyzikální podstata obou jevů zásadně odlišná, neboť vlastní elektrické momenty feromagnetik nemohou (na rozdíl od momentů magnetických) vznikat na atomové úrovni. Vznik feroelektrického spontánního uspořádání se týká vlastních elektrických momentů elementárních buněk krystalové struktury. Feroelektrický jev může vzniknout jen u krystalových struktur, které nemají střed symetrie. Ke kvantitativnímu výkladu jeho vlastností je možné použít jednak zákonů termodynamiky (srov. čl. 5.2.3) a jednak modelové mikroskopické teorie<sup>53</sup>.

## 7.2.2 Diamagnetismus a paramagnetismus

Základní údaje o magnetických vlastnostech látek byly vyloženy již v článku 3.5.4. Jak bylo uvedeno, pro diamagnetika i paramagnetika jsou (s výjimkou extrémně vysokých polí a extrémně nízkých teplot) charakteristické lineární materiálové vztahy, přičemž diamagnetika se vyznačují zápornou magnetickou susceptibilitou  $\chi_m$  (a tedy relativní permeabilitou  $\mu_r < 1$ ), zatímco paramagnetika mají kladnou magnetickou susceptibilitu (a relativní permeabilitu  $\mu_r > 1$ ). Hodnoty relativní permeability obou typů látek se přitom jen málo liší od jedné<sup>54</sup>.

V tabulce 7.4 jsou uvedeny příklady hodnot magnetické susceptibilitu některých látek při pokojové teplotě, obr. 7.11 ukazuje reprezentativní příklady její teplotní závislosti. Jak je vidět z obrázku, je susceptibilita diamagnetik velmi málo teplotně závislá, podobně susceptibilita některých paramagnetických kovů je v podstatě teplotně nezávislá. Naproti tomu jiné kovy (například Pd, Pt aj.) a též téměř všechna nekovová paramagnetika jeví výraznou teplotní závislost susceptibilitu.

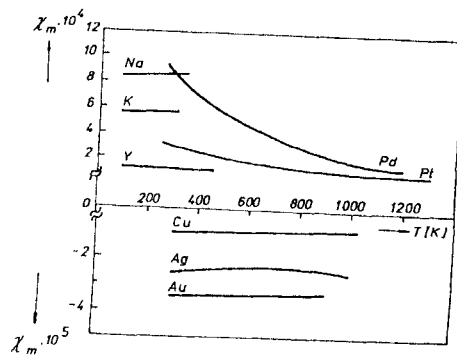
Obrázek 7.12 zobrazující teplotní závislost měrné susceptibilitu  $\kappa_m$  pro  $\text{CuK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , demonstruje platnost Curieova zákona (3.144)

<sup>53</sup> K podrobnějšímu studiu doporučujeme učebnice fyziky pevných látek. V českém jazyce například učebnice Ch. Kittel: Úvod do fyziky pevných látek. Academia, Praha 1985.

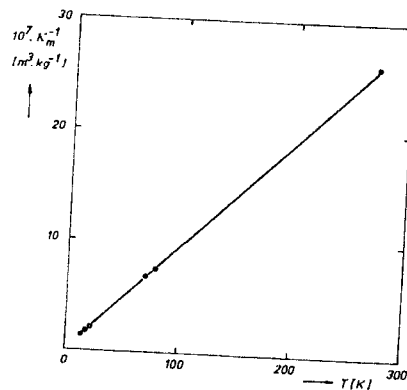
<sup>54</sup> Výjimku tvoří supravodiče; tzv. supravodiče I. typu (viz čl. 7.3.5) je možné považovat za ideální diamagnetika, pro něž platí  $\chi_m = -1$ . Jejich relativní permeabilita je tedy nulová.

Tabulka 7.4 Hodnoty magnetické susceptibilitivity některých diamagnetik a paramagnetik

diamagnetika		paramagnetika	
látka	mag.susceptibilita při teplotě T = 293 K	látka	mag.susceptibilita při teplotě T = 293 K
antimon	$-6,8 \cdot 10^{-5}$	sodík	$+8,5 \cdot 10^{-4}$
bismut	$-16,0 \cdot 10^{-5}$	draslík	$+5,7 \cdot 10^{-4}$
stříbro	$-2,51 \cdot 10^{-5}$	hlíník	$+0,2 \cdot 10^{-4}$
zlato	$-3,4 \cdot 10^{-5}$	palladium	$+8,2 \cdot 10^{-4}$
zinek	$-1,56 \cdot 10^{-5}$	platina	$+2,9 \cdot 10^{-4}$
měď	$-0,97 \cdot 10^{-5}$	yttrium	$+1,18 \cdot 10^{-4}$
křemík	$-0,32 \cdot 10^{-5}$	chlorid nikelnatý	$+1,1 \cdot 10^{-4}$
voda	$-0,905 \cdot 10^{-5}$		
etylalkohol	$-0,73 \cdot 10^{-5}$		



Obr. 7.11 Příklady teplotní závislosti magnetické susceptibilitivity paramagnetických a diamagnetických kovů



Obr. 7.12 Příklad teplotní závislosti magnetické susceptibilitivity nekovového paramagnetika splňující Curieův zákon.

$$\kappa_m = \frac{C}{T},$$

kteřý je charakteristický pro nekovová paramagnetika.

Diamagnetismus je obecný jev, jehož podstata spočívá ve změnách elektronových stavů vyvolaných vnějším magnetickým polem, které mohou být intuitivně chápány jako důsledek zákona elektromagnetické indukce, podle něhož změny vnějšího magnetického pole indukují v látce proudy vytvářející vlastní magnetické pole působící proti těmto změnám. Při vložení do vnějšího magnetického pole tedy v celém objemu látky vznikají dodatečné magnetické momenty, které se snaží vnější magnetické pole kompenzovat. Vzhledem k tomu, že jev elektromagnetické indukce platí zcela obecně, je i diamagnetický jev obecnou vlastností všech látek. V některých případech však může být překryt projevy vlastních magnetických momentů některých elektronů, které jsou zdrojem paramagnetismu.

Diamagnetické látky jsou zpravidla nejméně magneticky aktivní. Jejich magnetická susceptibilita je v absolutní hodnotě obvykle mnohem menší než susceptibilita jiného typu látek. Tato malá magnetická aktivita diamagnetik vedla k domněnce, že atomy, respektive molekuly těchto látek mají v nulovém magnetickém poli nulový magnetický moment, což znamená, že neobsahují částečně zaplněné podslupky. Teprve vnější magnetické pole indukuje dodatečné magnetické momenty vytvářející makroskopickou magnetizaci diamagnetika.

V článku 7.6.2 bude uvedena stručná verze Langevinovy teorie diamagnetismu volných molekul, která představuje historicky první kvantitativní teorii tohoto jevu. Teorie je založena na výpočtu dodatečného indukovaného magnetického momentu vznikajícího Larmorovou precesí elektronových magnetických momentů (srov. článek 6.2.2) a podává v podstatě správný obraz o diamagnetismu nekovových látek.

V případě kovů je vedle diamagnetického chování lokalizovaných vnitřních elektronů v atomech třeba počítat ještě s vlivem vodivostních elektronů, jejichž diamagnetismus nelze popsat vztahy plynoucími z Langevinovy teorie. Teorii diamagnetismu volných elektronů vypracoval L. D. Landau. I když jde o teorii kvantově mechanickou, možnost vzniku diamagnetického příspěvku k susceptibilitě volných elektronů lze pochopit i názorně, uvědomíme-li si charakter jejich pohybu v magnetickém poli (viz článek 6.1.3).

Paramagnetické vlastnosti jsou na rozdíl od diamagnetismu dány nevykompenzovanými magnetickými momenty některých elektronů v atomu. Paramagnetické chování tedy jeví látky obsahující atomy či molekuly s částečně zaplněnými elektronovými podslupkami. Paramagnetismus lokalizovaných magnetických momentů řeší Langevinova teorie paramagnetismu, která bude popsána v článku 7.6.3 a která (po zavedení kvantově mechanických korekcí) správně popisuje paramagnetismus nekovových látek. Zejména z této teorie vyplývá platnost Curieova zákona (3.144).

Specifickým problémem je paramagnetismus kovů, na němž se výrazně podílí vodivostní elektrony. Jak jsme viděli v obr. 7.11, charakteristickým rysem magnetismu některých kovů přitom je teplotní nezávislost jejich susceptibilitivity. Je zřejmé, že teplotně nezávislý paramagnetismus vodivostních elektronů nemůže být vyložen na základě klasického modelu elektronového plynu. Každý elektron má totiž spinový magnetický moment velikosti  $\mu_B$ , který může být vnějším magnetickým polem orientován do jiného směru. Při aplikaci klasické statistiky bychom dostali situaci analogickou jako v Langevinově teorii a pro teplotní závislost susceptibilitivity by vyšel vztah typu (3.144), kde  $C = \mu_B n \mu_B^2 / 3k_B$  (srov. vztah (7.68)).

Problém paramagnetismu elektronového plynu vyřešil W. Pauli, který vzal v úvahu vlastnosti Fermiho-Diracova rozdělení (viz článek 7.1.3). Podstatu problému je možné snadno pochopit

i kvalitativně. Vnější magnetické pole sice energeticky zvýhodňuje určitou (paralelní) orientaci magnetických momentů elektronů, většina elektronů však nemůže tuto výhodnější orientaci zaujmout, neboť pro energie podstatně nižší, než je Fermiho energie, jsou již všechny tyto stavy obsazeny (srov. obr. 7.6). Na vnější magnetická pole mohou reagovat jen elektrony, jejichž energie je blízká Fermiho energii, přičemž je zřejmé, že se vzrůstající teplotou počet takových elektronů vzrůstá. Ize ukázat, že relativní počet těchto elektronů je roven  $T/T_F$ , kde  $T_F = E_F/k_B$  (viz čl. 7.1.3). Potom pro odhad paramagnetické susceptibilitě elektronového plynu dostaneme teplotně nezávislý výraz

$$\chi_{m,p} = \frac{n_0 m^2 T}{k_B T T_F} = \frac{n_0 m^2}{k_B T_F} \quad (7.14)$$

Přesný výpočet dává hodnotu

$$\chi_{m,p} = \mu_0 \frac{3 n_0 m^2}{2 k_B T_F} \quad (7.15)$$

kteřá se nazývá Pauliho paramagnetickou susceptibilitou elektronového plynu.

Jak bylo již výše řečeno, elektronový plyn však jeví i diamagnetismus Landauova typu, jehož diamagnetická susceptibilita  $\chi_{m,L}$  se musí připočíst k susceptibilitě Pauliho. Výpočet dává  $\chi_{m,L} = -\chi_{m,p}/3$ . Výsledná susceptibilita elektronového plynu je tedy rovna

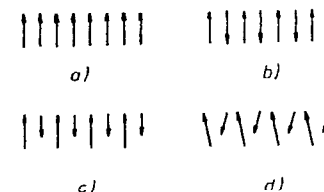
$$\chi_{m,p} = \mu_0 \frac{n_0 m^2}{k_B T_F} \quad (7.16)$$

Na základě právě vyložených skutečností je možné podat hrubý a do značné míry zjednodušený obraz o magnetických vlastnostech kovů, který však správně vystihuje jejich fyzikální podstatu. Výsledná magnetická susceptibilita je dána součtem příspěvků jednotlivých typů elektronů. U všech kovů se vyskytuje paramagnetismus vodivostních elektronů daný vztahem (7.16) a diamagnetismus lokalizovaných elektronů vnitřních zaplněných slupek, který je popsán Langevinovou teorií (viz čl. 7.6.2). Magnetická susceptibilita kovů, které neobsahují částečně zaplněné vnitřní podslupky, je v zásadě dána bilancí těchto teplotně nezávislých příspěvků. U lehkých kovů (například u sodíku) převažuje magnetismus vodivostních elektronů, takže jsou paramagnetické. U těžších kovů (například měď), u nichž je větší počet lokalizovaných elektronů ve vnitřních slupkách, může naopak převážít jejich diamagnetismus. U kovů, u nichž mohou být nezaplňené stavy ve vnitřních podslupkách, se může navíc projevit paramagnetismus těchto nezaplňených podslupek. Vzhledem k tomu, že elektrony takových podslupek mohou být do značné míry lokalizované, může jít o teplotně závislý paramagnetismus Langevineova typu (viz článek 7.6.3). Příkladem takového chování je palladium a platina.

### 7.2.3 Magneticky uspořádané látky

Již v článku 3.5.4 bylo vyloženo, že fyzikální podstatou silného magnetismu je spontánní uspořádání magnetických momentů atomů, přičemž silný magnetismus jeví látky s takovým typem uspořádání, u něhož nejsou atomové momenty vzájemně vykompenzovány. Existuje několik klasických typů struktur magnetického uspořádání, které jsou uvedeny na obr. 7.13. Obrázek 7.13a představuje feromagnetickou strukturu, u níž jsou všechny atomové magnetické momenty

stejně velikosti uspořádány paralelně. Obrázek 7.13b ukazuje tzv. antiferomagnetickou strukturu, v níž se střídají antiparalelně orientované magnetické momenty stejné velikosti, které se vzájemně kompenzují, takže výsledný magnetický moment struktury je nulový. Soustava stejně orientovaných magnetických momentů se nazývá magnetickou podmřížkou. Antiferomagnetickou strukturu můžeme tedy popsat jako průnik dvou magnetických podmřížek s opačně orientovanými momenty stejné velikosti. Obrázek 7.13c dále zobrazuje schéma ferimagnetické struktury, která je reprezentována rovněž dvěma antiparalelně orientovanými magnetickými podmřížkami, každá z nich však obsahuje momenty jiné velikosti, takže výsledný moment není vykompenzován. Konečně obr. 7.13d uvádí příklad obecnějšího uspořádání, v němž všechny magnetické momenty nemají stejný směr. Jde o příklad tzv. nekolineární struktury, jejichž konkrétních typů je v současné době známa celá řada. Jelikož však jde vesměs o materiály exkluzivních vlastností, nebudeme se strukturami tohoto typu dále zabývat.<sup>55</sup>



Obr. 7.13 Schémata základních typů magnetického uspořádání: a) feromagnetismus, b) antiferomagnetismus, c) ferimagnetismus, d) nekolineární magnetické uspořádání.

Magnetické uspořádání existuje vždy při teplotách nižších, než je jistá kritická teplota. V případě feromagnetik mluvíme o Curieově teplotě  $T_C$ , v případě ferimagnetik a antiferomagnetik o teplotě Néelové  $T_N$ . Nad Curieovou, popř. Néelovou, teplotou jsou tyto látky paramagnetické a jejich magnetická susceptibilita s rostoucí teplotou klesá. S výjimkou bezprostředního okolí kritické teploty často splňují tzv. Curieův-Weissův zákon

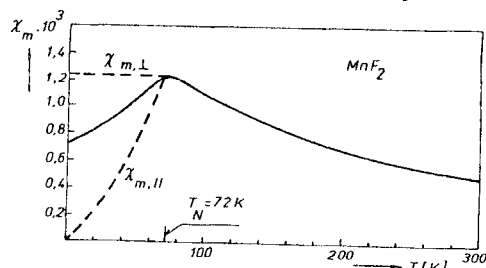
$$\chi_m = \frac{C_w}{T - \Theta} \quad (7.17)$$

který je modifikací Curieova zákona (3.144) (srov. rovněž analogické chování feroelektrik – viz článek 7.2.1). Konstanta  $C_w$  je analogií Curieovy konstanty v (3.144). Veličina  $\Theta$  má rozměr teploty. V případě feromagnetik se obvykle

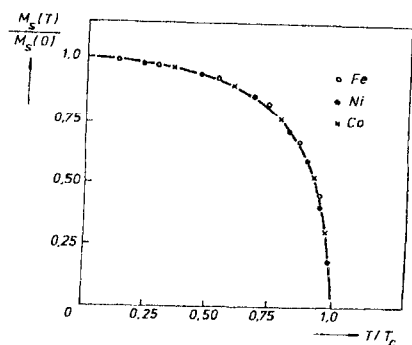
<sup>55</sup> Pro klasické magneticky uspořádané materiály byla téměř vždy charakteristická dobře vyvinutá krystalická struktura, tj. jednalo se buď o monokrystaly, nebo o látky polykrystalické s dobře vyvinutými monokrystalickými zrnky, na jejichž prostorovou orientaci je vázána orientace spontánně uspořádaných magnetických momentů. V posledních letech však nabývá význam i skupina magneticky uspořádaných materiálů nano-krystalických či amorfních. Zvláštní třídu tvoří tzv. spinová skla, pro něž je charakteristická prostorová izotropie spontánní magnetizace.

příliš neliší od Curieovy teploty,<sup>56</sup> v případě antiferomagnetik je však značně odlišná od Néelovy teploty a je dokonce záporná.

Vzhledem k tomu, že v antiferomagnetické struktuře jsou magnetické momenty jednotlivých podmřížek vzájemně vykompenzovány, jeví se antiferomagnetika jako slabě magnetické látky. Jako příklad uvádíme na obr. 7.14 teplotní průběh magnetické susceptibilitě klasického antiferomagnetika  $\text{MnF}_2$  s Néelovou teplotou  $T_N = 72 \text{ K}$ . Nejvyšší hodnotu má susceptibilita v okolí Néelovy



Obr. 7.14 Teplotní závislost magnetické susceptibilitě klasického antiferomagnetika  $\text{MnF}_2$ .



Obr. 7.15 Teplotní závislost spontánní magnetizace klasických feromagnetik Fe, Co, Ni.

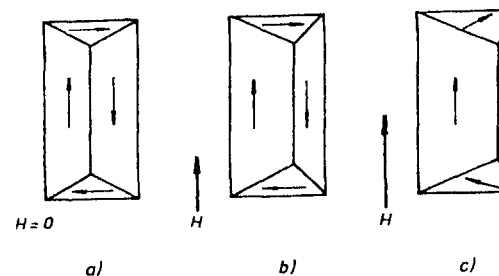
teploty, je však stejného řádu jako susceptibilita silnějších paramagnetik. Nad Néelovou teplotou susceptibilita s rostoucí teplotou klesá, splňuje Curieův-Weissův zákon (7.17) s hodnotou  $\Theta = -113 \text{ K}$ . Pod Néelovou teplotou jsou vlastnosti antiferomagnetik obvykle anizotropní. Plná křivka na obrázku reprezentuje průběh susceptibilitě polykrystalického vzorku, čárkované křivky popisují chování susceptibilitě monokrystalu:  $\chi_{m,||}$  v případě, že magnetické pole je

<sup>56</sup> Například pro klasická feromagnetika železo, kobalt, nikel a gadolinium platí postupně:  $T_C(\text{Fe}) = 1043 \text{ K}$ ,  $\Theta(\text{Fe}) = 1090 \text{ K}$ ,  $T_C(\text{Co}) = 1393 \text{ K}$ ,  $\Theta(\text{Co}) = 1420 \text{ K}$ ,  $T_C(\text{Ni}) = 631 \text{ K}$ ,  $\Theta(\text{Ni}) = 650 \text{ K}$ ,  $T_C(\text{Gd}) = 289 \text{ K}$ ,  $\Theta(\text{Gd}) = 303 \text{ K}$ .

rovnoběžné se směrem momentů magnetických podmřížek,  $\chi_{m,\perp}$  v případě magnetického pole orientovaného kolmo.

Společným rysem feromagnetického a ferimagnetického uspořádání je existence nenulového výsledného magnetického momentu. Touto skutečností je podmíněno podobné chování obou typů látek ve vnějším magnetickém poli, které může být popsáno hysterezní smyčkou, popř. jejími jednotlivými parametry, jako spontánní a remanentní magnetizací, koercitivním polem, počáteční a maximální permeabilitou a jinými (viz článek 3.5.4).

Spontánní magnetizace  $M_s$  je základní parametr feromagnetika (popř. ferimagnetika), který popisuje stav jeho magnetického uspořádání. Charakteristickým způsobem, který pro klasická feromagnetika ukazuje obr. 7.15, se mění  $M_s$  s teplotou. Pro ferimagnetika má teplotní průběh spontánní magnetizace obvykle kvalitativně stejný charakter.



Obr. 7.16 Základní mechanismy magnetování feromagnetik: a) doménová struktura v nulovém magnetickém poli, b) magnetování posuvem doménových stěn, c) magnetování stáčením magnetizace v doménách.

Konkrétní souvislost mezi hodnotou makroskopické magnetizace vzorku a hodnotou přiloženého magnetického pole je podmíněna tím, že při teplotách nižších než  $T_C$  (popř.  $T_N$ ) se celý objem látky rozpadá na určitý počet oblastí, tzv. *magnetických domén*, které jsou spontánně zpolarizovány. Vektor výsledné magnetizace každé z nich má tendenci být orientován do význačných krystalografických směrů, tzv. *snadných směrů magnetizace*. Výsledný magnetický moment vzorku je pak dán vektorovým součtem momentů jednotlivých domén; vnější magnetické pole relativně malých hodnot může tedy vyvolat značné změny výsledné magnetizace. Obrázek 7.16 schematicky ukazuje způsob magnetování klasických kovových feromagnetik. V nulovém magnetickém poli mají domény konfiguraci tvořící uzavřené „magnetické obvody“, která je energeticky výhodná. Se vzrůstem pole  $H$  se nejdříve zvětšuje objem domén se směrem magnetizace blízkým směru vnějšího pole, dále se magnetizace v jednotlivých doménách vytáčí do směru vnějšího pole až nakonec (při dostatečně vysokém poli) je celý objem vzorku zmagnetován ve směru pole.

V článku 3.5.4 byly naznačeny způsoby technického využití silně magnetických materiálů. Pro magneticky měkká i magneticky tvrdá magnetika se používají jak kovové materiály vycházející z klasických feromagnetik a jejich slitin, tak feromagnetika, z nichž největší technický význam mají tzv. *ferity*, což jsou oxidy železa a jiných kovů. V tabulkách 7.5 a 7.6 uvádíme pro informaci několik údajů o nejběžnějších magneticky měkkých a magneticky tvrdých materiálech.

Tabulka 7.5. Příklady permability magneticky měkkých magnetik

látka	počáteční perm. $\mu_{r,0}$	maximální perm. $\mu_{r,max}$	$H_c$ (A/m)	$P_{m,r}$ (Wb/m <sup>2</sup> )
transformátorová ocel (96%Fe,4%Si)	$4 \cdot 10^2$	$6,7 \cdot 10^3$	40	1,2
čisté železo (99,95% Fe)	$1 \cdot 10^4$	$1,8 \cdot 10^5$	4	2,15
78-permalloy (21,2%Fe,78,5%Ni,,3%Mn)	$6 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^5$	4	1,07
supermalloy (15,7%Fe,79%Ni,5%Mo,0,3%Mn)	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	0,32	0,8
manganatozinečnatý ferit ( $Mn_{0,8}Zn_{0,2}Fe_2O_4$ )	až $5 \cdot 10^3$		10	0,4

Tabulka 7.6 Příklady parametrů magneticky tvrdých materiálů

látka	$H_c$ (A/m)	$P_{m,r}$ (Wb/m <sup>2</sup> )
uhlíková ocel (98,1% Fe, 1% Mn, 0,9% C)	$4 \cdot 10^3$	1,0
kobaltová ocel (52,6% Fe, 36% Co, 7% W, 3,5% Cr, 0,9% C)	$18,3 \cdot 10^3$	1,0
Alnico V (51% Fe, 14% Ni, 8% Al, 24% Co, 3% Cu)	$52 \cdot 10^3$	1,27
barnatý ferit: -izotropní	$135 \cdot 10^3$	0,21
-anizotropní	$135 \cdot 10^3$	0,21

Fyzikální příčinou vzniku magnetického uspořádání je tzv. *výměnná interakce* mezi elektrony částečně zaplněných podslupek (viz čl 7.1.4), která je elektrické povahy, může však být popsána jen na základě zákonitostí kvantové mechaniky. Podrobnější výklad podstaty magnetického uspořádání přesahuje možnosti této knihy. Fenomenologicky může být vznik magnetického uspořádání vyložen na základě předpokladu o existenci tzv. *molekulárního pole*, které v r. 1907 zavedl P. E. Weiss. Existence magnetického uspořádání vyplývá za tohoto předpokladu z Langevinovy teorie paramagnetismu. Později byl podobný postup použit i L. Nécelm pro výklad vlastností feromagnetik.

V současné době tvoří fyzika magneticky uspořádaných materiálů rozsáhlou oblast fyziky pevných látek, která má k dispozici celou řadu experimentálních metod umožňujících přímé studium jak magnetického uspořádání, tak magnetizačních procesů a doménové struktury. Na základě poznání fyzikální podstaty magnetického uspořádání je možné připravovat stále dokonalejší materiály pro technické aplikace. V poslední době mají největší význam materiály pro záznam informace, magneticky měkké materiály na bázi kovových skel, magneticky tvrdé materiály na bázi vzácných zemin a jiné.

## 7.3 Vedení proudu v pevných látkách

### 7.3.1 Obecné charakteristiky vedení proudu v pevných látkách

Málokterá fyzikální vlastnost látek se může měnit v tak širokém rozmezí jako elektrická vodivost. Tak zatímco stříbro má při pokojové teplotě měrnou vodivost  $\gamma$  asi  $6 \cdot 10^7$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>, pro diamant platí  $\gamma \sim 3 \cdot 10^{-17}$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>. Navíc při nízkých teplotách přecházejí některé látky do tzv. *supravodivého stavu* s téměř nulovým měrným elektrickým odporem. Při hrubém dělení podle hodnoty elektrické vodivosti se obvykle rozlišují tři typy látek: vodiče, polovodiče a nevodiče. Za vodiče se obvykle považují látky, jejichž měrná vodivost je větší než  $10^6$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>. O nevodících mluvíme v případě, že měrná vodivost je menší než  $10^{-8}$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>. Konečně za polovodiče považujeme látky, pro něž měrná vodivost leží v intervalu  $(10^{-8} - 10^6)$  ( $\Omega \cdot m$ )<sup>-1</sup>. Uvedené hranice mají ovšem pouze orientační charakter. Vodivost některých látek (zejména polovodičů) se totiž mění i o několik řádů v závislosti na teplotě, osvětlení a jiných faktorech, takže by proto nemělo žádný smysl stanovovat hranice přesně. Fyzikálně hlubším znakem než hodnota měrné vodivosti je její teplotní závislost. Později uvidíme, že velké množství polovodičů má velkou teplotní závislost měrné vodivosti, zatímco pro většinu dobrých vodičů (zejména kovů) je její teplotní závislost mnohem menší.

Pro elektrickou vodivost fyzikálně homogenních pevných látek je charakteristická *velmi dobrá platnost Ohmova zákona* až do velmi vysokých hodnot elektrického pole. Chování fyzikálně nehomogenních soustav naopak ve většině případů nelze popsat jen hodnotou elektrické vodivosti, neboť se v takových soustavách uplatňuje působení vtištěných sil. S nejdůležitějšími jevy tohoto druhu se seznámíme v článku 7.3.3.

Charakter vodivosti velmi silně závisí na tom, jaké objekty tvoří nositele proudu. V látkách různého typu mohou nést náboje přenášet volné elektrony nebo ionizované atomy či molekuly. V prvním případě mluvíme o *vodivosti elektronové*, ve druhém případě o *vodivosti iontové*.<sup>57</sup> Pro nepatrnou hmotnost elektronů není elektronová vodivost spojena se znatelným transportem hmoty. Iontovou vodivost transport hmoty naopak vždy doprovází.

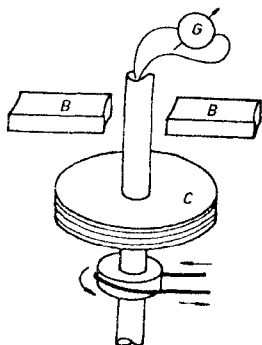
*Iontová vodivost v pevných látkách* se vyskytuje zejména v iontových krystalech (např. NaCl, AgCl, AgBr a dalších), jejichž krystalová mřížka je vybudována z kladných a záporných iontů. Některé z nich se mohou účinkem vnějšího elektrického pole přemísťovat, čímž přispívají ke zvodivění krystalu. Dále se iontová vodivost vyskytuje u některých nekystalických pevných látek, například u skel.

<sup>57</sup> Z látek jiných skupenství je iontová vodivost charakteristická pro kapalné roztoky a za určitých podmínek také pro plyny. V plynech se však při silných elektrických polích významně uplatňuje i vodivost elektronová. V koloidních roztocích mohou být nositeli proudu dokonce i makroskopické částice.



Iontová vodivost zpravidla se vzrůstající teplotou silně vzrůstá. Tento vzrůst vodivosti je podmíněn tím, že při vzrůstající teplotě se zvyšuje počet iontů schopných volného pohybu uvnitř látky.

Jak bylo již uvedeno, je iontová vodivost vždy spojena s transportem látky, který je vždy konečným kritériem, zda u dané látky jde o vodivost iontovou či elektronovou. V látce, kterou delší dobu procházel iontový proud, jsou vždy pozorovatelné změny. Necháme-li například procházet proud krystalem chloridu sodného NaCl, můžeme po určité době pozorovat vylučování sodíku na ploše tvořící záporný pól. Zkušenost totiž ukazuje, že při nepříliš vysoké teplotě jsou v krystalové mřížce pohyblivé pouze ionty  $\text{Na}^+$ . Vylučování chlóru na kladné elektrodě je patrné teprve při teplotách blízkých bodu tání, kdy se zvyšuje i pohyblivost iontů  $\text{Cl}^-$ . Množství vyloučené látky je úměrné prošlému náboji a splňuje Faradayovy zákony elektrolýzy (viz článek 7.4.2).



Obr. 7.17 Schematické uspořádání Tolmanova-Stewartova experimentu.

Kovy a polovodiče jsou typickými představiteli látek s elektronovou vodivostí. Současná fyzika pevných látek má k dispozici velké množství experimentálních i teoretických argumentů pro podporu tohoto tvrzení. Z historického hlediska je pro svou principiální jednoduchost a názornost významný Tolmanův-Stewartův experiment, jehož výsledky byly publikovány v roce 1917. Jde o elektromechanický pokus, který vychází z předpokladu, že při prudkém zabrzdění pohybujícího se kovu musí dojít k vzájemnému pohybu mezi systémem volných elektronů a krystalovou mřížkou, což se projeví proudovým impulsem. Jednoduchým výpočtem (viz další výklad) lze ukázat, že celkový proteklý náboj je úměrný poměru náboje  $q$  a hmotnosti  $m$  nositelů proudu, tj. veličině  $q/m$ . Zmínění autoři provedli experiment pro případ stříbra, mědi a hliníku. Pro  $q/m$  získali hodnoty ležící v intervalu (1,49 až 1,60).  $10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$ , současná nepřesnější hodnota pro elektron činí  $1,758820174(71) \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$  (viz Dodatek 2.).

Tolman a Stewart realizovali experiment způsobem, jehož schéma je uvedeno na obr. 7.17. Ze zkoumaného kovu zhotovili cívku  $C$  o značném počtu závitů, kterou připojili do obvodu balistic-

kého galvanometru  $G$  schopného měřit celkový prošlý náboj  $Q$ . Cívku uvedli do rychlé rotace a po určité době ji pomocí brzdících čelistí  $B$  během krátkého časového intervalu  $\Delta t$  zabrzdili a sledovali prošlý náboj.

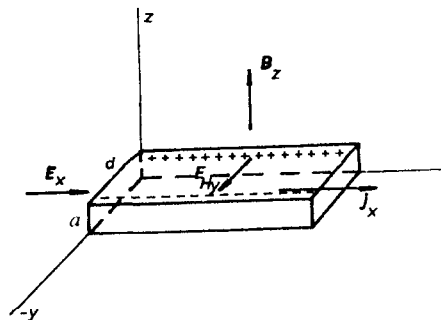
Po zabrzdění cívky budou volní nositelé náboje určitou dobu v pohybu vůči krystalové mřížce kovu a budou tedy reprezentovat jistý elektrický proud  $I$ . Postupně budou předávat svoji kinetickou energii krystalové mřížce ve formě tepla, které může být rovněž vyjádřeno jako Jouleovo teplo. Uvažujeme vodič délky  $l$  a průřezu  $S$ , který v jednotce objemu obsahuje  $n_0$  volných nositelů teplo. Uvažujeme vodič délky  $l$  a průřezu  $S$ , který v jednotce objemu obsahuje  $n_0$  volných nositelů náboje  $q$  a majících hmotnost  $m$ . Nechť celkový elektrický odpor vodiče je  $R$ , jeho pohybová rychlost  $v_0$ , která se zbrzdí na nulu během časového intervalu  $\Delta t$ . Jestliže za velmi krátký časový interval  $dt$  poklesne rychlost  $v$  nositele o  $-dv$  a obvodem proteče elektrický náboj  $dQ = I dt$ , lze pro tento časový interval vyjádřit energetickou bilanci ve tvaru

$$-n_0 l S m v dv = R I^2 dt = R n_0 S v q dQ,$$

odkud po integraci v mezích  $(v_0, 0)$  můžeme vyjádřit celkový prošlý náboj

$$Q = \frac{lv_0 m}{R q}. \quad (7.18)$$

Autoři ve svém experimentu používali cívku o celkové délce vodiče asi 500 m. Používaná obvodová rychlost cívky byla  $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a doba brzdění  $\Delta t \sim 0,1 \text{ s}$ .



Obr. 7.18 Geometrická konfigurace studia Hallova jevu.

Průchod elektrického proudu kovem či polovodičem je doprovázen obecným jevem spočívajícím ve vzniku příčné intenzity elektrického pole, je-li vzorek vložen do příčného pole magnetického. Tento jev, nazývaný *Hallovy jev*, má rovněž značnou důležitost pro objasnění mechanismu elektrické vodivosti daného vodiče. Geometrická konfigurace umožňující pozorování Hallova jevu je zobrazena na obr. 7.18. Vnější elektrické pole  $\mathbf{E}_x$  orientované ve směru osy  $x$  budí ve vzorku elektrický proud o hustotě  $\mathbf{j}_x$ . Přiložíme-li magnetické pole  $\mathbf{B}_z$  ve směru osy  $z$ , objeví se ve vzorku příčné elektrické pole  $\mathbf{E}_{H,y}$  ve směru osy  $y$ , které na vzorku vytvoří měřitelné příčné napětí  $U_H = E_{H,y} d$ . Intenzita  $E_{H,y}$  respektive napětí  $U_H$  se nazývá *Hallovou intenzitou*, respektive *Hallovy napětím*. Experiment ukazuje, že Hallova intenzita je úměrná proudové hustotě  $j_x$  a magnetické indukci  $B_z$ .

$$E_{H,v} = R_H j_x B_z. \quad (7.19a)$$

Konstanta  $R_H$ , která nezávisí na rozměrech vzorku, se nazývá *Hallovou konstantou*, a představuje důležitou charakteristiku daného vodiče.

Vedle Hallovy konstanty  $R_H$  se k charakterizaci Hallova jevu užívá i tzv. *Hallův odpor*  $\tilde{R}_H$  definovaný jako poměr Hallova napětí  $U_H$  a proudu  $I_x = j_x ad$ , reprezentovaného hustotou  $j_x$  ve vzorku o průřezu  $S = ad$  (viz obr. 7.18). Vzhledem k tomu, že vzorek má velmi často tvar tenkého proužku, lze v těchto případech proud tekoucí ve směru osy  $x$  chápat jako proud plošný  $I_{s,x} = j_{s,x} d$ , přičemž  $j_{s,x} = j_x ad$ . Pro Hallův odpor tedy platí

$$\tilde{R}_H = \frac{U_H}{I_x} = \frac{E_{H,v}}{j_{s,x}}$$

a Hallovo napětí respektive Hallovu intenzitu je pak možné alternativně k (7.19a) vyjádřit vztahy

$$U_H = \tilde{R}_H I_x, \quad E_{H,v} = \tilde{R}_H j_{s,x}, \quad (7.19b)$$

kteří reprezentují explicitní závislost  $U_H$  na proudu  $I_x$  (respektive  $E_H$  na proudové hustotě  $j_{s,x}$ ), zatímco závislost na magnetickém poli je implicitně obsažena v Hallově odporu  $\tilde{R}_H$ .

Zajímavé je, že Hallovo napětí, a tedy i Hallova konstanta  $R_H$ , může mít pro různé materiály nejen různé hodnoty, ale i různá znamení. Například zatímco pro stříbro je  $R_H(\text{Ag}) = -8,4 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3(\text{As})^{-1}$ , pro zinek platí  $R_H(\text{Zn}) = +3,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3(\text{As})^{-1}$ . V článku 7.6.4, ve kterém vyložíme jednoduchou teorii Hallova jevu, ukážeme, že kladné znamení Hallovy konstanty souvisí s podílem tzv. *děrové vodivosti* na celkové vodivosti látky. Vedle již zmíněné možnosti studia mechanismu elektrické vodivosti látek má Hallův jev významné aplikace i v experimentální technice, především pro měření magnetického pole. Průmyslově vyráběné magnetometry s Hallovou sondou dnes prakticky vytlačily klasické přístroje založené na jevu elektromagnetické indukce (viz kapitola 4).<sup>58</sup>

<sup>58</sup> V roce 1980 byl na speciální polovodičové součástce objeven tzv. *kvantový Hallův jev* (a následně již v roce 1982 na podobném systému tzv. *zlankový kvantový Hallův jev*). Kvantový Hallův jev, který souvisí s charakterem kvantování elektronových stavů v dvoudimenzionálních elektronových systémech, spočívá v existenci prodelev v závislosti Hallova odporu na magnetickém poli při velmi nízkých teplotách. Jak se ukázalo, prodelevy mají přímou souvislost se změnami v obsazování jednotlivých elektronových stavů a jejich vzdálenost je přímo určena jednak hodnotou Planckovy konstanty a jednak nábojem nositelů proudu. Oba zmíněné jevy mají velký význam pro studium nízkodimenzionálních elektronových soustav připravovaných nejčastěji heterostrukturmi technologií (srov. čl. 7.3.4). Vedle toho má dnes kvantový Hallův jev velký význam i pro metrologii jako normální odporu. Pro studium metrologických hledisek odkazujeme na knihu J. Brož, V. Roskovec: *Základní fyzikální konstanty*. SPN, Praha 1988, pro obecné poučení na monografii J. D. Davis: *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors*. Cambridge University Press, Cambridge 1999.

V článku 7.1.2 bylo poukázáno na souvislost elektronové struktury látky s její elektrickou vodivostí. Bylo ukázáno (srov. obr. 7.5), že látky, které za teploty absolutní nuly obsahují jen zcela zaplněné a zcela prázdné energetické pásy, jsou při dostatečně nízkých teplotách nevodíče, zatímco látky s pásy zaplněnými částečně jsou vodiče. Při vyšších teplotách je skutečné chování látek právě klasifikovaných jako nevodíče dáno šířkou pásu zakázaných energií  $E_g$  mezi posledním zaplněným (valenčním) a prvním prázdným (vodivostním) pásem. Při nenulové teplotě mohou být totiž některé elektrony tepelně excitovány, takže překonají energii zakázaného pásu a obsadí některé stavy v prázdném vodivostním pásu, čímž se současně uvolní odpovídající stavy pásu valenčního. Látky v takovém stavu je pak schopna vést elektrický proud. Pravděpodobnost tepelné excitace při dané teplotě ovšem klesá se vzrůstající šířkou zakázaného pásu. Látky s vysokou hodnotou  $E_g$  budou i za vyšších teplot nevodíče, látky s nízkou hodnotou  $E_g$  se budou chovat jako polovodiče. Například velmi dobrý nevodíč diamant, který má při pokojové teplotě měrnou vodivost  $\gamma = 3.10^{-17} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , má šířku zakázaného pásu  $E_g = 5,4 \text{ eV}$ . Naproti tomu krystal velmi čistého germania má při pokojové teplotě již měrnou vodivost  $\gamma \sim 20 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , přičemž šířka zakázaného pásu germania  $E_g \sim 0,66 \text{ eV}$ . Obě látky přitom mají krystalovou strukturu stejného typu.

Vlastnosti polovodičů podrobněji studujeme v článku 7.3.4. Uvidíme, že při dané teplotě je vodivost polovodiče velmi silně závislá na čistotě. Z tohoto důvodu je třeba uvedenou hodnotu měrné vodivosti germania považovat jen za řádově informativní.

### 7.3.2 Vodivost kovů

Většina prvků kovového charakteru a jejich slitin patří mezi dobré vodiče. Je pro ně charakteristická velmi dobrá platnost Ohmova zákona. Důležitou charakteristiku elektrické vodivosti kovů tvoří její teplotní závislost, která je zpravidla nevýrazná ve srovnání s jinými typy pevných látek, například s polovodiči. Obecně řečeno, se vzrůstající teplotou elektrická vodivost kovů klesá, tj. měrný odpor roste. V okolí pokojových teplot je zpravidla možné s dobrou přesností vyjádřit měrný odpor kovu jako lineární funkci teploty. V širším oboru teplot a při větších nárocích na přesnost, je možné teplotní závislost měrného odporu aproximovat polynomem druhého stupně. Označíme-li  $\rho_R(t)$  měrný odpor při teplotě  $t$  v Celsiově stupnici,  $\rho_{R,0}$  měrný odpor při  $0^\circ\text{C}$ , platí

$$\rho_R(t) = \rho_{R,0} (1 + \alpha t + \beta t^2). \quad (7.20)$$

Tabulka 7.7 Parametry elektrické vodivosti vybraných kovů a slitin.

látky	rezistivita $\gamma$ ( $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ )	tepl. součinitel odporu $\alpha$ ( $\text{K}^{-1}$ )
stříbro	$6,14 \cdot 10^7$	$4,0 \cdot 10^{-3}$
měď	5,8	4
platina	1,0	4
železo (čistoty 99,98%)	1,0	5
olovo	0,45	4
hliník	3,54	4
mosaz (Cu 66%, Zn 34%)	1,4	2
nichrom	0,1	4
konstantan (Cu 84%, Ni 43%)	0,2	0,01
manganin (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	0,23	0,002

Veličiny  $\alpha$  a  $\beta$  jsou lineární a kvadratický teplotní součinitel odporu, které je třeba pro jednotlivé kovy určit měřením.

Pro získání konkrétní představy uvádíme v tabulce 7.7 hodnoty měrné vodivosti (rezistivity) při pokojové teplotě a teplotní součinitel odporu  $\alpha$  některých kovů. Z tabulky jsou vidět některé závislosti, které mají obecnější charakter. Obecně řečeno, čisté kovy mají větší teplotní součinitel odporu než jejich slitiny. U některých slitin připravovaných za tímto účelem (konstantan, manganin) je možné dokonce dosáhnout snížení o několik řádů. Uváděné prvky mají přitom téměř stejný součinitel odporu, i když se hodnoty jejich měrné vodivosti značně liší. Uváděné slitiny mají dále řádově menší měrnou vodivost než příslušné čisté kovy.

Závislosti demonstrovány na několika příkladech podle tabulky 7.7 mají obecnější platnost a souvisí s mechanismem pohybu nositelů proudu. Ukazuje se, že pro hodnotu měrné vodivosti (respektive měrného odporu) je určující interakce vodivostních elektronů s krystalovou mřížkou kovu. Tyto elektrony interagují s krystalovou mřížkou především prostřednictvím jejího elektrického pole, přičemž na hodnotu měrného odporu mají vliv zejména odchylky od jeho periodičnosti. Obvykle se mluví o rozptylu elektronů na nehomogenitách, které v zásadě mohou být způsobeny příčinami dvojího druhu: příměsemi cizích atomů a tepelnými kmity atomů krystalové mřížky. Experiment ukazuje, že při malých koncentracích rozptýl vodivostních elektronů způsobený příměsemi téměř nezávisí na teplotě. Naproti tomu rozptýl vlivem tepelných kmitů na teplotě samozřejmě závisí. Uvedenou skutečnost vyjadřuje tzv. *Matthiessenovo pravidlo*. Celkový měrný odpor kovu  $\rho_R$  s malou koncentrací příměsí je dán součtem teplotně nezávislého příspěvku  $\rho_{R,p}$  vyjadřujícího rozptýl vodivostních elektronů na cizích atomech a teplotně závislého příspěvku  $\rho_{R,k}(T)$  charakterizujícího rozptýl na tepelných kmitech mřížky

$$\rho_R = \rho_{R,p} + \rho_{R,k}(T). \quad (7.21)$$

Matthiessenovo pravidlo dovoluje kvalitativně pochopit závislosti demonstrovány v tabulce 7.7. V čistých kovech je měrný odpor v zásadě dán jen příspěvkem  $\rho_{R,k}(T)$  a má charakteristickou teplotní závislost, která bude diskutována v dalším výkladu. U kovů s příměsemi a u slitin naopak hraje hlavní roli rozptýl na nehomogenitách ve složení krystalu, s nulovou či menší teplotní závislostí.

Jak bylo ukázáno, měrná vodivost kovu je velmi závislá na jeho čistotě. Proto se u velmi čistých kovů používá měrné vodivosti (zejména měřené při nízkých teplotách) k charakterizování jejich čistoty. Měrná vodivost je však závislá i na koncentraci poruch krystalové mřížky (vakancí, intersticiál apod.), a je tudíž závislá i na tepelném zpracování a mechanické deformaci. Studium

vodivosti je důležitou metodou pro studium poruch krystalové mřížky. Naproti tomu u některých ušlechtilých kovů v definovaném stavu je měrná vodivost velmi stálou veličinou. Proto se její teplotní závislosti užívá k měření teploty. Nejvýhodnější vlastnosti pro tento účel má platina, pro jejíž teplotní závislost měrného odporu platí vztah typu (7.20)

$$\rho_R(T) = \rho_{R,0} (1 + 3,985 \cdot 10^{-3} T + 5,86 \cdot 10^{-7} T^2), \quad (7.22)$$

který – jak je známo – tvoří součást Mezinárodní teplotní stupnice (viz například [5, 11]).

Důležitý parametr popisující vlastnosti kmitů krystalové mřížky je tzv. *Debyeova teplota*  $\Theta_D$ . Lze proto očekávat, že hodnota měrné vodivosti kovu při dané teplotě bude na Debyeově teplotě závislá. Na Debyeově teplotě jsou závislé i jiné fyzikální vlastnosti kovu, které jsou podmíněny kmity krystalové mřížky. (Jedním z takových parametrů je například měrné teplo – viz např. [10].) Na základě experimentálního studia těchto vlastností pak může být Debyeova teplota určena.

Debyeova teplota je parametr charakterizující tzv. *Debyeův model* kmitů krystalové mřížky. Tento model vychází z předpokladu, že každý atom, jako bodová částice vázaná kvazielastickými silami v uzlovém bodu krystalu, má tři stupně volnosti a jeho kmity mohou být popsány kmity trojice lineárních harmonických oscilátorů. Celý krystal obsahující  $N$  atomů pak může být reprezentován soustavou  $3N$  vzájemně vázaných harmonických oscilátorů. Z mechaniky víme (viz např. [12]), že pro takovou soustavu mohou být zavedeny tzv. *vlastní kmity*, charakterizované vlastními frekvencemi  $\omega_i$  kterých je celkem  $3N$ . Nejvyšší z těchto vlastních frekvencí  $\omega_{i,max}$  charakterizuje kmity o nejvyšší možné energii. Debyeova teplota je parametr, který v jednotkách teploty charakterizuje tuto nejvyšší frekvenci ve spektru kmitů krystalové mřížky. Ta je definována vztahem

$$h\omega_{i,max} = k_B \Theta_D. \quad (7.23)$$

Na základě uvedených skutečností nepřekvapí, že měrný odpor čistého kovu při dané teplotě  $T$  je do značné míry určen poměrem  $x = T/\Theta_D$ . Tuto souvislost popisuje tzv. *Grüneisenova formule*, která může být zapsána ve tvaru

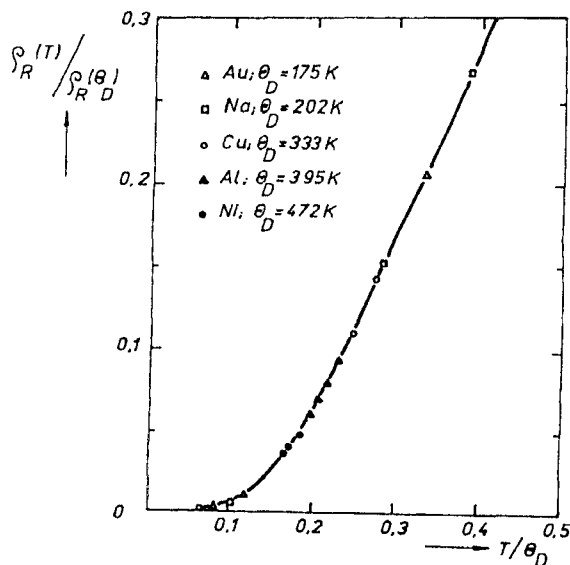
$$\rho_R(x) \sim TG(x). \quad (7.24)$$

Funkce  $G(x)$  je tzv. *Grüneisenova funkce*. Její tvar je dán určitým integrálem, který nelze jednoduše obecně vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Grüneisenův vztah však lze jednoduše aproximovat v mezních situacích  $T \ll \Theta_D$  a  $T \gg \Theta_D$ , pro které z něj plyne<sup>59</sup>

$$\begin{aligned} \rho_R &\sim T^5 & \text{pro } T \ll \Theta_D, \\ \rho_R &\sim T & \text{pro } T \gg \Theta_D. \end{aligned} \quad (7.25)$$

<sup>59</sup> Grüneisenův vztah nebere ovšem v úvahu existenci supravodivosti, která nastává u některých kovů při nízkých teplotách. Supravodivost se budeme zabývat v článku 7.3.5.

Grüneisenův vztah je velmi dobře splněn pro mnohé kovy ve velmi širokém intervalu teplot. Situaci dobře demonstruje obr. 7.19, který pro řadu čistých kovů vyjadřuje experimentální závislosti  $\rho_R(T)/\rho_R(\theta_D)$  na  $x = T/\theta_D$  spolu s teoretickou křivkou (reprezentovanou plnou čarou) podle (7.24).<sup>60</sup> Z uvedeného výkladu je mimo jiné patrná i oprávněnost vztahu (7.20) pro aproximaci teplotní závislosti odporu v okolí pokojové teploty.



Obr. 7.19 Srovnání experimentálních hodnot teplotní závislosti měrného odporu kovů s Grüneisenovým vztahem.

Vedle teplotní závislosti elektrické vodivosti je pro kovy charakteristická i souvislost mezi elektrickou vodivostí a elektronovým příspěvkem  $\Lambda$  k tepelné vodivosti. Souvislost obou veličin udává experimentálně stanovený *Wiedemannův–Franzův zákon*, dobře splněný v oboru vyšších teplot. Podle Wiedemannova–Franzova zákona platí vztah

$$\frac{\Lambda}{\gamma} = LT, \quad (7.26)$$

<sup>60</sup> Údaje pro obr. 7.19 byly převzaty ze znamenité učebnice Ch. Kittela: *Introduction to Solid State Physics*. J. Wiley 1968, která existuje rovněž v českém překladu (Ch. Kittel: *Úvod do fyziky pevných látek*. Academia, Praha 1985) a kterou doporučujeme k dalšímu studiu. V této učebnici lze rovněž nalézt podrobnější informace o Grüneisenově vztahu a o Grüneisenově funkci.

v němž  $T$  je absolutní teplota a konstanta  $L = 2 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}$  je stejná pro všechny kovy.

Elektrická vodivost je velmi důležitý parametr charakterizující vlastnosti kovů. Mimo jiné sehrála i významnou roli při vymezení platnosti modelu elektronového plynu (srov. čl. 7.1.3). Elementy mikroskopické teorie vodivosti kovů založené na tomto modelu budou uvedeny v článku 7.6.5.

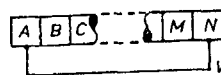
### 7.3.3 Kontaktní napětí a termoelektrické jevy v kovech

Již v úvodu článku 7.3.1 bylo uvedeno, že vedení elektrického proudu ve fyzikálně nehomogenních soustavách nelze popsat jen elektrickou vodivostí  $\gamma$ . V řadě situací je třeba počítat s působením pole vtištěných elektromotorických sil (srov. čl. 3.2.3), respektive elektromotorických napětí.

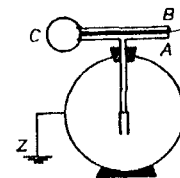
Jedním z důležitých jevů tohoto druhu je existence *kontaktních napětí* mezi kovy při jejich vzájemném styku. Tento jev byl objeven A. Voltou již na konci 18. století. Volta zjistil, že při dotyku dvou různých kovů vzniká mezi nimi samovolně potenciálový rozdíl, jehož velikost je závislá na druhu kovu. Na základě podrobných pokusů sestavil Volta řadu kovů, z nichž se každý při dotyku s libovolným následujícím kovem nabíjí kladně. Tato řada obsahuje kovy:

Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

Volta dále zjistil, že velikost kontaktního rozdílu potenciálu řady složené z většího počtu kovů (viz obr. 7.20) není závislá na počtu a druhu vnitřních členů řady; závisí pouze na chemickém složení prvního a posledního kovu  $A$ ,  $N$  v řadě.



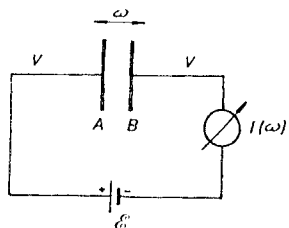
Obr. 7.20 K výkladu vlastností kontaktních napětí.



Obr. 7.21 Metoda detekce kontaktních napětí elektroskopem.

Tato specifická vlastnost kontaktního rozdílu potenciálu (kontaktního napětí) komplikuje do jisté míry jejich experimentální studium, neboť kontaktní napětí samotné nemůže za normálních podmínek vytvořit v uzavřeném obvodu elektrický proud. Spojíme-li totiž první kov  $A$  a poslední kov  $N$  z řady znázorněné na obr. 7.20 jakýmkoliv kovovým vodičem  $V$ , nepoteče obvodem proud, poněvadž kontaktní napětí  $U_{AV}$ ,  $U_{VN}$  vyrovnají díky právě uvedené vlastnosti původní kontaktní napětí  $U_{AN}$  mezi konci řady. K měření je proto nutné volit jiné, speciální metody.

Na obrázku 7.21 je uvedeno nejprostší uspořádání, které principiálně umožňuje kontaktní napětí detekovat. Na měřící elektrodu elektroskopu, jehož obal udržujeme pomocí uzemnění  $Z$  na nulovém potenciálu, je připojena rovinná deska zhotovená z kovu  $A$ . Přes izolační vrstvu  $I$  je na ni přiložena deska zhotovená z kovu  $B$  a obě desky jsou vodičem  $C$  spojeny. Podle toho co bylo řečeno, vznikne mezi deskami  $A$ ,  $B$  kontaktní napětí nezávislé na materiálu spojky  $C$ . Přerušíme-li nyní spojení vodičem  $C$ , zůstanou obě desky nabitý určitým nábojem  $Q$ , jehož velikost odpovídá hodnotě kontaktního napětí a vzájemné kapacitě obou desek. Po oddálení desky  $B$  náboj na desce  $A$  zůstane a způsobí výchylku elektroskopu.



Obr. 7.22 Princip kompenzační metody pro měření kontaktních napětí.

Právě vyložená metoda, i když měření kontaktního napětí principiálně umožňuje, není příliš vhodná pro praktické použití, především pro malou citlivost elektroskopu a pro značnou závislost elektrostatických měření na okolních vlivech. Obrázek 7.22 znázorňuje princip dokonalejší metody. Rovinné desky  $A$ ,  $B$  zhotovené z kovů, jejichž kontaktní napětí chceme měřit, tvoří deskový kondenzátor. Spojíme-li je libovolným vodičem  $V$ , nabije se kondenzátor na kontaktní napětí  $U_{AB}$  a náboje na jednotlivých deskách budou záviset na velikosti jejich vzájemné kapacity. Při změně vzdálenosti desek se tyto náboje budou měnit a vodičem  $V$  poteče proud. Pro praktické měření je výhodné nechat desky kmitat určitou frekvencí  $\omega$  a přístrojem v obvodu detekovat střídavý proud. Hodnotu kontaktního napětí lze nejsnáze přímo změřit kompenzační metodou. Zařadíme-li totiž do obvodu zdroj vhodné polarity, bude jeho elektromotorické napětí kompenzovat kontaktní napětí. Při rovnosti obou napětí přestane obvodem protékat proud a z odpovídající velikosti kompenzačního elektromotorického napětí zdroje  $\mathcal{E}$  je možné usuzovat na kontaktní napětí.

Experimentální zkušenost ukazuje, že kontaktní napětí závisí na teplotě. Tato teplotní závislost je příčinou vzniku tzv. *termoelektrických jevů*. Uvažujme obvod vytvořený podle obr. 7.23a, zhotovený ze dvou kovů  $A$  a  $B$  spojených v místech (1) a (2). Bude-li celý obvod na konstantní teplotě, nepoteče vzhledem k uvedeným vlastnostem kontaktního napětí obvodem proud. Budeme-li však spoje (1) a (2) udržovat na různých teplotách  $T_1$  a  $T_2$ , zjistíme, že obvodem proud protéká. Tento jev se nazývá termoelektrickým *Seebeckovým jevem*. Velikost

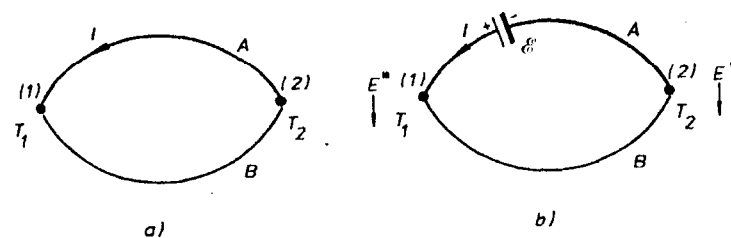
protékajícího proudu je závislá na druhu obou kovů a na velikosti teplotního rozdílu obou spojů.

Vznik Seebeckova jevu lze kvalitativně snadno vysvětlit na základě teplotní závislosti kontaktního napětí. Budeme-li předpokládat, že kontaktní napětí je funkcí teploty  $U_{AB} = U_{AB}(T)$  a označíme-li symbolem  $R$  celkový odpor obvodu, bude proud  $I$  tekoucí obvodem dán vztahem

$$I = \frac{U_{AB}(T_1) - U_{AB}(T_2)}{R} \quad (7.27)$$

Celkové elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_S$  působící v obvodu se nazývá *Seebeckovým termoelektrickým napětím* a je rovno rozdílu kontaktních napětí obou spojů

$$\mathcal{E}_S = U_{AB}(T_1) - U_{AB}(T_2). \quad (7.28)$$



Obr. 7.23 K výkladu termoelektrických jevů: a) Seebeckův jev, b) Peltierův jev.

Inverzním jevem k Seebeckovu jevu je tzv. *jev Peltierův*. Je možné jej pozorovat v obvodu znázorněném na obr. 7.23b, který je opět zhotoven ze dvou různých kovů  $A$  a  $B$  a do něhož je zařazen vnější zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$ . Vnější zdroj vybudí v obvodu proud  $I$  a při jeho průchodu se bude teplota jednoho spoje zvyšovat a druhého snižovat. Bude-li proud procházet směrem naznačeným na obrázku, bude teplota spoje (2) vyšší než teplota spoje (1);  $T_1 > T_2$ .

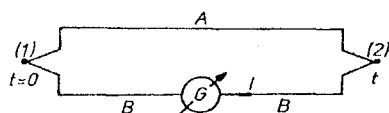
Vedle Seebeckova a Peltierova jevu existuje ještě termoelektrický *jev Thomsonův*. Tento jev, objevený v polovině devatenáctého století, říká, že elektromotorické napětí vzniká samovolně i v homogenním vodiči, jsou-li jeho jednotlivé části udržovány na různých teplotách. Thomsonův jev může být popsán pomocí *Thomsonova elektromotorického napětí*  $\mathcal{E}_T$ , které působí mezi částmi vodiče s různými teplotami  $T_1$ ,  $T_2$ . Je zvykem vyjadřovat je ve tvaru

$$\mathcal{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \sigma_T dT. \quad (7.29)$$

Veličina  $\sigma_T$  se nazývá *Thomsonův koeficient* a závisí na typu látky.

Seebeckův jev se často užívá k měření teploty. Zařízení konstruovaná k tomuto účelu se nazývají *termoelektrické články*. Sestávají ze tří částí vodičů zhotovených ze dvou vhodných kovů A a B, spojených v místech (1) a (2) (viz obr. 7.24). Jeden se spojů je udržován na definované teplotě (obvykle na teplotě  $0^\circ\text{C}$ , a to ponořením do směsi ledové tříšti s vodou), zatímco druhý je umístěn na měřené teplotě  $t$ . Termoelektrické napětí, popř. proud  $I$  tekoucí obvodem, se měří přístrojem  $G$ . Závislost termoelektrického napětí  $\mathcal{E}$  na teplotě (v Celsiově stupnici) je možné s dostatečnou přesností aproximovat kvadratickou závislostí

$$\mathcal{E} = \sigma_1 t + \sigma_2 t^2. \quad (7.30)$$

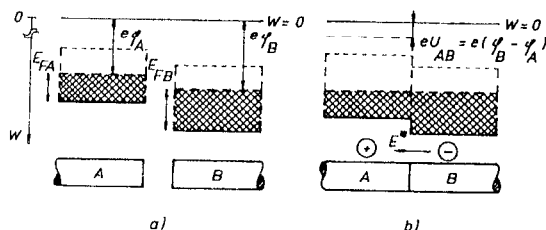


Obr. 7.24 Použití termočláneku k měření teploty.

Parametry  $\sigma_1$ , respektive  $\sigma_2$  je třeba pro každý termočlánek určit měřením. Pro ilustraci velikostí jevu jsou v tabulce 7.8 uvedeny informativní hodnoty konstanty  $\sigma_1$  pro nejčastěji užívané termočláneky. Podrobnější údaje je možné nalézt například v [11].

Tabulka 7.8 Parametry termoelektrického napětí některých termočláneků

termočlánek	$\sigma_1$ ( $\text{V K}^{-1}$ )
měď–konstantan	$4,0 \cdot 10^{-5}$
železo–konstantan	$5,0 \cdot 10^{-5}$
platina–platina rhodium (90%Pt, 10%Rh)	$0,5 \cdot 10^{-5}$



Obr. 7.25 K výkladu vzniku kontaktního napětí.

Vznik kontaktního napětí a termoelektrických jevů je podmíněn tím, že některé volné elektrony mohou při styku dvou kovů přecházet z jednoho do druhého. Podrobná kvantitativní analýza těchto jevů vyžaduje podrobnější znalosti o elektronových stavech v kovech a je úkolem fyziky pevných látek. Omezíme se proto jen na názorný kvalitativní výklad mechanismu vzniku kontaktního napětí založený na modelu volných vodivostních elektronů (srov. čl. 7.1.2). Obrázek 7.25a zobrazuje schematically situaci volných elektronů ve vodivostním pásu dvou kovů A a B při

teplotě absolutní nuly za situace, kdy kovy nejsou ve styku. Vodivostní pásy obou kovů jsou zaplněny po Fermiho hladinu, která je v každém kovu jiná. Kov mohou nejnázne opustit právě tyto elektrony, získají-li energii  $e\phi_A$  a  $e\phi_B$ , nazývané výstupními pracemi. Po styku obou kovů je výchozí situace v obsazení elektronových stavů energeticky nevýhodná. Některé vodivostní elektrony tedy počnou přecházet z kovu A do kovu B, kde mohou obsadit volné stavy s nižší energií. Kov B se počne nabíjet záporně. Proces bude pokračovat tak dlouho, dokud vzniklé elektrické pole nezabrání dalšímu transportu náboje. Rovnovážný stav je tedy charakterizován napětím  $U_{AB}$  pole nezabrání dalšímu transportu náboje. Rovnovážný stav je tedy charakterizován napětím  $U_{AB}$  pole nezabrání dalšímu transportu náboje. Fenomenologicky může být tento proces popsán polem vtištěných sil intenzity  $\mathbf{E}^*$  mezi oběma kovy.

Užitím pojmu intenzity vtištěných sil  $\mathbf{E}^*$  je možné kvalitativně vyložit i vznik Peltierova jevu. Ve spoji (1) (viz obr. 7.23b) souhlasí směr intenzity  $\mathbf{E}^*$  se směrem proudu. Vtištěné síly tedy urychlují nositele proudu, čímž jim dodávají energii. Tuto energii musí dodávat vodič, čímž se snižuje jeho teplota. Ve spoji (2) je naopak vtištěná intenzita  $\mathbf{E}^*$  orientovaná proti směru proudu. Vnější elektrické pole tedy musí překonávat její působení, čímž dodává vodiči energii zvyšující jeho teplotu.

### 7.3.4 Vlastní a příměšová vodivost polovodičů, vlastnosti přechodu p-n

V článku 7.3.1 byl vyložen rozdíl v elektronové struktuře nevodivých a polovodičů. Při teplotě absolutní nuly jsou obě tyto látky nevodivé, neboť všechny elektrony jsou vázány k jednotlivým atomům a látky neobsahují žádné volné nositele proudu. Rozdíl v obou typech látek je dán jen různou energií vazby elektronů v atomech (jinými slovy různou šířkou elektrické vodivosti  $E_g$ , která je u polovodičů značně nižší). Mechanismy vzniku elektrické vodivosti polovodičů při nenulových teplotách popíšeme na příkladu dncs nejužívanějšího klasického polovodiče – křemíku.

Křemík má kubickou krystalovou strukturu typu diamantu. Jeho každý atom má čtyři valenční elektrony, které se všechny podílejí na vzájemných vazbách v krystalu. Proto v absolutně čistém křemíku při velmi nízké teplotě nejsou volní nositelé proudu a krystal se chová jako nevodivý. Vazby valenčních elektronů však mají malou energii, při vyšších teplotách se snadno poruší, čímž vznikne určitý počet volných elektronů (ve vodivostním pásu – srov. čl. 7.1.2) schopných reagovat na vnější elektrické pole, a tudíž vést proud. Vzniklá uprázdněná místa u jednotlivých atomů, tzv. „díry“, které reprezentují „kladné náboje“ v krystalové mřížce (a současně neobsazené stavy ve valenčním pásu – viz opět čl. 7.1.2), mohou migrovat ve směru elektrického pole a přispívat rovněž keletrické vodivosti. Celková vodivost ideálně čistého krystalu je tedy dána jednak pohybem uvolněných elektronů a současně pohybem uprázdněných vazeb (děr) u jednotlivých atomů. Takto vzniklý typ vodivosti se nazývá *vlastní vodivost polovodiče*.

Je zřejmé, že – díky vlastnostem Fermiho–Diracova rozdělení – počet uvolněných elektronů (a tedy i počet nositelů proudu) poroste silně s teplotou. Podrobnější rozbor mechanismu vodivosti i experiment ukazují, že teplotní zá-

vislost měrné vodivosti polovodiče může být v oboru vyšších teplot vyjádřena vztahem

$$\gamma = \Gamma \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right), \quad (7.31)$$

ve kterém  $E_g$  je šířka zakázaného pásu (srov. čl. 7.1.2) charakterizující energii vazby valenčních elektronů,  $\Gamma$  je konstanta slabě závislá na teplotě a  $k_B$  je Boltzmannova konstanta.

V zásadě důležitější než vlastní vodivost je tzv. *vodivost příměsová*, která je způsobena přítomností cizích atomů. Mohou nastat dva případy: Za prvé mohou mít atomy příměsových prvků větší počet valenčních elektronů než atomy křemíku, za druhé může být jejich počet menší. Probereme speciálně situaci vzniklou příměsími prvků s pěti valenčními elektrony (P, As, Sb) a se třemi valenčními elektrony (B, Al, Ga, In).

Jsou-li v krystalové mřížce germania přítomné atomy s pěti valenčními elektrony, jsou na krystalovou mřížku vázány pouze čtyři elektrony, zatímco pátý je na svůj atom vázán jen velmi nepatrně. Může se tudíž uvolňovat i při relativně nízkých teplotách a zvyšovat vodivost krystalu. Nečistoty dodávající krystalu takto slabě vázané elektrony se nazývají *donory* a příspěvek k vodivosti působený těmito uvolněnými elektrony nazýváme *vodivost typu n*.

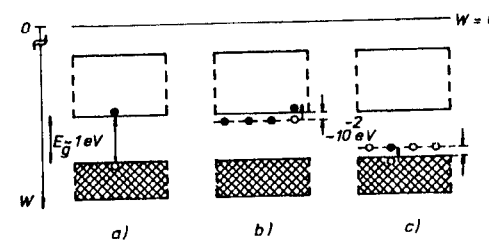
Jsou-li naopak v krystalové mřížce přítomny atomy se třemi valenčními elektrony, zůstane v místě nečistoty nezaplněna vazba jednoho elektronu k elektronům sousedních atomů křemíku. Do tohoto „volného místa“ může přeskóčit elektron z neporušené části krystalové mřížky a může v něm být po určité dobu držen. (Z atomu příměsí tím vznikne záporný iont.) V neporušené části krystalu ovšem vznikne u příslušného atomu vzhledem k chybějícímu elektronu přebytek kladného náboje, tj. podobně jako v případě vlastní vodivosti vznikne díra, která reprezentuje kladný náboj a při působení vnějšího elektrického pole (díky své pohyblivosti v objemu krystalu) může přispívat ke zvýšení vodivosti. Příměsí zachycující elektrony vlastních atomů krystalu se nazývají *akceptory* a příspěvek k vodivosti vzniklý pohybem děr nazýváme *vodivost typu p*.

Polovodič, jehož vodivost je způsobena především pohybem děr, se nazývá polovodič typu *p*. Naopak polovodič, jehož vodivost realizují především volné elektrony, se nazývá polovodič typu *n*.

Právě uvedené mechanismy vlastní a příměsové vodivosti polovodiče, které jsme vyložili jako důsledek ionizace jednotlivých atomů krystalu, je možné velmi názorně popsat pomocí pásového modelu. Situaci jednotlivých typů vodivosti schematicky znázorňuje obr. 7.26. Obrázek 7.26a se týká vlastní vodivosti. Uvolnění valenčního elektronu atomu reprezentuje jeho přechod do vodivostního pásu, k čemuž je zapotřebí energie  $E_g$ . Současně s přechodem elektronu do vodivostního pásu vznikne ve valenčním pásu díra. Vlastní vodivost polovodiče je tedy vždy realizována stejným počtem elektronů a děr.

Vliv příměsí donorového typu, které působí vodivost typu *n*, je zobrazen na obr. 7.26b. Energie donorových stavů leží zpravidla v zakázaném pásu velmi blízko „dna“ vodivostního pásu. Elektrony lokalizované na donorových stavech mohou být tudíž uvolněny a převedeny do vodivostního pásu podstatně menší energií než  $E_g$ . Donorové příměsí přispívají tedy jen k elektronové vodivosti a vytvářejí polovodiče typu *n*.<sup>61</sup>

Konečně obr. 7.26c zobrazuje vliv akceptorových příměsí. Elektronové stavy lokalizované na akceptorech mají obvykle energie ležící v zakázaném pásu, a to velmi blízko „horního okraje“ valenčního pásu. Relativně malá energie je tedy dostatečná k tomu, aby elektron byl lokalizován na akceptoru, čímž vznikne ve valenčním pásu díra. Akceptory tedy přispívají jen k děrové vodivosti a vytvářejí polovodiče typu *p*.



Obr. 7.26 Vlastní a příměsová vodivost polovodiče: a) vlastní vodivost, b) elektronová vodivost působená donory, c) děrová vodivost působená akceptory.

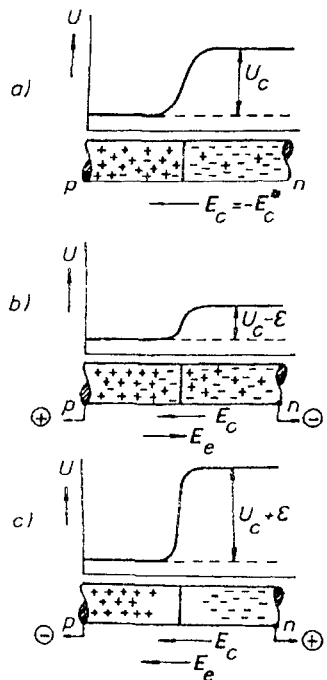
Mimofádně zajímavé a pro technické aplikace důležité vlastnosti má hraniční oblast rozdělující polovodiče typu *p* a typu *n*, nazývaná *přechodem p-n*. Všimněme si nyní jeho nejdůležitějších vlastností. Uvažujeme krystal, jehož jedna část je typu *p* a druhá typu *n* (viz obr. 7.27). V počátečním stadiu obsahuje volné elektrony pouze část *n*, zatímco díry obsahuje pouze část typu *p*. Obě části jsou elektricky neutrální, poněvadž volné elektrony kompenzují kladné náboje ionizovaných donorů a díry kompenzují záporné náboje ionizovaných akceptorů. Není však žádný důvod k předpokladu, že tento stav zůstane zachován. Naopak s ohledem na energetickou bilanci lze soudit, že (podobně jako v případě kovů – viz čl. 7.3.3) volné elektrony budou mít tendenci přecházet do části typu *p* a díry budou mít tendenci přecházet do části typu *n*. Tím se ovšem část typu *n* bude nabíjet kladně a část typu *p* záporně. Vzniklé elektrické pole  $E_C$  bude bránit přechodu dalších nositelů, takže po určité době nastane rovnovážný stav. Tento stav bude charakterizován určitou koncentrací volných elektronů v části typu *p* a určitou koncentrací děr v části typu *n* (viz obr. 7.27a). Přesto však zůstanou za tohoto rovnovážného stavu elektrony hlavními (*majoritními*) nositeli proudu v části typu *n* a díry zůstanou majoritními nositeli proudu v části typu *p*.

Sledujme nyní vodivost přechodu. Přiložme zdroj vnějšího elektromotorického napětí  $\mathcal{E}$  nejdříve kladným pólem k části typu *p*. Pak nastane situace podle obr. 7.27b. Vnější elektrické pole  $E_C$  se odečte od vlastního pole přechodu  $E_C$ ,

<sup>61</sup> Charakter příměsové vodivosti polovodiče přímo souvisí s vlastnostmi Fermiho–Diracova rozdělení a zejména s vlivem příměsí na hodnotu chemického potenciálu – srov. čl. 7.1.3.

takže další volné elektrony budou moci přecházet do části typu  $p$  a další díry do části typu  $n$ . Přejdemoteče proud. Říkáme, že vnější pole je k přechodu připojeno v *propustném směru*.

Přiložíme-li naopak vnější zdroj záporným pólem k části typu  $p$ , nastane situace znázorněná na obr. 7.27c. Pole zdroje se přičte k vnitřnímu poli přechodu, čímž budou díry vtahovány do části typu  $p$  a volné elektrony do části  $n$ . Oblast v okolí přechodu tak zůstane téměř bez nositelů proudu. Přechod  $p-n$  vede tudíž proud v tomto směru velmi špatně; říkáme, že vnější zdroj je připojen v *nepropustném směru*.



Obr. 7.27 Chování nositelů proudu v  $p-n$  přechodu: a) v nulovém elektrickém poli, b) ve vnějším elektrickém poli pólovaném v propustném směru, c) ve vnějším elektrickém poli pólovaném v nepropustném směru.

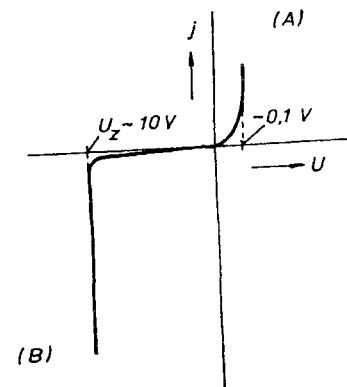
Na obrázku 7.28 je schematicky zobrazen průběh tzv. voltampérové charakteristiky přechodu  $p-n$ , což je závislost proudové hustoty  $j$  tekoucí přechodem na přiloženém napětí  $U$ . V propustném směru (A) může přechodem procházet značná proudová hustota již při napětí 0,1 V, zatímco v nepropustném směru (B) teče přechodem nepatrný proud do napětí 10 V. Zajímavý jev (tzv. *Zenerův jev*) nastane, dosáhne-li přiložené napětí v nepropustném směru určité kritické hodnoty  $U_z$  (Zenerovo napětí). Proud tekoucí přechodem počne při tomto napětí prudce vzrůstat, přičemž napětí na přechodu zůstává v podstatě konstantní na hodnotě  $U_z$ . Uvedený jev je způsoben tím, že dostatečně vysoké vnější elektrické pole může v oblasti  $p-n$  přechodu indukovat transport elektronů z valenčního do vodivostního pásu. Důsledkem je lavinovitý vzrůst koncentrace

volných nositelů proudu se vrůstajícím napětím, čímž se zvyšuje volnost přechodu.

Zmíněný lavinovitý vzrůst koncentrace volných nositelů proudu může být působen dvěma odlišnými mechanismy, které se uplatňují v různé míře u různých typů přechodu  $p-n$ . Za prvé může být průchod elektronů zakázaným pásem v oblasti přechodu  $p-n$  umožněn tzv. *tunelovým jevem*, který má čistě kvantově mechanickou povahu. Jeho uplatnění je v dané situaci podmíněno dostatečně vysokým spádem potenciálu na přechodu tak, aby horní okraj valenčního pásu v části  $p$  polovodiče byl na vyšší energii než dno vodivostního pásu v části  $n$ . Elektrony pak mohou tunelovat zakázaným pásem bez změny energie.

Druhý mechanismus spočívá v lavinovité ionizaci. Volní nositelé proudu realizující proud v nepropustném směru, interagují totiž s atomy v krystalu a při určité hodnotě elektrického pole získají energii potřebnou k jejich ionizaci, tj. k převedení dalších elektronů z valenčního do vodivostního pásu. Nehledě na různost fyzikální situace, může být tento způsob produkce volných nositelů proudu přirovnán k poměrům v plynu při nasazení doutnavého výboje (srov. čl 7.5.2).

Obr. 7.28 Voltampérová charakteristika  $p-n$  přechodu (diody).



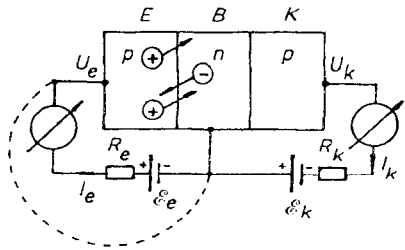
Pokud je vhodnou konstrukcí přechodu zajištěn dostatečný odvod tepla vznikajícího průchodem značného proudu, a je tedy zamezeno nadměrnému zvýšení teploty přechodu, které by mohlo způsobit nevratné změny v jeho parametrech, vrátí se poměry v přechodu po snížení napětí do původního stavu. Přechod  $p-n$  může za uvedených podmínek pracovat i v oblasti Zenerova jevu.

Z obrázku 7.28 je vidět, že proud tekoucí přechodem  $p-n$  je složitou funkcí přiloženého napětí. Přechod  $p-n$  tedy není lineárním vodičem a neplatí pro něj Ohmův zákon. Specifické vlastnosti přechodu se využívají ke konstrukci rozmanitých elektronických prvků, které jsou základem moderní polovodičové elektroniky. Prvky obsahující jeden přechod  $p-n$  se nazývají *diody*. Jejich použití je mnohostranné. Na prvním místě je třeba jmenovat použití k usměrňovacím účelům, kdy se využívá nesymetrie voltampérové charakteristiky. (Usměrnované napětí musí ovšem být menší než napětí Zenerovo.) V současné době se k usměrňování používají zejména diody germaniové a křemíkové. Přechody  $p-n$  v křemíku mají v některých ohledech výhodnější vlastnosti (mimo jiné mohou pracovat při vyšší teplotě bez nebezpečí destrukce), a jsou proto pro usměr-



novací účely používány téměř výhradně. Již na počátku tohoto článku bylo uvedeno, že vodivost polovodičů závisí značně na teplotě, neboť se změnou teploty může docházet k silným změnám koncentrace volných nositelů proudu. Snadno pochopíme, že podobný vliv mohou mít i další fyzikální podmínky, například osvětlení. Kvanty elektromagnetického záření (fotony) mohou totiž (podobně jako tepelné excitace) dodávat potřebnou energii pro tvorbu volných nositelů proudu. Víme, že vodivost přechodu  $p-n$  v nepropustném směru při osvětlení značně vzrůstá. Vhodně konstruované diody mohou být tudíž používány jednak jako detektory záření (fotodiody, fototranzistory), jednak jako optoelektronické zdroje světla (elektroluminiscenční diody, polovodičové lasery).

Vedle prvků s jedním přechodem  $p-n$  je možné konstruovat i složitější prvky obsahující větší počet přechodů. Podstatná je přitom skutečnost, že při vhodné konstrukci je možné dosáhnout vzájemného ovlivňování jednotlivých přechodů prvku, čímž vznikají kvalitativně nové možnosti využití. Historicky první a patrně nejvýznamnější je objev *tranzistorového jevu* a na něm založeného prvku – *tranzistoru*, který je tvořen polovodičovým krystalem, jehož krajní části jeví vodivost jednoho typu a střední část jeví vodivost druhého typu. Jednotlivé části jsou odděleny přechody  $p-n$ , takže tranzistor představuje vlastně dvojici diod, které se vzájemně ovlivňují.

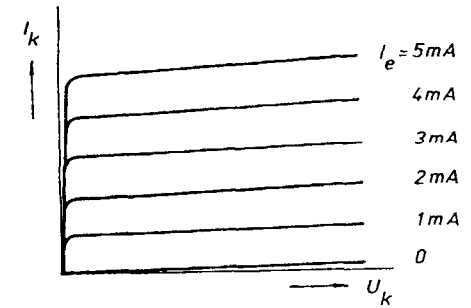


Obr. 7.29 K výkladu činnosti tranzistoru.

Na obrázku 7.29 je schematicky zobrazen tranzistor, jehož střední část je typu  $n$ . (Tento typ tranzistoru se nazývá *PNP*; tranzistor, jehož střední část je typu  $p$ , se nazývá *NPN*). K jednotlivým oblastem krystalu jsou připojeny elektrody nazývané obvykle emitor  $E$ , báze  $B$ , kolektor  $K$ .

Podle obr. 7.29 budeme kvalitativně sledovat možnost vzájemného ovlivňování obou přechodů, tj. situaci, kdy proud tekoucí jedním z nich ovlivňuje proud v druhém přechodu. Mezi bází a kolektor připojíme zdroj elektromotorického napětí  $\mathcal{E}_k$  polarizovaný v nepropustném směru a v obvodu emitoru nahradíme na chvíli zdroj  $\mathcal{E}_e$  krátkým spojením s bází (čárkovaný spoj na obrázku). V přechodu  $p-n$  mezi kolektorem a bází nastane situace, kterou vidíme na obr. 7.27c. Přechod bude zbaven téměř všech nositelů proudu a obvodem kolektoru nepoteče téměř žádný proud. Rozpojíme-li nyní krátké spojení mezi bází a emitorem a připojíme-li k emitoru zdroj  $\mathcal{E}_e$  polarizovaný v propustném směru, počne

přechodem emitor–báze protékat proud. V tomto přechodu nastane situace zobrazená na obr. 7.27b, do střední části vodiče počnou proudit díry, jak je schematicky naznačeno na obr. 7.29. Za předpokladu, že střední část krystalu je dostatečně tenká, mohou tyto díry difundovat k přechodu kolektor–báze. Tím se v něm poruší rovnovážný stav a kolektorem počne protékat proud.



Obr. 7.30 Výstupní charakteristiky tranzistoru v zapojení znázorněném na obr. 7.29.

Na obrázku 7.30 jsou uvedeny tzv. *kolektorové charakteristiky* tranzistoru, které udávají závislost kolektorového proudu  $I_k$  na kolektorovém napětí  $U_k$  pro různé hodnoty proudu emitorového  $I_e$ . Vidíme, že každá křivka vlastně představuje charakteristiku diody v nepropustném směru (samozřejmě pro  $U_k < U_Z$ ); nasycené proudy různých křivek však rostou se vzrůstem proudu  $I_e$ . Při dané hodnotě  $U_k$  kolektorového napětí je tedy kolektorový proud funkcí proudu emitorového. (Obráceně, jelikož proud v emitorovém obvodu je ovlivňován proudem kolektorovým, je možné konstruovat i emitorové charakteristiky udávající závislost emitorového proudu  $I_e$  na emitorovém napětí  $U_e$  pro různé hodnoty proudu kolektorového. Podrobněji ještě o chování tranzistoru v obvodech pojednáme v odst. 8.3.3b.)

Vhodnou konstrukcí tranzistoru lze dosáhnout toho, že malým emitorovým výkonem lze regulovat značné výkony kolektoru. Je proto možné využívat tranzistoru jako zesilovacího prvku. Vedle uvedených prvků, jako je dioda a tranzistor, je možné vlastnosti polovodičů a zejména vlastnosti přechodu  $p-n$  využívat pro konstrukci řady dalších prvků různých vlastností a kromě toho je možné využívat různé technologie přípravy  $p-n$  přechodu, čímž vznikají prvky rozdílných parametrů. Rozvoj polovodičové technologie umožňuje navíc zmenšovat rozměry jednotlivých prvků a sdružovat je ve značném počtu do integrovaných funkčních celků, které jsou při malých rozměrech a malé spotřebě energie schopné vykonávat velmi složité operace.

Kvalitativním skokem v uvedeném procesu znamenalo zavedení technologie epitaxní přípravy dokonalých polovodičových vrstev, která umožnila zhotovit tzv. *heteropřechody* (čímž se rozumí technologie přípravy dokonalého spojení dvou různých polovodičů) či *heterostruktury* (čímž se rozumí příprava několika heteropřechodů za sebou). Tato technologie znamenala nejen kvalitativní skok

v procesu miniaturizace a integrace polovodičových součástek, ale také kvalitativní skok v parametrech různých typů součástek; především vysokofrekvenčních tranzistorů, polovodičových detektorů záření, slunečních fotovoltaických článků, elektroluminiscenčních diod a polovodičových laserů.

Vlastnosti polovodičů a vlastnosti přechodu  $p-n$  se tak staly základem pro bouřlivý rozvoj elektroniky a výpočetní techniky v posledních desetiletích. Objev tranzistorového jevu je z tohoto hlediska možné považovat za jeden z nejvýznamnějších objevů fyziky 20. století. Podrobnější výklad o vlastnostech, konstrukci a použití jednotlivých typů polovodičových prvků přesahuje možnosti této učebnice. Některá nejjednodušší použití v nelineárních obvodech budou ještě vysvětlíme v kapitole 8. Pro další poučení, zejména o klasických metodách měření parametrů polovodičových prvků, odkazujeme na učebnici [5] a dále na speciálnější technickou literaturu.<sup>62</sup>

### 7.3.5 Supravodivost

Supravodivost objevil holandský fyzik H. Kammerling-Onnes v roce 1911 krátce po tom, co se mu podařilo zkapatnit helium, čímž byly vytvořeny předpoklady pro studium vlastností látek při nízkých teplotách. Kammerling-Onnes studoval teplotní závislost elektrického odporu rtuti. Zatímco při vyšších teplotách se odpor choval obvyklým způsobem (srov. obr. 7.19), přibližně při teplotě 4,2 K klesla náhle jeho hodnota téměř na nulu. Obrázek 7.31 ukazuje autentické výsledky jeho měření.<sup>63</sup>

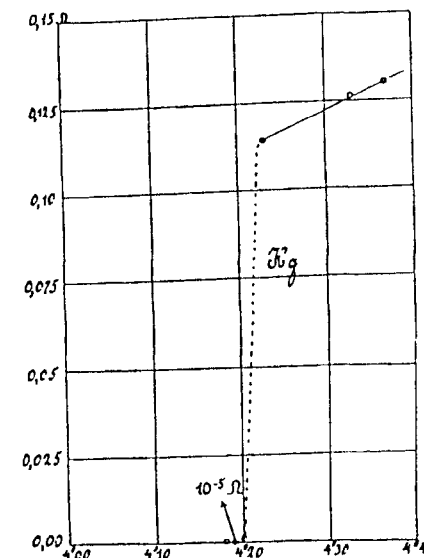
Později byla supravodivost nalezena u řady dalších látek kovového charakteru; v současné době je supravodivost známa u 26 prvků za normálního tlaku a u několika dalších za zvýšeného tlaku, kromě toho je známo mnoho set supravodivých slitin a sloučenin. Téměř nulová hodnota elektrického měrného odporu při teplotách nižších než jistá kritická teplota  $T_c$  však není jedinou významnou vlastností supravodivého stavu. Stejně významné a anomální je chování supravodičů v magnetickém poli.

Bylo zjištěno, že supravodivý stav při dané teplotě může být zrušen vnějším magnetickým polem, a rovněž, že kritická teplota  $T_c$  na magnetickém poli závisí. Při zvyšování magnetického pole kritická teplota  $T_c$  klesá. Překročil-li magnetické pole určitou, pro danou látku charakteristickou, hodnotu, látka nepřejde do supravodivého stavu při sebníží teplotě. Dále bylo zjištěno, že supravodivost prvků je zpravidla zrušena již relativně nízkým magnetickým polem, zatímco

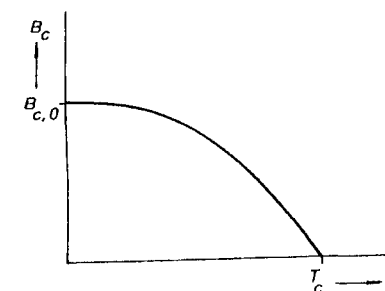
<sup>62</sup> Z české literatury doporučujeme ke studiu knihu H. Frank: Fyzika techniky polovodičů. SNTL, Praha 1990. Nejnovější poznatky o rozvoji tohoto velmi dynamického oboru lze ovšem nalézt jen v časopisecké literatuře.

<sup>63</sup> Graf na obr. 7.31 je převzat z textu přednášky H. Kammerlinga Onnese při příležitosti převzetí Nobelovy ceny za fyziku v roce 1913. Viz sborník Nobel Lectures, Physics (1901–1921). Elsevier Publ. Comp., Amsterdam 1962.

u některých slitin a intermetalických sloučenin supravodivost existuje i do značně vysokých polí. Oba typy látek v supravodivém stavu přitom mají různé magnetické vlastnosti. Typ supravodivosti vyskytující se u prvků se nazývá *supravodivostí I. typu*, supravodivost sloučenin a slitin, která se zachová i ve vysokých polích, se nazývá *supravodivostí II. typu*.



Obr. 7.31 Teplotní závislost elektrického odporu rtuti při přechodu do supravodivého stavu.



Obr. 7.32 Kvalitativní průběh teplotní závislosti kritického pole  $B_c$  pro přechod supravodiče I. typu do supravodivého stavu.

Obrázek 7.32 ukazuje teplotní závislost kritického pole  $B_c$ , při kterém látka přechází do normálního stavu, pro supravodiče I. typu. V poli vyšším než  $B_{c,0}$  nepřejde látka do supravodivého stavu při žádné teplotě. Další důležitou vlastností supravodičů I. typu je platnost tzv. *Meissnerova–Ochsenfeldova jevu*,

podle něhož je v *supravodiči dostatečně velkých rozměrů*<sup>64</sup> za každých okolností magnetická indukce nulová, tj.  $B = 0$ .

Na první pohled by se mohlo zdát, že nulovost magnetické indukce je důsledkem zákona elektromagnetické indukce v prostředí o nulovém měrném odporu. Skutečně, z Ohmova zákona  $\mathbf{E} = \rho_R \mathbf{j}$  vyplývá, že v prostředí s nulovým měrným odporem ( $\rho_R = 0$ ) musí být za předpokladu konečné proudové hustoty všude  $\mathbf{E} = 0$  a z Maxwellovy rovnice (5.5) dostáváme

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

Je-li tedy v počátečním stavu všude  $\mathbf{B} = 0$ , musí magnetická indukce zůstat nulová i nadále; při libovolných změnách vnějšího magnetického pole tyto změny indukují v *supravodiči* elektrický proud, který podle Lenzova pravidla vnější pole kompenzuje.

Zákon elektromagnetické indukce se však netýká situace, kdy je vzorek ochlazován pod kritickou teplotu v konstantním nenulovém magnetickém poli. V normálním stavu je i ve vzorku nenulová magnetická indukce, při ochlazení pod kritickou teplotu (a tedy při přechodu do *supravodivého* stavu) by zákon elektromagnetické indukce připouštěl rovněž nenulové pole uvnitř vzorku. Experiment však ukazuje, že i v takové situaci je při přechodu do *supravodivého* stavu magnetické pole z objemu vzorku vytlačeno. Pro *supravodiče* I. typu je tedy *supravodivý* stav charakterizován dvěma nezávislými podmínkami:

$$\rho_R = 0, \quad \mathbf{B} = 0 \quad (7.32)$$

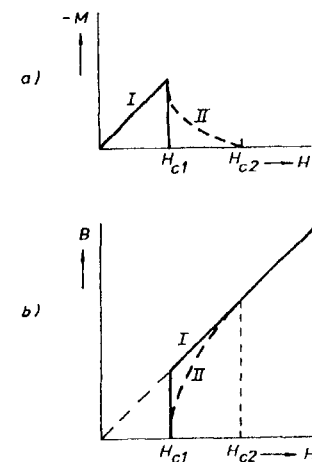
v celém objemu (s výjimkou velmi tenké povrchové vrstvy).

Z podmínky  $\mathbf{B} = 0$  pro *supravodič* I. typu vyplývá  $\mathbf{M} = -\mathbf{H}$ . Látka se tedy chová jako „ideální diamagnetikum“ s hodnotou magnetické susceptibility  $\chi_m = -1$ . Plné křivky na obr. 7.33 ukazují průběh magnetizace  $M$  a magnetické indukce v *supravodiči* I. typu, který již při poli  $H_{c1}$  přechází skokem do normálního stavu. Jiné chování jeví *supravodiče* II. typu. U těchto látek existuje ještě interval magnetických polí ( $H_{c1}, H_{c2}$ ), v němž má látka téměř nulový měrný odpor, magnetická indukce v *supravodiči* však již nemusí být nulová. Její hodnota postupně vzrůstá a magnetizace klesá, až při kritickém poli  $H_{c2}$  přejde vzorek do normálního stavu.

Podrobnější studium vlastností *supravodičů* II. typu ukázalo, že v intervalu polí ( $H_{c1}, H_{c2}$ ) není v *supravodivém* stavu celý objem vzorku. Magnetické pole

<sup>64</sup> Bylo zjištěno, že magnetické pole může vniknout jen do tenké povrchové vrstvy *supravodiče*, jejíž tloušťka je v řádu  $10^{-7}$  m. Jako dostatečně rozměrný *supravodič* musíme chápat takový vzorek, jehož všechny rozměry podstatně přesahují uvedenou hodnotu. Meissnerův-Ochsenfeldův jev reprezentuje formální analogii mezi chováním *supravodiče* v magnetickém poli a vodiče v poli elektrostatickém.

vniká do vzorku jen v určitých vláknech, která jsou v normálním stavu a jsou obklopena *supravodivým* prostředím, jež vlastně způsobuje nulový elektrický odpor. Objem látky v *supravodivém* stavu se při vzrůstajícím poli zmenšuje a při poli  $H_{c2}$  se stává nulovým. Elektrický odpor v tomto okamžiku vzroste na normální hodnotu.



Obr. 7.33 Chování *supravodiče* I. a II. typu v magnetickém poli: a) závislost magnetizace  $M$  na intenzitě magnetického pole  $H$ , b) závislost magnetické indukce  $B$  v *supravodiči* na  $H$ .

Díky tomu, že *supravodivý* stav v *supravodičích* II. typu může existovat do značně vysokých magnetických polí, mají především tyto látky technický význam pro vedení velkých proudů bez ztrát jouleovým teplem. V nejlepších dosud připravených kovových *supravodičích* může proudová hustota dosahovat hodnot v řádu  $10^9$  A.m<sup>-2</sup>, což je přibližně o tři řády více, než je možné v normálních vodičích.

Tabulka 7.9 Kritické teploty a kritické pole vybraných *supravodičů*

prvky ( <i>supravodiče</i> I. typu)			sloučeniny, slitiny ( <i>supravodiče</i> II. typu)		
látka	$T_c$ (K)	$B_c$ (T) pro $T = 0$ K	látka	$T_c$ (K)	$B_c$ (T) pro $T = 4,2$ K
rtuť (Hg)	4,154	$4,11 \cdot 10^{-2}$	Nb <sub>3</sub> Sn	18–18,3	22,5–23,5
hliník (Al)	1,175	$1,04 \cdot 10^{-2}$	Nb <sub>3</sub> Al	18,7	29,5
olovo (Pb)	7,196	$8,03 \cdot 10^{-2}$	Nb <sub>3</sub> Al <sub>0,75</sub> Gc <sub>0,25</sub>	18,5	42
cín (Sn)	3,722	$3,05 \cdot 10^{-2}$	Nb <sub>3</sub> Gc	23,2	
kadmium (Cd)	0,517	$2,80 \cdot 10^{-3}$	Nb-Zr	9–11	6–9
vanad (V)	5,40	$1,41 \cdot 10^{-1}$	Nb-Ti	8–10	9–12
zinek (Zn)	0,85	$5,30 \cdot 10^{-3}$			
niob (Nb)	9,25	$2,06 \cdot 10^{-1}$			

V tabulce 7.9 jsou pro ilustraci uvedeny kritické teploty a kritická pole pro několik kovových supravodičů I. a II. typu. Rekordní kritická teplota  $T_c = 23,2$  K, která je již nad bodem varu vodíku (20,4 K), byla u těchto supravodičů dosažena v případě  $Nb_3Ge$ .

V roce 1986 objevili pracovníci laboratoří firmy IBM v Curichu K. A. Müller a J. G. Bednorz jistý druh supravodivosti u látek zcela jiného typu, a to u keramických materiálů se strukturou minerálů zvaných perovskity. Kritické teploty některých těchto látek bohatě přesahují bod varu dusíku (77,3 K); například u materiálu o složení  $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$  byla spolehlivě prokázána kritická teplota 134 K. Experimenty ukazují že jde o supravodiče II. typu, jejichž kritické pole  $H_{c2}$  i kritická hustota supravodivého proudu mohou dosahovat značně vysokých hodnot. V případě, že by se podařilo připravit dobře technicky využitelné materiály tohoto typu, mohl by zmíněný objev, dnes běžně nazývaný *vysokeplotní supravodivost*, způsobit revoluci v mnoha odvětvích techniky. Více než desetiletý intenzivní výzkum však dosud nevedl k jeho významnějšímu praktickému uplatnění.

Plného pochopení fyzikální podstaty supravodivého stavu klasických kovových supravodičů bylo dosaženo až téměř za půl století po jeho objevu. V třicátých letech byla vypracována Londonova fenomenologická teorie, reprezentovaná tzv. *Londonovými rovnicemi*, jež dovolují fenomenologický popis chování supravodičů I. typu. Pozdější *Ginzburgova-Landauova teorie* umožnila vysvětlit i chování supravodičů II. typu, plně pochopení podstaty supravodivosti však přinesla teprve kvantová mikroskopická teorie, kterou v roce 1957 vypracovali J. Bardeen, L. N. Cooper a J. R. Schriiffer. Takzvaná *BCS teorie* patří bezesporu k největším úspěchům teoretické fyziky 20. století.

Podstatou supravodivosti je vznik dvojice vzájemně vázaných vodivostních elektronů, tzv. *Cooperových párů*, které se mohou v kovu tvořit při dostatečně nízkých teplotách díky elektrické interakci elektronů s krystalovou mřížkou. Elektrická interakce vodivostního elektronu s krystalovou mřížkou může totiž v jeho okolí ovlivnit spektrum kmitů krystalové mřížky, čímž může vzniknout energeticky výhodná situace pro zachycení jiného vodivostního elektronu s opačným momentem hybnosti. Energie vazby elektronů v tomto páru je velmi malá; řádu  $10^{-4}$  eV. Přesto se mohou oba elektrony v krystalu korelovaně pohybovat, přičemž je podstatné, že pár jako celek má nulový vlastní moment hybnosti, takže pro něj neplatí Pauliho princip a korelace zůstává zachována na vzdálenostech mnohem větších, než je mřížková konstanta krystalu. Nehomogenity v periodicitě krystalové mřížky pak přestanou znatelně ovlivňovat pohyb elektronů vázaných v Cooperových párech.

Párování nositelů proudu do útvarů s nulovým vlastním momentem hybnosti je nepochybně základní podmínkou pro vznik jakékoliv supravodivosti. Dnes je však již zřejmé, teorie BCS ve své klasické podobě není schopna vyložit vysokoteplotní supravodivost.

V roce 1962 předpověděl B. Josephson, že korelace v pohybu elektronů může zůstat zachována i v případě, kdy dvě části supravodiče jsou odděleny tenkou vrstvou nevodíče. Předpověděl tak existenci jevů, dnes nazývaných *Josephsonovými jevy* (respektive *slabou supravodivostí*), na jejichž základě vznikly nové měřicí metody elektrického napětí a magnetického toku, které umožnily o mnoho řádů zvýšit citlivost a přesnost měření těchto veličin ve srovnání s metodami tradičními.<sup>65</sup>

<sup>65</sup> Pro podrobnější obecné poučení o problematice supravodivosti doporučujeme publikaci R. S. Šafrata a kol.: *Fyzika nízkých teplot*. Matfyzpress, Praha 1998; pro poučení o využití Josephsonova jevu k metrologickým účelům doporučujeme knihu [2] (J. Brož, V. Roskovec: *Základní fyzikální konstanty*. SPN, Praha 1988).

### 7.3.6 Elektronová emise

Experimentální zkušenost ukazuje, že za určitých podmínek mohou z povrchu kovů (ale i polovodičů) vystupovat volné elektrony. Podmínkou pro vznik tohoto jevu, který se nazývá *elektronová emise*, je získání dostatečně vysoké energie. Tato energie bude zřejmě dána rozdílem mezi energií volného elektronu ve vakuu a energií volných elektronů v látce, která může být v prvním přiblížení charakterizována polohou Fermiho hladiny. Podle obr. 7.25 v článku 7.3.3 je tato energie rovna  $e\phi$  a nazývá se *výstupní prací*.

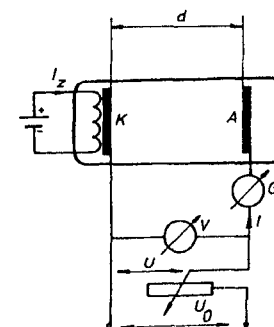
Existuje několik mechanismů jak získat energii potřebnou pro uvolnění elektronu z pevné látky. Podle typu tohoto mechanismu rozeznáváme různé druhy elektronové emise:

*Termickou emisí* (termoemisi), která nastává při dostatečném zvýšení teploty dané látky, kdy je dostatečný počet elektronů excitován tepelným pohybem.

*Fotoemisi* vznikající při ozáření látky elektromagnetickým, především krátkovlnným (viditelným, ultrafialovým, rentgenovým) zářením. Potřebná energie je elektronům dodávána interakcí s fotony.

*Autoemisi*, ta zahrnuje „vytrhování“ volných elektronů z látky vnějším magnetickým polem. Vzniká při přiložení elektrického pole dostatečné intenzity k povrchu látky. (Efekt je obvykle pozorovatelný při intenzitách vyšších než  $10^7$  V.m<sup>-1</sup>.)

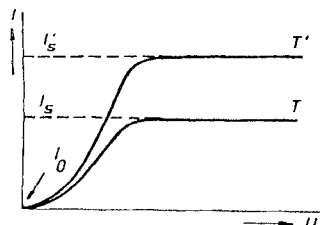
*Sekundární emisí*, jež je vyvolána dopadem dostatečně rychlých elektronů (eventuálně jiných hmotných částic) na povrch sledované látky; tyto částice pak mohou předat svoji energii elektronům ve vodivostním pásu.



Obr. 7.34 Princip experimentálního uspořádání pro pozorování termoemise elektronů.

Všechny uvedené typy emise elektronů mají v dnešní době své uplatnění v různých technických aplikacích. Jelikož se však nejčastěji setkáme s termoemisí a fotoemisí, všimneme si jejich vlastností poněkud podrobněji. Termoemisi lze pozorovat v uspořádání, které je schematicky znázorněno na obr. 7.34.

V evakuované baňce jsou umístěny dvě elektrody. Elektroda  $K$  (zvaná katoda), která je zhotovena z materiálu, jehož emisi zkoumáme, je připojena k zápornému pólu zdroje napětí  $U_0$ . Druhá elektroda  $A$  (anoda) je přes vhodný přístroj (klasicky přes galvanometr) umožňující měřit emisní proud připojena k jeho kladnému pólu. Katoda je udržována na žádomcí teplotě  $T$ , například prostřednictvím tepelného kontaktu s topnou spirálou vytápěnou pomocným proudem  $I_z$ . Pro jednoduchost předpokládáme, že obě elektrody jsou rovinné, mají plochu  $S$  a jsou vzájemně rovnoběžné.



Obr. 7.35 Napěťová závislost emisního proudu při různých teplotách katody  $T' > T$ .

Budeme-li v popsaném uspořádání měřit při dané konstantní teplotě katody závislost emisního proudu  $I$  na přiloženém napětí  $U$ , dostaneme závislost uvedenou na obr. 7.35. Proud, jehož hodnota není zcela nulová při  $U = 0$ , bude se vzrůstajícím napětím nejdříve vzrůstat a po dosažení určité nasycené hodnoty  $I_s$  nebude již dále na napětí závislý. Hodnota proudu v nenasycené oblasti není určena vlastnostmi materiálu katody. Zákonitosti určující jeho průběh v závislosti na napětí budeme studovat v následujícím článku. Nasycená hodnota protékajícího proudu je naopak určena materiálem katody a její teplotou. Při zvýšení teploty katody na hodnotu  $T'$  naměříme novou křivku podobného průběhu s vyšší hodnotou nasyceného proudu.

Vlastnosti nasyceného emisního proudu lze popsat tzv. *Richardsonovým–Dushmanovým vztahem*, který lze odvodit na základě modelu elektronového plynu, pro jehož rozdělení energie použijeme Fermiho–Diracovo rozdělení. Pak je možné vypočítat četnost elektronů ve vodivostním pásu, které mají dostatečnou energii pro opuštění látky, a tedy i hustotu emisního proudu. Richardsonův–Dushmanův vztah vyjadřuje hustotu nasyceného emisního proudu  $j_s$  jako funkci teploty  $T$  a výstupní práce  $e\phi$  daného materiálu. Platí

$$j_s = AT^2 \exp\left(-\frac{e\phi}{k_B T}\right), \quad (7.33)$$

kde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta. Pro veličinu  $A$  vyplývá z teorie, že by měla být téměř stejná pro všechny látky a blízká hodnotě  $1,2 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ . Ve skutečnosti je však nutné ji určovat pro jednotlivé látky experimentálně z naměřené teplotní závislosti emisního proudu.

Fotoemisi lze pozorovat v principiálně stejném uspořádání. Katoda, která je zdrojem emitovaných elektronů (srov. obr. 7.34), není ovšem zhavena, musí však být uzpůsobena tak, aby bylo možné její povrch přilehlý k anodě ozařovat

žádaným elektromagnetickým zářením. Pro vyšetřování vlastností fotoemise je rovněž žádomcí možnost změny polaritě napětí zdroje  $U_0$ .

Při kladné polaritě anody vůči katodě, tj. ve stejném uspořádání jako při měření napěťové závislosti emisního proudu termoemise, bude mít napěťová závislost emisního proudu (při konstantní intenzitě záření) kvalitativně stejný průběh jako v případě termoemise (srov. obr. 7.35); hodnota nasyceného emisního proudu bude přitom vzrůstat s rostoucí intenzitou záření dopadajícího na katodu.

Velmi zajímavé a důležité je studium závislosti emisního proudu na vlnové délce a frekvenci dopadajícího záření, tj. měření napěťové závislosti emisního proudu při osvětlení monochromatickým zářením. Při měření především zjistíme, že při záření o větší vlnové délce, než je jistá kritická hodnota  $\lambda_0 = c/\nu_0$ ,  $\nu_0 = \omega/2\pi$ , fotoemise vůbec nenastává. Další zajímavou vlastnost lze zjistit měřením napěťové závislosti emisního proudu v opačné polaritě (tj. s kladným pólem zdroje připojeným k fotokatodě a záporným pólem připojeným k anodě); s rostoucími napětími proud klesá, přičemž klesne na nulu při určité hodnotě napětí závislé na vlnové délce (frekvenci) použitého záření. Budeme-li měřit  $U_{g,\omega}$  pro záření různých vlnových délek, zjistíme přímou úměrnost mezi  $U_{g,\lambda}$  a  $\omega$ .

Uvedené vlastnosti fotoemise lze snadno vysvětlit pomocí předpokladu, že dopadající foton předá veškerou svoji energii  $E_f = h\omega$  emitovanému elektronu. Předpokládáme-li dále zachování energie při srážce fotonu s elektronem, dostaneme pro energetickou bilanci podmínku (Einsteinův vztah)

$$h\omega = e\phi + E_k, \quad (7.34)$$

podle níž se předaná energie spotřebuje na výstupní práci a zbytek bude tvořit kinetickou energii  $E_k = m_e v^2/2$  emitovaného elektronu. Podle podmínky (7.34) je pak zřejmé, že fotony o energii menší než výstupní práce  $h\omega < e\phi$  nemohou emisi vyvolat. Fotoemise nastává při prahové frekvenci  $\omega_0$

$$h\omega_0 = e\phi. \quad (7.35)$$

Při nulovém nebo malém záporném napětí mezi katodou a anodou teče obvodem jistý emisní proud díky nenulové kinetické energii emitovaných elektronů. Proud klesne na nulu, budou-li emitované elektrony zcela zbržděny přiloženým napětím, tj. bude-li platit  $E_k = eU_{g,\omega}$ . Z (7.34) lze potom získat závislost  $U_{k,\omega}$  na frekvenci  $\omega$

$$U_{k,\omega} = \frac{h}{e}\omega - \phi. \quad (7.36)$$

Vidíme, že závislost je skutečně lineární. Na základě měření  $U_{k,\omega}$  pro několik frekvencí lze z (7.36) určit poměr  $h/e$  a i výstupní práci použitého materiálu katody.

Jev elektronové emise se stal základem klasické vakuové elektroniky, která si přes bouřlivý rozvoj polovodičové elektroniky stále zachovává svůj význam. Kromě toho v historii fyziky jev elektronové emise významně přispěl k rozvoji poznání mikrostruktury látek a k formulování základních postulátů kvantové

mechaniky. Speciálně termoemise i fotoemise dávají dobré možnosti pro měření výstupní práce elektronů v různých typech látek. V tabulce 7.10 jsou pro informaci uvedeny některé hodnoty získané oběma metodami.

Tabulka 7.10 Výstupní práce elektronů některých kovů

termoemise		fotoemise	
emitujiící látka	$e\varphi$ (eV)	emitujiící látka	$e\varphi$ (eV)
Ag	4,8	Ag	4,3
Cs	2,1	Al	4,2
Ni	4,6	Cs	1,8
Pt	5,3	Ni	5,0
Ta	4,2	Ta	4,1
W	4,5	W	4,5

### 7.3.7 Nenasycený emisní proud, princip elektronky

Nyní obrátíme pozornost na studium zákonitostí emisního proudu v nenasyceném stavu. V předchozím článku jsme viděli, že zatímco nasycený emisní proud je dán výhradně emisními schopnostmi katody, proud při nižších napětích je zřejmě dán podmínkami jiného druhu. Pro nalezení těchto podmínek se vrátíme k experimentálnímu uspořádání podle obr. 7.34, s kladnou polaritou zdroje na anodě.

Uspořádání s rovinnými elektrodami umožňuje řešit úlohu jako rovinný problém. Položme osy  $y, z$  souřadné soustavy do roviny katody a osu  $x$  volme tak, aby její kladný směr mířil k anodě. V ustáleném stavu, kdy obvodem teče stacionární proud, musí vzhledem k rovnici kontinuity proudu existovat i v prostoru mezi elektrodami stacionární rozložení hustoty konvekčního proudu. Jelikož záporně nabitě elektrony proudí od katody k anodě, platí pro ni  $\mathbf{j} \equiv (-j, 0, 0)$ ,  $j = |\mathbf{j}| > 0$ . Podle (3.11) je možné hustotu  $\mathbf{j}$  vyjádřit pomocí rychlosti elektronů  $\mathbf{v}$  a pomocí objemové hustoty jejich náboje  $\rho$ ;  $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ . Obecně je nutné předpokládat, že obě tyto veličiny jsou funkcí souřadnice  $x$ .

V prostoru mezi katodou a anodou existuje elektrické pole, které je dáno jednak napětím  $U$  přiloženým na elektrody, jednak prostorovým rozložením elektronů. Potenciál tohoto pole je rovněž funkcí souřadnice  $x$  a musí vyhovovat Poissonově rovnici

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

Předpokládejme, že elektrony vystupují z katody s nulovou rychlostí, takže platí  $v(0) = 0$ . Ve vzdálenosti  $x$  od katody bude jejich rychlost  $v(x)$  určena rovností mezi potenciální a kinetickou energií. Budeme-li povrch katody považovat za hladinu o nulovém potenciálu  $\varphi(0) = 0$ , můžeme napsat  $v(x) = \sqrt{2e\varphi(x)/m}$ . Po dosazení do (7.37) dostaneme pro potenciál diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -\frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} (\varphi(x))^{-1/2}. \quad (7.38)$$

Jelikož jde o diferenciální rovnici druhého řádu, je nutné pro nalezení jejího partikulárního řešení předepsat okrajovou podmínku nejen pro hodnotu potenciálu, ale také pro hodnotu jeho derivace. Kromě  $\varphi(0) = 0$  budeme požadovat  $(d\varphi/dx)_{x=0} = 0$  (později tuto podmínku fyzikálně zdůvodníme). Potom, vynásobíme-li rovnici (7.38) derivací  $d\varphi/dx$ , můžeme její první integrál psát ve tvaru

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \int_0^{\varphi(x)} \varphi^{-1/2} d\varphi = \frac{j}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \sqrt{\varphi(x)}. \quad (7.39)$$

Tuto rovnici lze již integrovat separací proměnných

$$\varphi(x) = \left( \frac{9j}{4\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \right)^{2/3} x^{4/3}. \quad (7.40)$$

Speciálně pro  $x = d$  platí  $\varphi(d) = U$  a

$$j = \frac{4\epsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U^{3/2}. \quad (7.41)$$

Proudová hustota  $j$ , a tedy i proud v obvodu jsou úměrné  $U^{3/2}$ . Tento výsledek, zvaný někdy *Langmuirův třípolovinový vztah*, platí ovšem pouze za předpokladu, že je splněna podmínka  $(d\varphi/dx)_{x=0} = 0$ , která požaduje nulovost intenzity pole povrchu katody. Podmínka může být zřejmě splněna pouze za předpokladu, že v prostoru mezi anodou a katodou existuje prostorový náboj elektronů dostatečné velké hustoty  $\rho(x)$ . (Kdyby tento náboj neexistoval, bylo by v celém prostoru mezi elektrodami homogenní pole o intenzitě  $E_0 = U/d$ .) Je dokonce nutné, aby se vzrůstající hodnotou přiloženého napětí hustota prostorového náboje v daném bodě vzrůstala. To je však možné jen tehdy, je-li proud tekoucí obvodem menší než emisní schopnost katody, tj. menší než nasycený proud  $I_s$ .

Podmínka  $(d\varphi/dx)_{x=0} = 0$  vyjadřuje rovnovážný stav mezi elektrony uvnitř katody a elektronovým oblakem v prostoru mezi katodou a anodou. Je nutná pro existenci stacionárního proudu. Kdyby totiž při dané hustotě proudu  $j$  bylo  $(d\varphi/dx)_{x=0} = -E(0) < 0$ , elektrony, které podle předpokladu vystupují z katody s nulovou rychlostí, by tímto polem byly vráceny zpět na katodu a proud obvodem by musel nutně klesat. Obráceně, kdyby platilo  $(d\varphi/dx)_{x=0} = -E(0) > 0$ , byly by z katody odváděny další elektrony a proud obvodem by stoupal tak dlouho, dokud by se plně nevyužilo emisní schopnosti katody.

Uspořádání podle obr. 7.34 reprezentuje vlastně nejjednodušší typ elektronky (diody), která se, jak známo, nejčastěji užívala k usměrňování střídavého napětí. Zařazením dalších elektrod do blízkosti katody je možné získat další typy elektronek. Například umístíme-li do blízkosti katody jednu elektrodu (tzv. *mřížku*) ve tvaru kovové síťky, která umožňuje průlet elektronů, získáme triodu. Napětím přivedeným z vnějšího zdroje na mřížku lze řídit prostorový náboj elektronů, a tedy i proud elektronkou. Tvar charakteristik uvedený na obr. 7.35 bude tedy v nenasyceném stavu záviset na napětí mřížky. Vzhledem k tomu, že malými změnami mřížkového napětí je možné získat značné změny proudu elektronkou, je elektronku možné použít například k zesilování malých časově proměnných napětí.

Přidáním dalších mřížek je možné získat složitější typy elektronek (tetrodu, pentodu a další), které mají pro jednotlivá použití výhodnější vlastnosti. Blíže se však již elektronkami zabývat nebudeme a odkazujeme na starší učebnici [5].

## 7.4 Vedení proudu v kapalinách

### 7.4.1 Měrná a molární vodivost roztoků

V kapalném skupenství mohou existovat jednak „čisté“ látky, tj. látky o jedné složce, jednak roztoky. Některé čisté látky v kapalném skupenství (především kovy) jeví elektronovou vodivost, u většiny kapalin (hlavně u roztoků) se však projevuje vodivost iontová.

Elektronovou vodivost kapalin se zabývat nebudeme. Pozornost obrátíme především na iontovou vodivost roztoků. Je známa skutečnost, že většina skutečně čistých rozpouštědel (voda, alkohol, benzen a další) jsou velmi špatnými vodiči. V některých případech však stačí rozpustit nepatrné množství vhodné látky, aby vodivost vzrostla o několik řádů. V tabulce 7.11 uvádíme některé typické příklady.

Tabulka 7.11 Příklady měrné vodivosti vybraných roztoků

látky	měrná vodivost ( $\Omega \cdot m$ ) <sup>-1</sup>	teplota (K)
voda (H <sub>2</sub> O)	$4 \cdot 10^{-6}$	300
kyselina chlorovodíková (HCl)	$1 \cdot 10^{-6}$	300
tetrachlormetan (CCl <sub>4</sub> )	$4 \cdot 10^{-16}$	300
vodný roztok HCl ( $10^{-4}$ mol/litr)	$4 \cdot 10^3$	300
vodný roztok HNO <sub>3</sub> ( $3 \cdot 10^{-4}$ mol/litr)	$1 \cdot 10^{-2}$	300

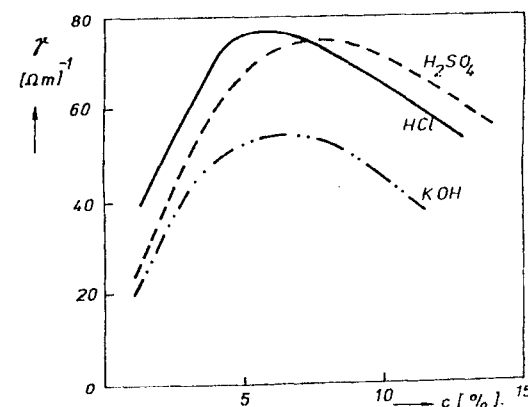
Látky, jejichž roztoky vedou elektrický proud, se nazývají *elektrolyty*. (Někdy se také elektrolytem rozumí příslušný vodivý roztok.) Zkušenost ukázala, že některé látky zvyšují vodivost značně, zatímco jiné velmi málo. Látky prvního typu se nazývají *silné elektrolyty*, látky druhého typu *slabé elektrolyty*. Mezi

silné elektrolyty se řadí především soli anorganických i organických kyselin, a dále většina anorganických kyselin a zásad (HCl, H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, HNO<sub>3</sub>, KOH, NaOH a jiné). Reprezentanty slabých elektrolytů jsou některé organické kyseliny (kyselina octová, kyselina mravenčí a další) a některé anorganické kyseliny a zásady (kyselina boritá, amoniak apod.). Kromě elektrolytů existují ovšem látky, které vodivost roztoků nezvyšují. Jako příklad tohoto druhu můžeme uvést vodný roztok alkoholu.

Zařazení dané látky do určité skupiny elektrolytů není ovšem absolutní; má smysl pouze ve vztahu k určitému rozpouštědлу. Výsledky experimentů totiž ukazují, že roztoky získané rozpouštěním stejného množství určité látky v různých rozpouštědlech mohou mít značně rozdílné vodivosti. Experimenty dále ukazují, že rozhodujícím kritériem schopnosti rozpouštědla vytvářet vodivé roztoky je jeho permitivita. Schopnost vytvářet vodivé roztoky roste s rostoucí permitivitou. Například voda ( $\epsilon_r = 80$ ) má vysokou schopnost vytvářet vodivé roztoky, zatímco benzen C<sub>6</sub>H<sub>6</sub> ( $\epsilon_r = 2,3$ ) v podstatě vodivé roztoky nevytváří. Jelikož vodné roztoky patří k nejběžnějším a nejvíce prozkoumaným, budeme se nadále zabývat především jimi.

Uvedené základní experimentální údaje o vzniku vodivosti roztoků a zejména vlastnosti elektrolyzy, o níž bude řeč v následujícím článku, vedou k závěru, že nositele proudu v roztocích elektrolytů tvoří ionty elektrolytu. Je proto nutné předpokládat, že alespoň některé molekuly elektrolytu se v roztoku mohou rozštěpit na kladné ionty (kationty) a na záporné ionty (anionty). Toto štěpení molekul se nazývá *elektrolytickou disociací*. Studium vodivosti roztoků představuje jeden z velmi důležitých způsobů zkoumání jejich zákonitostí.

Měrná vodivost roztoků silně závisí na koncentraci. V oboru malých koncentrací vodivost s jejím zvyšováním vzrůstá, po dosažení určitého maxima pak dále klesá. Na obrázku 7.36 jsou uvedeny některé konkrétní výsledky.



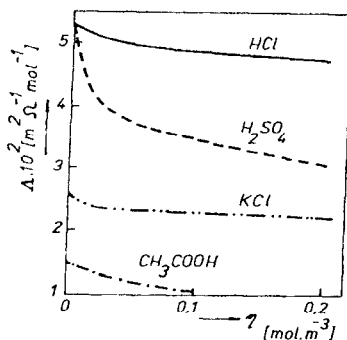
Obr. 7.36 Koncentrační závislost měrné vodivosti vodných roztoků některých elektrolytů.

Kromě měrné vodivosti se pro posuzování vlastností roztoků užívá tzv. *molární vodivost*, která číselně vyjadřuje měrnou vodivost roztoku, v němž na jednotkový objem připadá jeden mol částic realizujících vodivost. Označíme-li  $\eta$  molární koncentraci roztoku, tj. počet molů částic realizujících vodivost připadajících na  $1 \text{ m}^3$  roztoku, bude mezi měrnou vodivostí  $\gamma$  a molární vodivostí  $\Lambda$  platit vztah

$$\Lambda = \frac{\gamma}{\eta} \quad (7.42)$$

Jednotkou molární vodivosti je tedy  $(\Omega^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1})$ . Je třeba mít na paměti, že při udání molární vodivosti musí být vždy (například chemickým vzorcem) specifikován druh částic, na jejichž jednotkovou molární koncentraci se vodivost vztahuje. Nejběžnější je vztahovat molární vodivost na jednotkovou molární koncentraci chemických ekvivalentů.<sup>66</sup>

Z definice molární vodivosti vyplývá, že by neměla být závislá na koncentraci roztoku, kdyby podíl všech molekul elektrolytu na vodivosti roztoku byl na koncentraci nezávislý. Jak je však vidět z obr. 7.37, který uvádí experimentálně



Obr. 7.37 Koncentrační závislost molární vodivosti vodných roztoků některých elektrolytů.

zjištěné koncentrační závislosti  $\Lambda$  pro některé látky, molární vodivost s rostoucí koncentrací roztoku ve skutečnosti vždy klesá. Tato skutečnost může být v principu vysvětlena dvěma příčinami. Jednak se může se změnou koncentrace měnit stupeň disociace elektrolytu, jednak může na koncentraci záviset schop-

<sup>66</sup> Chemickým ekvivalentem  $G$  se rozumí formální z-tý díl molekuly nebo jiné uvažované částice, kde  $z$  je buď počet přijatých, nebo odevzdaných elektronů v dané oxidačně redukční reakci, nebo udává celkový počet elementárních nábojů kationtů vyměněných touto molekulou (částicí) v reakci jiného typu. Dříve se číslo  $z$  zjednodušeně nazývalo *valencí*. Pro jeden mol chemických ekvivalentů se dříve užívala jednotka jeden *val*. Například jeden mol chemických ekvivalentů (*val*) kyseliny chlorovodíkové HCl je totožný s molem HCl, neboť v reakcích s HCl se nahrazuje pouze jeden atom vodíku. Naproti tomu v případě kyseliny sírové H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> v reakcích, v nichž se nahrazují oba vodíkové atomy, je jeden mol chemických ekvivalentů (*val*) H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> roven polovině molu H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>. Molární vodivost vztahovaná na jednotkovou molární koncentraci chemických ekvivalentů se dříve nazývala *ekvivalentová vodivost*.

nost pohybu nositelů proudu. Ve skutečnosti se uplatňují oba mechanismy. První z nich nabývá převahy u slabých elektrolytů (zejména v oboru nízkých koncentrací), druhý se naopak uplatňuje především u elektrolytů silných. V článku 7.6.6 bude ještě těmto otázkám věnována pozornost.

Pro studium fyzikálně chemických vlastností roztoků je důležitou veličinou hodnota molární vodivosti  $\Lambda_{\infty}$  získaná extrapolací k nulové koncentraci. (Z historických důvodů se někdy nazývá *molární vodivostí při nekonečném zředění*.) Její význam spočívá v tom, že vyjadřuje schopnost jednoho molu daných částic vést proud v situaci, kdy lze zanedbat jejich vzájemnou interakci.

Je-li vodivost roztoku elektrolytu realizována několika typy iontů, je výsledná molární vodivost při nekonečném zředění rovna součtu molárních vodivostí realizovaných jednotlivými ionty. Tento poznatek vyjadřuje aditivnost molární vodivosti při nekonečném zředění. Byl formulován F. W. Kohlrauschem (v r. 1873) na základě výsledků jeho velmi systematických a přesných experimentů. Nazývá se proto *Kohlrauschovým zákonem*, někdy také zákonem nezávislého pohybu nositelů proudu v roztoku. Jestliže tedy v daném roztoku dva druhy nosičů proudu  $A$  a  $B$  vytvářejí molární vodivosti při nekonečném zředění  $\Lambda_{\infty,A}$  a  $\Lambda_{\infty,B}$  je podle Kohlrauschova zákona výsledná molární vodivost roztoku při nekonečném zředění  $\Lambda_{\infty}$  rovna

$$\Lambda_{\infty} = \Lambda_{\infty,A} + \Lambda_{\infty,B} \quad (7.43)$$

#### 7.4.2 Elektrolyza, Faradayovy zákony

Nyní budeme věnovat pozornost jevům, které vždy doprovází průchod proudu v látkách, má-li jejich vodivost iontový charakter. Tyto jevy, nazývané *elektrolýzou*, spočívají v chemických změnách v roztoku a na elektrodách, nastávajících při průchodu proudu. Elektrolyza může mít různé konkrétní formy závislé na materiálu elektrod a na typu elektrolytu. Tyto formy jsou podmíněny povahou fyzikálně chemických procesů probíhajících při styku elektrod s elektrolytem (rozpuštění materiálu elektrod, vylučování látek na elektrodách, různých chemických reakcí apod.). Konkrétní projevy vzájemné interakce mezi roztokem a elektrodami nás však budou zajímat až v příštím článku, kdy se budeme zabývat elektrochemickými procesy nehomogenních soustav. Nyní se omezíme pouze na formulování kvantitativního vztahu pro množství látky přenesené roztokem k určité elektrodě při průchodu proudu.

Tyto vztahy jsou vyjádřeny známými Faradayovými zákony elektrolyzy. *První Faradayův zákon* říká, že v případě, kdy se na uvažované elektrodě vylučuje pouze jediný druh látky, je její množství  $M$  úměrné prošlému náboji  $Q$

$$M = A_F Q \quad (7.44)$$



Konstanta úměrnosti  $A_F$ , charakteristická pro danou látku, se nazývá jejím *elektrochemickým ekvivalentem*. V soustavě jednotek SI bude elektrochemický ekvivalent vyjádřen v kilogramech na coulomb (kg. C<sup>-1</sup>).

*Druhý Faradayův zákon* vyjadřuje souvislost mezi množstvím různých látek vyloučených stejným nábojem  $Q$ . Jestliže dvěma roztoky různých elektrolytů projde též elektrický náboj  $Q$ , bude poměr množství látek  $M_A, M_B$ , vyloučených na příslušných elektrodách, roven poměru jejich chemických ekvivalentů  $G_A, G_B$ . Tedy

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{G_A}{G_B}. \quad (7.45)$$

Ze vztahu (7.45) vyplývá, že k vyloučení jednoho molu chemických ekvivalentů libovolné látky je zapotřebí vždy stejný náboj  $F$ , který se nazývá *Faradayovým nábojem*, (někdy též, *Faradayovou konstantou*). Jeho hodnotu, která má bezprostřední vztah k hodnotě Avogadrovy konstanty (viz. čl. 7.6.6), je třeba určit měřením. Dnes užívanou hodnotou je  $F = 96\,485,3415(39)$  C.mol<sup>-1</sup> (viz Dodatek 2). Náboj procházející roztokem je zpravidla přenášen jak anionty, tak kationty. Pro studium chování jednotlivých typů iontů je užitečné znát podíl, kterým se na přenesení celkového náboje  $Q$  podílejí. Tento podíl se nejčastěji vyjadřuje relativně pomocí tzv. *Hittorfových převodních čísel*. Předpokládejme, že z celkového náboje velikosti  $Q$  prošlého roztokem byla část  $Q_A$  přenesena kationty a část  $Q_K$  přenesena anionty. Hittorfova převodní čísla aniontů a kationtů  $t_A, t_K$  jsou pak definována vztahy

$$t_A = \frac{Q_A}{Q}, \quad t_K = \frac{Q_K}{Q}. \quad (7.46)$$

Jelikož je ovšem  $Q = Q_A + Q_K$ , platí  $t_A + t_K = 1$ . Hittorfova převodní čísla jsou důležitými veličinami při studiu pohyblivosti iontů. Lze je určit měřením ze změn koncentrace elektrolytu v blízkosti elektrod, popřípadě z pohybu rozhraní mezi dvěma elektrolyty při průchodu proudem. Otázky tohoto druhu budou studovány v článku 7.6.6.

### 7.4.3 Elektrochemické procesy na elektrodách – elektrodové potenciály, galvanické články

V tomto článku si krátce všimneme jevů, které nastávají v nehomogenních soustavách. Zejména budeme studovat elektrochemické procesy na povrchu elektrod ponořených do roztoku elektrolytu, které jsou doprovázeny působením vtištěných sil mezi elektrodou a roztokem.

Existence potenciálových rozdílů mezi elektrodami ponořenými do roztoku je známa od 2. poloviny 18. století. O objev toho jevu se zasloužili zejména

L. Galvani a A. Volta (Volta také sestrojil první galvanický článek schopný trvale dodávat proud). Výklad jeho činnosti, který je založen na možnosti výměny iontů mezi elektrodou a roztokem, podal W. Nernst.

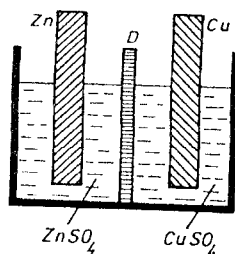
Každý kov ponořený do vody nebo do vodního roztoku má větší či menší tendenci se rozpouštět, podobně jako se ve vodě rozpouštějí například soli. Rozdíl je však v tom, že kov je tvořen krystalovou mřížkou složenou z kladných iontů, jejichž kladný náboj je kompenzován záporným nábojem volných elektronů. Při rozpouštění mohou do roztoku přecházet jen kladné ionty, takže kov se přebytečnými elektrony nabíjí záporně. Na druhé straně je nutné předpokládat existenci opačného procesu, kdy kladné ionty (kationty) přítomné v roztoku budou mít určitou tendenci zabudovávat se do krystalové mřížky elektrody. Přechodem těchto kationtů se bude naopak elektroda nabíjet kladně.

Na základě uvedených představ o chemické aktivitě mezi elektrodou a roztokem je možné kvalitativně pochopit, že za určitou dobu po vložení elektrody do roztoku nastane rovnovážný stav, při kterém si za jednotku času elektroda a roztok vzájemně vymění stejný počet iontů. Tato rovnováha bude ovšem obecně podmíněna existencí nenulového potenciálového rozdílu mezi elektrodou a roztokem. Skutečně, bude-li zpočátku převažovat například přechod kladných iontů z kovu do roztoku, bude se kov postupně nabíjet záporně a vzniklé elektrické pole bude znesnadňovat přechod dalších kationtů. Při určité hodnotě elektrického pole bude znesnadňovat přechod dalších kationtů. Při určité hodnotě záporného napětí elektrody vůči roztoku se oba procesy vyrovnají a nastane zmíněný rovnovážný stav. V opačném případě, kdy zpočátku převládal přechod aniontů z roztoku na elektrodu, bude rovnovážný stav charakterizován určitým kladným napětím elektrody. Tato rovnovážná napětí mezi elektrodami a roztokem se ve fyzikální chemii nazývají *elektrodovými potenciály*. Jejich hodnoty i znamení závisí na materiálu elektrod i roztoku.

Elektrodový potenciál představuje důležitou fyzikálně chemickou charakteristiku dané látky. Bohužel však není možné určit jeho absolutní hodnotu, neboť měřitelné je pouze napětí mezi dvojicí elektrod. Proto se konstruují různé standardní elektrody a zavádí se pojem *standardních elektrodových potenciálů*. Standardní elektrodový potenciál dané látky je vlastně elektromotorické napětí článku, jehož jednu elektrodu tvoří zkoumaná látka, druhou zvolená standardní elektroda, přičemž roztok elektrolytu je určitým způsobem standardizován. Ze znalosti standardních potenciálů a určitých vlastností příslušných elektrolytů je pak možno vypočítat elektromotorické napětí libovolného článku s roztokem libovolné koncentrace.

Standardní elektrodové potenciály se často vztahují k tzv. *standardní vodíkové elektrodě*, která představuje nejdůležitější typ tzv. *kationtové elektrody*. Kromě ní se však ještě používá řada jiných typů elektrod. Popis jejich vlastností a konstrukce, stejně jako podrobnější výklad o vlastnostech elektrodových potenciálů lze nalézt v učebnicích fyzikální chemie (viz. např. [13,16]).

Na obrázku 7.38 je zobrazen princip uspořádání klasického, historicky významného *Daniellova článku*, na jehož příkladu budeme demonstrovat právě vyložené kvalitativní poznatky. Článek se skládá z nádoby rozdělené na dvě části průlinčitou přepážkou  $D$  (diafragmou). Jedna část nádoby je naplněna roztokem síranu zinečnatého ( $ZnSO_4$ ), v němž je ponořena zinková elektroda, zatímco druhá její část je naplněna koncentrovaným roztokem síranu měďnatého ( $CuSO_4$ ) s ponořenou elektrodou měděnou. Experiment ukazuje, že po ustavení rovnováhy bude mezi elektrodami napětí asi 1,1 V, přičemž měděná elektroda bude vůči zinkové kladná. Při spojení obou elektrod vnějším vodičem zjistíme, že článek je schopen udržet ve vzniklém obvodu proud.



Obr. 7.38 Principiální uspořádání klasického Daniellova článku.

Toto chování článku kvalitativně snadno vysvětlíme na základě představ uvedených v předchozím výkladu. Necht'  $V_{Cu}$  a  $V_{Zn}$  jsou příslušné elektrodové potenciály, tj. napětí jednotlivých elektrod vůči příslušným roztokům v rovnovážném stavu iontových procesů na jejich površích. Za předpokladu, že roztok v obou částech nádoby má stejný elektrický potenciál  $\varphi_r$  budou mít potenciály elektrod hodnoty  $\varphi_{Zn} = \varphi_r + V_{Zn}$ ,  $\varphi_{Cu} = \varphi_r + V_{Cu}$ . Napětí, které vytvoří elektrické pole mezi oběma elektrodami, pak bude mít rovnovážnou hodnotu  $U_0 = \varphi_{Cu} - \varphi_{Zn} = V_{Cu} - V_{Zn}$ . Při spojení elektrod vnějším vodičem budou účinkem tohoto pole přecházet volné elektrony ze zinkové na měděnou elektrodu, čímž se ovšem zmenší napětí  $V_{Cu}$ ,  $V_{Zn}$  a poruší se rovnováha v iontových procesech na elektrodách. Zinková elektroda bude opět získávat přebytek záporných nábojů a měděná elektroda přebytek kladných nábojů. Vnější vodičem poteče proud tak dlouho, pokud zůstanou zachovány uvedené poměry uvnitř článku.

Právě vyložené procesy uvnitř Daniellova článku přesně odpovídají situaci, o níž jsme abstraktně mluvili v čl. 3.2.3 při zavádění pojmu zdroje elektromotorického napětí. Napětí  $U_0$  je zřejmě svorkovým napětím článku. Není-li z něj odebírán proud, můžeme položit  $U_0 = \mathcal{E}$ . Elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$  zde popisuje schopnost elektrodových procesů transportovat náboj určitým směrem. V případě, že článek dodává proud do vnějšího obvodu, je hodnota svorkového napětí určena vztahem (3.33). Vnitřní odpor  $R_i$  je v tomto případě odpor roztoku mezi

elektrodami. Výkon dodávaný článkem do vnějšího obvodu je určen vztahem (3.48) a je získáván na úkor vnitřní energie článku, která se při odběru proudu uvolňuje v důsledku fyzikálně chemických dějů na elektrodách.

Charakter těchto dějů závisí na konkrétních vlastnostech dané soustavy. Může například docházet ke změnám koncentrace a složení roztoku u jednotlivých elektrod, nebo mohou na elektrodách probíhat určité chemické reakce, které změni jejich chemické složení. Podstatné však je, že uvedené elektrodové procesy musí zabezpečovat kontinuitu proudu v obvodu. Vzhledem k tomu, že v elektrodách je proud realizován elektrony a v elektrolytu ionty, elektrodové procesy musí na jedné elektrodě zabezpečovat odčerpávání elektronů do elektrolytu a na druhé elektrodě předávání elektronů z elektrolytu.<sup>67</sup>

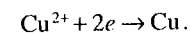
Uvedené chemické změny mohou obecně vyvolat změny elektrodových potenciálů obou elektrod, a tím také změny proudu protékajícího soustavou. Tento jev, který je obecným průvodním jevem elektrolýzy, se nazývá *polarizace elektrod*. Projevuje se tak, jako kdyby v průběhu elektrolýzy započal v obvodu působit nový zdroj tzv. *polarizačního elektromotorického napětí*  $\mathcal{E}_p$ . Na základě energetických úvah lze ukázat, že polarizační elektromotorické napětí musí vždy působit zmenšení proudu, který je vyvolal. Musí tedy mít vždy opačné znamení než původní elektromotorické napětí, jehož účinkem začala v obvodu probíhat elektrolýza.

K polarizačním jevům je nutné přihlížet při konstrukci článků, které mají sloužit jako v praxi upotřebitelné zdroje elektromotorického napětí. Takové články je nutné konstruovat tak, aby produkty elektrolýzy, vznikající při činnosti článku, nemohly pokud možno vytvářet polarizační elektromotorické napětí.

V Daniellově článku dodávajícím proud do vnějšího obvodu probíhá na záporné zinkové elektrodě anodická reakce



zatímco na kladné měděné elektrodě probíhá reakce katodická



Diafragma v Daniellově článku do určité míry zabraňuje smíchání kationtů z jednotlivých částí nádoby. Kdybychom mohli předpokládat, že při provozu článku nedochází k průchodu kationtů diafragmou, byla by probíhající elektrolýza charakterizována pouze rozpouštěním zinkové elektrody a usazováním měďnatých iontů na elektrodě měděné. Chemické složení elektrod by se tedy neměnilo a polarizační napětí by bylo dáno pouze změnami koncentrace roz-

<sup>67</sup> Podle terminologie zavedené ve fyzikální chemii se reakce zabezpečující odčerpávání elektronů z elektrody nazývá katodickou reakcí naopak reakce zabezpečující předávání elektronů elektrodě se nazývá reakcí anodickou.

toků. Ve skutečnosti není tento předpoklad nikdy ideálně splněn. Ve zcela vybitém článku jsou všechny měďnaté ionty vyloučeny na kladné elektrodě a elektrolyt je tvořen jen chloridem zinečnatým. Daniellův článek má malou životnost a s ohledem na dnešní potřeby není použitelný.

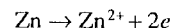
Galvanické články, které se v praxi používají, lze rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny zařazujeme *primární (nevratné) články*, které mají jednorázové použití. V důsledku elektrolyzy probíhající při odběru proudu (tzv. vybití) dochází v těchto článcích k nevratným procesům, kterými se články postupně znehodnocují. Do druhé skupiny zařazujeme *sekundární (vratné) články*, nazývané také *akumulátory*, které je naopak možné průchodem proudu opačného směru (po připojení k vnějšímu zdroji) přivést do původního stavu; mluvíme o nabíjení článku.

Užitnou hodnotu galvanického článku určuje řada parametrů. Mezi nejdůležitější patří kapacita článku (obvykle udávaná v ampérhodinách) vyjadřující celkový náboj, který může článek do v něžšího obvodu dodat, dále hustota energie (udávaná ve watthodinách/litr), vnitřní odpor, maximální pracovní proud, rychlost samovolného vybíjení (udávaná v procentech kapacity za den) a jiné. S rostoucí spotřebou galvanických článků, zejména pro mobilní elektronická zařízení, nabývají stále větší význam i ekologická hlediska, především obsah toxických materiálů. V následujícím textu uvedeme stručnou charakteristiku nejdůležitějších typů.

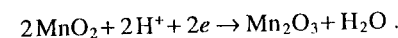
#### a) Primární články

Pro laboratorní účely má stále největší význam Westonův článek, jehož katodu tvoří amalgam kadmia, anodu rtuť a elektrolyt nasycený roztok síranu kadmnatého  $\text{CdSO}_4$  a který se uplatňuje jako normál elektromotorického napětí. Podrobnější popis jeho konstrukce a vlastností je uveden v [5]. My zde uvedeme pouze, že jeho elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_w = 1,01865 \text{ V}$  při  $20^\circ\text{C}$ . Má-li však tato hodnota zůstat zachována, nesmí článkem nikdy protékat proud. Při jeho používání je proto nutné užívat speciálních měrných metod, zejména kompenzační metody (viz opět [5]). Objev Josephsonova jevu přinesl novou možnost kontroly napětí Westonových normálních článků, popř. kontroly jejich stability (srov. čl. 7.3.5).

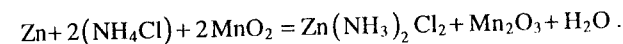
K napájení drobných spotřebičů se užívá několik typů primárních článků, které jsou modifikacemi *Leclanchéova článku*. V původní verzi tohoto článku je záporná elektroda tvořena zinkovou tyčí a kladnou elektrodou je uhlíková tyč obklopená vrstvou burelu ( $\text{MnO}_2$ ). Elektrolytem je vodný roztok chloridu amonného ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ) a chloridu zinečnatého ( $\text{ZnCl}_2$ ). Vodivost elektrolytu je zajištěna zápornými ionty  $\text{Cl}^-$  a kladnými ionty  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{NH}_4^+$ . Vybíjecí proces je charakterizován anodickou reakcí



a katodickou reakcí

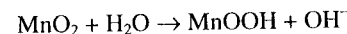
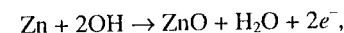


Při odběru proudu se tedy zinková elektroda rozpouští. V okolí uhlíkové elektrody probíhá komplexní chemická reakce, při níž se burel redukuje vyloučeným vodíkem na ( $\text{Mn}_2\text{O}_3$ ) a vzniklý amoniak spolu se  $\text{Zn}^{2+}$  vytváří komplexní kationty  $[\text{Zn}(\text{NH}_3)_2]^{2+}$ . Pro chemickou reakci celého článku tedy dostáváme rovnici



Elektromotorické napětí Leclanchéova článku činí  $\sim 1,5 \text{ V}$ .

Po řadu desetiletí je nejhojněji užívanou modifikací Leclanchéova článku tzv. *suchý (zinko-uhlíkový) článek*. Zápornou elektrodou je zinková nádobka (v původní verzi na vnitřních stěnách pokovená vrstvou rtuti). Kladná elektroda podobného složení jako v článku Leclanchéově je umístěna v ose zinkové nádoby. Elektrolyt je zahuštěn do pastovité konzistence vhodnou látkou – v původní verzi škrobem. Hlavní předností tohoto typu článku a důvodem jeho masového rozšíření je nízká cena. I když se díky technologickému vývoji posledních let jeho užitné vlastnosti značně zlepšily (a k jeho výrobě přestala být užívána rtuť, takže článek je ekologicky neškodný), zůstává jeho hlavní nevýhodou značně vysoký samovybíjecí proud, který omezuje jeho životnost a skladovatelnost. Suchý článek je tudíž nevhodný jako trvalejší zdroj energie. Pro takové použití je mnohem výhodnější tzv. *primární alkalický článek*. Aktivní materiál jeho elektrod zůstává stejný, díky použití jiného elektrolytu (roztoku hydroxidu draselného  $\text{KOH}$  o koncentraci 30 až 40%), jsou však elektrodové reakce modifikovány. Anodická a katodická reakce mají postupně tvar



a chemická reakce v celém článku je popsána rovnicí



Ve srovnání s konvenčním suchým článkem jsou hlavními výhodami alkalických článků nižší časový pokles svorkového napětí při vybíjení a nízký samovybíjecí proud. Tyto články jsou dlouhodobě skladovatelné a mají dlouhou životnost.

#### b) Sekundární články

Jako historický příklad může sloužit Daniellův článek, který lze regenerovat průchodem proudu opačného směru, v praxi je však dnes nepoužitelný. Ze sekundárních článků je patrně stále nejpoužívanější *olověný akumulátor*. Základ-

ním materiálem obou jeho elektrod je olovo, elektrolytem kyselina sírová v roztoku o koncentraci 25 až 30 %. Účinkem kyseliny se na obou elektrodách vytvoří nerozpustný síran olovnatý. V tomto stavu jsou obě elektrody stejné a akumulátor má nulové elektromotorické napětí. Necháme-li jím však procházet proud z vnějšího zdroje, elektrody se zpolarizují. Na záporné elektrodě se síran olovnatý redukuje na olovo a na kladné elektrodě oxiduje na oxid olovičitý  $\text{PbO}_2$ . V tomto stavu je akumulátor „nabit“ a je schopen pracovat jako galvanický článok. Při odběru proudu se na obou elektrodách vytváří síran olovnatý. Elektromotorické napětí po nabití činí 2,1 V a s vybitím postupně klesá. Díky nízkému vnitřnímu odporu a schopnosti dodávat značný proud se nejčastěji používá jako startovací baterie v automobilech. Jeho nevýhodou je omezená životnost.

Kromě oloveného akumulátoru se dnes užívá řada dalších typů sekundárních (vesměs alkalických) článků a jejich potřeba dramaticky roste s rozvojem mobilní spotřební elektroniky. Za klasický je možné považovat Edisonův akumulátor *Ni-Fe*, jehož elektrody tvoří kovové železo a nikl a jehož elektrolytem je louh draselný (KOH). Elektromotorické napětí se pohybuje kolem hodnoty 1,4 V, použitelné svorkové napětí je přibližně 1,2 V. Ve srovnání s oloveným akumulátorem má nevýhodu ve větším vnitřním odporu, větší ceně a nižší účinnosti, je však trvanlivější. Dnes se používá jen zřídka.

V nedávné době byly hojně používány články *nikl-kadmiové* (Ni-Cd), u nichž díky pokroku v technologii (především zavedení poréznych elektrod) bylo dosaženo řady dobrých užžitných vlastností. Elektromotorické i svorkové napětí těchto článků je shodné s typem Ni-Fe, mají však značně vyšší kapacitu a nízké samovolné vybití. Jejich podstatnou nevýhodou je však tzv. paměťový efekt; zejména při rychlém nabíjení dochází při zvýšené teplotě k rekrystalizaci aktivního materiálu elektrod a při neúplném dobití klesá nevratně jejich kapacita. Rovněž vzhledem k vysoké toxicitě kadmia se od jejich používání upouští.

Novější alternativou k Ni-Cd článkům je použití kovové slitiny absorbující vodík pro zápornou elektrodu (místo kadmia). Kladnou elektrodu tvoří práškový nikl, elektrolytem je hydroxid draselný. Nabitím přejde nikl v hydroxid niklu, zatímco záporná elektroda přejde v kovový hydrid (metalydrid). Mluví se proto o člancích *nikl-metalydridových* (Ni-MH). Články Ni-MH mají stejné elektromotorické napětí jako dva předchozí typy. K přednostem patří značně vyšší objemová účinnost a absence paměťového jevu, k nevýhodám o hodně vyšší cena a rychlejší samovolné vybití.

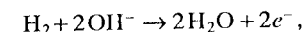
Novou kapitolou ve vývoji sekundárních článků jsou články na bázi lithia. Lithium tvoří kladnou elektrodu, zatímco pro zápornou elektrodu je známo několik modifikací. Jako příklad zmíníme některé vlastnosti článku *lithio-iontového* (Li-ion). Průměrná hodnota svorkového napětí je přibližně rovna 3,6 V, což umožňuje sestavit baterii požadovaného napětí z menšího počtu článků.

Dosahují vysoké hustoty energie i nižšího samovolného vybíjecího proudu ve srovnání s články Ni-Cd i Ni-MH. Nevýhodou je vysoká cena a předepsaný proces nabíjení. Nevyskytují se proto zpravidla volně na trhu a jsou obvykle (spolu s nabíječkou) součástí dražších zařízení jako jsou mobilní telefony, přenosné počítače, videokamery aj.

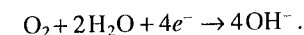
Konečně, v nedávné době se objevily *sekundární alkalické články*, které vznikly významným zdokonalením technologie popsaných primárních alkalických článků. Při zachování relativně nízké ceny jsou pro ně deklarovány kladné užžitné vlastnosti všech předchozích typů.

### c) Palivové články

Palivové články umožňují, aby plynule přiváděné palivo bylo elektrochemicky oxidováno, takže oxidační energie paliva je přímo převáděna na energii elektrickou. Palivo může být ve skupenství plynném (například vodík) i kapalné (například uhlovodíky). V principu může být tento proces přímé přeměny chemické energie na elektrickou ekonomičtější i ekologičtější ve srovnání s tradičními postupy využívajícími tepelné stroje. Praktické uplatnění je však v počátcích. Princip činnosti palivových článků budeme demonstrovat na příkladu článku kyslíko-vodíkového, který byl používán jako zdroj energie v některých družicích. Jako elektrolyt slouží zpravidla hydroxid draselný (KOH). Vodík jako palivo se oxiduje na záporné elektrodě, na níž probíhá anodická reakce



zatímco na kladné elektrodě probíhá redukční katodická reakce



Elektromotorické napětí článku je ~0,9 V.

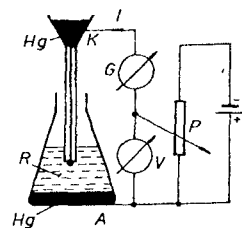
## 7.4.4 Polarografie

Studium elektrodových potenciálů a speciálně polarizačních jevů na elektrodách představuje velmi důležitý obor fyzikální chemie. Na uvedených jevech je založena i důležitá analytická metoda nazývaná *polarografie*.

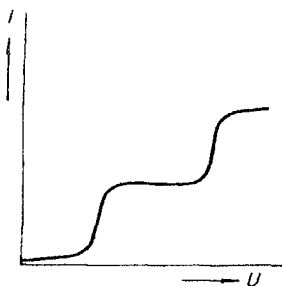
Podstata polarografie spočívá ve snímání voltampérové charakteristiky elektrochemické soustavy roztok-elektrody v *dynamickém režimu* s danou rychlostí změny napětí. Z průběhu této charakteristiky je možné stanovit obsah jednotlivých látek v roztoku na základě parametrů jejich elektrochemické reakce s elektrodou a rychlostí difuze v roztoku.

Princip klasického uspořádání pro snímání voltampérové charakteristiky, tzv. *polarografické křivky*, je uveden na obr. 7.39. Elektrolýza analyzovaného roztoku *R* probíhá mezi rtuťovými elektrodami. Katoda *K*, na níž probíhá sledovaná elektrochemická reakce, je přitom tvořena kapkou rtuťi odkapávající z tenké

kapiláry, čímž je zajištěno její neustálé obnovování, a tedy i vyloučení vlivu její polarizace produkty elektrolyzy. Proud tekoucí roztokem se v klasickém uspořádání měřil (obvykle registračním) galvanometrem  $G$  v závislosti na napětí  $U$ , jehož rovnoměrný vzrůst předepsanou rychlostí je regulován potenciometrem  $P$ .



Obr. 7.39 Principiální uspořádání klasické polarografické aparatury.



Obr. 7.40 Kvalitativní průběh polarografické křivky.

Na obrázku 7.40 je uveden schematický příklad polarografické křivky. Z polohy a výšky jednotlivých stupňů je možné kvantitativně stanovit obsah jednotlivých látek ve zkoumaném roztoku. Vznik těchto stupňů kvalitativně snadno pochopíme. Při malých hodnotách napětí vnějšího zdroje teče obvodem jen nepatrný proud a stav soustavy je blízký rovnovážnému stavu mezi roztokem a elektrodami, který je charakteristický pro galvanický článek bez proudu (viz čl. 7.4.3). Podstatným znakem tohoto stavu je rovněž homogennost koncentrace jednotlivých složek v celém objemu roztoku. Při zvyšování napětí rychlost elektrochemických reakcí na elektrodě vzrůstá, nevzrůstá však rovnoměrně pro všechny druhy látek obsažených v roztoku. Určitým hodnotám napětí odpovídá vždy vzrůst rychlosti reakce určitého typu látky, která se hlavní měrou podílí na vzrůstu proudu v této oblasti charakteristiky. Uvedeným procesem se však koncentrace dané látky v blízkosti elektrody sníží a další zvyšování proudu je omezeno rychlostí difuze příslušných částic v roztoku. V soustavě se tedy ustaví rovnovážný stav daný rovnováhou mezi rychlostí reakce a rychlostí difuze, kterému odpovídá konstantní hodnota proudu. Při dalším zvyšování napětí se pak podobný proces může opakovat pro jinou složku roztoku.

## 7.5 Vedení proudu v plynech

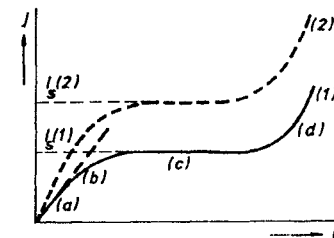
Vedení proudu v plynech, které se také často nazývá *elektrickým výbojem*, může mít velmi rozmanité vlastnosti závislé nejen na teplotě, tlaku, na druhu plynu, na velikosti přiloženého napětí, ale také na vlastnostech elektrod toto napětí přivádějících. Při průchodu proudu dostatečné hustoty může dojít téměř k úplné ionizaci molekul plynu, čímž vzniká prostředí zcela nových vlastností nazývané *plazma*, které se někdy považuje za čtvrté skupenství látek. Studium elektrické vodivosti plynů může být tedy považováno za součást fyziky plazmatu, která dnes představuje značně rozsáhlý obor fyziky. V této učebnici můžeme uvést několik nejzákladnějších poznatků o uvedené problematice.

Při malých napětích nastává v plynu tzv. *nesamostatný výboj*, který je charakterizován velmi nízkou hustotou proudu a při zvyšování napětí přechází v některou formu tzv. *samostatného výboje*. Tomuto typu výboje odpovídají podstatně vyšší proudové hustoty a je zpravidla doprovázen (světelným) zářením plynu. Může mít velmi rozmanitý charakter v závislosti na konkrétních podmínkách. V následujících dvou člancích budou postupně probírána nejzákladnější experimentální fakta o nesamostatném výboji a o výboji *doutnavém* a *obloukovém*, což jsou neznámější typy výboje samostatného. V článku 7.6.7 pak budou vyloženy vlastnosti nesamostatného výboje z mikroskopického hlediska a budou specifikovány podmínky pro nasazení výboje samostatného.

### 7.5.1 Nesamostatná vodivost

Nesamostatnou vodivost plynu je možné studovat v jednoduchém uspořádání sestávajícím z dvojice elektrod umístěných ve vzájemné vzdálenosti  $d$  v prostoru vyplněném vyšetřovaným plynem. Přivedeme-li na elektrody napětí  $U$  z vnějšího zdroje a měříme-li proud  $I$  procházející obvodem v závislosti na napětí, můžeme změřit voltampérovou charakteristiku. Známe-li geometrii elektrod, můžeme určit i napěťovou závislost proudové hustoty  $j$  v daném místě.

Kdybychom v uvedeném uspořádání měřili voltampérovou charakteristiku při zvyšování napětí  $U$  z nulové hodnoty, dostali bychom závislost, která je kva-



Obr. 7.41 Charakteristiky nesamostatného výboje v plynu.

litativně vystižena křivkou (*I*) na obr. 7.41. Při velmi malých napětích (oblast (*a*)) by proud lineárně vzrůstal se vzrůstajícím napětím, takže by byl splněn Ohmův zákon. Při dalším vzrůstu napětí (oblast (*b*)) by se však postupně projevovaly odchylky od Ohmova zákona, až nakonec v oblasti (*c*) by proud na napětí vůbec nezávisel. Teprve při dalším zvyšování napětí by se v oblasti (*d*) objevil nový vzrůst proudu.

Další charakteristickou vlastností nesamostatného výboje je značná závislost proudové hustoty na různých vnějších vlivech. Například při ozáření plynu ultrafialovým, rentgenovým či radioaktivním zářením bychom pro danou hodnotu napětí naměřili výrazný vzrůst proudu. Kdybychom za působení konstantního záření měřili znovu závislost proudové hustoty na napětí *U*, naměřili bychom křivku stejného charakteru (viz čárkovanou křivku (2) na obr. 7.41).

Jak bylo již poznamenáno, je pro nesamostatný výboj charakteristická velmi nízká proudová hustota. Hustota nasyceného proudu v oblasti (*c*) charakteristiky se obvykle pohybuje v mezích  $10^{-3} - 10^{-12} \text{ A.m}^{-2}$ .

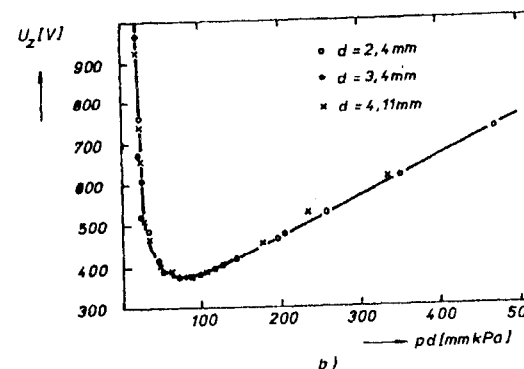
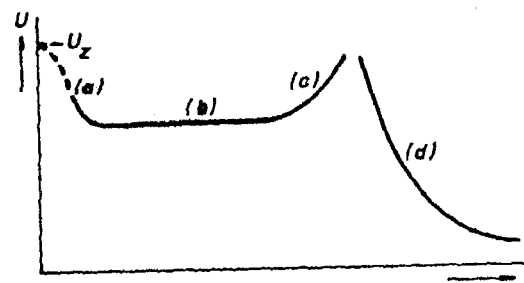
### 7.5.2 Doutnavý a obloukový výboj

Doutnavý a obloukový výboj jsou dvě nejběžnější formy stacionárního samostatného výboje.<sup>68</sup>

*Doutnavý výboj* nastává za sníženého tlaku ( $1-10^3$ ) Pa za předpokladu, že napětí mezi elektrodami dosáhne určité kritické hodnoty  $U_z$ , nazývané zápalné napětí. Je charakterizován stacionární proudovou hustotou hodnot ( $10^{-1}-10$ )  $\text{A.m}^{-2}$  a je doprovázen světelným zářením plynu ve značné části výbojové dráhy, jehož spektrální složení je charakteristické pro daný plyn. Rozložení potenciálu podél výbojové dráhy je vždy nerovnoměrné. Jeho největší spád, činící téměř celou hodnotu přiloženého napětí, je zpravidla soustředěn do bezprostřední blízkosti záporné elektrody (katodový spád). Pozoruhodné je také, že rozložení potenciálu závisí nejen na druhu plynu, ale také na materiálu záporné elektrody. Na obrázku 7.42a je uvedena (pro doutnavý výboj typická) závislost proudové hustoty *j* na napětí *U* mezi elektrodami. Jak je z obrázku vidět, zaujímá podstatnou část této závislosti oblast (*b*), v níž zůstává na elektrodách téměř konstantní napětí; nepatrné změně napětí odpovídá značná změna proudové hustoty. Situace je zde obdobná jako v případě polovodičové diody v oblasti Zenerova proudu (srov. čl. 7.3.4). Uvedená vlastnost doutnavého výboje nachází uplatnění v elektronice. Je jí možné, podobně jako Zenerův jev, použít ke stabilizaci napětí stejnosměrných zdrojů. Světelné záření vznikající při doutnavém výboji se užívá též k osvětlovacím účelům, a to buď přímo, nebo po transformaci ultrafialových složek spektra do viditelného oboru pomocí luminoforů

<sup>68</sup> Za stacionární považujeme výboj, který je (při konstantním přiloženém napětí) charakterizován stacionární proudovou hustotou. Vedle doutnavého a obloukového výboje existuje řada dalších forem stacionární samostatné vodivosti plynů. Nejznámějším příkladem nestacionárního výboje je *výboj jiskrový*, který nastává například v plynu o tlaku blízkém atmosférickému tlaku mezi vodiči, jejichž napětí přesáhlo určitou hodnotu.

nanesených na stěnách výbojky. Klasickým představitelem světelných zdrojů této typu jsou známé zářivky, které využívají běžné napětí rozvodné sítě o frekvenci 50 Hz; po jejich zapnutí se uvádí v činnost startovací obvod, který umožní krátkodobé žhavení elektrod tak, aby emitované elektrony vytvořili podmínky pro zapálení doutnavého výboje. Modernějším typem jsou tzv. kompaktní výbojky, v jejichž „patičce“ je umístěn elektronický měnič napájecího napětí – samotné výbojky pracují na mnohem vyšší frekvenci, řádu desítek kHz.



Obr. 7.42 a) Voltampérová charakteristika doutnavého výboje. b) Závislost zápalného napětí na součinu *pd*.

Podmínky pro zapálení doutnavého výboje jsou – obecně řečeno – určeny mnoha faktory. Vyloučíme-li speciální situace (například osvětlovací zářivky, kdy se elektrody před zapálením výboje zahřívají na dostatečně vysokou teplotu a k zapálení výboje se používají emitované elektrony), můžeme soudit, že zápalné napětí  $U_z$  je určeno jen vlastnostmi a tlakem daného plynu a dále geometrií elektrod. Experiment ukázal, že zápalné napětí  $U_z$  je pro daný plyn za dané

teploty funkcí součinu tlaku plynu  $p$  a vzdálenosti elektrod  $d$ . Tento poznatek se z historických důvodů nazývá *Paschenův zákon*. Obrázek 7.42b, ve kterém jsou uvedeny výsledky měření zápalného napětí dusíku v závislosti na součinu  $pd$  pro několik různých hodnot vzdálenosti  $d$  [9], demonstruje přesnost platnosti Paschenova zákona.

*Obloukový výboj* je jiný typ samostatného výboje, který může vzniknout ve velmi širokém oboru tlaků. Nejznámější je jeho realizace v obloukových lampách, kde tento výboj vzniká ve vzduchu za atmosférického tlaku mezi dvojitými uhlíkovými elektrodami. K jeho vzniku je zapotřebí, aby se elektrody nejdříve dotkly a zahřály se jouleovým teplem na dostatečně vysokou teplotu. Po jejich oddálení pak již výboj trvale „hoří“ při relativně nízkém napětí na elektrodách (20–50 V). Je charakterizován stacionární proudovou hustotou, která může dosahovat značných hodnot ( $10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$  a více). Jeho další charakteristikou je, že se vzrůstající proudovou hustotou klesá napětí na elektrodách. (Pro udržení konstantního proudu je tedy nutné, aby byl v obvodu zařazen vhodný odpor.) Obě uhlíkové elektrody se při hoření obloukového výboje silně zahřívají. Větší teplotu má elektroda kladná (3000–4000 °C) a při hoření výboje se v ní vytvoří prohlubeň (kráter). Experimenty však ukazují, že pro udržení trvalého výboje není teplota této elektrody podstatná. Naopak, výboj nemůže trvale hořet, nemá-li záporná elektroda dostatečně vysokou teplotu.

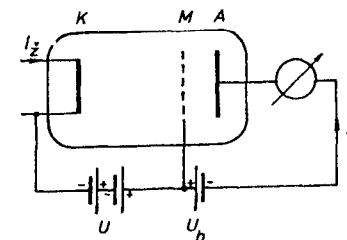
Další forma obloukového výboje vzniká za nižšího než atmosférického tlaku, jestliže proudová hustota překročí určitou hodnotu (oblast  $(d)$  na obr. 7.42)). Tento výboj je opět charakterizován značnou proudovou hustotou při relativně nízkém napětí na elektrodách a přechod od doutnavého k obloukovému výboji má nespojitý charakter. Ukazuje se, že za vhodných podmínek může určitá forma obloukového výboje existovat i za relativně nízké teploty obou elektrod. Volba materiálu záporné elektrody je však pro vznik těchto podmínek vždy podstatná.

Uvedené experimentální poznatky ukazují, že v plynu existuje vždy určitá koncentrace nabitých částic (ionizovaných molekul nebo elektronů), které se po přiložení vnějšího elektrického pole mohou stát nositeli proudu. Tyto částice zřejmě realizují nesamostatnou vodivost (nesamostatný výboj). Dále je vidět, že při zvýšení teploty nebo za přítomnosti určitého záření se tato koncentrace nabitých částic zvyšuje. Pro udržení samostatného výboje není však vznik nositelů proudu účinkem těchto vnějších vlivů zřejmě podstatný. Je nutné předpokládat, že při samostatném výboji vznikají ve výbojové dráze mechanismy schopné produkovat značné množství nosičů proudu. Ze závislosti parametrů výboje na materiálu záporné elektrody je dále vidět, že na této elektrodě probíhají děje, které jsou pro vznik nosičů proudu podstatné. Podrobnější studium této otázky ukázalo, že jde o uvolňování elektronů z materiálu elektrody. Parametry určité konkrétní formy samostatného výboje jsou vždy těmito elektrony do značné míry ovlivněny.

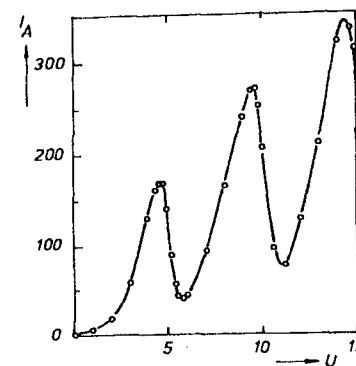
Další faktor, který má pro vznik a udržení samostatného výboje v plynu zásadní význam, je existence tzv. *nepružných srážek*, při nichž atom (či molekula) může pohltit určité množství energie a může být i ionizován. Přímý experimentální důkaz existence nepružných srážek a možnost ionizace molekul při těchto srážkách byl podán experimenty J. Francka a G. Hertze.

Uvedené experimenty prokázaly přímo i existenci *stacionárních stavů atomů* s diskretními hodnotami energie a významně tak přispěly k formulaci výchozích postulátů kvantové mechaniky (srov. článek 7.1.1).

Princip základního uspořádání Franckova–Hertzova pokusu pro studium nepružných srážek elektronů s atomy je uveden na obr. 7.43. V baňce naplněné studovaným plynem na tlak v řádu  $10^2 \text{ Pa}$  jsou umístěny tři elektrody: katoda  $K$  žhavena proudem  $I_z$  na teplotu potřebnou pro emisi elektronů, mřížka  $M$  udržovaná vnějším zdrojem na kladném urychlovacím napětí  $U$  vůči katodě a konečná anoda  $A$ , která má vůči mřížce malé brzdící napětí  $U_b \sim 0,5 \text{ V}$ . Měřením závislosti proudu  $I_A$  na urychlovacím napětí můžeme zaznamenat charakteristiku uvedené elektronky. Při zcela evakuované baňce by tato charakteristika byla určena podmínkami probranými v čl. 7.3.7



Obr. 7.43 Principiální uspořádání Franckova–Hertzova experimentu pro studium nepružných srážek.



Obr. 7.44 Závislost proudu na urychlovacím napětí ve Franckově–Hertzově experimentu pro případ rtuť.

a měla by tvar kvalitativně vyjádřený na obr. 7.35. Při naplnění parami rtuťi získali autoři experimentu závislost, kterou vidíme na obr. 7.44<sup>99</sup> a kterou lze snadno interpretovat. Při malých hodnotách urychlovacího napětí nastávají jen pružné srážky elektronů s atomy rtuťi a charakteristika má obvyklý tvar, podobný jako u vakuových elektronek. Dosáhne-li urychlovací napětí jisté kritické hodnoty  $U_{kr}$ , v případě rtuťi 4,9 V, srážky počnou mít nepružný charakter; elektrony při nich ztratí většinu své kinetické energie, jsou i malým brzdícím napětím  $U_b$  navraceny zpět k mřížce, takže proud elektronkou silně poklesne. Při dalším zvyšování urychlovacího napětí proud  $I_A$  opět vzrůstá, avšak vždy při dosažení celistvého násobku  $U_{kr}$  se proces doprovázený poklesem proudu

<sup>99</sup> Údaje pro obrázek byly převzaty z publikovaného textu přednášky J. Francka při převzetí Nobelovy ceny za fyziku v roce 1925; viz sborník Nobel Lectures, Physics (1922–1941). Elsevier Publ. Comp., Amsterdam 1965.

opakuje. Experimenty Franckova–Hertzova typu byly realizovány v několika různých modifikacích dovolujících měřit energie různých excitovaných stavů a rovněž i ionizační energie či potenciály atomů (srov. obr. 7.3).<sup>70</sup>

## 7.6 Základy teorie materiálových konstant

### 7.6.1 Permitivita nepolárních látek (Clausiiův–Mosottiův vztah)

Již v článcích 7.1.4 a 7.2.1 byla uvedena některá fakta o elektrických dipólových momentech atomů a molekul. Zejména bylo uvedeno, že volný atom v nulovém elektrickém poli má vždy nulový elektrický dipólový moment, zatímco molekuly existují jak polární s nenulovým vlastním momentem, tak nepolární s nulovým vlastním momentem. Vnější elektrické pole může i v nepolární látce indukovat elektrické momenty atomů či molekul, díky elektronové a iontové (atomové) polarizovatelnosti těchto objektů.

Obvykle se předpokládá, že jednotlivé atomy, i nepolární molekuly jako celek, se chovají kvazielasticky. Indukované elektrické momenty jsou pak úměrné intenzitě lokálního pole  $\mathbf{E}_i$  na atom či molekulu působícího. Jejich střední hodnoty ve směru pole lze vyjádřit vztahy

$$\mathbf{p}_e = \alpha_e \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{p}_a = \alpha_a \mathbf{E}_i, \quad (7.47)$$

v nichž  $\alpha_e$  a  $\alpha_a$  jsou tzv. *činitelé elektronové a atomové polarizovatelnosti*,  $\mathbf{p}_e$ ,  $\mathbf{p}_a$  značí časové střední hodnoty příslušných momentů. Pro celkový moment molekuly  $\mathbf{p}$  lze tedy psát

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{E}_i, \quad (7.48)$$

přičemž  $\alpha_0 = \alpha_e + \alpha_a$  je její celkový činitel polarizovatelnosti.

Na základě právě uvedených úvah jsme vytvořili model chování nepolární molekuly ve vnějším elektrostatickém poli. Chování každé molekuly je popsáno hodnotou jejího činitele polarizovatelnosti. Je zřejmé, že ze znalosti těchto činitelů je obecně možné vypočítat elektrickou susceptibilitu (resp. permitivitu) dané látky. Předpokládáme-li, že v dostatečně malém objemu  $V$  je přítomno  $n_V$  molekul, jejichž polarizovatelnosti a elektrické momenty v lokálním elektrostatickém poli  $E_i$  označíme  $\alpha_i$  a  $p_i$ , můžeme podle definice (1.161) pro velikost polarizace  $P$  psát

$$P = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_V} p_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_V} \alpha_i E_i. \quad (7.49)$$

<sup>70</sup> V české literatuře jsou experimenty Franckova–Hertzova typu podrobněji diskutovány ve starší učebnici E. V. Špolskij: Atomová fyzika I. SNTL, Praha 1953.

Ve speciálním případě, kdy budou polarizovatelnosti všech molekul stejné a rovné  $\alpha_0$ , dostaneme výsledek

$$P = n_0 \alpha_0 E_i, \quad (7.50)$$

v němž jsme zavedli  $n_0 = n_V/V$  jako koncentraci molekul v jednotce objemu.

Elektrostatické pole  $E_i$  působící na molekuly není ovšem obecně totožné s makroskopickým polem  $E$  přítomným uvnitř dané látky. Pouze v případě plynů, kdy je počet molekul v jednotkovém objemu velmi malý, můžeme zanedbat interakce mezi nimi a obě pole ztotožnit;  $E_i = E$ . Pro elektrickou susceptibilitu plynů  $\chi_e$  pak podle definiční relace (1.255) dostaneme

$$\chi_e = \frac{1}{\epsilon_0 V} \sum_{i=1}^{n_V} \alpha_i \left( = \frac{n_0 \alpha_0}{\epsilon_0} \right). \quad (7.51)$$

Podobně permitivitu  $\epsilon$  vyjádříme ve tvaru

$$\epsilon - \epsilon_0 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_V} \alpha_i \quad (= n_0 \alpha). \quad (7.52)$$

V případě kapalin a pevných látek je situace složitější. Pro výpočet susceptibility je nutné určit lokální pole  $\mathbf{E}_i$  působící na molekuly uvnitř látky. Toto pole má charakter *časové* střední hodnoty *mikroskopického* pole (srov. oddíl 5.4). Pro jeho výpočet navrhl H. A. Lorentz postup umožňující určit vztah tohoto pole k makroskopickému poli  $\mathbf{E}$  uvnitř dielektrika. Kolem vyšetřované molekuly vymežeme v dielektriku malou kulovou oblast. Její poloměr zvolíme dostatečně velký, abychom dielektrikum vně této koule mohli považovat za kontinuum a použít pro jeho popis pojmu permitivity. Lokální pole  $\mathbf{E}_i$  působící na vybranou molekulu bude potom možné vyjádřit jako součet makroskopického pole uvnitř zvolené dutiny  $\mathbf{E}_d$  a pole  $\mathbf{E}'$ , které v místě vybrané molekuly budí molekuly nacházející se uvnitř zvolené koule. Tedy

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_d + \mathbf{E}'. \quad (7.53)$$

Pole  $\mathbf{E}'$  představuje časovou střední hodnotu mikroskopického pole vzbuzeného v místě vybrané molekuly jejími nejbližšími sousedy. Musí být proto, obecně řečeno, počítáno mikroskopicky. V některých případech však můžeme soudit na jeho nulovou hodnotu. Takovou situaci lze očekávat především v kapalinách a v amorfních pevných látkách, které jsou izotropní a u nichž jsou molekuly rozmístěny zcela nepravidelně, takže lze očekávat vyrušení jejich jednotlivých příspěvků. Podobné poměry nastávají v řadě krystalických látek s vysokou (především kubickou) symetrií. Také v těchto látkách dochází k vyrušení



oříspevků jednotlivých molekul a platí  $\mathbf{E}' = 0$ . V uvedených případech dostaneme místo (7.53) jednodušší vztah  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_d$ , čímž se výpočet permitivity značně zjednoduší.

Nadále se budeme zabývat jen těmi látkami, u nichž je uvedené zjednodušení možné. Potom lze použít výsledek (1.287) a pole v dutině  $\mathbf{E}_d$  vyjádřit pomocí makroskopického pole  $\mathbf{E}$  uvnitř dielektrika.

$$\mathbf{E}_d = \frac{\epsilon_r + 2}{3} \mathbf{E}.$$

Dtud, vezmeme-li v úvahu vztah  $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$ , dostaneme po dosazení do (7.49)

$$3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_0} \alpha_i \quad (= n_0 \alpha). \quad (7.54)$$

Rovnice vyjadřuje vzájemný vztah relativní permitivity nepolárních látek a polarizovatelnosti jejich molekul za předpokladu, že je možné zanedbat „mikroskopickou“ složku  $\mathbf{E}'$  lokálního pole  $\mathbf{E}_d$ . Užitím Avogadrova zákona ji lze přepsat do obvyklého tvaru

$$3\epsilon_0 \frac{A_m}{\rho_M} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = N_0 \alpha_0, \quad (7.54a)$$

azývaného Clausiův–Mosottiův vztah. Veličina  $A_m$  v něm značí poměrnou molekulovou hmotnost dané látky,  $\rho_M$  její hustotu a  $N_0$  Avogadrovu konstantu.

Clausiova–Mosottiova formule je v principu použitelná pro všechny nepolární kapaliny a plyny s tím přiblížením, s jakým je možné zanedbat „mikroskopickou“ složku  $\mathbf{E}'$  lokálního pole. Z jejího tvaru vyplývá, že teplotní závislost permitivity nepolárních látek je dána jen teplotní závislostí počtu molekul  $N_0$  jednotce objemu. Tato veličina však nemůže v kapalinách a pevných látkách mít výraznou teplotní závislost. Permitivitu nepolárních látek můžeme tedy považovat za teplotně nezávislou.

Pomocí Clausiovy–Mosottiovy formule je možné vypočítat permitivitu látky, stliže je znám počet molekul v jednotce objemu a jejich polarizovatelnost. Je však také možný obrácený postup. Ze změřené hodnoty permitivity umožňuje Clausiova–Mosottiova formule vypočítat polarizovatelnost molekul. Z chování permitivity v časově proměnných polích je dále možné odlišit elektronovou polarizovatelnost od polarizovatelnosti atomové. Experimentální studium permitivity umožňuje tudíž určovat jisté mikrofyzikální parametry dané látky, nichž je dále možné usuzovat na strukturu jejich molekul. Studium otázek podobného druhu se zabývá fyzika dielektrik a fyzikální chemie.

## 7.6.2 Langevinova teorie diamagnetismu atomů a molekul

V článku 6.2.2 jsme ukázali, že magnetický moment vložený do vnějšího magnetického pole koná Larmorovu precesi s Larmorovou frekvencí  $\omega_L = \gamma B$ . Aplikujeme-li tento výsledek na pohyb elektronu v atomu, přijdeme k závěru, že magnetické pole ovlivní pohyb elektronu způsobem, který je ekvivalentní vzniku jistého antiparalelního magnetického momentu.

Hodnotu tohoto momentu vypočteme pomocí jednoduchého modelu využívajícího výsledků příkladu 3.4.6a. Elektron nechť koná rovnoměrný pohyb po kruhové dráze, jejíž rovina svírá jistý úhel  $\vartheta$  s osou  $z$ , do jejíhož směru orientujeme vnější pole  $\mathbf{B}$ . Larmorova precese změní střední hodnotu momentu hybnosti elektronu o hodnotu  $\Delta \mathbf{L}_L = -m_e \overline{\rho^2} \omega_L$ , kde  $\overline{\rho^2}$  je střední kvadratický poloměr průmětu dráhy do roviny kolmé ke směru pole. Pro indukovaný magnetický moment  $\mathbf{m}_d$  pak dostaneme podle (3.128)

$$\mathbf{m}_d = \gamma \Delta \mathbf{L}_L = -\frac{e^2}{4m_e} \overline{\rho^2} \mathbf{B}. \quad (7.55)$$

Uvažujme nyní model atomu obsahujícího  $Z$  elektronů. Předpokládejme, že všechny elektrony obíhají po kruhových drahách o poloměrech  $r_1, r_2, \dots, r_Z$ . Tyto dráhy nechť jsou rovnoměrně prostorově rozloženy tak, aby prostorové rozložení elektronového náboje mělo kulovou symetrii. Celkový magnetický moment indukovaný vnějším polem bude dán součtem momentů jednotlivých elektronů. Tedy

$${}^{(a)}m_d = -\frac{e^2}{4m_e} B \left( \overline{\rho_1^2} + \overline{\rho_2^2} + \dots + \overline{\rho_Z^2} \right). \quad (7.56)$$

Zavedeme-li střední kvadratickou hodnotu  $\overline{\rho_0^2} = (\overline{\rho_1^2} + \overline{\rho_2^2} + \dots + \overline{\rho_Z^2}) Z^{-1}$  můžeme vzorec zapsat v jednodušším tvaru

$${}^{(a)}m_d = -\frac{e^2 Z}{4m_e} \overline{\rho_0^2} B. \quad (7.57)$$

Pro kulově symetrický atom však můžeme veličinu  $\overline{\rho_0^2}$  snadno vyjádřit pomocí střední kvadratické hodnoty poloměru dráhy  $\overline{r_0^2} = (\overline{r_1^2} + \overline{r_2^2} + \dots + \overline{r_Z^2}) Z^{-1}$ , která má názornější význam. Ztotožníme-li počátek soustavy souřadné s jádrem atomu a orientujeme-li osu  $z$  ve směru pole, bude pro střední hodnoty čtverců souřadnic elektronů  $\overline{x^2}, \overline{y^2}, \overline{z^2}$  platit  $\overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = \overline{r_0^2}$ ,  $\overline{x^2} + \overline{y^2} = \overline{\rho_0^2}$ . Avšak vzhledem ke kulové symetrii atomu platí  $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$ , takže  $\overline{\rho_0^2} = 2 \overline{r_0^2} / 3$ . Indukovaný magnetický moment atomu tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$${}^{(at)}m_d = -\left(\frac{e^2 Z \overline{r_0^2}}{6m_e}\right)B. \quad (7.58)$$

Obsahuje-li uvažovaná látka  $n_0$  stejných atomů v jednotce objemu, je celkový moment indukovaný v jednotce objemu vnějším polem  $B$  roven  $n_0$ -násobku momentu (7.58). Pro diamagnetickou susceptibilitu dostaneme pak podle její definice (3.140)

$$\chi_m = -\mu_0 n_0 \left(\frac{e^2 Z \overline{r_0^2}}{6m_e}\right). \quad (7.59)$$

Pro experimentální ověření platnosti Langevinova vztahu (7.59) je výhodné vyjádřit počet atomů v jednotce objemu  $n_0$  užitím Avogadrova zákona pomocí molekulové hmotnosti  $A_m$  hustoty  $\rho_M$  a Avogadrovy konstanty  $N_0$ ;  $n_0 = \rho_M N_0 / A_m$ . Pro susceptibilitu pak dostaneme

$$\chi_m = -\mu_0 N_0 \frac{\rho_M}{A_m} \left(\frac{e^2 Z \overline{r_0^2}}{6m_e}\right). \quad (7.60)$$

Problémem zůstává určení veličiny  $\overline{r_0^2}$ . Vezmeme-li za ni řádovou hodnotu poloměru atomu ( $10^{-10}$  m), dostaneme po dosazení hodnot univerzálních konstant  $\chi_m \sim (\rho_M N_0 / A_m) \cdot 10^{-8}$ . Vidíme tedy, že z Langevinova vzorce pro diamagnetiku vychází teplotně nezávislá susceptibilita, jejíž řádová hodnota souhlasí s experimentem (srov. tabulku v článku 7.2.2).

J. H. van Vleck vypracoval ve dvacátých letech kvantovou teorii diamagnetismu atomů a molekul. Pro diamagnetickou susceptibilitu získal výraz, jehož jeden člen je totožný s Langevinovým vztahem (7.59). Hodnotu veličiny  $\overline{r_0^2}$  je v něm ovšem třeba počítat užitím aparátu kvantové mechaniky.<sup>71</sup>

### 7.6.3 Susceptibilita nekovových paramagnetik, permitivita polárních látek (Langevinova teorie)

První kvantitativní teorii paramagnetismu nekovů vypracoval na počátku našeho století rovněž P. Langevin. Jeho teorie vychází z dnes již plně ověřeného předpokladu, že atomy, respektive molekuly paramagnetických látek mají vlastní magnetické momenty, které se účinkem vnějšího magnetického pole částečně orientují a vytvářejí makroskopickou magnetizaci. P. Debye ukázal

<sup>71</sup> Pro podrobnější studium, které vyžaduje znalosti kvantové mechaniky, odkazujeme na klasickou monografii J. H. van Vleck: *Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*. Oxford University Press. Oxford 1932, v české literatuře na významnou monografii S. Krupička: *Fyzika feritů a příbuzných magnetických kysličníků*. Academia, Praha 1969.

později (r. 1912), že se stejný mechanismus může podílet rovněž na dielektrické polarizaci některých polárních látek, a použil Langevinovu teorii k výpočtu jejich permitivity. V tomto článku si postupně všimneme obou problémů.

#### a) Magnetická susceptibilita paramagnetik

Langevinova teorie vychází z předpokladu, že každý atom (respektive molekula) paramagnetické látky má vlastní magnetický moment  $\mathbf{m}$ , jehož velikost nezávisí v prvním přiblížení na velikosti vnějšího magnetického pole. Dále předpokládá, že jednotlivé molekuly na sebe vzájemně nepůsobí, takže orientace dané molekuly není závislá na orientaci jiných molekul. Nepůsobí-li vnější pole, jsou magnetické momenty jednotlivých molekul orientovány chaoticky, takže výsledný magnetický moment makroskopické části látky je nulový. Ve vnějším poli jsou však jednotlivé momenty podrobeny silovému působení (viz čl. 3.4.2), takže může dojít k jejich částečnému uspořádání do směru pole.

Předpokládejme, že v malém objemu látky  $V$  je obsaženo  $n_V$  molekul, jejichž magnetické momenty  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_{n_V}$  svírají se směrem vnějšího pole úhly  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n_V}$ . Magnetizace látky  $M$  bude podle čl. 3.5.2 rovna výsledné složce magnetického momentu do směru pole (výsledné složky v jiných směrech jsou ovšem nulové)

$$M = \frac{m_1 \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2 + \dots + m_{n_V} \cos \vartheta_{n_V}}{V}. \quad (7.61)$$

Ve speciálním případě, kdy jsou všechny molekuly stejného druhu, mají všechny momenty stejnou velikost. Tedy

$$M = \frac{m}{V} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_{n_V}). \quad (7.62)$$

Zavedeme-li střední hodnotu  $\langle \cos \vartheta \rangle = (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 + \dots + \cos \vartheta_{n_V}) n_V^{-1}$  a koncentraci molekul  $n_0 = n_V / V$ , dostaneme

$$M = n_0 m \langle \cos \vartheta \rangle. \quad (7.63)$$

Problémem nyní zůstává výpočet střední hodnoty  $\langle \cos \vartheta \rangle$ , pro nějž je nutné použít statistické metody (srov. metody používané v kinetické teorii plynů; viz např. [10]). Pravděpodobnost určité hodnoty  $\cos \vartheta$  je určena potenciální energií daného dipólu v magnetickém poli  $\mathbf{B}$  působícím na dipól, pro níž podle (3.107) platí  $W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -mB \cos \vartheta$ . (Díky tomu, že susceptibilita paramagnetik je velmi malá, můžeme pole  $\mathbf{B}$  působící na atomové magnetické momenty vždy s dostatečnou přesností považovat za totožné s vnějším makroskopickým polem.) Funkce  $\cos \vartheta$  má charakter spojité náhodné veličiny charakterizované hustotou pravděpodobnosti  $p(\cos \vartheta)$ , pro níž platí

$$p(\cos\vartheta) = K_L \exp\left(-\frac{W_m}{k_B T}\right),$$

kde  $K_L$  je normovací konstanta. Použitím obecného výrazu pro výpočet střední hodnoty náhodné veličiny s normovanou hustotou pravděpodobnosti  $p(\cos\vartheta)$  dostaneme po přechodu k nové integrační proměnné  $\vartheta$  výraz

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \frac{\int_0^\pi \cos\vartheta \exp\left(\frac{mB}{k_B T} \cos\vartheta\right) \sin\vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{mB}{k_B T} \cos\vartheta\right) \sin\vartheta d\vartheta},$$

po jehož integraci získáme výsledek

$$\langle \cos\vartheta \rangle = \cotg a - \frac{1}{a}, \quad (7.64)$$

v němž jsme označili  $a = mB/k_B T = \mu_0 m H/k_B T$ . Veličinu (7.64) je zvykem označovat symbolem  $L(a)$  a nazývat *Langevinovou funkcí*

$$L(a) = \cotg a - \frac{1}{a}. \quad (7.65)$$

Její využitím lze vyjádřit magnetizaci  $M$  vztahem

$$M = n_0 m L(a). \quad (7.66)$$

Jak vidíme, je magnetizace paramagnetika obecně dosti složitou funkcí teploty a magnetického pole. S výjimkou oboru velmi nízkých teplot a vysokých polí vždy platí  $a = \mu_0 m H/k_B T \ll 1$ . Pro tento případ můžeme Langevinovu funkci aproximovat jejím rozvojem v mocninnou řadu. Platí

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$$

Ponecháme-li v tomto rozvoji jen první člen, dostaneme z (7.66) pro susceptibilitu  $\chi_m = M/H$

$$\chi_m = \mu_0 \frac{n_0 m^2}{3k_B T}. \quad (7.67)$$

Tento výraz má již tvar Curieova zákona (3.144). Oba výrazy se ztotožní, položíme-li pro Curieovu konstantu

$$C = \mu_0 \frac{n_0 m^2}{3k_B}. \quad (7.68)$$

Langevinova teorie tedy dává kvalitativně správnou teplotní závislost paramagnetické susceptibility. Srovnáním naměřené teplotní závislosti susceptibility můžeme určit hodnotu Curieovy konstanty a z ní je podle (7.68) možné vypočítat velikost magnetického momentu molekul  $m$ . Pro další fyzikální interpretaci takto získané veličiny je však již nutné vzít v úvahu zákonitosti kvantové mechaniky.

L. Brillouin modifikoval Langevinovu teorii tak, aby vyhovovala omezením, která kvantová mechanika klade na prostorovou orientaci atomových a molekulárních magnetických momentů. Místo (7.66) získal obecnější vzorec, který lépe popisuje skutečnou situaci. Obecná kvantová teorie paramagnetismu atomů byla vypracována opět J. H. van Vleckem (srov. čl. 7.62).

#### b) Permittivita polárních látek

Díky tomu, že mechanické účinky elektrického a magnetického pole na elektrický a magnetický dipól jsou dány formálně shodnými vztahy, vzniká principiální možnost využít výsledky Langevinovy teorie též k určení orientační složky vektoru elektrické polarizace polárních dielektrik. Podmínkou její použitelnosti ovšem je, aby molekuly v dané látce byly dostatečně volné a mohly se účinkem elektrického pole natáčet.

Uvažujme látku obsahující  $n_0$  molekul v jednotce objemu a předpokládejme, že každá z těchto molekul má vlastní dipólový moment  $p_0$ . Pro orientační složku polarizace  $P_d$  bude na základě analogie s (7.66) a (7.67) jistě možné psát

$$P_d = n_0 \frac{p_0^2}{3k_B T} E_1. \quad (7.69)$$

V tomto vzorci  $E_1$  představuje intenzitu elektrického pole působícího na molekulu. Na rozdíl od problému paramagnetismu však zde není obecně možné zanedbat interakce mezi molekulami. Intenzita musí tedy mít význam lokálního pole. V analogii s článkem 7.6.1 můžeme zavést činitele orientační polarizovatelnosti

$$\alpha_d = \frac{p_0^2}{3k_B T} \quad (7.70)$$

a polarizovatelnost molekuly podle (7.48) zobecnit na tvar

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_d = \alpha_0 + \frac{p_0^2}{3k_B T}. \quad (7.71)$$

Výsledek (7.71), nazývaný *Langevinovým-Debyeovým vzorcem*, vyjadřuje, že celková polarizovatelnost látky je obecně dána součtem elektronové, atomové

a orientační polarizovatelnosti. Orientační polarizovatelnost dává tedy zřejmě teplotně závislý příspěvek k celkové polarizovatelnosti a vzorec (7.71) dává také možnost vysvětlit pozorovaný typ teplotní závislosti permitivity (7.12).

Z naměřené teplotní závislosti permitivity je na druhé straně principiálně možné pomocí (7.71) určit dipólový moment molekuly. V jednotlivých konkrétních případech však mohou nastat obtíže, které mohou vést k nesprávným výsledkům. Jedním zdrojem těchto obtíží je skutečnost, že pro výpočet lokálního pole polárních látek není obecně možné použít postup, který vede na Clausiovu-Mosottiovu formuli (srov. čl. 7.6.1). Kromě toho v pevných látkách mohou být molekuly vzájemně silně vázány, a mohou tudíž mít značně omezenou možnost orientování. Langevinova teorie pak není použitelná.

#### 7.6.4 Obecné podmínky platnosti Ohmova zákona, fyzikální podstata Hallova jevu

Uvažujme homogenní vodič, který obsahuje jeden typ kladných a jeden typ záporných nositelů proudu. Označíme-li postupně  $n_0^{(+)}$ ,  $n_0^{(-)}$  jejich koncentrace,  $q^{(+)}$ ,  $q^{(-)}$  jejich náboje a  $\mathbf{v}^{(+)}$ ,  $\mathbf{v}^{(-)}$  jejich střední (driftové) rychlosti, můžeme podle (3.8) až (3.10) vyjádřit hustotu proudu  $\mathbf{j}$  ve tvaru

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(+)} + \mathbf{j}^{(-)} = n_0^{(+)} q^{(+)} \mathbf{v}^{(+)} + n_0^{(-)} q^{(-)} \mathbf{v}^{(-)}. \quad (7.72)$$

Naším úkolem nyní bude vyšetřit relaci mezi rychlostmi  $\mathbf{v}^{(+)}$ ,  $\mathbf{v}^{(-)}$  a intenzitou přiloženého pole  $\mathbf{E}$  v těch případech, kdy platí Ohmův zákon.

Z Ohmova zákona vyplývá, že stacionární elektrické pole  $\mathbf{E}$  může vybudit jen stacionární proud. Rychlosti  $\mathbf{v}^{(+)}$ ,  $\mathbf{v}^{(-)}$  musí být tedy v tomto případě časově nezávislé. Kromě toho z požadavku platnosti Ohmova zákona vyplývá, že mezi těmito rychlostmi a intenzitou pole  $\mathbf{E}$  musí platit úměrnost

$$\mathbf{v}^{(+)} = \mu^{(+)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{v}^{(-)} = \mu^{(-)} \mathbf{E}. \quad (7.73)$$

Veličiny  $\mu^{(+)}$ ,  $\mu^{(-)}$  jsou charakteristické pro daný vodič a nazývají se *pohyblivostmi nositelů proudu*. Pro platnost Ohmova zákona je ovšem nutné, aby pohyblivosti nezávisely na intenzitě pole.

Na druhé straně víme, že elektrické pole  $\mathbf{E}$  působí na nositele náboje silami

$$\mathbf{F}^{(+)} = q^{(+)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{F}^{(-)} = q^{(-)} \mathbf{E} \quad (7.74)$$

nezávislými na jejich pohybu. Je proto zřejmé, že v látce musí na tyto nositele působit ještě další síly, které umožní současnou platnost vztahů (7.73) a (7.74). Skutečně, kdyby takové síly neexistovaly, konstantní pole  $\mathbf{E}$  by na nositele působilo nenulovými konstantními silami, které by vyvolaly jejich konstantní

zrychlení. Nositelé proudu by se při konstantní intenzitě pole nemohly pohybovat konstantní rychlostí, takže by nemohly platit vztahy (7.73) nutné pro platnost Ohmova zákona.

Ohmův zákon požaduje, aby se nositelé proudu při působení konstantních elektrických sil (7.74) pohybovaly konstantními rychlostmi (7.73). Z mechaniky víme, že taková situace je charakteristická pro pohyb těles ve viskózním prostředí, které klade pohybu těles odpor úměrný jejich rychlosti. Působení takových sil musíme tedy předpokládat také při pohybu nositelů proudu ve vodiči. Tyto „síly tření“ mají původ v interakcích nositelů proudu s hmotou vodiče a mohou mít různé mechanismy v závislosti na typu těchto vodičů. Jejich existence je však pro platnost Ohmova zákona nutná. V těch případech, kdy bychom mohli nositele považovat za volné, by Ohmův zákon nemohl nikdy platit. (Srov. čl. 7.3.7; pro konvekční proud elektronů ve vakuu je charakteristická „třípolovinná“ závislost proudu na přiloženém napětí.)

Dosažením (7.73) do (7.72) a srovnáním s Ohmovým zákonem (3.22) je možné vyjádřit měrnou vodivost

$$\gamma = n_0^{(+)} q^{(+)} \mu^{(+)} + n_0^{(-)} q^{(-)} \mu^{(-)}. \quad (7.75)$$

Ve speciální, avšak časté situaci, kdy vodič jako celek je neutrální, přičemž oba typy nositelů mají náboje stejné velikosti  $q^{(+)} = q^{(-)} = q$ , platí  $n_0^{(+)} = n_0^{(-)} = n_0$ . Výraz (7.75) vyjadřující vodivost se pak zjednoduší na tvar

$$\gamma = n_0 q (\mu^{(+)} - \mu^{(-)}). \quad (7.76)$$

Uvážíme-li dále, že platí  $\mu^{(+)} > 0$ ,  $\mu^{(-)} < 0$ , můžeme jej dále přepsat. Dostaneme

$$\gamma = n_0 q (|\mu^{(+)}| + |\mu^{(-)}|). \quad (7.76a)$$

Pro látky splňující Ohmův zákon platí vždy vztahy typu (7.75) a (7.76). Koncentrace nositelů proudu  $n_0^{(+)}$ ,  $n_0^{(-)}$  a jejich pohyblivosti  $\mu^{(+)}$ ,  $\mu^{(-)}$  představují mikrofyzikální parametry charakterizující elektrickou vodivost dané látky. Uvedené vztahy také ukazují, kdy může být platnost Ohmova zákona narušena. Taková situace nastane, jestliže koncentrace nositelů proudu, popřípadě jejich pohyblivost, bude záviset na intenzitě přiloženého pole (popřípadě na hustotě procházejícího proudu). Vztah (7.75), resp. (7.76) nám také dovolí určit závislost měrné vodivosti na teplotě popřípadě na jiných fyzikálních podmínkách, jestliže zjistíme, jak na těchto podmínkách závisí obě zmíněné veličiny  $n_0^{(+)}$ ,  $n_0^{(-)}$  a  $\mu^{(+)}$ ,  $\mu^{(-)}$ .

Je-li nám znám náboj nositelů proudu, je možné z měření měrné vodivosti určit pomocí (7.76) součin jejich koncentrace a pohyblivosti. Pro určení

samotné hodnoty některé z těchto veličin je však třeba vedle vodivosti studovat ještě nějakou další vlastnost. V mnoha případech je velmi užitečné studovat Hallův jev (viz čl. 7.3.1), neboť jak ihned uvidíme, lze velmi jednoduše najít souvislost mezi Hallovou konstantou (respektive Hallovým odporem), nábojem a koncentrací nositelů proudu.

Na nositele proudu pohybující se ve vodiči umístěném v magnetickém poli působí totiž Lorentzova síla (3.57). V geometrii podle obr. 7.18, kdy jsou nositelé proudu urychlováni elektrickým polem ve směru osy  $x$ , je nenulová jen její složka  $y$ , tj.  $F_{L,y} = -qv_x B_z$ . Jelikož orientace  $F_{L,y}$  závisí na znamení náboje, budou jejím účinkem nositelé proudu rozdělováni v příčném směru  $y$ , čímž vznikne elektrické pole  $E_y$ . V rovnovážném stavu musí platit  $qE_y + F_{L,y} = 0$ , odkud po dosazení z (7.19) dostaneme (za předpokladu jen jednoho typu nositelů)  $E_y = v_x B_z = j_x B_z / qn_0$ . Srovnáním tohoto výsledku s experimentálním vztahem (7.19) můžeme pak vyjádřit Hallovu konstantu, respektive Hallův odpor hledanou relací

$$R_H = \frac{1}{qn_0}, \quad \tilde{R}_H = \frac{B_z}{qn_0}. \quad (7.77)$$

### 7.6.5 Drudeho teorie vodivosti kovů

V článku 7.1.3 byly vyloženy nejdůležitější vlastnosti klasického modelu elektronového plynu. Použitím tohoto modelu vyložíme nyní klasickou (Drudeho) teorii elektrické vodivosti kovů. Podle tohoto modelu je v nulovém vnějším elektrickém poli pohyb elektronů zcela chaotický, tj. střední hodnota složky rychlosti elektronu v libovolném směru je nulová. V analogii s kinetickou teorií plynů se dále předpokládá, že je možné tento chaotický pohyb elektronů charakterizovat Maxwellovým–Boltzmannovým rozdělením rychlostí a že je možné zavést pojem střední rychlosti  $\bar{v}_0$ , střední volné dráhy  $\bar{l}$  a střední doby volného pohybu  $\bar{\tau}$ , které vyhovují vztahu (7.6).

Po přiložení vnějšího pole působí na každý elektron elektrická síla  $-e\mathbf{E}$ , která vyvolává okamžité zrychlení  $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m_e$ . Každý volný elektron tedy získává nenulovou složku rychlosti ve směru pole. Pro vznik makroskopického proudu je rozhodující její střední hodnota, kterou vypočteme na základě Drudeho elementární úvahy, vycházející z předpokladu, že při srážkách dochází ke středování směru rychlosti rovnoměrně do všech směrů.

Okamžitou rychlost  $\mathbf{v}_j(t)$  libovolného  $j$ -tého elektronu můžeme v každém okamžiku  $t$  vyjádřit vztahem

$$\mathbf{v}_j(t) = \mathbf{v}_{0,j} + \mathbf{a}t_j,$$

v němž  $\mathbf{v}_{0,j}$  značí rychlost, kterou měl uvažovaný elektron bezprostředně po poslední srážce a  $t_j$  značí dobu, která uplynula od poslední srážky do uvažovaného okamžiku. Střední hodnotu rychlosti elektronů v daném

pak zřejmě dostaneme vystředováním  $\mathbf{v}_j(t)$  pro všechny elektrony v jednotce objemu

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} \mathbf{v}_{0,j} + \mathbf{a} \sum_{j=1}^{n_0} \frac{t_j}{n_0}. \quad (7.78)$$

První člen na pravé straně je roven nule díky uvedenému středovacímu účinku srážek. Střední hodnota intervalu  $t_j$  má zřejmě význam střední doby volného pohybu  $\bar{\tau}$ . Platí tedy

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e}{m_e} \bar{\tau} \mathbf{E}. \quad (7.79)$$

Střední hodnota rychlosti je tedy úměrná intenzitě elektrického pole, jak žádá podmínka (7.73). Pro pohyblivost elektronů dostáváme

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -\frac{e}{m_e} \bar{\tau} \mathbf{E}. \quad (7.80)$$

Po dosazení do (7.75) můžeme vypočítat hustotu proudu a měrnou vodivost realizovanou volnými elektrony

$$\gamma = n_0 \frac{e^2}{m_e} \bar{\tau}. \quad (7.81)$$

V dosavadních úvahách jsme mlčky předpokládali, že střední doba volného pohybu nezávisí na intenzitě pole. Tento předpoklad, na němž závisí platnost Ohmova zákona, bude zřejmě splněn, jestliže dodatečná rychlost udělená elektronům elektrickým polem bude malá ve srovnání s rychlostí jejich tepelného neuspořádaného pohybu. Abychom získali konkrétní představu, uvedeme číselné hodnoty obou rychlostí pro případ mědi. Z úlohy Ú 7.8 plyne pro pohyblivost vodivostních elektronů mědi řádová hodnota  $10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ . Při v mědi již nedosažitelné intenzitě pole  $10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$  (při níž by proudová hustota měla hodnotu  $\sim 10^{10} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ ) by tedy elektronům byla udělována rychlost jednoho metru za sekundu. Naproti tomu pro střední rychlost neuspořádaného pohybu plyne z ekvipartičního teorému (viz např. [10]) pro pokojovou teplotu řádový odhad  $10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a kvantově mechanický odhad dává pro pás šířky 10 eV hodnotu  $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (srov. čl. 7.1.2). Uvedený předpoklad je tedy pro měď bohatě splněn. Podobnými odhady bychom se mohli o jeho platnosti přesvědčit i pro jiné kovy. Drudeho teorie tedy podává realistický obraz o podmínkách platnosti Ohmova zákona v kovech.

Na jejím základě je možné úspěšně vyložit i platnost *Franzova–Wiedemannova zákona* (viz čl. 7.3.2). Aplikaci metod kinetické teorie je totiž možné rovněž vypočítat příspěvek volných elektronů k tepelné vodivosti kovů,

kteří často hraje dominantní úlohu (srov. způsob výpočtu tepelné vodivosti plynů uvedený například v [10]). Příslušný výpočet ukazuje,<sup>72</sup> že tepelnou vodivost elektronového plynu  $\Lambda_e$  lze vyjádřit vztahem

$$\Lambda_e = bn_0 \frac{\bar{\tau}}{m_e} k_B^2 T, \quad (7.82)$$

v němž  $T$  představuje absolutní teplotu,  $k_B$  Boltzmannovu konstantu a  $b$  číselnou konstantu  $b \doteq 3$ . Využitím (7.81) a (7.82) pro poměr elektrické a tepelné vodivosti dostáváme

$$\frac{\Lambda_e}{\gamma} = b \frac{k_B^2}{e^2} T, \quad (7.83)$$

což je vztah shodný s experimentálním výrazem (7.26). Jelikož platí  $k_B^2/e^2 = 0,743 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}$ , vidíme, že (7.83) dává i vcelku dobrý kvantitativní souhlas s experimentem.

Ve výkladu dalších fyzikálních vlastností kovů však klasický model elektronového plynu již nebyl zdaleka tak úspěšný. V článku 7.2.2 jsme například viděli, že v rozporu s experimentem předpovídá teplotně závislou paramagnetickou susceptibilitu vodivostních elektronů. Podobná situace nastává i v případě měrného tepla. Podle klasického modelu by elektronový plyn měl mít značnou tepelnou kapacitu a měrné teplo kovů by i za vyšších teplot mělo být značně větší než měrné teplo nekovů. Ve skutečnosti však mají oba typy látek měrná tepla v podstatě stejná. Jak ukázal A. Sommerfeld, uvedené rozpory plynou z omezené použitelnosti Maxwelllova–Boltzmannova rozdělení. Při použití Fermiho–Diracova rozdělení vystihuje model elektronového plynu správně situaci i v případě uvedených vlastností. Je totiž zřejmé, že na měrném teple i na paramagnetické susceptibilitě se může podílet jen malý počet elektronů s energií blízkou Fermiho energii.

### 7.6.6 Výklad vodivosti roztoků

V oddílu 7.4 bylo ukázáno, že pro vodivost roztoků je charakteristická platnost Ohmova zákona a existence elektrolýzy vedla již Faradaye k závěru, že nositeli proudu v roztocích jsou hmotné částice (ionty) v roztoku přítomné. S. Arrhenius objasnil později (r. 1887) vznik těchto iontů jako důsledek štěpení molekul elektrolytu, které nastává působením rozpouštědla. Podle Arrhenia jsou molekuly elektrolytu v roztoku vždy v menší či větší míře rozštěpeny na kladné a záporné ionty, bez ohledu na to, teče-li roztokem proud.

<sup>72</sup> Výpočet je podrobně uveden například v knize R. Becker, F. Sauter: Theorie der Elektrizität, III. Band. B. G. Teubner, Stuttgart 1968.

Štěpení, tj. *elektrolytická disociace*, molekul je tedy důsledek vzájemné interakce mezi molekulami elektrolytu a rozpouštědla<sup>73</sup>. V daném roztoku tedy existuje vždy určitá koncentrace kladných a záporných nositelů proudu, která je určena pouze druhem látek tvořících roztok, jeho koncentrací, teplotou a případně jinými fyzikálními podmínkami. Na vzniku nositelů proudu se však za normálních podmínek nepodílí přiložené elektrické pole. Toto pole se podílí na vzniku elektrického proudu pouze tím, že uvádí již existující nositele proudu do pohybu.

Jak jsme viděli v článku 7.6.4, je pro platnost Ohmova zákona nutná vedle nezávislosti koncentrace nositelů proudu na intenzitě pole i obdobná nezávislost jejich pohyblivosti. Tento požadavek je však v případě roztoku zřejmě dobře splněn, neboť lze přirozeně předpokládat, že každý iont je „hustě“ obklopen molekulami rozpouštědla, které mu brání v pohybu. Pohyb iontu v roztoku můžeme tedy s dobrým přiblížením považovat za pohyb tělesa ve spojitém viskózním prostředí, který může být popsán známým Stokesovým vzorcem. Platnost Ohmova zákona je pak již zřejmá. V nejběžnějším případě, kdy se molekula štěpí na dva ionty opačné polarity se stejnou absolutní hodnotou náboje  $q$ , je možné vyjádřit měrnou vodivost vztahem (7.76a)

$$\gamma = n_0 q \left( |\mu^{(+)}| + |\mu^{(-)}| \right).$$

Pohyblivosti iontů  $\mu^{(+)}$ ,  $\mu^{(-)}$  musí být zpravidla určovány experimentálně (srov. úlohy Ú 7.13 a Ú 7.14). K tomu účelu je výhodné určit jejich vztah k Hittorfovým převodním číslům. Použitím definičního vztahu (7.46) dostaneme podle (7.76a)

$$t_A = \frac{\mu^{(-)}}{|\mu^{(+)}| + |\mu^{(-)}|}, \quad t_K = \frac{\mu^{(+)}}{|\mu^{(+)}| + |\mu^{(-)}|}. \quad (7.84)$$

Jak bylo již řečeno v čl. 7.4.1, má pro studium vlastností roztoků zvlášť velký význam zjišťovat pohyblivosti při nízkých koncentracích, kdy je možné zanedbat vzájemné interakce mezi ionty elektrolytu. Nejčastěji se užívají hodnoty při „nekonečném zředění“, tj. hodnoty extrapolované k nulové koncentraci.

Představa o iontech jako nositelích proudu v roztocích umožňuje také velmi jednoduše vyložit platnost *Faradayových zákonů elektrolýzy*, které (jak uvídíme) jsou bezprostředním důsledkem Avogadrova zákona. Necht' při projití náboje  $Q$  roztokem se vyloučí určité množství látky o hmotnosti  $M$ . Jestliže každý iont nese z elementárních nábojů, je k přenesení náboje  $Q$  zapotřebí

<sup>73</sup> Kvalitativně lze proces disociace pochopit jako důsledek toho, že vzhledem k vyšší permitivitě rozpouštědla jsou elektrické přitažlivé síly mezi ionty opačného znamení menší než ve vzduchu. Existence disociováných molekul je tudíž energeticky výhodná.

$n = Q/ez$  iontů. Jejich celkovou hmotnost můžeme snadno vyjádřit pomocí Avogadrova zákona vztahem  $M = A_m n / N_0$ , v němž  $N_0$  je Avogadrova konstanta a  $A_m$  relativní molekulová hmotnost iontu. Pro hmotnost  $M$  pak platí vztah

$$M = \frac{A_m}{N_0 e z} Q, \quad (7.85)$$

který má již tvar prvního Faradayova zákona (7.44). Pro elektrochemický ekvivalent přitom vychází

$$A = \frac{A_m}{N_0 e z}. \quad (7.86)$$

Ze vzorce (7.85) také ihned vyplývá vztah (7.45), vyjadřující druhý Faradayův zákon. Faradayův náboj  $F = N_0 e$ , zavedený v čl. 7.4.2, představuje skutečně univerzální konstantu.

Nyní se pokusíme vyložit koncentrační závislost měrné vodivosti pomocí Arrheniovy teorie disociace. Zanedbáme-li totiž v prvním přiblížení koncentrační závislost pohyblivosti, bude závislost měrné vodivosti dána právě jen koncentrační závislostí hustoty nositelů proudu, tj. bude výrazně záviset na tom, jak se s koncentrací mění stupeň disociace elektrolytu.

Arrheniova teorie vychází z předpokladu, že v daném roztoku probíhá neustále jednak proces disociace dosud nedisociovaných molekul, jednak proces rekombinace, při němž se ionty elektrolytu spojují opět v elektricky neutrální molekulu. V rovnovážném stavu se rychlost obou procesů vyrovná, takže se celkový počet disociovaných molekul v roztoku již s časem nemění.

Předpokládejme, že dané koncentraci roztoku odpovídá  $c$  molekul elektrolytu v jednotce objemu. Pro popis *disociačního stupně* zavedme veličinu  $\alpha$  vyjadřující relativní počet disociovaných molekul. Počet disociovaných molekul v jednotce objemu tedy bude  $\alpha c$ , zatímco počet nedisociovaných bude  $(1 - \alpha)c$ . Předpokládejme nyní, že proces disociace probíhá s pravděpodobností  $p$ . Počet molekul  $\Delta n'$ , které v jednotce objemu disociují za jednotku času, bude pak možno vyjádřit vztahem  $\Delta n' = (1 - \alpha)cp$ . Obráceně předpokládejme, že proces rekombinace probíhá s pravděpodobností  $q$ . Počet molekul  $\Delta n''$  rekombinujících v jednotce objemu za jednotku času bude zřejmě úměrný jak koncentraci aniontů, tak koncentraci kationtů. Bude tedy platit  $\Delta n'' = q\alpha^2 c^2$ . Z podmínky rovnováhy  $\Delta n' = \Delta n''$  dostaneme podmínku pro veličinu  $\alpha$

$$c \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{p}{q} = K_D. \quad (7.87)$$

Velichina  $K_D$  podle předpokladu nezávisí již na koncentraci roztoku. Vyjadřuje schopnost daného elektrolytu disociovat v daném rozpouštědle a nazývá se jeho *disociační konstantou*.

Vztah (7.87) představuje kvadratickou rovnici, ze které může být vypočítána rovnovážná hodnota činitele disociace  $\alpha$ . Speciálně pro velmi malé koncentrace plyne z (7.87)

$$\alpha \rightarrow 1. \quad (7.88)$$

Disociační stupeň  $\alpha$  se s klesající koncentrací blíží jedné. V oboru platnosti vztahu (7.88) tedy měrná vodivost roztoku poroste úměrně s jeho koncentrací. Tato závislost je ve shodě s experimentálními výsledky znázorněné na obr. 7.36. V oboru vyšších koncentrací však již nelze naměřené koncentrační závislosti vodivosti na základě řešení rovnice (7.87) vysvětlit. Jedním z důvodů je, že nelze zanedbat závislost pohyblivosti na koncentraci.

Disociační stupeň  $\alpha$  má velmi jednoduchý vztah k molární vodivosti. Přímou z její definice vyplývá tzv. *Arrheniův vztah*

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}. \quad (7.89)$$

Disociační stupeň  $\alpha$  při dané koncentraci je tedy určen poměrem molárních vodivosti při této koncentraci a při nekonečném zředění. Vezmeme-li v úvahu vzorec (7.89), můžeme rovnici (7.87) přepsat na tvar

$$K_D = \frac{\Lambda^2}{\Lambda_\infty (\Lambda_\infty - \Lambda)} c, \quad (7.90)$$

nazývaný *Ostwaldovým zředovacím zákonem*.

Právě vyložená teorie disociační rovnováhy platí pouze pro *slabé elektrolyty*. V případě silných elektrolytů totiž existují důvody k předpokladu, že i při konečných (a někdy značně vysokých) koncentracích roztoků jsou téměř všechny molekuly elektrolytu disociovány, takže pojem disociační rovnováhy přestává mít smysl. Východiskem pro přesnější popis chování silných elektrolytů je teorie vypracovaná P. Debyem a E. Hückelem (v r. 1923), která se stala základem pozdějších interpretací vlastností především silných elektrolytů. Tato teorie je založena na modelu mikroskopického popisu elektrické interakce mezi ionty v ionizovaném prostředí, zatímco interakce jiného typu zanedbává. Uvažovaný iont je pokládán za bodový náboj, jehož interakce s nejbližšími ionty má charakter Coulombova zákona a vzdálenější ionizované prostředí je považováno za elektricky aktivní kontinuum reagující na přítomné makroskopické elektrické pole. Model předpokládá, že uvažovaný iont vyvolá – elektrostatickou interakcí s nejbližšími ionty – přerozdělení jejich poloh tak, že náboj uvažovaného iontu bude do značné míry odstíněn. Z příslušného výpočtu vyplývá, že na stínění se podílí ionty, jejichž vzdálenost od uvažovaného iontu je menší než jistá veličina  $\lambda_D$ , nazývaná *Debyeův-Hückelův poloměr*<sup>74</sup>.

Debyeovu-Hückelovu teorii lze aplikovat nejen na chování elektrolytů, ale také na chování plazmatu. Její podrobnější výklad však přesahuje rámec této knihy. Pro podrobnější poučení odkazujeme na obšírnější učebnice či monografie věnované statistické fyzice<sup>74</sup>, a také na učebnice fyzikální chemie [13, 16].

<sup>74</sup> V českém jazyce například učebnice J. Kvasnica: Statistická fyzika. Academia, Praha 1983.

### 7.6.7 Výklad nesamostatné vodivosti plynů, podmínky pro vznik samostatného výboje

Základní vlastnosti nesamostatného výboje vyložené v článku 7.5.1 (zejména značná závislost nasyceného proudu na vnějších vlivech) ukazují, že za podmínky nesamostatného výboje jsou v plynu přítomni nositelé proudu, jejichž koncentrace je určena vnějšími faktory působícími na plyn.

V plynu se mohou principiálně vyskytovat tři typy nositelů proudu: kladné a záporné ionty a volné elektrony. Při nesamostatném výboji je nutné předpokládat, že všechny typy nositelů vznikají ionizací molekul plynu. V oddílu 7.1 jsme uvedli základní fakta o procesech ionizace atomů a molekul, ze kterých vyplynulo, že různé typy látek mají různé ionizační vlastnosti. Podíl jednotlivých typů nositelů na celkové vodivosti plynu bude tedy záviset především na typu plynu. Ukazuje se však, že závisí rovněž na tlaku.

Bylo prokázáno (srov. rovněž výklad o Franckově–Hertzově pokusu v článku 7.5.2), že k ionizaci molekuly může dojít při *nepružné* srážce s jinou částicí (elektronem, iontem apod.) o dostatečně vysoké energii, při níž ionizovaná molekula přijímá určité množství energie potřebné například k vyrazení jednoho elektronu. K vytržení jednoho elektronu z atomu či molekuly může také dojít při dopadu fotonu o dostatečně vysoké energii. Ionizační účinky bude mít proto především záření krátkovlnné (ultrafialové, rentgenové, záření gama). V oddílu 7.1 byla rovněž diskutována možnost vzniku záporného iontu, která je pro různé typy částic různá. Možnost vzniku záporného iontu daného typu bude zřejmě závislá na vzájemné rychlosti molekuly a elektronu.

Uvedené poznatky dovolují předpokládat, že v plynu existuje vždy určitá koncentrace volných elektronů a iontů, která je dána dynamickou rovnováhou mezi procesem ionizace a procesem rekombinace, při němž vznikají zpětně neutrální molekuly. Na základě diskuse této rovnováhy je možné popsat vlastnosti nesamostatného výboje.

Pro zjednodušení budeme uvažovat situaci v inertním plynu, v němž se nachází pouze kladné ionty a volné elektrony. Předpokládáme, že účinkem vnějších ionizačních činitelů (nezávislých na přiloženém vnějším poli) se v jednotce objemu ionizuje za jednotku času  $\Delta n$  atomů. Vznikne tedy  $\Delta n$  kladných iontů a  $\Delta n$  volných elektronů. Zavedme činitel rekombinace  $K_r$ , který vyjadřuje pravděpodobnost, že za jednotku času dojde v plynu k rekombinaci iontu s volným elektronem, a tedy ke vzniku neutrálního atomu (srov. úlohu Ú 7.17). Počet rekombinací  $\Delta n'$ , které nastanou v jednotce objemu za jednotku času, bude zřejmě úměrný jak koncentraci iontů  $n_0^{(+)}$ , tak koncentraci volných elektronů  $n_0^{(-)}$ . Jelikož za našich předpokladů je  $n_0^{(+)} = n_0^{(-)} = n_0$ , bude platit

$$\Delta n' = K_r n_0^2. \quad (7.91)$$

Podmínka rovnováhy  $\Delta n = \Delta n'$  tedy dává

$$\Delta n = K_r n_0^2. \quad (7.92)$$

Z ní je možné rovnovážnou koncentraci iontů a volných elektronů vypočítat.

Uvažujme nyní plyn vyplňující prostor mezi dvojicí rovinných rovnoběžných elektrod plochy  $S$ , umístěných ve vzájemné vzdálenosti  $d$ , na nichž je přiloženo napětí  $U$ . Pole  $E = U/d$  bude urychlovat elektrony a ionty v plynu a mezi elektrodami poteče jistý proud  $I$ . To ovšem znamená, že část nositelů proudu bude odevzdávat svůj náboj na elektrodách, čímž se bude jejich koncentrace zmenšovat. Předpokládejme, že v jednotce objemu ubude za jednotku času tímto způsobem  $\Delta n''$  nositelů. Místo (7.92) bude nyní platit obecnější podmínka rovnováhy tvaru

$$\Delta n = \Delta n'' + K_r n_0^2. \quad (7.93)$$

Nyní vyšetříme dvě mezní situace. Při malých hodnotách napětí  $U$  bude zřejmě  $\Delta n'' \ll \Delta n'$ . Úbytek nosičů proudu bude dán převážně jejich rekombinací. Rovnovážná koncentrace  $n_0$  bude dána opět podmínkou (7.92) a nebude téměř závislá na protékajícím proudu. Za této situace bude možné vedení proudu popsat stejným modelem, který jsme použili v čl. 7.6.5 při vyšetřování vodivosti elektronového plynu. Pohyblivost  $\mu$  nositelů proudu daného typu bude dána vztahem

$$\mu = \frac{e}{m} \bar{v}, \quad (7.94)$$

který je analogický k (7.80) a v němž  $m$  představuje hmotnost částice a  $\bar{v}$  střední dobu jejího volného pohybu. Pro vedení proudu bude platit Ohmův zákon. Vyšetřovaná situace zřejmě odpovídá oblasti (a) na obr. 7.41.

Pro velké hodnoty napětí  $U$  dostaneme druhý mezní případ, kdy budou téměř všichni nositelé proudu přitaženi k elektrodám dříve, než budou mít možnost rekombinovat. V tomto případě bude  $\Delta n'' \gg \Delta n'$  a podmínka rovnováhy bude mít tvar

$$\Delta n = \Delta n''. \quad (7.95)$$

Z ní vyplývá, že proud mezi elektrodami má konstantní hodnotu  $I$ , nezávislou na změně napětí  $U$ . Předpokládáme-li, že dané částice nesou náboj  $ez$  dostaneme

$$I_s = ezSd\Delta n. \quad (7.96)$$

Proud  $I_s$  je maximální proud, který může při daných ionizačních mechanismech plynem projít. Dostáváme tedy situaci odpovídající oblasti (c) na obr. 7.41.



Předpokládejme nyní, že napětí  $U$  přiložené na elektrody je dále zvyšováno. Je zřejmé, že ke kvalitativní změně situace v plynu dojde při takových jeho hodnotách, při nichž elektron (resp. iont) získá od elektrického pole za dobu svého pohybu mezi po sobě následujícími srážkami kinetickou energii srovnatelnou s energií ionizační. Za těchto podmínek počne vzrůstat počet nepružných srážek uvažované nabitě částice s neutrálními molekulami, takže daný elektron (resp. iont) počne produkovat další páry nositelů proudu. Kromě toho mohou kladné ionty dopadající na katodu vyvolat sekundární emisi elektronů, čímž koncentrace nositelů proudu v plynu rovněž vzroste.

Uvedené mechanismy vzniku nosičů proudu, na nichž se podílí přiložené elektrické pole, jsou zřejmě odpovědné za vzrůst proudové hustoty v oblasti ( $d$ ) charakteristiky z obr. 7.41 a při určité kritické hodnotě  $U_z$  přiloženého napětí vedou k lavinovitému vzrůstu koncentrace nosičů proudu, a tudíž k nasazení (zapálení) samostatného výboje. Uvědomíme-li si, že střední volná dráha molekul plynu  $\bar{l}$  je nepřímo úměrná tlaku,  $\bar{l} \sim 1/p$ , a pro intenzitu pole můžeme psát  $E = U/d$ , kde  $d$  je vzdálenost elektrod, pak z požadavku rovnosti ionizační energie  $W_i$  a práce elektrického pole na dráze  $\bar{l}$ ,  $qE\bar{l} = W_i$ , můžeme odhadnout podmínky pro nasazení samostatného výboje. Z uvedených vztahů vyplývá, že zápalné napětí  $U_z$  bude funkcí součinu tlaku plynu a vzdálenosti elektrod, což je také obsahem experimentálně zjištěného Paschenova zákona.

#### ÚLOHY KE KAPITOLE 7

Ú 7.1: Předpokládejte, že atom vodíku je tvořen protonem, kolem něž obíhá elektron konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  po rovinné kruhové dráze o poloměru  $r = 0,1$  nm, a že působení mezi protonem a elektronem lze popsat Coulombovým zákonem. Užitím tohoto zjednodušeného modelu vypočítejte koeficient polarizovatelnosti  $\alpha_H$  atomu vodíku za předpokladu, že elektrické pole působící na atom je kolmé k rovině dráhy elektronu. Získanou hodnotu  $\alpha_H$  porovnejte s hodnotou určenou z naměřené relativní permitivity molekulárního vodíku  $\epsilon_r = 1,00026$  při hustotě  $\rho_M = 0,04$  kg. m<sup>-3</sup>.

Ú 7.2: Jaká je polarizovatelnost molekuly benzenu C<sub>6</sub>H<sub>6</sub>, jestliže při teplotě 20 °C byla naměřena relativní permitivita  $\epsilon_r = 2,2773$ . Benzen je nepolární a při teplotě 20 °C má hustotu  $\rho_M = 879,0$  kg. m<sup>-3</sup>.

Ú 7.3: Experimentálně zjištěná teplotní závislost relativní permitivity  $\epsilon_r$  vodních par je uvedena v tabulce 7.12. Předpokládejte, že vodní pára se chová jako ideální plyn, a vypočítejte teplotní závislost její molární polarizace. Určete polarizovatelnost molekuly vody a její dipólový moment.

Tabulka 7.12 Teplotní závislost permitivity vodních par.

T (K)	393	423	453	483
tlak (Pa)	75 300	81 210	87 100	92 970
$(\epsilon_r - 1) \cdot 10^5$	400,2	371,7	348,8	328,7

Ú 7.4: Válcová nádoba velmi malé podstavy o výšce 1 cm je naplněna kapalným chlorovodíkem HCl o hustotě 1710 kg. m<sup>-3</sup>. Molekula HCl má vlastní elektrický dipólový moment  $p = 4,44 \cdot 10^{-30}$  C. m. Určete velikost polarizace  $P$  a celkový dipólový moment  $p_V$  za předpokladu, že dipólové momenty všech molekul jsou orientovány ve směru osy nádoby.

Ú 7.5: Dvě kuličky malých rozměrů, z nichž jedna je hliníková a druhá bismutová, jsou zavěšeny v nehomogenním magnetickém poli, které má nenulový gradient ve směru spojnice středů kuliček. Obě tělesa se dotýkají a gradient magnetického pole je v celém jejich objemu konstantní. Určete pořadí umístění kuliček a vztah mezi jejich poloměry  $R_{Bi}$ ,  $R_{Al}$  tak, aby výsledná síla působící na kuličky byla nulová.

Ú 7.6: Železo má kubickou, objemově centrovanou krystalovou mřížku s mřížkovou konstantou  $a_0 = 0,286$  nm. Pro kovové železo bylo experimentálně zjištěno, že magnetický moment připadající na jeden atom při 0 K je 2,216  $\mu_B$ . Určete odpovídající spontánní magnetizaci (respektive magnetickou polarizaci) železa.

Ú 7.7: Nekomové paramagnetikum obsahuje v jednotce objemu  $n_0$  atomů s lokalizovaným magnetickým momentem  $1 \mu_B$ . Látka je umístěna v magnetickém poli 1 T při teplotě 300 K. Určete počet atomů  $\Delta n_0$ , které by vytvářely stejnou magnetizaci za předpokladu, že jejich momenty jsou zcela orientovány ve směru pole.

Ú 7.8: Vypočítejte pohyblivost volných elektronů v mědi za předpokladu, že na každý atom připadá jeden vodivostní elektron. Při výpočtu vyjděte z hodnoty měrné vodivosti podle tab. 7.7.

Ú 7.9: Vypočítejte pohyblivost nositelů proudu v germaniu s příměsí arsenu o koncentraci  $1,5 \cdot 10^{15}$  donorů/cm<sup>3</sup>. Měrná vodivost  $\gamma = 1 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ .

Ú 7.10: Při měření Hallova jevu v kovovém sodíku bylo při proudové hustotě  $j = 10^7$  A.m<sup>-2</sup> a magnetickém poli  $B = 1$  T naměřeno příčné elektrické pole  $E_H = 2,5 \cdot 10^{-3}$  V.m<sup>-1</sup>. Určete koncentraci vodivostních elektronů  $n_0$ , porovnejte ji s počtem atomů v 1 m<sup>3</sup>. Hustota sodíku je 970 kg. m<sup>-3</sup>.

Ú 7.11: Jaká je výstupní práce elektronů daného kovu, jestliže při zvýšení teploty z 2000 K na 2001 K se nasycený emisní proud zvýší o 1 %?

Ú 7.12: Roztok KCl o koncentraci 10% má měrný odpor  $\rho_R = 0,074 \Omega \cdot \text{m}$ . Určete stupeň disociace, jsou-li pohyblivosti iontů  $K^+$ ,  $Cl^-$  ve vodě rovny:  $\mu_{K^+} = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\mu_{Cl^-} = 6,8 \cdot 10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ .

Ú 7.13: Určete stupeň disociace a měrný odpor čisté vody, jsou-li známé rovnovážné koncentrace iontů  $H^+$  a  $OH^-$  rovné  $10^{-4}$  mol.m<sup>-3</sup> a pohyblivosti těchto iontů  $\mu_{H^+} = 3,2 \cdot 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ ,  $\mu_{OH^-} = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$ .

Ú 7.14: Při elektrolýze zředěného roztoku NaCl v přístroji pro stanovení Hittorfových převodních čísel byl zjištěn úbytek elektrolytu u anody 0,4 molu, prošel-

li přístrojem náboj rovný Faradayovu náboji  $F$ . Molární vodivost roztoku NaCl při nekonečném zředění  $\Lambda_{\infty} = 12,6 \text{ m}^2 \Omega^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , teplota roztoku byla  $25 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Stanovte pohyblivost iontů  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ .

Ú 7.15: Extrapolováním koncentrační závislosti molární vodivosti vodných roztoků HCl, NaCl a octanu sodného byly nalezeny molární vodivosti při nekonečném zředění (při teplotě  $25 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ):  $\Lambda_{\infty, \text{HCl}} = 42,4 \text{ m}^2 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $\Lambda_{\infty, \text{NaCl}} = 12,6 \text{ m}^2 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $\Lambda_{\infty, \text{CH}_3\text{COONa}} = 9,2 \text{ m}^2 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Vypočtete hodnotu  $\Lambda_{\infty}$  pro kyselinu octovou  $\text{CH}_3\text{COOH}$ , pro níž nelze extrapolaci v zásadě provést, a to pro neúplnou disociaci při velkých zředěních.

Ú 7.16: Určete měrný odpor vzduchu za normálního tlaku a teploty, jestliže díky přirozené radioaktivitě a kosmickému záření vzniká v  $1 \text{ m}^3$  za každou sekundu  $5 \cdot 10^6$  iontových párů.

Ú 7.17 Vzduch mezi deskami rovinného kondenzátoru je účinkem ionizujícího záření ionizován homogenně v celém objemu. Za jednotkou času vzniká v objemové jednotce  $\Delta n$  iontových párů. Obě desky kondenzátoru jsou uzemněny, v prostoru mezi elektrodami je ustavena rovnováha mezi ionizací a rekombinací, která je určena činitelem rekombinace  $K_r$ . Stanovte:

- rovnovážnou koncentraci iontových párů  $n_0$ ,
- časovou závislost koncentrace iontových párů  $n(t)$  po vypnutí ionizujícího záření,
- uvažte, jak by bylo možné využít závislosti  $n(t)$  k měření činitele rekombinace  $K_r$ .

## 8 Základy teorie elektrických obvodů

### 8.1 Základní pojmy

#### 8.1.1 Klasifikace elektrických obvodů a jejich prvků

V oddílu 3.2 byl zaveden pojem stacionárního elektrického obvodu, který byl v oddílu 4.2 dále zobecněn pro kvazistacionární přiblížení. V této kapitole, která má spíše technický charakter, využijeme uvedené poznatky k nalezení obecných postupů pro řešení především lineárních elektrických obvodů, čímž budeme rozumět nalezení vztahů mezi napětími a proudy v jejich jednotlivých prvcích.

Elektrickým obvodem rozumíme obecně libovolnou kombinaci jednotlivých stavebních prvků (součástí), kterými mohou být zdroje elektrické energie (elektromotorického napětí), vodiče, rezistory, cívky, kondenzátory, transformátory, elektronky, výbojové trubice, různé polovodičové součástky (diody, tranzistory, fotoodpory aj.) Součástky, které mohou být trvalým zdrojem elektrické energie, nazýváme *aktivními prvky*, součástky, které tuto vlastnost nemají, jsou *prvky pasivní*. Prvky připojené do obvodu dvěma svorkami (například kondenzátor, cívka, dioda) se nazývají *dvojpóly*. Kromě nich se v elektrických obvodech vyskytují hojně prvky složitější. Prvky připojené do obvodu čtyřmi svorkami (například transformátor, elektronka, tranzistor) se nazývají *čtyřpóly*.<sup>75</sup>

Uvedená definice elektrického obvodu je značně obecná. Obvod může obsahovat libovolný počet prvků. Může jej tvořit jediný prvek připojený ke zdroji elektrické energie, ale též kombinace prvků vytvářející funkční celek složitějšího zařízení, například televizoru či počítače. Všechna elektrická zařízení lze tedy považovat za soustavu elektrických obvodů. Úlohy týkající se řešení elektrických obvodů mohou mít dvojí charakter. Je-li dáno složení obvodu, tj. parametry a vzájemné propojení jednotlivých prvků, je třeba hledat proudy tekoucí v těchto prvcích. Takovou úlohu nazýváme *analýzou elektrického obvodu*. Naopak hledáme-li konfiguraci a parametry prvků potřebných pro dosažení požadovaných vlastností elektrického obvodu, mluvíme o *syntéze elektrického obvodu*.

Syntéza elektrického obvodu je obecně nejednoznačná úloha, kterou je třeba konkretizovat podle požadavků a potřeb jednotlivých odvětví experimentální fy-

<sup>75</sup> V novější technické literatuře se zavádí jiná terminologie vycházející z toho, že vstupní a výstupní svorky daného prvku tvoří dvojice, tzn. vstupní a výstupní brány, kterými je prvek připojen do obvodu a kterými procházejí jednotlivé signály. Prvek o  $2n$  svorkách má tedy  $n$  bran. Mluví se pak o  $n$ -braném prvku či o  $n$ -branu. Místo názvu dvojpól a čtyřpól se pak užívá označení *jednobran* a *dvojbřan*.

ziky, laboratorní techniky či elektrotechniky. Problematikou tohoto druhu se nebudeme zabývat a soustředíme se nadále jen na analýzu elektrických obvodů. Pro konkretizaci jejich jednotlivých postupů je však třeba elektrické obvody blíže klasifikovat. To je možné provést podle několika hledisek.

*Aktivním* nazýváme takový obvod, ve kterém působí alespoň jeden aktivní prvek, tj. prvek schopný trvale dodávat energii. Aktivním je tedy například obvod, ve kterém působí galvanický či termoelektrický článek, nikoliv však oscilační obvod (viz čl. 4.2.2), ve kterém je dočasným zdrojem energie nabitý kondenzátor. Ve složitějším případě lze za aktivní prvek považovat elektronku či tranzistor v zesilovači, i když je jejich funkce závislá na připojení k dalším pomocným napájecím zdrojům energie. Obvody sestavené výhradně z pasivních prvků nazýváme *pasivními*.

Z jiného hlediska dělíme elektrické obvody na *lineární* a *nelineární*. Za lineární považujeme elektrické obvody vytvořené jen z lineárních prvků, tj. z prvků, jejichž parametry nezávisí na protékajícím proudu či přiloženém napětí. Obvody, obsahující alespoň jeden prvek který nemá tyto vlastnosti, nazýváme nelineárními. Příkladem lineárního prvku je rezistor zhotovený z vodiče splňujícího Ohmův zákon, pokud můžeme předpokládat, že při průchodu proudem se prvek zanedbatelně neohřívá Jouleovým teplem. Jiným příkladem je cívka, jejíž magnetické pole je rozloženo převážně ve vzduchu. Naopak cívka navinutá na feromagnetickém jádru je obecně prvkem nelineárním.

Jako další kritérium pro klasifikaci elektrických obvodů může sloužit charakter časové závislosti elektromotorického napětí či proudu použitých aktivních prvků. Podle tohoto kritéria je možné rozeznávat zejména dva velmi důležité typy – *obvody stejnosměrné* a *střídavé*. Stejnosměrným nazýváme obvod, ve kterém působí jen zdroje s časově neproměnným elektromotorickým napětím (proudem). Podobně o střídavém obvodu mluvíme, mají-li jeho zdroje harmonické střídavé elektromotorické napětí (proud) o dané kruhové frekvenci  $\omega$  (srov. čl. 4.2.2). Jak bylo ukázáno v oddílu 4.2, bezprostředně po zapnutí zdrojů mohou být proudy v jednotlivých prvcích stejnosměrného obvodu časově proměnné. Říkáme, že obvod je v *neustáleném stavu*. Po uplynutí dostatečně dlouhé doby přejde obvod do *ustáleného stavu* charakterizovaného časově neproměnnými proudy v jednotlivých prvcích. Stejnosměrný obvod v ustáleném stavu je tedy obvodem stacionárním. Podobná situace nastává i u střídavých obvodů. Bezprostředně po zapnutí zdrojů nemusí být proudy v jednotlivých prvcích harmonickou funkcí času; obvod je v neustáleném stavu. Po uplynutí dostatečně dlouhé doby přejde obvod do ustáleného stavu; proudy v jednotlivých prvcích jsou střídavé, tj. jsou harmonickou funkcí času s frekvencí odpovídající frekvenci zdrojů (srov. čl. 4.2.2).

Vedle stejnosměrných a střídavých obvodů se v technice často používají obvody obsahující zdroje se složitějším průběhem elektromotorického napětí.

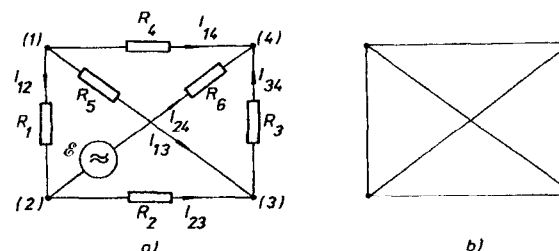
Důležitou skupinu tvoří obvody s obecně periodickým (nesinusovým) průběhem elektromotorického napětí.

Obvody znázorňujeme pomocí *schématu*. Ve schématu obvodu jsou zakresleny příslušnými značkami všechny prvky, ze kterých je obvod složen, a tyto značky jsou propojeny úsečkami, které reprezentují vodiče propojující jednotlivé prvky. Příklad schématu obvodu složeného ze šesti rezistorů a jednoho zdroje je uveden na obr. 8.1a. Při tvorbě schématu není zpravidla důležité skutečné prostorové rozmístění prvků, ale jen jejich vzájemné propojení, tj. topologie obvodu. Je proto možné dbát na to, aby schéma bylo co nejpřehlednější.

V některých úvahách není třeba znát, z jakých prvků je obvod sestaven, ale je třeba uvažovat jen způsob jejich propojení. Pak pro zjednodušení kreslíme jen *kostru obvodu*, jejíž příklad pro obvod z obr. 8.1a je uveden na obr. 8.1b.

Při popisu elektrických obvodů zavádíme pojem *uzlu* a *větve* obvodu. Uzlem rozumíme místo, ve kterém se stýkají více než dva vodiče propojující prvky obvodu. Obvod znázorněný na obr. 8.1 má tedy celkem čtyři uzly. Větvi nazýváme část obvodu spojující dva sousední uzly. Obvod z obr. 8.1 má celkem šest větví. Větve obvodu mohou obecně obsahovat více než jeden prvek. Protože však zpravidla není obtížné spočítat, jak se chová sériové či paralelní spojení několika prvků, je možné obecně reprezentovat každou větev jediným prvkem.

Soustavu větví propojených tak, že tvoří uzavřenou křivku, nazýváme *smyčkou obvodu*.



Obr. 8.1 Wheatstonův můstek: a) schéma obvodu, b) kostra obvodu.

### 8.1.2 Základní vlastnosti elektrických dvojpólů a čtyřpólů

Dvojpóly a čtyřpóly jsou nejčastěji se vyskytující stavební prvky elektrických obvodů. Význam jejich zavedení, tj. klasifikace prvků elektrických obvodů podle „počtu pólů“ (svorek), spočívá především v tom, že je možné bez ohledu na konkrétní vnitřní strukturu jednotlivých součástí zavést obecné parametry charakterizující kvantitativní vztahy mezi napětími a proudy v jednotlivých pólech, a vybudovat tak obecné postupy řešení libovolně složitých elektrických obvodů. Plné řešení této problematiky přesahuje rámec úvodní učebnice. Zmíníme se proto jen stručně o některých vlastnostech tzv. *odporových dvojpólů*

a čtyřpólů (viz následující odstavec), které jsou důležité zejména pro řešení nelineárních obvodů.

### a) Dvojpól

Je to nejjednodušší typ stavebního prvku elektrických obvodů. Jeho vlastnosti jsou úplně popsány, je-li zadána vzájemná souvislost mezi proudem a napětím na dvojpólu. Obě tyto veličiny mohou být obecně časově závislé. Jejich vzájemná závislost nemusí být dána jen funkční závislostí okamžitých hodnot proudu  $I(t)$  a napětí  $U(t)$ , ale též vzájemnou funkční závislostí časových derivací obou těchto veličin. *Charakteristická funkce dvojpólu*, která vyjadřuje uvedenou souvislost mezi proudem a napětím, pak může mít tvar

$$F\left(I, \frac{dI}{dt}, \dots, \frac{d^n I}{dt^n}, U, \frac{dU}{dt}, \dots, \frac{d^m U}{dt^m}\right) = 0. \quad (8.1)$$

Dvojpól, jehož charakteristická funkce má tvar lineární kombinace veličin  $d^j I/dt^j$ ,  $d^k U/dt^k$ ,  $j, k = 0, 1, \dots$ , se nazývá *lineární dvojpól*. Dvojpól, jehož charakteristická funkce má jiný tvar, se nazývá *dvojpól nelineární*. S některými příklady lineárních dvojpólů jsme se setkali v kapitolách 3 a 4. Nejjednodušším příkladem je rezistor zhotovený z vodiče splňujícího Ohmův zákon. Zanedbáme-li kapacitu a indukčnost vodiče a můžeme-li předpokládat, že při průchodu proudem se vodič ztuhlá neohřeje Jouleovým teplem, je charakteristická funkce rezistoru dána vztahem (3.19)

$$U(t) = RI(t)$$

vyjadřujícím Ohmův zákon, přičemž odpor  $R$  rezistoru nezávisí na procházejícím proudem. Jinými příklady jsou ideální cívka (tj. cívka s danou indukčností  $L$  a zanedbatelným odporem jejího vodiče) a ideální kondenzátor (tj. kondenzátor s danou kapacitou  $C$  a nekonečně velkým odporem mezi elektrodami). Jejich charakteristické funkce jsou postupně dány vztahy (viz čl. 4.2.1)

$$U_L(t) = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (8.2)$$

$$I_C(t) = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (8.3)$$

Rezistor je současně příkladem tzv. *odporového dvojpólu*, jehož charakteristická funkce je dána jen vzájemnou závislostí okamžitých hodnot proudu a napětí. Odporovým dvojpólem tedy obecně nazýváme dvojpól, jehož charakteristická funkce má tvar

$$F(I, U) = 0. \quad (8.4)$$

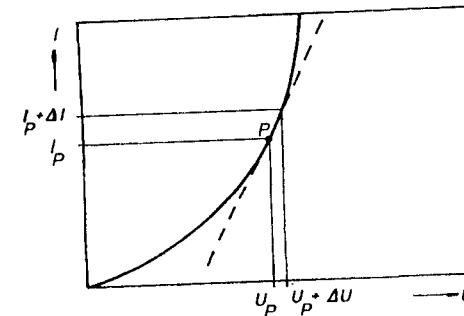
Můžeme ji pak vyjádřit v explicitním tvaru

$$U = f_1(I), \text{ respektive } I = f_2(U) \quad (8.5)$$

a mluvíme o *voltampérové charakteristice dvojpólu*.

Voltampérová charakteristika odporového dvojpólu může být dána buď analyticky, nebo grafem či tabulkou empiricky zjištěných odpovídajících si hodnot napětí a proudu. Za příklad analytického tvaru může sloužit Langmuirův třípolovinový vztah, vyjadřující voltampérovou charakteristiku vakuové diody (viz čl. 7.3.7).

Při řešení obvodu, v němž je zařazen nelineární odporový dvojpól, je obecně nutné využít vlastnosti jeho voltampérové charakteristiky. Velmi často je výhodné použít grafickou metodu, jejíž příklad bude uveden v čl. 8.3.3. V praxi však často nastává situace, kdy se hodnoty časově proměnného napětí a proudu dvojpólu pohybují jen v úzkém oboru charakteristiky, v okolí tzv. *pracovního bodu P* (viz obr. 8.2). Charakteristiku pak lze v okolí pracovního bodu linearizovat a pro proměnné složky napětí a proudu lze dvojpól přibližně považovat za lineární.



Obr. 8.2 K výkladu dynamického odporu dvojpólu.

Jsou-li totiž  $I_P$ ,  $U_P$  proud a napětí odpovídající pracovnímu bodu, lze vztah mezi malými změnami proudu a napětí  $\Delta I$ ,  $\Delta U$  přibližně vyjádřit ve tvaru

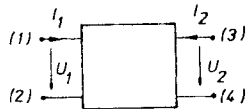
$$\Delta U = \left( \frac{dU}{dI} \right)_P \Delta I = R_d \Delta I. \quad (8.6)$$

Vztah (8.6) nahrazuje charakteristiku dvojpólu tečnou vedenou k charakteristice v pracovním bodě. Vlastnosti dvojpólu jsou pro malé změny napětí a proudu charakterizovány veličinou  $R_d = (dU/dI)_P$ , která se nazývá *dynamický* (či *diferenciální*) *odpor* v daném pracovním bodě. Jeho převrácená hodnota  $G_d = (dI/dU)_P$  se nazývá *dynamická* (diferenciální) *vodivost*. Jejím využitím lze analogicky k (8.6) psát

$$\Delta I = G_d \Delta U. \quad (8.7)$$

## b) Čtyřpól

Čtyřpólem se obecně rozumí součástka elektrického obvodu, která má dvě dvojice svorek, přičemž jedna dvojice se považuje za vstupní a druhá za výstupní. Zpravidla je možné jednu vstupní a jednu výstupní svorku ve schématu ztotožnit. Na obrázku 8.3 je uvedena schematická značka čtyřpólu. Svorky (1), (2), proud  $I_1$  a napětí  $U_1$  jsou vstupními, svorky (3), (4), proud  $I_2$  a napětí  $U_2$  jsou výstupními.



Obr. 8.3 Schematická značka čtyřpólu.

Mezi vstupními a výstupními napětími a proudy čtyřpólu musí existovat vzájemné vztahy. Je zřejmé, že chování obecného nelineárního čtyřpólu v obvodu bude jednoznačně určeno, budeme-li znát jeho dvě charakteristické rovnice. V obecném případě to mohou být rovnice typu (8.1), které závisí na okamžitých hodnotách veličin  $U_1, I_1, U_2, I_2$  a na jejich časových derivacích do daného řádu. Čtyřpól, jehož charakteristické rovnice nezávisí na derivacích a mají tedy tvar

$$F_1(U_1, I_1, U_2, I_2) = 0, \quad F_2(U_1, I_1, U_2, I_2) = 0, \quad (8.8)$$

se nazývá *odporovým čtyřpólem*. Jeho vlastnostmi se budeme zabývat poněkud blíže.

Implicitní charakteristické rovnice (8.8) lze řešit pro libovolnou dvojici z proměnných  $U_1, I_1, U_2, I_2$ , čímž získáme dvojici explicitních charakteristických rovnic. Existuje zřejmě šest obecně ekvivalentních možností pro vyjádření těchto rovnic. V praxi je zavedeno využívání dvou z nich, a to tzv. „*rovnice typu h*“ (hybridních rovnic)

$$\begin{aligned} U_1 &= h_1(I_1, U_2), \\ I_2 &= h_2(I_1, U_2), \end{aligned} \quad (8.9)$$

kteří vzniknou řešením (8.8) pro  $U_1, I_2$ , a „*rovnice typu y*“ (admitančních rovnic)

$$\begin{aligned} I_1 &= y_1(U_1, U_2), \\ I_2 &= y_2(U_1, U_2) \end{aligned} \quad (8.10)$$

získaných řešením (8.8) pro  $I_1$  a  $I_2$ .

Pro reálné nelineární čtyřpóly se charakteristické funkce zjišťují zpravidla empiricky, měřením vzájemné závislosti dvou veličin, přičemž třetí veličinu v dané funkci považujeme za parametr. Získáme tak soustavu charakteristik popisujících vlastnosti čtyřpólu. Celkem je pro daný čtyřpól zřejmě možné se-

strojit čtyři typy charakteristik. Podrobněji je o charakteristikách čtyřpólu i o metodách jejich měření pojednáno např. v [5].

Soubor vzájemně si odpovídajících obvodových veličin  $U_1, I_1, U_2, I_2$ , vyhovujících charakteristickým rovnicím, nazýváme *pracovním bodem čtyřpólu*. Je zřejmé, že k jednoznačnému určení pracovního bodu potřebujeme zadat dvě z těchto veličin. Zbývající pak lze určit z charakteristických rovnic. Podobně jako v případě dvojpólu, i zde nastává často situace, kdy se hodnoty vstupních a výstupních napětí a proudů jen málo odlišují od hodnot  $U_{1,p}, I_{1,p}, U_{2,p}, I_{2,p}$ , odpovídajících jistému pevnému, tzv. *klidovému pracovnímu bodu*. Charakteristické rovnice pak lze linearizovat. Malé odchylky obvodových veličin  $\Delta U_1, \Delta I_1, \Delta U_2, \Delta I_2$  od klidových hodnot lze přibližně vyjádřit pomocí totálního diferenciálu charakteristických rovnic (8.9), popř. (8.10). Lze tedy psát

$$\Delta U_1 = h_{11}\Delta I_1 + h_{12}\Delta U_2, \quad (8.11)$$

$$\Delta I_2 = h_{21}\Delta I_1 + h_{22}\Delta U_2,$$

přičemž jsme zavedli tzv. „*parametry h*“

$$h_{11} = \left( \frac{\partial U_1}{\partial I_1} \right)_p, \quad h_{12} = \left( \frac{\partial U_1}{\partial U_2} \right)_p, \quad h_{21} = \left( \frac{\partial I_2}{\partial I_1} \right)_p, \quad h_{22} = \left( \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right)_p. \quad (8.12)$$

Alternativně platí

$$\Delta I_1 = y_{11}\Delta U_1 + y_{12}\Delta U_2, \quad (8.13)$$

$$\Delta I_2 = y_{21}\Delta U_1 + y_{22}\Delta U_2,$$

kde

$$y_{11} = \left( \frac{\partial I_1}{\partial U_1} \right)_p, \quad y_{12} = \left( \frac{\partial I_1}{\partial U_2} \right)_p, \quad y_{21} = \left( \frac{\partial I_2}{\partial U_1} \right)_p, \quad y_{22} = \left( \frac{\partial I_2}{\partial U_2} \right)_p. \quad (8.14)$$

jsou tzv. „*parametry y*“. Oba typy parametrů nejsou ovšem nezávislé. Snadno bychom našli vzájemné relace

$$y_{11} = h_{11}^{-1}, \quad y_{12} = -\frac{h_{12}}{h_{11}}, \quad y_{21} = \frac{h_{21}}{h_{11}}, \quad y_{22} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{h_{11}}. \quad (8.15)$$

Parametry  $h$ , respektive parametry  $y$  plně popisují vlastnosti daného nelineárního čtyřpólu v bezprostředním okolí klidového pracovního bodu. Máme-li lineární čtyřpól, platí charakteristické rovnice typu (8.11), popř. (8.13), přesně pro libovolné hodnoty obvodových veličin. Parametry  $h$  či  $y$  popisují tedy úplně jeho vlastnosti. Ze vzorců (8.12), respektive (8.14) je vidět, že zatímco parametry  $h$  mají smíšené (hybridní) rozměry, všechny parametry  $y$  mají rozměr admitance, což koresponduje s alternativními názvy charakteristických rovnic (8.9), popř. (8.10).

## 8.2 Stejnoseměrné a střídavé lineární obvody v ustáleném stavu

V tomto oddílu navážeme bezprostředně na poznatky vyložené v oddílech 3.2 a 4.2 a budeme je konkretizovat pro naši speciálnější situaci.

### 8.2.1 Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla v komplexní symbolice

Nejdříve budeme diskutovat vztah mezi napětím a proudem na odporu  $R$ , kapacitě  $C$  a indukčnosti  $L$ <sup>76</sup> v ustáleném stavu střídavého obvodu. Jak bylo ukázáno v článku 4.2.2, musí mít proudy a napětí na každém prvku harmonický průběh, a jsou tedy dány vztahy (4.48) a (4.49). Na druhé straně musí být ovšem pro jejich okamžité hodnoty na jednotlivých prvcích splněny vztahy (3.19), (8.2) a (8.3). Přímým výpočtem dostaneme vyjádření vzájemné souvislosti okamžitých hodnot napětí a proudů

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_I) = U_{R,0} \cos(\omega t + \varphi_I), \\ I_C(t) &= \omega C I_{C,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{U_C} + \frac{\pi}{2}\right) = U_{C,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{U_C} + \frac{\pi}{2}\right), \\ U_L(t) &= \omega L I_{L,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{I_L} + \frac{\pi}{2}\right) = U_{L,0} \cos\left(\omega t + \varphi_{I_L} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

i vyjádření vzájemné souvislosti jejich amplitud

$$U_{R,0} = RI_{R,0}, \quad U_{C,0} = \frac{I_{C,0}}{\omega C}, \quad U_{L,0} = \omega L I_{L,0}. \quad (8.17)$$

Z rovnic (8.16) je vidět, že na rozdíl od odporu mají proudy a napětí na indukčnosti a kapacitě rozdílné fázové konstanty, lišící se o  $\pm\pi/2$ :  $\varphi_{U_C} - \varphi_{I_C} = -\pi/2$ ,  $\varphi_{U_L} - \varphi_{I_L} = \pi/2$ . Vztahy (8.17) jsou konkrétním vyjádřením relace (4.50), která definuje impedanci. Pro impedanci odporu, indukčnosti a kapacity dostáváme postupně

$$Z_R = R, \quad Z_L = \omega L, \quad Z_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (8.18)$$

Nyní ukážeme, že využití vlastností komplexních čísel umožňuje vyjádřit výsledky (8.16) i (8.17) jediným komplexním vztahem typu (4.50). Impedance však v tomto novém pojetí bude obecně komplexní číslo a bude vyjadřovat nejen

<sup>76</sup> Z našich úvah v tomto a následujících čtyřech člancích vylučujeme vzájemné indukčnosti. Jejich vliv bude probíran v článku 8.2.6.

poměr amplitud napětí a proudu, ale i vzájemný vztah jejich fázových konstant. Přejít do oboru komplexních čísel nepřinese ovšem žádné změny ve fyzikálním obsahu. Umožní jen formálně jednodušší popis vlastností obvodů v ustáleném stavu, který vynikne zejména při formulaci obecných metod řešení. Podstata uvedených výhod spočívá v možnosti jednoduššího vyjádření algebraických operací, časových derivací a integrálů studovaných veličin.

Goniometrickou funkci vyjadřující časovou závislost střídavého proudu či napětí je možné zapsat ve tvaru

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] = \operatorname{Re}[e^{i(\omega t + \varphi)}]. \quad (8.19)$$

Okamžitou hodnotu střídavého napětí či proudu je tudíž možné vyjádřit jako reálnou část komplexních veličin

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= U_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)} = \bar{U} e^{i\omega t}, \\ \hat{I}(t) &= I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \bar{I} e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

tedy

$$\begin{aligned} U(t) &= \operatorname{Re} \hat{U}(t), \\ I(t) &= \operatorname{Re} \hat{I}(t). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Veličinami  $\hat{U}(t)$ ,  $\hat{I}(t)$  mohou být tedy proudy a napětí v každém okamžiku reprezentovány. Je přitom zřejmé, že časově závislý člen  $\exp(i\omega t)$  nenese při zadané frekvenci o sledované veličině žádnou informaci. Stačí tedy proudy a napětí reprezentovat jejich *komplexními amplitudami*, které dle (8.20) zavádíme vztahy

$$\begin{aligned} \bar{U} &= U_0 e^{i\varphi_U}, \\ \bar{I} &= I_0 e^{i\varphi_I}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Použijeme-li vyjádření okamžitých hodnot napětí a proudu (8.21) v základních vztazích (3.51), (8.2) a (8.3), dostaneme podmínky pro komplexní amplitudy proudu a napětí na jednotlivých prvcích

$$\bar{U}_R = R \bar{I}_R, \quad \bar{U}_L = i\omega L \bar{I}_L, \quad \bar{U}_C = \frac{\bar{I}_C}{i\omega C}. \quad (8.23)$$

Tyto vztahy můžeme reprezentovat jediným obecným výrazem

$$\bar{U} = Z \bar{I}, \quad (8.24)$$

ve kterém veličina  $\bar{Z}$  značí *komplexní impedanci* příslušného prvku. Pro odpor, indukčnost a kapacitu platí postupně

$$\begin{aligned}\bar{Z}_R &= R, \\ \bar{Z}_L &= i\omega L, \\ \bar{Z}_C &= \frac{1}{i\omega C}.\end{aligned}\quad (8.25)$$

Alternativně k (8.24) lze psát

$$\bar{I} = \bar{Y}U. \quad (8.26)$$

Veličina  $\bar{Y} = 1/\bar{Z}$  se nazývá (komplexní) *admitanci* prvku. Pro admitanci odporu, indukčnosti a kapacity platí postupně

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R}, \quad \bar{Y}_L = \frac{1}{i\omega L}, \quad \bar{Y}_C = i\omega C. \quad (8.27)$$

Výraz (8.24), popř. (8.26), který platí pro libovolný z uvažovaných prvků, má tvar formálně shodný se vztahem (3.19) vyjadřujícím Ohmův zákon v integrálním tvaru. Proto se tyto vztahy nazývají *komplexním vyjádřením Ohmova zákona* (někdy také zobecněným Ohmovým zákonem) pro střídavý obvod v ustáleném stavu. Jeho význam spočívá v tom, že umožňuje aplikovat metody řešení stacionárních obvodů též na střídavé obvody v ustáleném stavu.

Podobně jako Ohmův zákon lze i Kirchhoffova pravidla pro střídavý obvod v ustáleném stavu vyjádřit ve formálně stejném tvaru jako Kirchhoffova pravidla pro stacionární obvod, použijeme-li vlastností komplexních čísel. Všimněme si nejdříve *I. Kirchhoffova pravidla*, které pro kvazistacionární obvod říká (viz čl. 4.2.1), že algebraický součet okamžitých hodnot proudů přitékajících do uzlu musí být v každém okamžiku nulový. Jelikož v případě střídavého obvodu v ustáleném stavu můžeme okamžité hodnoty proudů přitékajících do uzlu vyjádřit komplexními veličinami typu (8.20), můžeme *I. Kirchhoffovo pravidlo* zapsat ve tvaru

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \hat{I}_k(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^N \hat{I}_k(t) = 0.$$

Je-li tento vztah splněn v libovolném čase, musí být identicky rovna i imaginární část součtu, neboť hodnoty jejich jednotlivých členů v čase  $t' = t \pm \pi/2$  jsou rovny hodnotám členů reálné části v čase  $t$ . Musí tedy platit

$$\sum_{k=1}^N \hat{I}_k(t) = 0$$

a po vykrácení časového faktoru  $\exp(i\omega t)$  také

$$\boxed{\sum_{k=1}^N \bar{I}_k = 0}, \quad (8.28)$$

což je hledaný tvar *I. Kirchhoffova pravidla*.

*Druhé Kirchhoffovo pravidlo* pro kvazistacionární obvod říká (viz čl. 4.2.1), že součet napětí na všech odporech, kapacitách a indukčnostech, zařazených do uzavřené smyčky, musí být v každém okamžiku roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce. Střídavá elektromotorická napětí o průběhu (4.41) můžeme opět vyjádřit komplexními veličinami typu (8.20). Použijeme-li i pro vyjádření napětí na jednotlivých prvcích komplexní symboliku, dostaneme

$$\sum_{k=1}^M \operatorname{Re} \hat{\mathcal{E}}_k(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^M \hat{\mathcal{E}}_k(t) = \sum_{l=1}^N \operatorname{Re} \bar{Z}_l \hat{I}_l(t) = \operatorname{Re} \sum_{l=1}^N \bar{Z}_l \hat{I}_l(t).$$

Obdobnou rovnici musí z důvodů, které jsme uvedli při vyšetřování *I. Kirchhoffova pravidla*, splňovat i imaginární část. Odtud, po zkrácení faktorem  $\exp(i\omega t)$ , dostaneme rovnici

$$\boxed{\sum_{k=1}^M \hat{\mathcal{E}}_k = \sum_{l=1}^N \bar{Z}_l \hat{I}_l}, \quad (8.29)$$

která vyjadřuje *II. Kirchhoffovo pravidlo* pomocí komplexních amplitud příslušných veličin.

Při vyjádření celkového elektromotorického napětí působícího v obvodu je ovšem třeba brát ohled na polaritu zdrojů. U stejnosměrných zdrojů je znamení elektromotorického napětí dáno vzájemnou orientací vtištěných intenzit a zvoleného směru integrace, tj. zvolené orientace smyčky (viz čl. 3.2.4). Při praktickém řešení obvodu bereme tuto skutečnost v úvahu tím, že elektromotorické napětí považujeme za kladné, odpovídá-li orientace obvodu postupu (vnitřkem zdroje) od záporného pólu ke kladnému. U střídavých zdrojů může být polarita zahrnuta ve vyjádření komplexní amplitudy elektromotorického napětí. (Při změně polarity se fázová konstanta změní o  $\pi$ ). Pro daný zdroj však musí být známo, jaké polaritě použítá komplexní amplituda elektromotorického napětí odpovídá. Ve schématu odvodu se použítá polarita zpravidla vyznačuje šipkou u schematické značky zdroje. Souhlasí-li zvolená orientace obvodu s polaritou zdroje, používá se zadaná komplexní amplituda jeho elektromotorického napětí s kladným znaménkem. V opačném případě je třeba změnit fázovou konstantu o  $\pi$ , tj. zadanou komplexní amplitudu brát se znaménkem minus. Podobně zásady platí i pro vyjadřování jednotlivých členů z pravé strany (8.29). Souhlasí-li směr proudu se zvolenou orientací obvodu, bereme komplexní amplitudu

proudu s kladným znaménkem. V opačném případě je třeba ji brát se znaménkem záporným.

Shrneme-li výsledky tohoto článku, můžeme říci, že pomocí komplexních amplitud napětí a proudů a pomocí komplexní impedance se podařilo vyjádřit Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla pro ustálený stav střídavého obvodu vztahy (8.24), (8.28) a (8.29), které mají formálně shodný tvar jako odpovídající výrazy (3.19), (3.38) a (3.39) pro stacionární obvod. Tato okolnost umožňuje použít pro řešení obou typů obvodů stejné postupy.

### 8.2.2 Vlastnosti reálných dvojpólů

V předchozím článku jsme popsali chování odporu, kapacity a indukčnosti ve střídavém obvodu pomocí jejich impedancí. Ve skutečnosti, budeme-li chtít realizovat uvedené prvky skutečnými součástkami, jako je rezistor, kondenzátor a cívka, zjistíme, že je to možné jen přibližně. Nakolik se skutečná součástka blíží svými vlastnostmi ideálnímu prvku závisí na její konstrukci, ale také na frekvenčním oboru, ve kterém součástku používáme. Tak například rezistory, zejména pokud jsou vinuty z odporových drátů, mají rovněž určitou indukčnost. Tato parazitní vlastnost se téměř neuplatní při dostatečně nízkých frekvencích, ale může hrát podstatnou roli při frekvencích vysokých. U indukčnosti je tomu naopak. Cívka, i když je navinuta z nejlepšího vodiče, má určitý odpor. Vliv odporu se projevuje zřetelněji při nízkých frekvencích, kdy je impedance indukčnosti malá. Při vysokých frekvencích se sice efektivní odpor zvětšuje vlivem skin efektu (viz odst. 5.3.4c), navíc se však u cívky uplatňuje kapacita mezi jednotlivými závity nebo jednotlivými vrstvami závitů. Jak uvidíme, cívka může při určitých frekvencích vykazovat vlastní rezonanci.

U kondenzátoru je limitujícím faktorem vodivost dielektrického prostředí mezi elektrodami a jeho vlastnosti při polarizování v časově proměnných polích. Konečná vodivost dielektrika, jímž se vyplňuje prostor mezi elektrodami z konstrukčních důvodů, ale také pro zvýšení kapacity, se uplatní zejména při nízkých frekvencích. Při vysokých frekvencích ovlivňuje vlastnosti kondenzátoru navíc vlastní indukčnost elektrod a přívodů k nim a na druhé straně také ztráty vznikající při cyklické polarizaci dielektrika.

Podobné účinky se projevují i u reálných aktivních dvojpólů. Již v článku 3.2.4 jsme poznali, že reálný zdroj elektromotorického napětí má konečný vnitřní odpor, který způsobuje pokles svorkového napětí při odběru proudu (srov. vztah (3.33)). U zdrojů časově proměnného elektromotorického napětí se navíc může uplatnit vlastní indukčnost vodičů, ze kterých je zdroj zhotoven, i kapacity mezi vodiči nacházejícími se na různých potenciálech.

Uvedené okolnosti způsobují, že žádná reálná součástka se nechová jako ideální odpor s čistě reálnou impedancí ani jako ideální kapacita či indukčnost s impedancí čistě imaginární. To vede k nutnosti uvažovat prvky s obecně komplexní impedancí

$$\bar{Z} = R + iX = Z_0 e^{i\psi}. \quad (8.30)$$

Její absolutní hodnota určuje podle vztahu (4.50) poměr amplitud napětí a proudu na daném prvku. Fázový úhel  $\psi$  je zřejmě dán vztahem

$$\psi = \arctg \frac{X}{R} \quad (8.31)$$

a podle (8.24) určuje rozdíl fázových konstant napětí a proudu

$$\bar{U} = U_0 e^{i\varphi_U} = \bar{Z} \bar{I} = Z_0 I_0 e^{i\psi} e^{i\varphi_I} = Z_0 I_0 e^{i(\psi + \varphi_I)}. \quad (8.32)$$

Pro prvky s obecně komplexní impedancí lze beze změny reprodukovat úvahy předchozího článku při formulaci Kirchhoffových pravidel v komplexní symbolice. Vztahy (8.28) a (8.29) budou tedy platit i pro obvody obsahující tyto obecné prvky.

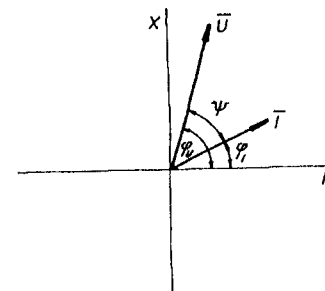
Díky formální shodě ve vyjádření Ohmova zákona i Kirchhoffových pravidel je možné jednoduše vypočítat výslednou impedanci sériově či paralelně spojených prvků, neboť je možné přímo reprodukovat postup uvedený v příkladu 3.2.6b. Pro výslednou impedanci  $\bar{Z}_s$  sériového spojení  $N$  prvků o impedancích  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_N$  platí analogicky

$$\bar{Z}_s = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_N \quad (8.33)$$

a pro výslednou impedanci  $\bar{Z}_p$  jejich paralelního spojení analogicky k (3.52)

$$\frac{1}{\bar{Z}_p} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_N}. \quad (8.34)$$

Fázové poměry na jednotlivých prvcích i v celém obvodu je možné velmi názorně vyjádřit graficky zobrazením komplexních amplitud jednotlivých veličin v Gaussově rovině. Mluvíme o *fázovém diagramu*. Na obrázku 8.4 je uveden jednoduchý příklad fázového diagramu napětí a proudu na prvku o impedanci



Obr. 8.4 Příklad fázového diagramu prvku s komplexní impedancí.



danou vzorcem (8.30). V následujícím textu této kapitoly budou uvedeny další příklady fázových diagramů složitějších obvodů.

Jak vyplynulo z obecných úvah provedených v tomto článku, je možné chování každého reálného prvku elektrického obvodu chápat jako kombinaci fyzikálních projevů elektrické vodivosti, indukčnosti a kapacity materiálů, z nichž je prvek zhotoven. Tyto vlastnosti jsou u aktivních prvků doplněny o fyzikálních projevy polí vtištěných sil. Daný reálný prvek je pak možné aproximovat vzájemným propojením konečného počtu ideálních zdrojů elektromotorického napětí, ideálních rezistorů, cívek a kondenzátorů. Tato aproximace se nazývá *náhradní schéma* daného prvku. Úloha nalézt náhradní schéma daného prvku však není jednoznačná. Ve skutečnosti se vždy snažíme, aby náhradní schéma bylo co nejjednodušší a aby přitom co nejlépe aproximovalo prvek v dané situaci. Jako aplikaci poznatků vyložených v tomto článku uvedeme několik příkladů náhradních schémat.

#### a) Náhradní schéma lineárního zdroje

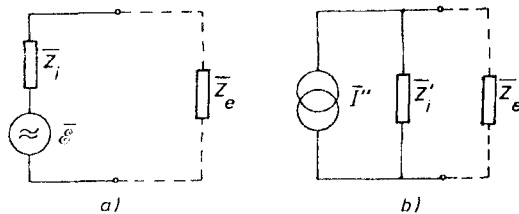
Jednou z možností jak vytvořit náhradní schéma střídavého zdroje je zobecnění postupu použitého v článku 3.2.4. Předpokládáme-li, že v části proudové trubice  $l_i$  vzniká, místo časově neproměnného, střídavé elektromotorické napětí  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$  (například vlivem elektromagnetické indukce), bude proud  $I(t)$  tekoucí obvodem ovlivněn nejen vodivostí, ale i indukčností a kapacitami jeho jednotlivých částí. Využitím komplexní symboliky je možné získat vztah typu (3.33), ve kterém však místo vnitřního odporu  $R_i$  figuruje obecně komplexní vnitřní impedance  $\bar{Z}_i$ . Platí tedy

$$\bar{\mathcal{E}} - \bar{Z}_i \bar{I} = \bar{U}_s. \quad (8.35)$$

Veličina  $\bar{U}_s$  má význam svorkového napětí, které ve vnější zatěžovací impedanci  $\bar{Z}_e$  budí proud

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}_s}{\bar{Z}_e}. \quad (8.36)$$

Vztahům (8.35) a (8.36) odpovídá náhradní schéma uvedené na obr. 8.5a, které reprezentuje zdroj napětí. Vedle něj je však možné vytvořit i jiné náhradní



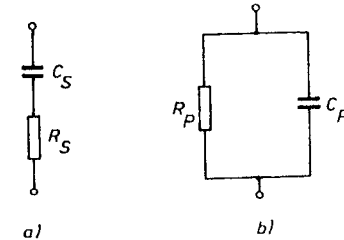
Obr. 8.5 Náhradní schéma lineárního zdroje: a) zdroj konstantního elektromotorického napětí, b) zdroj konstantního proudu.

schéma daného zdroje. Můžeme si je představit jako paralelní spojení ideálního zdroje proudu  $\bar{I}''$  a vnitřní impedance  $\bar{Z}_i'$ , přičemž vnější zatěžovací impedance se připojuje ke svorkám podle obr. 8.5b (paralelně k vnitřní impedanci  $\bar{Z}_i'$ ).

Obě náhradní schémata budou zřejmě ekvivalentní, budou-li v zatěžovací impedanci libovolné hodnoty budit stejný proud. Lze snadno ukázat, že oba zdroje se k vnější impedanci  $\bar{Z}_e$  budou chovat stejně, bude-li platit

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{Z}_i \bar{I}, \quad \bar{Z}_i' = \bar{Z}_i. \quad (8.37)$$

Celkem lze tedy říci, že zdroj elektromotorického napětí  $\bar{\mathcal{E}}$  se sériově řazenou vnitřní impedancí  $\bar{Z}_i$  je ekvivalentní zdroji proudu  $\bar{I}'' = \bar{\mathcal{E}}/\bar{Z}_i$  s paralelně řazenou vnitřní impedancí stejné hodnoty. Toto tvrzení o ekvivalenci obou typů náhradních schémat se někdy nazývá *Nortonovou větou*. Zdůrazněme ještě, že díky diskutované formální shodě ve formulaci Ohmova zákona a Kirchhoffových pravidel platí závěry nejen pro střídavé lineární zdroje, ale i pro zdroje stacionární.



Obr. 8.6 Náhradní schéma kondenzátoru: a) sériové schéma, b) paralelní schéma.

#### b) Náhradní schéma kondenzátoru

Náhradní schéma reálného kondenzátoru může být vytvořeno spojením ideálního rezistoru a ideálního kondenzátoru. Tyto dva prvky můžeme zapojit buď sériově, nebo paralelně. Při sériovém spojení (viz obr. 8.6a) bude výsledná impedance rovna součtu impedancí obou prvků

$$\bar{Z}_s = R_s - \frac{i}{\omega C_s}. \quad (8.38)$$

Její absolutní hodnota  $Z_s$  a fázový úhel  $\psi_s$  budou dány vztahy

$$Z_s = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C_s^2 R_s^2}}{\omega C_s}, \quad \text{tg } \psi_s = -\frac{1}{\omega C_s R_s}. \quad (8.39)$$

Pro praktické posouzení vlastností kondenzátoru se zavádí *ztrátový úhel*  $\delta$  definovaný vztahem

$$\delta = \frac{\pi}{2} - |\psi|. \quad (8.40)$$

V případě sériového náhradního schématu plyne z (8.39)

$$\operatorname{tg} \delta_s = \omega C_s R_s. \quad (8.41)$$

Ztrátový úhel  $\delta_s$ , nebo jeho tangenta nazývaná *ztrátovým činitelem*, je mírou ztrát elektrické energie ve skutečném kondenzátoru. Při  $\delta_s = 0$  je  $\operatorname{tg} \delta_s = 0$  a v kondenzátoru nedochází k přeměně elektrické energie v tepelnou.

Vzrůstá-li při dané kapacitanci odpor  $R_s$ , zvětšuje se ztrátový činitel a vzrůstají ztráty elektrické energie v obvodu. Blíží-li se ztrátový úhel k  $\pi/2$ , blíží se chování prvku k chování ideálního odporu.

Při paralelním zapojení odporu a ideálního kondenzátoru (obr.8.6b) bude podle (8.34) výsledná admitance obvodu rovna součtu admitancí obou prvků

$$\bar{Y}_p = \frac{1}{R_p} + i\omega C_p. \quad (8.42)$$

Absolutní hodnota impedance bude rovna

$$|\bar{Z}_p| = |1/\bar{Y}_p| = R_p (1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2)^{-1/2}. \quad (8.43)$$

Ztrátový činitel paralelního spojení bude

$$\operatorname{tg} \delta_p = (\omega C_p R_p)^{-1}. \quad (8.44)$$

V tomto případě bude při dané kapacitě přeměna elektrické energie v tepelnou tím větší, čím menší bude odpor  $R_p$ .

Obě zapojení, jak paralelní, tak i sériové, mohou imitovat v obvodu chování reálného kondenzátoru. Je pochopitelně snahou, aby zvolené náhradní schéma imitovalo vlastnosti kondenzátoru v co nejširší frekvenční oblasti. Ztrátový činitel je však frekvenčně závislý. Při sériovém náhradním schématu roste úměrně frekvenci (vztah (8.41)), při paralelním zapojení je ztrátový činitel kruhové frekvenci nepřímo úměrný. Rozhodnutí, které náhradní schéma je vhodnější, závisí na frekvenční závislosti ztrátového činitele skutečného kondenzátoru, která je určena fyzikálním mechanismem působícím ztráty. Jsou-li například ztráty způsobeny skutečnou vodivostí, tj. pohybem volných nositelů náboje v dielektriku, je skutečný ztrátový činitel nepřímo úměrný frekvenci a je výhodnější použít paralelní náhradní schéma. Odpor  $R_p$  má pak význam svodového odporu mezi elektrodami a lze jej vypočítat ze ztrátového činitele podle (8.44).

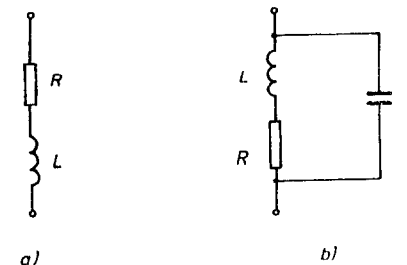
Při dané frekvenci lze jeden typ náhradního schématu nahradit druhým. Požadujeme, aby impedance obou zapojení byla stejná. Srovnáním jejich reálných a imaginárních částí dostaneme převodní vztahy

$$R_s = \frac{R_p}{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}, \quad C_s = \frac{1 + \omega^2 C_p^2 R_p^2}{\omega^2 C_p^2 R_p^2}, \quad (8.45)$$

$$R_p = \frac{1 + \omega^2 C_s^2 R_s^2}{\omega^2 C_s^2 R_s^2}, \quad C_p = \frac{C_s}{1 + \omega^2 C_s^2 R_s^2}. \quad (8.46)$$

### c) Náhradní schéma cívky

Nejjednodušeji lze vlastnosti skutečné cívky reprezentovat dvěma prvky – odporem a indukčností, které můžeme uvažovat opět buď v sériovém, či paralelním zapojení. Sériové náhradní schéma podle obr. 8.7a lépe vystihuje situaci, když je reálná část impedance cívky působena konečnou vodivostí jejího vodiče. Proto vyšetříme jen tento častěji používaný případ.



Obr. 8.7 Náhradní schéma cívky:  
a) dvoupvkové, b) tříprvkové.

Podle (8.33) dostaneme pro výslednou impedanci

$$\bar{Z} = R + i\omega L. \quad (8.47)$$

Její absolutní hodnota bude

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad (8.48)$$

a fázový úhel  $\psi$  podle (8.31)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega L}{R} = Q. \quad (8.49)$$

Veličina  $Q$  se nazývá činitel jakosti cívky. Pro  $Q \rightarrow \infty$  se vlastnosti cívky blíží ideální indukčnosti. Dvoupvkové sériové náhradní schéma celkem dobře vystihuje vlastnosti skutečných cívek v oboru nižších frekvencí. Činitel jakosti bývá  $10 \div 10^2$ .

Stejně náhradní schéma je možné použít při aproximaci vlastností skutečných rezistorů. Při vyšších frekvencích nemusí být totiž vliv vlastní indukčnosti vodiče rezistoru zanedbatelný a rezistor se chová jako cívka s nízkým činitelem jakosti.

Dvoupřvkové náhradní schéma nebere v úvahu kapacitu, kterou mají jednotlivé závity či vrstvy závitů mezi sebou a která se může uplatnit zejména při vyšších frekvencích. Při určitém zjednodušení můžeme tuto vlastnost brát v úvahu, připojíme-li k dvoupřvkovému náhradnímu schématu paralelně kapacitu. Vznikne tak tříprvkové náhradní schéma podle obr. 8.7b, které vlastně tvoří *paralelní rezonanční obvod* (viz odstavec 8.2.7a). Závislost jeho impedance na frekvenci není monotónní; reálná část nabývá maxima při *paralelní rezonanční frekvenci*  $\omega_r$ ,

$$\omega_r^2 = \omega_0^2(1 - Q_0^{-2}), \quad (8.50)$$

kde  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$  a  $Q_0 = \omega_0 L/R$ . Imaginární část impedance je při této frekvenci rovna nule.

Uvedené příklady demonstrují, že chování reálných prvků v obvodu může být značně komplikované a obecně může být komplikovaná i otázka volby vhodného náhradního schématu. Již v případě tříprvkového náhradního schématu je výraz pro celkovou impedanci obvodu dosti nepřehledný (viz odstavec 8.2.7a) a je potřeba provést jeho podrobnější analýzu, abychom odhadli jeho frekvenční závislost. Na druhé straně i tříprvkové náhradní schéma je značně zjednodušené. Není v něm například uvažována kapacita cívky vůči okolním vodičům, kapacity mezi závity a mezi jednotlivými vrstvami jsou nahrazeny jedinou paralelní kapacitou apod. Je zřejmé, že detailnější respektování poměrů ve skutečném prvku by mohlo vést k náhradnímu schématu těžko řešitelnému. Je proto vždy nutné předem odhadnout, s přihlédnutím k používanému frekvenčnímu oboru, které parazitní vlivy je nutné uvažovat a které je možno zanedbat.

### 8.2.3 Věta o superpozici

Tato věta vyjadřuje důležitou vlastnost lineárních obvodů, která plyne z toho, že parametry lineárních prvků nezávisí na protékajícím proudě či na přiloženém napětí. Působení jednotlivých zdrojů je tedy navzájem nezávislé a účinky každého z nich mohou být vyšetřovány zvlášť.

Větu o superpozici můžeme formulovat takto:

*Mějme lineární obvod ve kterém je zařazeno  $N$  zdrojů o elektromotorických napětích  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_N$ . Předpokládejme, že můžeme postupně zařazovat jeden zdroj po druhém, zatímco ostatní zdroje jsou vždy nahrazeny svými vnitřními impedancemi. Označme  $\bar{I}_k^{(l)}$  proud, který teče vybranou  $k$ -tou větví obvodu, je-li zapnut  $l$ -tý zdroj. Celkový proud  $\bar{I}_k$  tekoucí uvažovanou větví při působení všech zdrojů může pak být vyjádřen vztahem*

$$\bar{I}_k = \sum_{l=1}^N \bar{I}_k^{(l)}. \quad (8.51)$$

Platnost věty o superpozici dokážeme pro speciální případ, kdy je obvod tvořen uzavřenou smyčkou o „ $q$ “ větvích. Označme  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_q$  impedance jednotlivých větví ve smyčce. Je-li zapnut pouze zdroj  $\bar{e}_l$  a ostatní zdroje jsou vyřazeny, platí podle II. Kirchhoffova pravidla

$$\bar{e}_l = \sum_{k=1}^q \bar{Z}_k \bar{I}_k^{(l)}. \quad (8.52)$$

Budou-li současně působit všechny zdroje, dostaneme podle II. Kirchhoffova pravidla rovnici

$$\sum_{l=1}^N \bar{e}_l = \sum_{k=1}^q \bar{Z}_k \bar{I}_k, \quad (8.53)$$

v níž jsme označili  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_q$  celkové proudy v jednotlivých větvích. Avšak sečteme-li všechny rovnice typu (8.52), dostaneme

$$\sum_{l=1}^N \bar{e}_l = \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^q \bar{Z}_k \bar{I}_k^{(l)}. \quad (8.54)$$

Pro lineární prvky, jejichž impedance není závislá na protékajícím proudě, lze poslední výraz upravit na tvar

$$\sum_{l=1}^N \bar{e}_l = \sum_{k=1}^q \bar{Z}_k \sum_{l=1}^N \bar{I}_k^{(l)}. \quad (8.55)$$

Ze srovnání s (8.53) pak již plyne vztah (8.51) vyjadřující větu o superpozici.

Vztah (8.51) zůstane zřejmě v platnosti i tehdy, jestliže uvažovaná smyčka je součástí složitějšího obvodu. Na postupu, kterým jsme jeho platnost dokazovali, není třeba nic měnit, přičemž uzavřená smyčka může být v daném (libovolně složitém) obvodu vybrána zcela libovolně. Věta o superpozici platí tedy v lineárních obvodech zcela obecně.

Větu o superpozici je možné ve vhodných případech použít k řešení obvodů. Podaří-li se nám vypočítat vhodnou metodou proudy buzené jednotlivými zdroji nebo skupinami zdrojů, je možné podle věty o superpozici určit výsledný proud jako algebraický součet těchto proudů. Pokud zdroje nejsou ideální, tj. nemají nulový vnitřní odpor, musíme ty z nich, které nejsou zapnuty, nahrazovat při výpočtu jejich vnitřním odporem.

### 8.2.4 Obecné metody analýzy lineárních obvodů v ustáleném stavu

Kirchhoffova pravidla spolu s Ohmovým zákonem dovolují řešit libovolně složitý elektrický obvod. Pro formulaci metod řešení obecného obvodu je však

nutné úlohu určitým způsobem konkretizovat. Při řešení budeme vždy vycházet ze schématu obvodu. Podle výsledků článku 8.2.2 je možné všechny prvky v dané větvi reprezentovat jejich náhradními schémata a vypočítat jejich výslednou impedanci, popř. výsledné elektromotorické napětí (nebo proud). Každou větev pak můžeme charakterizovat jedinou impedancí, eventuálně jediným zdrojem.

Budeme uvažovat obecný obvod o „ $q$ “ uzlech a „ $n$ “ větvích. Symbolem  $\bar{I}_{j,k}$  označíme komplexní amplitudu proudu tekoucího větví od  $j$ -tého ke  $k$ -tému uzlu. Bude tedy platit  $\bar{I}_{j,k} = -\bar{I}_{k,j}$ . Jestliže nejsou uzly „ $j$ “ a „ $k$ “ bezprostředně spojeny větví obvodu, bude  $\bar{I}_{j,k} = 0$ . Jelikož obvod má „ $n$ “ větví, může jeho analýza spočívat v určení všech těchto proudů. Pomocí Ohmova zákona a známých impedancí pak bude možné určit rovněž napětí mezi libovolnou dvojicí uzlů. Obráceně může analýza obvodu spočívat v určení potenciálu všech uzlů. Proud ve všech větvích je pak možné jednoduše vypočítat pomocí Ohmova zákona. V dalším výkladu uvedeme několik základních metod řešení daného problému.

#### a) Přímá aplikace Kirchhoffových pravidel

Užitím Kirchhoffových pravidel je možné přímo vypočítat proudy ve všech větvích obvodu. K analýze obvodu potřebujeme tedy „ $n$ “ nezávislých rovnic.

Nejprve použijeme I. Kirchhoffovo pravidlo (8.28). Pro prvních  $(q-1)$  uzlů můžeme psát

$$\begin{aligned} \bar{I}_{1,2} + \bar{I}_{1,3} + \dots + \bar{I}_{1,q} &= 0, \\ \bar{I}_{2,1} + \bar{I}_{2,3} + \dots + \bar{I}_{2,q} &= 0, \\ &\vdots \\ \bar{I}_{(q-1),2} + \bar{I}_{(q-1),3} + \dots + \bar{I}_{(q-1),q} &= 0. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Rovnice pro „ $q$ -tý“ uzel, která je v pořadí „ $q$ -tá“ je již lineární kombinací předchozích. Sečteme-li totiž předchozí rovnice a uvážíme-li, že  $\bar{I}_{j,k} = -\bar{I}_{k,j}$ , dostaneme po vynásobení číslem „ $-1$ “ rovnici pro „ $q$ -tý“ uzel

$$\bar{I}_{q,1} + \bar{I}_{q,2} + \dots + \bar{I}_{q,(q-1)} = 0. \quad (8.57)$$

Máme tedy prozatím  $(q-1)$  nezávislých rovnic. Počet větví, a tím i počet hledaných proudů je však vždy větší než počet uzlů. Z každého uzlu vychází podle definice nejméně tři větve, každá větev je přitom společná pouze dvěma uzlům. Maximální počet větví bude mít obvod, ve kterém je každý uzel spojen větvemi se všemi zbývajícími uzly. V tomto případě bude počet větví  $n_{\max} = q(q-1)/2$ . (Příklad takového obvodu je znázorněn na obr. 8.1. Obvod má při čtyřech uzlech šest větví. Podle I. Kirchhoffova pravidla lze napsat tři nezávislé rovnice.)

Zbývající rovnice, jichž je obecně  $[n - (q-1)]$  (v uváděném příkladu opět tři), je nutné sestavit podle II. Kirchhoffova pravidla. Smyčky, pro které použijeme II. Kirchhoffovo pravidlo, musí být vybrány tak, aby jich byl právě potřebný počet a aby vzniklé rovnice byly lineárně nezávislé. Výběr smyček vyhovující uvedeným požadavkům lze obecně uskutečnit užitím pojmu (úplného) stromu obvodu postupem, který nyní popíšeme.<sup>77</sup>

Nejprve definujeme úplný strom obvodu. Nazýváme jím soustavu větví obvodu, která má následující dvě vlastnosti:

1. Každý uzel obvodu je spojen se všemi ostatními uzly větvemi úplného stromu.
2. Vlastnost 1. přestane být splněna, vyjmeme-li z úplného stromu jedinou libovolnou větev.

Úplný strom tedy obsahuje nejnutnější počet větví, které jsou schopné vzájemně propojit všechny uzly obvodu.

Úloha sestavení úplného stromu daného obvodu není zřejmě jednoznačná. (Je to vidět z příkladu konstrukce úplného stromu obvodu znázorněném na obr. 8.1. Na obrázku 8.8 jsou uvedeny čtyři možnosti; větve příslušející úplnému stromu jsou vytaženy silněji. Postupným otáčením vždy o  $90^\circ$  lze z každého znázorněného získat tři další úplné stromy. Pro daný obvod tedy existuje celkem šestnáct možností.) Tato nejednoznačnost však není podstatná. Důležité je, že počet větví, které nepatří k úplnému stromu, je vždy stejný. Tyto větve tvoří systém nezávislých větví. Jejich počet je vždy roven  $[n - (q-1)]$ , což je možné dokázat touto úvahou. Vyberme určitý uzel jako první. Druhý uzel připojíme první větví. Aby bylo vyhověno definici úplného stromu, připojíme každou další větví jeden uzel, až poslední „ $(q-1)$ -ní“ větví připojíme „ $q$ -tý“ uzel. Zbude tedy  $[n - (q-1)]$  větví, které vytvoří systém nezávislých větví.



Obr. 8.8 Příklady konstrukce úplného stromu obvodu podle obr. 8.1.

Vybereme-li soustavu smyček, pro které budeme psát II. Kirchhoffovo pravidlo tak, aby každá ze smyček obsahovala právě jednu větev ze systému nezávislých větví, dostaneme právě  $[n - (q-1)]$  příslušných nezávislých rovnic.

Platnost tohoto tvrzení je zřejmá, neboť nezávislých větví je  $[n - (q-1)]$  a každá smyčka obsahuje alespoň jednu větev, která není obsažena v ostatních smyčkách. Každá rovnice podle II. Kirchhoffova pravidla bude obsahovat alespoň jeden člen, který se nevyskytuje v ostatních rovnicích.

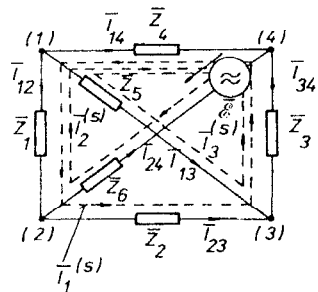
<sup>77</sup> Matematickou abstrakcí úloh podobného typu, jako je analýza elektrických obvodů, se zabývá teorie grafů, která k jejich charakteristice používá i pojem stromu, respektive úplného stromu. Podrobnější poučení o této problematice je možné nalézt v publikacích J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskretní matematiky. Matfyzpress, Praha 1996; J. Demel: Grafy a jejich aplikace. Academia, Praha 2002.

Při daném výběru úplného stromu jsou již nezávislé smyčky jednoznačně dány. Uzly, vymezení vybranou nezávislou větev, musí být propojeny přes větve úplného stromu, jinak by smyčka obsahovala dvě větve ze systému nezávislých větví. Propojení uzlů v úplném stromu musí být, jak plyne z jeho definice, bez smyček. Smyčka se vytvoří po doplnění tohoto propojení vybranou větví ze systému nezávislých větví.

Při řešení obvodů pomocí Kirchhoffových pravidel postupujeme tedy tímto způsobem. Vybereme si  $(q-1)$  uzlů a napíšeme pro ně stejný počet rovnic (8.56) podle I. Kirchhoffova pravidla. Zakreslíme úplný strom a vybereme smyčky tak, aby každá smyčka obsahovala právě jednu větev ze systému nezávislých větví. Pro tyto smyčky napíšeme  $[n - (q-1)]$  rovnic podle II. Kirchhoffova pravidla. Tím dostaneme požadovaný počet nezávislých lineárních rovnic, které řešíme vzhledem k proudům tekoucím větvemi. V článku 8.2.7 bude uveden konkrétní příklad použití této metody.

### b) Metoda smyčkových proudů

Základní myšlenka, ze které vychází tato metoda, spočívá v tom, že každé nezávislé smyčce obvodu se přiřadí jediný tzv. *smyčkový proud*. Skutečný proud v dané větvi je pak součtem smyčkových proudů těch smyček, jejichž součástí je uvažovaná větev. Chápat skutečné proudy v jednotlivých větvích jako superpozici smyčkových proudů je možné díky platnosti věty o superpozici (viz čl. 8.2.3).



Obr. 8.9 Příklad soustavy nezávislých smyček obvodu z obr. 8.1.

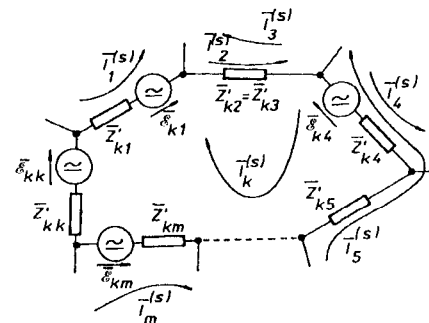
Počet smyčkových proudů je roven počtu nezávislých větví v obvodu. Jak jsme již ukázali, v obvodu o  $n$  větvích a  $q$  uzlech je počet  $p$  nezávislých větví roven  $[n - (q-1)]$ . Popsaným postupem lze sestavit stejný počet nezávislých smyček a užitím II. Kirchhoffova pravidla lze k těmto smyčkám získat soustavu nezávislých rovnic pro  $[n - (q-1)]$  nezávislých smyčkových proudů. Po vyřešení této soustavy je již snadné pomocí smyčkových proudů vyjádřit proudy v jednotlivých větvích. Tuto možnost budeme demonstrovat na příkladu obvodu znázorněném na obr. 8.1, který obsahuje čtyři uzly a šest větví. Použijeme-li úplný strom podle obr. 8.8a, získáme tři nezávislé smyčky (čárkovaně vyznačené na obr. 8.9), jejichž smyčkové proudy označíme  $\bar{I}_1^{(s)}$ ,  $\bar{I}_2^{(s)}$ ,  $\bar{I}_3^{(s)}$ .

Vezmeme-li v úvahu směry proudů vyznačené na obrázku a orientace smyček dané zvoleným směrem smyčkových proudů, můžeme ihned napsat hledané vztahy

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2,3} &= \bar{I}_1^{(s)}, & \bar{I}_{1,4} &= \bar{I}_2^{(s)} - \bar{I}_1^{(s)} - \bar{I}_3^{(s)}, & \bar{I}_{1,3} &= \bar{I}_3^{(s)}, \\ \bar{I}_{2,4} &= -\bar{I}_2^{(s)}, & \bar{I}_{1,2} &= \bar{I}_1^{(s)} - \bar{I}_2^{(s)}, & \bar{I}_{3,4} &= \bar{I}_1^{(s)} + \bar{I}_3^{(s)}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Je zřejmé, že ve vyjádření skutečných proudů pomocí proudů smyčkových je obsažena platnost I. Kirchhoffova pravidla, neboť všechny smyčkové proudy, které do uzlu vtékají, z něj rovněž vytékají.

Metoda smyčkových proudů rozkládá analýzu obvodu na dva kroky, přičemž podstatným krokem je nalezení smyčkových proudů. Druhý krok spočívající ve vyjádření skutečných proudů ve větvích pomocí proudů smyčkových je již snadný. Jelikož počet nezávislých větví v obvodu je obecně nižší než celkový počet větví, vede metoda smyčkových proudů na řešení soustavy o nižším počtu rovnic než přímá aplikace Kirchhoffových pravidel, což je jednou z jejich hlavních výhod. Další výhodou je, že rovnice pro smyčkové proudy mají pravidelný tvar, takže je možné snadno najít pravidla pro jejich mechanické sestavení. Smyčkové proudy se pak snadno vyjádří pomocí Cramerova pravidla. Tuto druhou výhodu poznáme z následujícího postupu.



Obr. 8.10 K výkladu metody smyčkových proudů.

Sestavme rovnici pro smyčku z obr. 8.10, která je součástí složitějšího obvodu. V této smyčce jsou zařazeny impedance, které jsme označili  $\bar{Z}'_{k,1}$  až  $\bar{Z}'_{k,k}$  a zdroje o elektromotorických napětích  $\bar{e}_{k,1}$  až  $\bar{e}_{k,k}$ . Volbu indexů jsme provedli s ohledem na číslování smyčkových proudů tekoucích ve smyčkách sousedních. Tak například impedancí  $\bar{Z}'_{k,m}$  teče kromě smyčkového proudu  $\bar{I}_k^{(s)}$  též smyčkový proud  $\bar{I}_m^{(s)}$ . Větev s impedancí  $\bar{Z}'_{k,k}$  je součástí systému nezávislých větví a teče jí proto jen smyčkový proud  $\bar{I}_k^{(s)}$ . Některými větvemi, například větví

o impedanci  $\bar{Z}'_{k,2}$ , mohou téci více než dva smyčkové proudy. V tomto případě je v našem systému značení jedna a taž impedance značena více symboly, zde například  $\bar{Z}'_{k,2} \equiv \bar{Z}'_{k,3}$ .

Podle II. Kirchhoffova pravidla získáme pro naši smyčku rovnici

$$\begin{aligned} \bar{Z}'_{k,1}(\bar{I}_1^{(s)} + \bar{I}_k^{(s)}) + \bar{Z}'_{k,2}(\bar{I}_2^{(s)} + \bar{I}_k^{(s)} - \bar{I}_3^{(s)}) + \bar{Z}'_{k,4}(\bar{I}_4^{(s)} - \bar{I}_5^{(s)} + \bar{I}_k^{(s)}) \\ + \bar{Z}'_{k,5}(-\bar{I}_5^{(s)} + \bar{I}_k^{(s)}) + \dots + \bar{Z}'_{k,m}(-\bar{I}_m^{(s)} + \bar{I}_k^{(s)}) + \bar{Z}'_{k,k}\bar{I}_k^{(s)} = \quad (8.59) \\ = \bar{e}'_{k,1} - \bar{e}'_{k,4} + \dots - \bar{e}'_{k,m} + \bar{e}'_{k,k} = \bar{e}'_k, \end{aligned}$$

v níž jsme označili symbolem  $\bar{e}'_k$  součet všech elektromotorických napětí ve smyčce působících. Rovnici můžeme uspořádat podle smyčkových proudů

$$\begin{aligned} \bar{Z}'_{k,1}\bar{I}_1^{(s)} + \bar{Z}'_{k,2}\bar{I}_2^{(s)} - \bar{Z}'_{k,3}\bar{I}_3^{(s)} + \bar{Z}'_{k,4}\bar{I}_4^{(s)} - (\bar{Z}'_{k,4} + \bar{Z}'_{k,5})\bar{I}_5^{(s)} + \dots + \\ + (\bar{Z}'_{k,1} + \bar{Z}'_{k,2} + \dots + \bar{Z}'_{k,m} + \bar{Z}'_{k,k})\bar{I}_k^{(s)} + \bar{Z}'_{k,m}\bar{I}_m^{(s)} = \bar{e}'_k \quad (8.60) \end{aligned}$$

a můžeme zavést nové označení impedancí. Symbolem  $\bar{z}_{k,k}$  označíme součet impedancí ve vyšetřované  $k$ -té smyčce

$$\bar{z}_{k,k} = \bar{Z}'_{k,1} + \bar{Z}'_{k,2} + \bar{Z}'_{k,4} + \bar{Z}'_{k,5} + \dots + \bar{Z}'_{k,m} + \bar{Z}'_{k,k} \quad (8.61)$$

a symbolem  $\bar{z}_{k,l}$  ( $k \neq l$ ) součet impedancí prvků společných  $k$ -té a  $l$ -té smyčce. Dále položíme  $\bar{Z}'_{k,l} = \bar{z}_{k,l}$ , pokud  $k$ -tý a  $l$ -tý smyčkový proud má v uvažovaných větvích stejný směr, a  $\bar{Z}'_{k,l} = -\bar{z}_{k,l}$ , pokud jsou směry proudů v těchto smyčkách opačné. Je zřejmé, že pokud uvažované smyčky mají společné větve, platí  $\bar{z}_{k,l} = 0$ . Místo (8.60) dostaneme rovnici ve tvaru

$$\bar{z}_{k,1}\bar{I}_1^{(s)} + \bar{z}_{k,2}\bar{I}_2^{(s)} + \dots + \bar{z}_{k,m}\bar{I}_m^{(s)} + \bar{z}_{k,k}\bar{I}_k^{(s)} + \dots + \bar{z}_{k,p}\bar{I}_p^{(s)} = \bar{e}'_k. \quad (8.62)$$

Je zřejmé, že rovnicí stejného tvaru můžeme získat pro libovolnou nezávislou smyčku. Dostaneme tak hledanou soustavu  $p$  nezávislých rovnic pro smyčkové proudy.

$$\begin{aligned} \bar{z}_{1,1}\bar{I}_1^{(s)} + \bar{z}_{1,2}\bar{I}_2^{(s)} + \dots + \bar{z}_{1,p}\bar{I}_p^{(s)} &= \bar{e}'_1, \\ \bar{z}_{2,1}\bar{I}_1^{(s)} + \bar{z}_{2,2}\bar{I}_2^{(s)} + \dots + \bar{z}_{2,p}\bar{I}_p^{(s)} &= \bar{e}'_2, \\ \vdots & \\ \bar{z}_{p,1}\bar{I}_1^{(s)} + \bar{z}_{p,2}\bar{I}_2^{(s)} + \dots + \bar{z}_{p,p}\bar{I}_p^{(s)} &= \bar{e}'_p. \end{aligned} \quad (8.63)$$

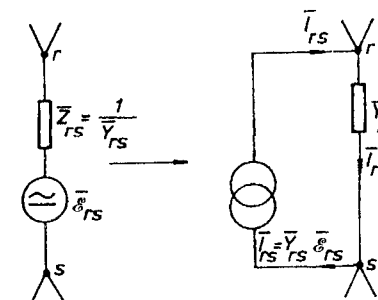
Determinant této soustavy můžeme sestavit mechanicky, shrneme-li pravidla podle kterých jsme soustavu (8.63) získali:

1. Diagonální členy  $\bar{z}_{k,k}$  jsou prostým součtem impedancí v  $k$ -té smyčce.
  2. Členy mimo diagonálu  $\bar{z}_{k,l}$  ( $k \neq l$ ) jsou algebraickým součtem impedancí všech větví společných  $l$ -té a  $k$ -té smyčce. Jsou-li směry obou smyčkových proudů v těchto impedancích shodné, bereme je s kladným znaménkem, v opačném případě se znaménkem záporným. Nemá-li  $l$ -tá a  $k$ -tá smyčka společnou větev, je  $\bar{z}_{k,l} = 0$ .
  3. Determinant soustavy je symetrický, neboť zřejmě platí  $\bar{z}_{k,l} = \bar{z}_{l,k}$ .
- V článku 8.2.7 uvedeme konkrétní příklad použití metody smyčkových proudů.

### c) Metoda uzlových napětí

Je v určitém smyslu duální k metodě smyčkových proudů. Na rozdíl od metody smyčkových proudů však sestavujeme rovnice pro jednotlivé uzly obvodu pomocí I. Kirchhoffova pravidla. Neznámými veličinami jsou napětí jednotlivých uzlů vůči zvolenému uzlu referenčnímu. Vypočítáme-li tato uzlová napětí, je již snadné určit proudy v jednotlivých větvích.

Nechť obvod, který máme řešit, má  $(q + 1)$  uzlů. Uzly očíslováme, přičemž referenční uzel označíme indexem nula. Uzlové napětí  $k$ -tého uzlu označíme jako  $\bar{U}_{k,0}$ . Impedance ve větvích převedeme na admittance a označíme  $\bar{Y}_{l,k}$  admittance větve spojující  $l$ -tý a  $k$ -tý uzel. Pokud v určité větvi (například ve větvi mezi uzly  $r$  a  $s$ ) je zařazen zdroj napětí, transformujeme jej na zdroj proudu (viz odstavec 8.2.2a).



Obr. 8.11 Transformace zdroje napětí na zdroj proudu.

Zdroje proudu jsou po této transformaci připojeny paralelně k jednotlivým větvím a dodávají do uzlů vymezujících tyto větve určité proudy (viz obr. 8.11).

Do jednoho uzlu může přitom dodávat proud i několik zdrojů připojených paralelně k větvím vycházejícím z tohoto uzlu. Označme  $\bar{I}_s$  celkový proud dodávaný do  $s$ -tého uzlu zdroji připojenými k tomuto uzlu. Tento proud vtékající do  $s$ -tého uzlu musí být podle I. Kirchhoffova pravidla roven součtu proudů

vytékajících z tohoto uzlu. Pro proud tekoucí z  $s$ -tého uzlu například do  $k$ -tého uzlu je možné podle Ohmova zákona (8.24) psát

$$\bar{I}_{s,k} = \bar{Y}_{s,k} (\bar{U}_{s,0} - \bar{U}_{k,0}), \quad (8.64)$$

neboť ze způsobu zavedení uzlových napětí  $\bar{U}_{s,0}$  a  $\bar{U}_{k,0}$  plyne, že jejich rozdíl je roven napětí ve větvi mezi uzly  $s$  a  $k$ , v níž je zapojena admitance  $\bar{Y}_{s,k}$ . Podle I. Kirchhoffova pravidla je pak možné pro vybraný  $s$ -tý uzel psát

$$\bar{I}_s = \bar{Y}_{s,0} \bar{U}_{s,0} + \bar{Y}_{s,1} (\bar{U}_{s,0} - \bar{U}_{1,0}) + \dots + \bar{Y}_{s,q} (\bar{U}_{s,0} - \bar{U}_{q,0}). \quad (8.65)$$

Po přeskupení členů na pravé straně a po jejich seřazení podle uzlových napětí dostaneme rovnici

$$\bar{I}_s = \bar{Y}_{s,s} \bar{U}_{s,0} - \bar{Y}_{s,1} \bar{U}_{1,0} - \dots - \bar{Y}_{s,q} \bar{U}_{q,0}, \quad (8.66)$$

v níž jsme symbolem  $\bar{Y}_{s,s}$  označili tzv. *vlastní admitanci*  $s$ -tého uzlu, která je rovna součtu všech admitancí, které z něj vycházejí.

Obdobné rovnice můžeme napsat pro všechny uzly obvodu s výjimkou referenčního (nultého) uzlu. Při předpokládaném celkovém počtu  $(q + 1)$  uzlů dostaneme soustavu  $q$  rovnic

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{1,1} \bar{U}_{1,0} - \bar{Y}_{1,2} \bar{U}_{2,0} - \dots - \bar{Y}_{1,q} \bar{U}_{q,0} &= \bar{I}_1, \\ -\bar{Y}_{2,1} \bar{U}_{1,0} + \bar{Y}_{2,2} \bar{U}_{2,0} - \dots - \bar{Y}_{2,q} \bar{U}_{q,0} &= \bar{I}_2, \\ \vdots & \\ -\bar{Y}_{q,1} \bar{U}_{1,0} - \bar{Y}_{q,2} \bar{U}_{2,0} - \dots - \bar{Y}_{q,q} \bar{U}_{q,0} &= \bar{I}_q. \end{aligned} \quad (8.67)$$

Tato soustava rovnic obsahuje  $q$  neznámých uzlových napětí  $\bar{U}_{1,0}$ ,  $\bar{U}_{2,0}$  až  $\bar{U}_{q,0}$ . Díky jejímu pravidelnému tvaru ji můžeme opět s výhodou řešit mechanicky podle Cramerova pravidla. Determinant soustavy totiž snadno mechanicky sestavíme podle těchto pravidel:

1. Diagonální prvky  $\bar{Y}_{r,s}$  determinantu soustavy jsou rovny vlastním admitancím jednotlivých uzlů, tj. jsou rovny vždy součtu admitancí vycházejících z daného uzlu.

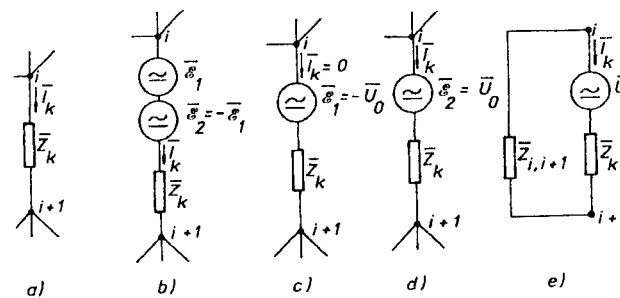
2. Prvky  $\bar{Y}_{r,s}$  ležící mimo hlavní diagonálu ( $r \neq s$ ) jsou rovné záporně vzaté admitanci větve zapojené mezi  $s$ -tým a  $r$ -tým uzlem.

### 8.2.5 Théveninova věta

V řadě případů nás nezajímá řešení celého obvodu, ale především proud tekoucí jeho určitou větví. Pokud v této větvi není žádný zdroj, to znamená větev je pa-

sivním elementem obvodu, chová se zbytek obvodu vůči této větvi jako zdroj, neboť do ní dodává energii. Pak je užitečné nahradit zbytek obvodu náhradním zdrojem elektromotorického napětí a určitou impedancí tohoto zdroje. Jak tuto úlohu provést říká *Théveninova věta*.

Vyberme si z obvodu libovolnou větev. Například, jak je naznačeno na obr. 8.12a,  $k$ -tou větev mezi uzly  $i$  a  $(i + 1)$ . Podle věty o superpozici je s tímto obvodem ekvivalentní i obvod na obr. 8.12b, neboť navíc zařazené zdroje se liší pouze polaritou a budou do obvodu dodávat stejně velké, ale opačným směrem tekoucí proudy, jejichž součet bude nulový.



Obr. 8.12 K výkladu Théveninovy věty.

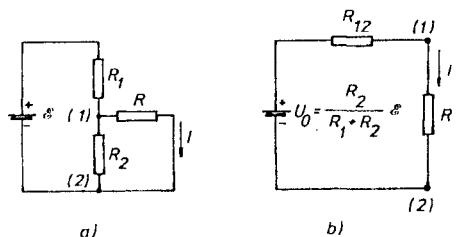
Nechť napětí mezi uzly  $i$  a  $(i + 1)$  je rovno  $\bar{U}_0$ , je-li  $k$ -tá větev odpojená ( $\bar{Z}_k \rightarrow \infty$ ). Pak, zařadíme-li do sledované větve navíc zdroj o elektromotorickém napětí  $\bar{E}_1 = -\bar{U}_0$  (obr. 8.12c), nepoteče touto větví proud. Proud  $\bar{I}_k$  rovný proudu ve sledované větvi původního obvodu naopak poteče impedancí  $\bar{Z}_k$  v obvodu uvedeném na obr. 8.12d, který byl vytvořen tak, že všechny jeho zdroje byly vyjmuty a nahrazeny svými vnitřními impedancemi a do sledované větve byl zařazen jediný zdroj o elektromotorickém napětí  $\bar{E}_2 = \bar{U}_0$ . Superpozicí obvodů z obrázků 8.12c a 8.12d vznikne totiž obvod nakreslený na obr. 8.12b, ekvivalentní původnímu obvodu z obr. 8.12a.

Vyjmeme-li z obvodu, jenž je uveden na obr. 8.12d,  $k$ -tou větev, zůstane pasivní obvod. Jeho impedanci mezi uzly  $i$  a  $(i + 1)$  označíme  $\bar{Z}_{i,i+1}$ . Je zřejmé, že touto impedancí můžeme zbytek obvodu nahradit, čímž vznikne obvod znázorněný na obr. 8.12e. Impedancí  $\bar{Z}_k$  v tomto obvodu poteče stejný proud jako v původním obvodu z obr. 8.12a. Obvod z obr. 8.12e však snadno vyřešíme. Pro proud  $\bar{I}_k$  platí

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{U}_0}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_{i,i+1}}. \quad (8.68)$$

Tento výsledek vyjadřuje Théveninovu větu, kterou můžeme slovně formulovat takto:

*Proud libovolnou větví obvodu se nezmění, jestliže tuto větev vyjme z obvodu a připojíme ji ke zdroji, jehož elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_0$  je rovno napětí  $U_0$ , které zůstane na uzlech po vyjmutí větve, a jehož vnitřní impedance je rovna impedanci daného obvodu mezi těmito uzly po nahrazení všech zdrojů jejich vnitřními impedancemi.*



Obr. 8.13 Příklad použití Théveninovy věty k řešení obvodu děliče napětí.

Jako příklad použití Théveninovy věty vypočítáme proud  $I$  tekoucí odporem  $R$ , jenž je připojen ke svorkám (1) a (2) obvodu, který vidíme na obr. 8.13a. Po odpojení odporu  $R$  bude napětí mezi těmito uzly rovno

$$U_0 = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Vnitřní odpor tohoto náhradního zdroje bude roven paralelní kombinaci odporů  $R_1$  a  $R_2$ .

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Obvod z obr. 8.13a můžeme tedy nahradit obvodem z obr. 8.13b a proud  $I$  tekoucí odporem  $R$  bude mít hodnotu

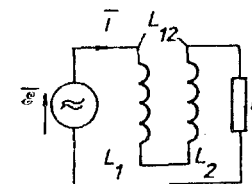
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_{1,2}} = \mathcal{E} \frac{R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}. \quad (8.69)$$

## 8.2.6 Obvody se vzájemnou indukčností

Střídavý obvod obsahující cívky s nenulovou vzájemnou indukčností může být složen z částí, které nejsou vzájemně galvanicky spojeny. Přenos energie mezi těmito částmi je zprostředkován magnetickým polem, společným vzájemně vázaným cívkám. Obvody tohoto druhu se nazývají *nesouvislé*. Vzájemná indukčnost se však může uplatňovat i v souvislých obvodech, tj. obvodech, ve kterých jsou všechny prvky vzájemně galvanicky propojeny.

Započtení vzájemných indukčností při řešení elektrických obvodů má některé zvláštnosti. Proto jsme dosud vzájemné indukčnosti z našich úvah vylučovali. Nyní se naopak budeme této problematice stručně věnovat. Uvedeme nejdříve některé typické příklady demonstrující charakter vlivu vzájemných indukčností a na základě získaných poznatků zformulujeme pravidla korigující metody řešení vyložené v článku 8.2.4.

Jedním z podstatných faktorů ovlivňujících uplatnění vzájemných indukčností v obvodech je skutečnost, že na rozdíl od vlastních indukčností vzájemná indukčnost může být kladná i záporná. Její velikost i znamení závisí na vzájemné geometrické konfiguraci a orientaci vázaných cívek (viz článek 4.1.4). V řešených obvodech musí být vzájemná vazba cívek i znamení vzájemné indukčnosti vyznačeno.



Obr. 8.14 Obvod s induktivně vázanými cívkami.

Jako první příklad vyšetříme obvod zobrazený na obr. 8.14. Lze na něj zřejmě aplikovat II. Kirchhoffovo pravidlo v komplexní formulaci (8.29), doplníme-li v něm členy popisující vliv vzájemné indukčnosti. Změny proudu v jedné cívce budou podle (4.18) indukovat elektromotorické napětí v cívce druhé. Napětí na vlastních indukčnostech daná vztahem typu (8.2), respektive (8.23) je tedy třeba doplnit o členy

$$i\omega L_{12} \bar{I}, \quad i\omega L_{21} \bar{I}.$$

Jelikož podle (4.19) je  $L_{12} = L_{21}$  a oběma cívkami teče stejný proud, budou oba příspěvky stejné. Rovnice vyjadřující II. Kirchhoffovo pravidlo pro daný obvod bude mít tedy tvar

$$\mathcal{E} = [R + i\omega(L_1 + L_2 + 2L_{12})] \bar{I}. \quad (8.70)$$

Vidíme, že obvod se chová tak, jako kdyby obsahoval jedinou cívku o indukčností

$$L_c = L_1 + L_2 + 2L_{12}. \quad (8.71)$$

Při hodnocení významu výsledku (8.71) je třeba si uvědomit, že vzájemná indukčnost může být kladná i záporná. Výsledná indukčnost  $L_c$  může mít tedy v závislosti na vzájemné orientaci obou cívek hodnoty



$$L_c = L_1 + L_2 \pm 2|L_{12}|. \quad (8.71a)$$

Připomínáme (viz článek 4.1.4), že vzájemnou indukčnost  $L_{12}$  považujeme za kladnou, jestliže kladně orientovaný proud v indukčnosti  $L_2$  vytváří v cívce  $L_1$  kladný magnetický tok  $\Psi_{12}$ , tj. magnetické pole buzené druhou cívkou má stejnou orientaci vůči orientované ploše první cívky jako její vlastní pole.

Jako druhý příklad vyřešíme znovu, na rozdíl od čl. 4.2.3 ale v komplexní symbolice, obvod s transformátorem z obr. 4.16 za předpokladu, že elektromotorické napětí  $\bar{\epsilon}_1(t)$  je střídavé o průběhu (4.41) a že obvod je v ustáleném stavu. Místo diferenciálních rovnic (4.51) dostaneme soustavu dvou algebraických rovnic

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_1 &= (R_1 + i\omega L_1)\bar{I}_1 + i\omega L_{12}\bar{I}_2, \\ 0 &= i\omega L_{12}\bar{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2)\bar{I}_2. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Jejich řešením dostaneme pro komplexní amplitudy obou proudů

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{\epsilon}_1}{(R_1 + i\omega L_1) + \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + i\omega L_2}}, \quad \bar{I}_2 = \bar{\epsilon}_1 \frac{-i\omega L_{12}}{(R_1 + i\omega L_1)(R_2 + i\omega L_2) + \omega^2 L_{12}^2}. \quad (8.73)$$

Z řešení je vidět, že sekundární obvod působí na primární tak, jako by v něm byla připojena další impedance  $\bar{Z}_{21} = \omega^2 L_{12}^2 / (R_2 + i\omega L_2)$  do série s impedancí  $R_1 + i\omega L_1$ . Pro její reálnou a imaginární složku platí

$$\operatorname{Re} \bar{Z}_{21} = \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + i\omega L_2} R_2, \quad \operatorname{Im} \bar{Z}_{21} = -i\omega L_2 \frac{\omega^2 L_{12}^2}{R_2 + i\omega L_2}. \quad (8.74)$$

Za zjednodušujících předpokladů použitých v článku 4.2.3 plyne z řešení (8.73) výsledek (4.60). Všimněme si rovněž, že vliv sekundárního obvodu na obvod primární nezávisí na znamení vzájemné indukčnosti. To ovšem nepřekvapuje, neboť znamení vzájemné indukčnosti je závislé na volbě orientace obvodů a má tedy určitou libovůli, zatímco vliv sekundárního obvodu na obvod primární je spojen s přenosem energie a nemůže být ovlivněn libovůli volby orientace. Znamení, tj. hodnota fázové konstanty, proudů  $\bar{I}_2$  však na znamení vzájemné indukčnosti závisí. To je rovněž přirozené, neboť orientací sekundárního obvodu je fázová konstanta sekundárního proudů  $\bar{I}_2$  určována.

Z diskutovaných příkladů jsme získali poznatek, že pro započtení vlivu vzájemných indukčností je zapotřebí napětí na každé indukčnosti, která má induktivní vazbu k jiné indukčnosti, doplnit o členy typu  $i\omega L_{1k}\bar{I}_k$ , přičemž vzá-

jenné indukčnosti mohou být podle konkrétní situace kladné či záporné. Probereme postupně situaci pro jednotlivé obecné metody vyloučené v článku 8.2.4.

a) *Přímá aplikace Kirchhoffových pravidel.* U této metody je situace jednoduchá. Změny se týkají pouze  $p = [n - (q - 1)]$  rovnic sestavovaných pomocí II. Kirchhoffova pravidla. V rovnicích budou navíc vystupovat členy typu  $i\omega L_{1k}\bar{I}_k$ . Charakter rovnic i postup jejich řešení se však nezmění.

b) *Metoda smyčkových proudů.* Tvar rovnic (8.63) pro  $p$  smyčkových proudů se nezmění, jen poněkud jiný význam budou mít veličiny  $\bar{z}_{i,k}$ . Požadované změny v postupu pro sestavení soustavy rovnic lze snadno zahrnout do pravidel pro mechanické sestavení determinantu soustavy. Pravidla budou nyní znít takto:

1. Diagonální členy  $\bar{z}_{k,k}$  jsou prostým součtem impedancí zařazených v  $k$ -té smyčce, který je doplněn o členy  $i\omega 2L_{jm}^{(k)}\bar{I}_k$  pro každou dvojici induktivně vázaných cívek, z nichž obě jsou v  $k$ -té smyčce zařazeny.  $L_{jm}^{(k)}$  značí jejich vzájemnou indukčnost.

2. Členy mimo diagonálu  $\bar{z}_{k,l}$  ( $k \neq l$ ) jsou algebraickým součtem impedancí všech větví společných  $l$ -té a  $k$ -té smyčce. Jsou-li směry obou smyčkových proudů v těchto impedancích shodné, bereme je s kladným znaménkem, v opačném případě se znaménkem záporným. Pro každou cívku v  $k$ -té smyčce, která je induktivně vázána s některou cívkou v  $l$ -té smyčce, se k tomuto součtu impedancí přičte člen  $i\omega L_{jm}^{(k,l)}$ , v němž  $L_{jm}^{(k,l)}$  značí vzájemnou indukčnost dané dvojice. Předpokládá se přitom, že jednotlivé smyčky jsou orientovány volbou smyčkových proudů. V souladu s touto orientací jsou určena znamení vzájemných indukčností.

c) *Metoda uzlových napětí.* Charakter změn u této metody vyložíme na příkladu dvou větví obvodu podle obr. 8.15, které obsahují indukčnosti  $L_1$  a  $L_2$  vázané vzájemnou indukčností  $L_{12}$ . Při použití označení podle obrázku lze nalézt podmínky pro rozdíly uzlových napětí na jednotlivých větvích ve tvaru

$$\bar{U}_{10} - \bar{U}_{30} = i\omega L_1 \bar{I}_{13} + i\omega L_{12} \bar{I}_{24}, \quad (8.75)$$

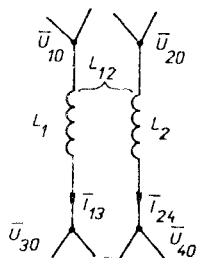
$$\bar{U}_{20} - \bar{U}_{40} = i\omega L_{12} \bar{I}_{13} + i\omega L_2 \bar{I}_{24}.$$

Z nich lze vypočítat proudy  $\bar{I}_{13}$  a  $\bar{I}_{24}$

$$\bar{I}_{13} = \frac{L_{12}}{i\omega(L_1 L_2 - L_{12}^2)} (\bar{U}_{10} - \bar{U}_{30}) - \frac{L_2}{i\omega(L_1 L_2 - L_{12}^2)} (\bar{U}_{20} - \bar{U}_{40}), \quad (8.76)$$

$$\bar{I}_{24} = \frac{L_{12}}{i\omega(L_1 L_2 - L_{12}^2)} (\bar{U}_{20} - \bar{U}_{40}) - \frac{L_1}{i\omega(L_1 L_2 - L_{12}^2)} (\bar{U}_{10} - \bar{U}_{30}).$$

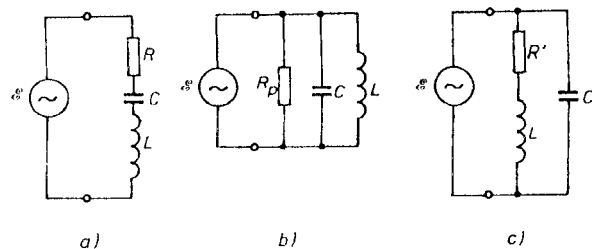
Rovnice (8.76) mají tvar (8.64), respektive (8.65), faktory u rozdílů uzlových napětí však nemají význam admitancí jednotlivých větví. Při použití metody uzlových napětí pro obvody se vzájemnou indukčností je tedy na příslušná místa nutné dosadit místo skutečných admitancí koeficienty uvedeného typu nazývané *koeficienty vzájemné admitance*.<sup>78</sup>



Obr. 8.15 K výkladu metody uzlových napětí pro obvody se vzájemnými indukčnostmi.

### 8.2.7 Řešené příklady

V tomto článku uvedeme několik málo aplikací poznatků vyložených v oddílu 8.2 na problémy důležité pro experimentální a laboratorní techniku.



Obr. 8.16 Zapojení rezonančních obvodů: a) sériový rezonanční obvod, b), c) paralelní rezonanční obvody.

#### a) Sériové a paralelní rezonanční obvody

Využitím komplexní metody vyřešíme souborně vlastnosti rezonančních obvodů v ustáleném stavu, které čtenáři předkládáme na obr. 8.16. Předpokládáme přitom, že ve všech obvodech působí zdroj střídavého elektromotorického napětí  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , jehož vnitřní impedanci zanedbáváme.

*Sériový rezonanční obvod* z obr. 8.16a byl již podrobně vyšetřován v odst. 4.2.4b klasickým postupem, tj. řešením diferenciální rovnice (4.68). Efektivnost

<sup>78</sup> Pro poučení o podrobnostech v těchto otázkách odkazujeme na speciálnější technickou literaturu. V českém jazyce například na knihu J. Kvasil: Elektrické lineární obvody, Nakl. dopravy a spojů, Praha 1967.

komplexní metody je dokumentována srovnáním s následujícím postupem. Komplexní impedanci  $\bar{Z}$  sériového spojení odporu, indukčnosti a kapacity dostaneme totiž ihned, dosadíme-li výrazy pro impedance jednotlivých prvků (8.25) do (8.33)

$$\bar{Z} = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Pro její absolutní hodnotu máme tedy výsledek (4.75)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

a po dosazení do (8.31) získáme vztah (4.72)

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R}.$$

Odtud pak plynou všechny závěry uvedené v odst. 4.2.40b.

*Paralelními rezonančními obvody* se obvykle nazývají obvody uvedené na obrázcích 8.16b,c. Obvod z obr. 8.16b může být chápán jako duální obvod k 8.16a. Jeho analýza je rovněž velmi jednoduchá. Komplexní admitance  $\bar{Y}$  paralelního spojení všech tří prvků má tvar

$$\bar{Y} = \frac{1}{R_p} + i \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right).$$

Její absolutní velikost

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}$$

bude mít minimální hodnotu  $Y_{\min} = 1/R_p$  při rezonanční frekvenci  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , při níž je rovněž admitance čisté reálná veličina. Při této frekvenci bude mít i amplituda proudu odebraného ze zdroje minimální hodnotu.

Tvar rezonanční křivky, kterou i zde chápeme jako závislost proudu na frekvenci zdroje, je analogický jako v případě sériového rezonančního obvodu (srov. obr. 4.21). Pro její relativní pološířku však místo (4.80) dostáváme

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0 L}{R_p}. \quad (8.77)$$

Vlastní činitel jakosti obvodu  $Q_{0,p}$  je pak definován vztahem

$$Q_{0,p} = \frac{R_p}{\omega_0 L} = \omega_0 R_p C. \quad (8.78)$$

Poněkud méně průhledné jsou již vlastnosti obvodu, který vidíme na obr. 8.16c. Pro výslednou impedanci uvedeného spojení kapacity odporu a indukčnosti dostaneme podle (8.33) a (8.34)

$$\bar{Z} = \frac{R'}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega CR'}.$$

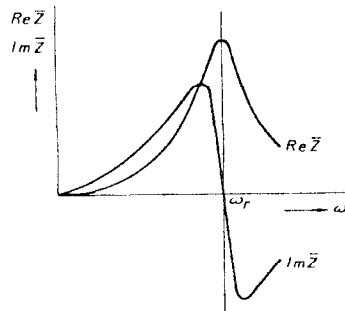
Po úpravě lze vyjádřit její reálnou a imaginární část ve tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{Z} &= \frac{R'}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR')^2}, \\ \operatorname{Im} \bar{Z} &= \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR'^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR')^2}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Z druhého výrazu (8.79) lze snadno určit frekvenci  $\omega_r$ , pro niž platí  $\operatorname{Im} \bar{Z} = 0$ , tj. impedance je čistě reálná. Ponecháme-li označení  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  podle (4.47) a zavedeme-li analogicky k (4.80) vlastní činitel jakosti  $Q'_0 = \omega_0 L/R'$ , dostaneme

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 (1 - Q_0'^{-2}). \quad (8.80)$$

Při této frekvenci nazývané *paralelní rezonanční frekvencí* je reálná složka impedance maximální, absolutní hodnota impedance však při této frekvenci extrém nemá. Obrázek 8.17 ilustruje průběh obou složek impedance (8.79) v závislosti na frekvenci.



Obr. 8.17 Frekvenční závislost reálné a imaginární složky impedance obvodu zobrazeném na obr. 7.16c.

Pro obvody s dostatečně vysokými hodnotami činitele jakosti  $Q'_0 \gg 1$  platí přibližně  $\omega \doteq \omega_0$  a vzdálenost maxima reálné složky a absolutní hodnoty impedance se stává nepodstatnou. Absolutní hodnotu impedance v rezonanci lze pak přibližně vyjádřit vztahem

$$Z_r \doteq \frac{L}{CR'}. \quad (8.81)$$

#### b) Wheatstonův můstek

Naznačíme postup řešení obvodu z obr. 8.1 uvedenými obecnými metodami: přímou aplikací Kirchhoffových pravidel, metodou smyčkových proudů a metodou uzlových napětí. Vyjdeme z obecné situace, kdy odpory  $R_1$  až  $R_6$  v obvodu jsou nahrazeny obecnými impedancemi  $\bar{Z}_1$  až  $\bar{Z}_6$  a v obvodu působí zdroj střídavého elektromotorického napětí  $\bar{\mathcal{E}}$  o dané frekvenci  $\omega$ . Aplikací I. Kirchhoffova pravidla na uzly (1) až (3) lze získat rovnice

$$\begin{aligned} \bar{I}_{12} + \bar{I}_{13} + \bar{I}_{14} &= 0, \\ \bar{I}_{23} + \bar{I}_{24} - \bar{I}_{12} &= 0, \\ \bar{I}_{34} - \bar{I}_{23} - \bar{I}_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (8.82a)$$

Pro získání zbylých rovnic použijeme úplný strom (viz obr. 8.9a) a získáme soustavu tří nezávislých smyček, obr. 8.10. Užitím II. Kirchhoffova pravidla pro tyto smyčky pak dostaneme další trojici potřebných rovnic

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 \bar{I}_{12} + \bar{Z}_2 \bar{I}_{23} + \bar{Z}_3 \bar{I}_{34} - \bar{Z}_4 \bar{I}_{14} &= 0, \\ -\bar{Z}_6 \bar{I}_{24} - \bar{Z}_1 \bar{I}_{12} + \bar{Z}_4 \bar{I}_{14} &= \bar{\mathcal{E}}, \\ \bar{Z}_3 \bar{I}_{34} - \bar{Z}_4 \bar{I}_{14} - \bar{Z}_5 \bar{I}_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (8.82b)$$

Rovnice (8.82a,b) představují soustavu pro šest neznámých proudů, jejichž řešení je již čistě matematický problém.

V další verzi řešení použijeme metodu smyčkových proudů. Použijeme opět soustavu nezávislých smyček vyznačených na obr. 8.9. V souladu s pravidly formulovanými v odstavci 8.2.4b lze přímo sestavit determinant soustavy podle rovnic typu (8.63). Tento determinant  $D_I$  má tvar

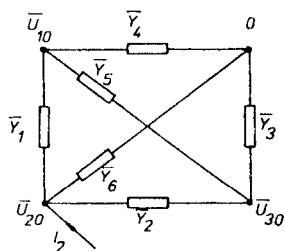
$$D_I = \begin{vmatrix} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4 & -(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4) & \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4 \\ -(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_4) & \bar{Z}_1 + \bar{Z}_6 + \bar{Z}_4 & -\bar{Z}_4 \\ \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4 & -\bar{Z}_4 & \bar{Z}_3 + \bar{Z}_4 + \bar{Z}_5 \end{vmatrix} \quad (8.83a)$$

a jednotlivé smyčkové proudy lze snadno vyjádřit pomocí Cramerova pravidla.

Podobně prostá je i aplikace metody uzlových napětí. Zdroj elektromotorického napětí přetransformujeme na zdroj proudu  $\bar{I}_2$ , který působí mezi uzly (2) a (4), přičemž uzel (4) zvolíme za referenční, a jednotlivé impedance vyjádříme pomocí příslušných admitancí  $\bar{Y}_i = 1/\bar{Z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), viz obr. 8.18. Pak užitím pravidel formulovaných v odstavci 8.2.4c můžeme přímo sestavit determinant  $D_U$  soustavy rovnic typu (8.67)

$$D_U = \begin{vmatrix} \bar{Y}_1 + \bar{Y}_4 + \bar{Y}_5 & -\bar{Y}_1 & -\bar{Y}_5 \\ -\bar{Y}_1 & \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_6 & -\bar{Y}_2 \\ -\bar{Y}_5 & -\bar{Y}_2 & \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_5 \end{vmatrix} \quad (8.83b)$$

a jejich řešení pro trojici uzlových napětí nalézt opět pomocí Cramerova pravidla.



Obr. 8.18 K řešení Wheatstonova můstku metodou uzlových napětí.

Wheatstonův můstek se, jak známo, velmi často používá k měření odporů, popř. parametrů obecných impedancí. Jedna větev můstku je při tomto použití tvořena měřenou impedancí a její parametry se určují z podmínky, která musí být splněna, neprotéká-li diagonálou mezi uzly (1) a (3) proud, tj. platí-li  $\bar{I}_{13} = 0$ . Všimněme si podrobněji vlastností Wheatstonova můstku z tohoto hlediska.

Proud  $\bar{I}_{13}$  je podle (8.58) přímo roven smyčkovému proudu  $\bar{I}_3^{(s)}$ . Můžeme jej proto nejpříměji vyjádřit pomocí metody smyčkových proudů užitím determinantu (8.83a). Pomocí Cramerova pravidla je možné proud  $\bar{I}_{13}$  vyjádřit přímo ve tvaru

$$\bar{I}_{13} = \frac{\bar{e}}{D_I} (\bar{Z}_2 \bar{Z}_4 - \bar{Z}_1 \bar{Z}_3). \quad (8.84)$$

Z požadavku rovnováhy na můstku, tj. z požadavku  $\bar{I}_{13} = 0$ , vyplývá podmínka

$$\bar{Z}_2 \bar{Z}_4 = \bar{Z}_1 \bar{Z}_3. \quad (8.85)$$

Považujeme-li tedy například impedanci  $\bar{Z}_1$  za neznámou, můžeme ji ze známých hodnot impedancí  $\bar{Z}_2, \bar{Z}_3, \bar{Z}_4$  vypočítat.

Můstky Wheatstonova typu mohou být použity například k měření parametrů cívek a kondenzátorů, jsou-li ve zbylých větvích zařazeny prvky o vhodných impedancích a je-li můstek napájen střídavým zdrojem. Podmínky rovnováhy na některých konkrétních typech těchto střídavých můstků budou řešeny v úlohách k této kapitole (viz úlohy Ú 8.6, Ú 8.7 a Ú 8.10).

Nejčastější je však použití pro měření odporů, přičemž může být v principu použit jak stejnosměrný, tak i střídavý zdroj. Vyšetříme proto vlastnosti řešení v tomto nejjednodušším případě. Položíme  $\bar{Z}_1 = R_1, \bar{Z}_2 = R_2, \bar{Z}_3 = R_3, \bar{Z}_4 = R_4$ . Odpor v diagonále mezi uzly (1) a (3) je v praktickém uspořádání realizován měřicím přístrojem, kterým se měří proud diagonálou  $\bar{I}_{13}$ . Pro větší přehlednost zavedeme obvyklejší označení  $R_5 = R_g$  a  $I_{13} = -I_g$ . Pro proud  $I_g$  pak dostaneme podle (8.84)

$$I_g = e \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{D_I}. \quad (8.86)$$

Pro praktické využití je důležitou charakteristikou můstku tzv. *proudová citlivost*  $S_I$ , již rozumíme změnu proudu  $\Delta I_g$  připadající na jednotkovou změnu odporu  $R_1$ , tedy  $S_I = \Delta I_g / \Delta R_1$ . Vyšetříme její chování v okolí rovnovážného stavu. Předpokládejme, že můstek je vyrovnán pro hodnotu  $R_{10}$ , tj. platí  $R_{10} R_3 = R_2 R_4$ . Proud  $I_g$  odpovídající hodnotě  $R_1 = R_{10} + \Delta R_1$  můžeme úpravou vztahu (8.85) vyjádřit ve tvaru

$$I_g = e \frac{R_3 \Delta R_1}{D_I^{(0)} + M \Delta R_1} R_1, \quad (8.87)$$

kde  $D_I^{(0)}$  značí determinant soustavy pro rovnovážné hodnoty odporů  $R_1$  až  $R_4$  a

$$M = R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 + R_g (R_2 R_3 + R_6) + R_6 (R_3 + R_4).$$

Z výsledku je vidět, že proud  $I_g$  není lineární funkcí  $\Delta R_1$ . Pro malé hodnoty  $\Delta R_1$ , kdy je splněno  $D_I^{(0)} \gg M \Delta R_1$ , můžeme však druhý člen ve jmenovateli zanedbat a vztah (8.87) linearizovat. Odchylku můstku od rovnovážného stavu budeme za těchto podmínek vyjadřovat pomocí bezrozměrné veličiny  $x = \Delta R_1 / R_1$ . Pro zjednodušení budeme dále předpokládat, že můstek je napájen zdrojem o malém vnitřním odporu, takže položíme  $R_6 = 0$ . Pro determinant  $D_I^{(0)}$  pak dostaneme vyjádření

$$D_I^{(0)} = R_{10} R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_{10} + R_4 R_{10} R_2 + R_g (R_1 + R_4) (R_2 + R_3).$$

Zavedeme-li dále označení  $R_{10}/R_4 = R_2/R_4 = N$ , můžeme proud  $I_g$  přibližně vyjádřit vztahem

$$I_g = \mathcal{E} \frac{x}{R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_g(N + N^{-1} + 2)} \quad (8.88)$$

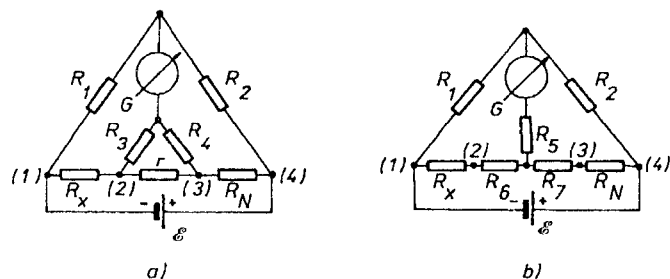
a pro proudovou citlivost v okolí rovnováhy dostaneme

$$S_I = \frac{\mathcal{E}}{R_{10} + R_2 + R_3 + R_4 + R_g(N + N^{-1} + 2)}. \quad (8.89)$$

Veličina  $N + N^{-1}$  má minimální hodnotu pro  $N = 1$ . Pro tuto hodnotu vyplývá podmínka  $R_{10} = R_2 = R_3 = R_4$ . Můstek má tedy optimální proudovou citlivost, jsou-li odpory ve všech větvích přibližně stejné. Z výsledku (8.89) dále vyplývá, že citlivost vzrůstá se vzrůstem elektromotorického napětí a s poklesem celkového odporu  $R_{10} + R_2 + R_3 + R_4$  ve všech větvích. Dolní hranice celkového odporu je však omezena hodnotou měřeného odporu a velikost elektromotorického napětí přípustným výkonem rozptýleným na jednotlivých odporech. Obecně je možné říci, že se vzrůstem požadované přesnosti vzrůstají požadavky na přesnost indikace stavu vyrovnání, tedy i na proudovou citlivost můstku a citlivost použitého měřidla. Využitím získaných výsledků je možné volit jednotlivé parametry v souladu s konkrétní potřebou.

### c) Thomsonův dvojmost

Wheatstonův můstek není příliš vhodný k měření malých odporů (menších než asi  $1 \Omega$ ). Jak jsme viděli v předchozím odstavci, optimalizace proudové citlivosti vede u můstku pro měření malých odporů k malým hodnotám odporů ve všech větvích. Zmenšování celkového odporu můstku  $R_{10} + R_2 + R_3 + R_4$  má ale význam jen do určité hodnoty. Klesne-li pod hodnotu  $R_g$ , která v případě použití klasických analogových přístrojů běžně bývá v intervalu  $(1 \div 10^2) \Omega$ , je citlivost



Obr. 8.19 K řešení rovnováhy Thomsonova dvojmostu: a) schéma Thomsonova dvojmostu, b) transformované schéma.

můstku určena především tímto vnitřním odporem indikátoru. Podstatnější nevýhodou však je to, že v obvodu můstku se uplatní nedefinované odpory kontaktů, kterými je měřený prvek k můstku připojen. Přechodovým odporem kontaktů i měřeným odporem teče stejný proud. Na obou těchto odporech budou tedy napětí úměrná jejich hodnotám a v případě, že máme měřit odpor řádově stejné hodnoty jako přechodové odpory, je přesnost značně omezená. Jako další příklad aplikace metod řešení elektrických obvodů budeme analyzovat tzv. Thomsonův dvojmost, určený k měření malých odporů.

Schéma jeho zapojení je uvedeno na obr. 8.19a. Měřeným je odpor  $R_x$ . Jeho hodnota se určuje z podmínky rovnováhy, při které je proud tekoucí indikátorem  $G$  nulový.

Hledání podmínky rovnováhy v Thomsonově dvojmostu lze převést na problém rovnováhy Wheatstonova můstku, jestliže trojúhelníkové spojení odporů  $R_3, R_4$  a  $r$  vyjádříme ekvivalentním spojením do hvězdy (viz příklad 3.2.6c). Získáme tak schéma uvedené na obr. 8.19b, které představuje Wheatstonův můstek. Pro odpory  $R_5, R_6$  a  $R_7$  dostaneme podle (3.53)

$$R_5 = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + r}, \quad R_6 = \frac{R_3 r}{R_3 + R_4 + r}, \quad R_7 = \frac{R_4 r}{R_3 + R_4 + r}.$$

Využitím podmínky rovnováhy Wheatstonova můstku (8.85) pak pro rovnováhu Thomsonova můstku dostaneme podmínku

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N + \frac{R_1 r}{R_3 + R_4 + r} \left( \frac{R_4}{R_2} - \frac{R_3}{R_1} \right), \quad (8.90a)$$

která se značně zjednoduší, budeme-li požadovat, aby pro odpory  $R_1$  až  $R_4$  platil trvale vztah

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}. \quad (8.91)$$

Z (8.90a) pak zůstane jen první člen, tj.

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_N. \quad (8.90b)$$

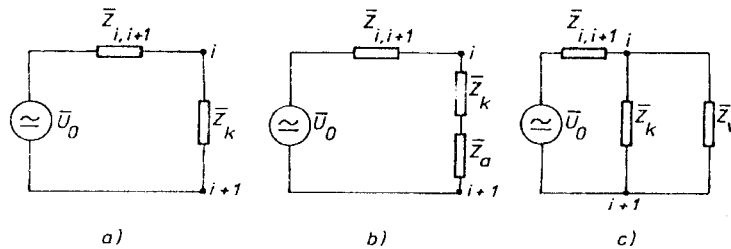
Komerční můstky Thomsonova typu jsou konstruovány tak, že podmínka (8.91) je při nastavování rovnováhy trvale splněna. Rovnováha můstku je pak dána vztahem (8.90b). Odpory  $R_1$  až  $R_4$  mají zpravidla značně větší hodnoty než odpory  $R_x$  a  $R_N$ . Proud tekoucí odpory  $R_1$  až  $R_4$  je tedy značně menší než proud ve smyčce s odpory  $R_x$  a  $R_N$ . Nedefinované odpory spojů a přepínačů se tedy ve větvích s velkými odpory téměř neprojeví. Výsledek měření mohou ovlivnit

pouze odpory spojuj mezi odporem  $R_v$  a body (1) a (2), a mezi odporem  $R_N$  a body (3) a (4). Technickému provedení těchto svorek je u komerčních přístrojů věnována náležitá pozornost.

#### d) Měření napětí a proudů v obvodech

Měřicí přístroje pro měření napětí a proudů, tj. ampérmetry a voltmetry, představují pasivní dvojpóly, které mohou být charakterizovány svými (vnitřními) impedancemi. Impedanci voltmetru budeme v následujících úvahách označovat symbolem  $\bar{Z}_V$  impedanci ampérmetru symbolem  $\bar{Z}_A$ . (Při měření stacionárních napětí a proudů a pro střídavé veličiny nepříliš vysokých frekvencí lze tyto impedance redukovat na reálné odpory  $R_V$  a  $R_A$ .)

Zařazením měřicího přístroje do obvodu se poměry v obvodu změni, takže vlastně měříme poněkud jiné hodnoty. Snahou ovšem je, aby tyto změny nebyly příliš velké, tj. aby například příliš nepřesahovaly náhodnou chybu měření, nebo aby bylo možné alespoň jejich hodnoty vypočítat. Systematická chyba, vznikající při měření napětí a proudů v obvodu vlivem konečných hodnot vnitřních impedancí měřicích přístrojů, může být určena pomocí *Théveninovy věty*. Nyní probereme tuto otázku jako příklad jejího použití.



Obr. 8.20 K výpočtu systematické chyby při měření napětí a proudu v obvodech.

Při měření proudu ve větvi obvodu zařazujeme měřicí přístroj sériově do této větve. Předpokládejme, že chceme měřit proud tekoucí impedancí  $\bar{Z}_k$  ve větvi mezi uzly  $i$  a  $(i+1)$ . Zbytek obvodu, vnější k této větvi, můžeme podle Théveninovy věty nahradit zdrojem s elektromotorickým napětím  $\bar{U}_0$  a vnitřní impedancí  $\bar{Z}_{i,i+1}$ . Schéma takto upraveného obvodu vidíme na obr. 8.20a. Impedancí  $\bar{Z}_k$  teče zřejmě proud

$$\bar{I}_k = \frac{\bar{U}_0}{\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k}.$$

Po zařazení ampérmetru, který je na obr. 8.20b reprezentován svou vnitřní impedancí  $\bar{Z}_A$ , poteče impedancí  $\bar{Z}_k$  proud

$$\bar{I}'_k = \frac{\bar{U}_0}{\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k + \bar{Z}_A}.$$

Srovnáním obou způsobů vyjádření napětí  $\bar{U}_0$  dostaneme výraz

$$\bar{I}'_k (\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k + \bar{Z}_A) = \bar{I}_k (\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k),$$

odkud můžeme vyjádřit relativní systematickou chybu měření

$$\frac{\bar{I}_k - \bar{I}'_k}{\bar{I}'_k} = \frac{\bar{Z}_A}{\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k}. \quad (8.92a)$$

Vzniklá systematická chyba bude zanedbatelná, pokud bude platit

$$\bar{Z}_A \ll |\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k|. \quad (8.93a)$$

Obdobně můžeme určit systematickou chybu při měření napětí v obvodu. Chceme-li například měřit napětí mezi uzly  $i$  a  $(i+1)$ , připojíme voltmetr k těmto uzlům, tj. paralelně k impedanci  $\bar{Z}_k$ . Správnou hodnotu napětí mezi uzly (bez připojeného voltmetru)  $\bar{U}$  určíme snadno z náhradního schématu obvodu znázorněného na obr. 8.20a,

$$\bar{U} = \bar{U}_0 \frac{\bar{Z}_k}{\bar{Z}_{i,i+1} + \bar{Z}_k}.$$

Po připojení voltmetru vznikne situace, kterou vidíme na obr. 8.20c. Napětí mezi uzly  $i$  a  $(i+1)$  bude mít hodnotu  $\bar{U}'$ , pro niž jednoduše najdeme

$$\bar{U}' = \bar{U} \frac{\bar{Z}_V}{\bar{Z}_V + \frac{\bar{Z}_k \bar{Z}_{i,i+1}}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_{i,i+1}}}.$$

Úpravou tohoto posledního výrazu můžeme již vyjádřit hledanou systematickou chybu napětí

$$\frac{\bar{U} - \bar{U}'}{\bar{U}'} = \frac{1}{\bar{Z}_V} \frac{\bar{Z}_k \bar{Z}_{i,i+1}}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_{i,i+1}}. \quad (8.92b)$$

Chyba bude zanedbatelná, bude-li platit

$$\bar{Z}_V \gg \left| \frac{\bar{Z}_k \bar{Z}_{i,i+1}}{\bar{Z}_k + \bar{Z}_{i,i+1}} \right|. \quad (8.93b)$$

### 8.3 Vybrané typy obecnějších obvodů

#### 8.3.1 Nesinusové střídavé lineární obvody v ustáleném stavu

Nyní se budeme stručně zabývat obecnějším typem střídavých obvodů. Budeme uvažovat lineární obvody, v nichž působí zdroje, jejichž elektromotorické napětí  $\mathcal{E}(t)$  je obecnou periodickou funkcí času. To znamená, že pro daný zdroj existuje kladná veličina  $T$  nazývaná *perioda elektromotorického napětí*, pro níž platí

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t + nT), \quad (8.94)$$

kde  $n$  je libovolné celé číslo. Lze očekávat, že po uplynutí dostatečně dlouhé doby od zapnutí zdrojů do obvodu budou rovněž proudy a napětí na jednotlivých prvcích obvodu periodickou funkcí času se stejnou periodou  $T$ . Za této situace je obvod v *ustáleném stavu*.

Metody řešení nesinusových střídavých obvodů jsou založeny na Fourierově harmonické analýze periodických funkcí. Z matematické analýzy víme (viz například [14]), že dosti obecné periodické funkce  $f(t)$  s periodou  $T$  je možné vyjádřit konvergující nekonečnou řadou harmonických funkcí

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (8.95a)$$

Velichina  $\omega = 2\pi/T$  se nazývá *úhlová* (respektive *kruhová*) *frekvence*. Člen  $a_0/2$  reprezentuje střední hodnotu funkce, další členy typu  $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ , které mají nulové střední hodnoty, se nazývají její „*n-té harmonické*“. Pro koeficienty  $a_n, b_n$  platí

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.96)$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Alternativně lze Fourierovy řady vyjádřit ve tvaru

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n), \quad (8.95b)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega t + \psi_n), \quad (8.95c)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{in\omega t}, \quad (8.95d)$$

přičemž pro jednotlivé typy koeficientů platí

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n},$$

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{a_n}{b_n},$$

$$g_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \quad \text{pro } n < 0,$$

$$g_n = \frac{a_0}{2} \quad \text{pro } n = 0, \quad (8.97)$$

$$g_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad \text{pro } n > 0.$$

Jako příklad vyšetříme Fourierovu řadu „obdélníkové“ funkce, jejíž graf je uveden na obr. 8.21a a která je definována takto:  $f(t) = 1$  pro  $t \in (0, T/2)$ ,  $f(t) = 0$  pro  $t = 0, T/2, T$  a  $f(t) = -1$  pro  $t \in (T/2, T)$ . Jelikož jde o lichou funkci s nulovou střední hodnotou, obdržíme  $a_n = 0$  pro všechna  $n$ . Pro koeficienty  $b_n$  dostaneme podle (8.96)

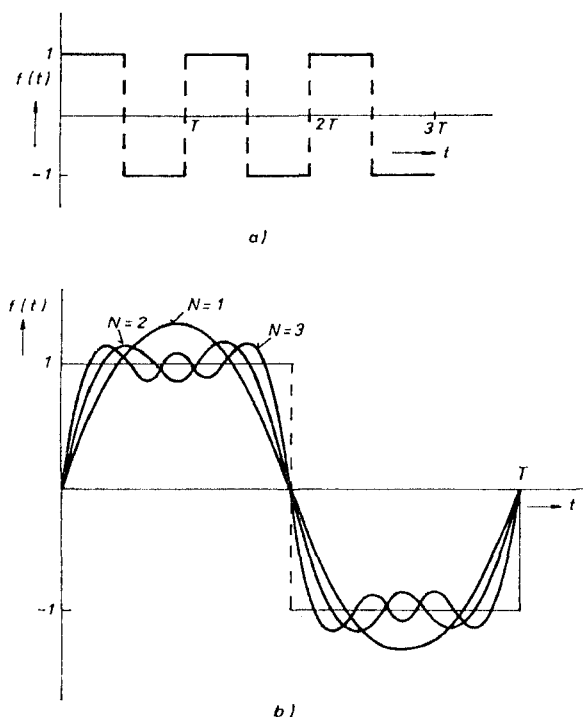
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudá} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{pro } n \text{ lichá,} \end{cases} \quad (8.98)$$

a tedy

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sin \omega t + \frac{4}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots \quad (8.99)$$

Danou periodickou funkci lze přibližně vyjádřit pomocí součtu konečného počtu členů Fourierovy řady. Je přitom zřejmé, že čím přesnější aproximaci funkce požadujeme, tím větší počet členů musíme vzít v úvahu. Na obrázku 8.21b je tato skutečnost demonstrována na příkladu rozvoje (8.99). V obrázku jsou uvedeny grafy prvního členu ( $N = 1$ ), součtu prvních dvou členů ( $N = 2$ ) a součtu prvních tří členů ( $N = 3$ ) této řady. Obecně lze říci, že Fourierovy rozvoje periodických funkcí konvergují obvykle velmi rychle; již relativně malým počtem členů lze často získat dobrou aproximaci rozvíjené funkce.

Možnost aproximace periodické funkce konečným počtem členů harmonického rozvoje je základem metod řešení lineárních nesinusových střídavých obvodů. Periodické elektromotorické napětí zdroje (8.94) může být totiž přibližně vyjádřeno jako superpozice konečného počtu harmonických střídavých zdrojů



Obr. 8.21 a) Časový průběh „obdélníkové“ funkce,  
b) aproximace funkce z obr. 8.21a konečným počtem členů Fourierova rozvoje.

$$e'(t) = e_0 + \sum_{n=1}^N e_n \cos(n\omega t + \varphi_n). \quad (8.100)$$

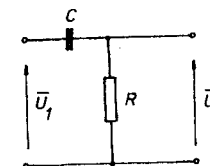
Díky platnosti věty o superpozici v lineárních obvodech (viz článek 8.2.3) je možné obvod řešit pro každý harmonický zdroj rozvoje (8.100) zvlášť. Výsledné proudy v jednotlivých větvích lze pak vyjádřit jako superpozici těchto dílčích řešení.

Pro dílčí řešení s jednotlivými harmonickými zdroji je možné využít všechny poznatky vyložené v oddílu 8.2.

I v nesinusových střídavých obvodech v ustáleném stavu lze počítat časově nezávislou střední hodnotu výkonu dodávaného zdrojem do obvodu, či ztraceného na jednotlivých prvcích (srov. odst. 4.3.4c), dosadíme-li do integrálu v (4.119) příslušné časové průběhy napětí a proudu (nebo jejich aproximace konečným počtem členů Fourierovy řady). Pro jednotlivé typy periodických průběhů je možné zavést i jejich efektivní hodnoty. Je-li na odporu  $R$  průběh okamžitých hodnot napětí a proudu  $U(t)$ ,  $I(t)$ , lze určit střední hodnotu výkonu  $\bar{N}$  přeměněného v Jouleovo teplo a zavést efektivní hodnotu proudu  $I_{ef}$  vztahem

$$\bar{N} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{R}{T} \int_0^T I^2(t)dt = RI_{ef}^2. \quad (8.101)$$

Pro chování nesinusových střídavých obvodů je velmi důležitá frekvenční závislost parametrů jednotlivých prvků. U jednoduchých lineárních dvojpólů a čtyřpólů můžeme tyto frekvenční charakteristiky zjistit výpočtem. Ve složitějších případech je nutné určovat je experimentálně. V některých frekvenčních oborech může být frekvenční závislost parametru daného prvku nevýrazná. Dané řešení pak můžeme v tomto oboru považovat za frekvenčně nezávislé. Jako příklad takového chování uvedeme vlastnosti jednoduchého čtyřpólu znázorněného na obr. 8.22, který je složen z jednoho odporu a jedné kapacity. (Tento prvek se často užívá jako vazební člen mezi aktivními čtyřpóly ve složitějších obvodech.)



Obr. 8.22 Schéma vazebního obvodu s kapacitou a odporem.

Přivedeme-li na vstup čtyřpólu střídavé napětí  $\bar{U}_1$  o kruhové frekvenci  $\omega$ , můžeme určit komplexní amplitudu napětí  $\bar{U}_2$ . Platí zřejmě

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}, \quad (8.102)$$

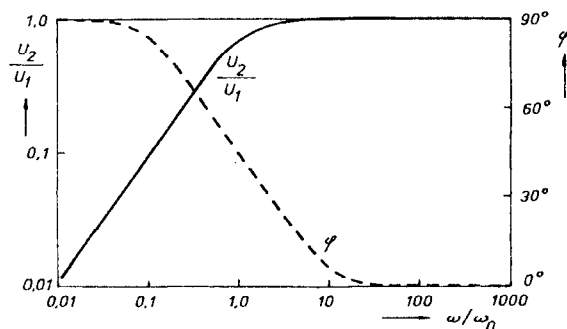
$$\varphi = \arctg(\omega CR)^{-1}.$$

Pro vysoké frekvence  $\omega \gg \omega_0 = (CR)^{-1}$  je  $U_2/U_1 = 1$ . Napětí bude tedy čtyřpólem přenášeno bez útlumu. Z vlastností funkce arkustangens dále plyne pro fázový úhel  $\varphi = 0$ . To znamená, že napětí bude čtyřpólem přenášeno i bez posuvu fáze. Pro frekvenci  $\omega = \omega_0 = (CR)^{-1}$  je  $U_2/U_1 = \sqrt{2}/2$  a  $\varphi = 45^\circ$ . Při dalším snižování frekvence poměr amplitud dále klesá a fázový posuv vzrůstá k hodnotě  $90^\circ$ . Při dostatečně nízkých frekvencích, kdy platí  $\omega \ll \omega_0 = (CR)^{-1}$ ,



je  $U_2/U_1 = \omega CR$ . Útlum vzrůstá lineárně s klesající frekvencí. Frekvenční závislost obou veličin  $U_2/U_1$  i  $\varphi$  je uvedena na obr. 8.23.

Z provedené diskuse je patrné, že čtyřpól podle obr. 8.22 je bez zkreslení schopen přenést periodicky proměnná napětí libovolného průběhu, jehož Fourierův rozklad obsahuje jen frekvence  $\omega \gg \omega_0 = (CR)^{-1}$ . Například je schopen přenést napětí „obdélníkového“ průběhu podle obr. 8.21a, platí-li  $T \ll 2\pi CR$ .



Obr. 8.23 Přenosová charakteristika čtyřpólu z obr. 8.22.

### 8.3.2 Neustálený stav v lineárních obvodech

Při řešení kvazistacionárních obvodů v neustáleném stavu je nutné vycházet z obecné formulace Kirchhoffových pravidel tak, jak byly uvedeny v článku 4.2.1. Některé konkrétní příklady diskuse jednoduchých obvodů v obecném stavu byly uvedeny v článcích 4.2.2, 4.2.3 a 4.2.4.

Jak jsme ukázali, aplikace II. Kirchhoffova pravidla na kvazistacionární obvod v neustáleném stavu vede na lineární diferenciální rovnice. Řešením obecného obvodu, například o  $n$  větvích a  $q$  uzlech, získáme soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé proudy. Pro sestavení těchto rovnic je možné obecně použít některý z postupů vyložených v článku 8.2.4, tj. je například možné nalézt soustavu nezávislých smyček a pro každou z nich vyjádřit II. Kirchhoffovo pravidlo pomocí smyčkových proudů.

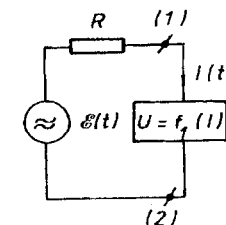
Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je dáno součtem obecného řešení příslušné homogenní rovnice a libovolného partikulárního řešení rovnice nehomogenní. Pro řešení soustav homogenních lineárních diferenciálních rovnic (s konstantními koeficienty) existují obecné postupy (viz například [14]) a nalézt jejich obecné řešení není zpravidla obtížné. Mnohem obtížnější bývá obvykle nalézt partikulární integrál nehomogenní rovnice. Vzhledem k tomu, že pravé strany rovnic vyjadřujících II. Kirchhoffovo pravidlo jsou dány elektromotorickými napětími či jejich časovými derivacemi (viz

článek 4.2.1), je možné někdy partikulární řešení „uhádnout“ z tvaru elektromotorických napětí. V případě střídavých obvodů je možné za partikulární řešení nehomogenních rovnic vzít řešení obvodu v ustáleném stavu (viz článek 8.2.4).

Pro řešení lineárních obvodů v neustáleném stavu existují obecné postupy, které, podobně jako v případě ustáleného stavu, redukují problém na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic. Nejčastěji se používá metody využívající vlastností tzv. *Laplaceovy transformace*.<sup>79</sup>

### 8.3.3 Příklady řešení nelineárních obvodů

Elektrické obvody s nelineárními prvky se vyskytují téměř ve všech elektronických zařízeních. Metodika analýzy a syntézy takových obvodů tvoří dnes samostatné obory v mnoha elektrotechnických odvětvích. Naším úkolem na tomto místě proto není (a ani nemůže být) podat ucelený, i když elementární výklad problematiky nelineárních obvodů, jako tomu bylo v případě střídavých lineárních obvodů. Úkolem tohoto článku je charakterizovat na několika jednoduchých příkladech základní přístupy k řešení elektrických obvodů s nelineárními prvky a poukázat na význam jejich linearizace pro řadu konkrétních situací.



Obr. 8.24 Schéma obvodu s nelineárním odporovým dvojpólem.

Vyjděme z jednoduchého příkladu obvodu zobrazeného na obr. 8.24, obsahujícího nelineární odporový dvojpól s charakteristickou funkcí typu (8.5), jenž je připojen přes odpor  $R$  k ideálnímu zdroji elektromotorického napětí. Jelikož tato charakteristická funkce vyjadřuje vztah mezi okamžitými hodnotami napětí a proudu na dvojpólu, můžeme aplikovat II. Kirchhoffovo pravidlo. Dostaneme nelineární rovnici

$$\varepsilon(t) = RI(t) + f_1(I(t)) \quad (8.103)$$

pro neznámý proud obvodem.

V případě složitějších obvodů obsahujících nelineární dvojpóly lze analogicky jako u lineárních obvodů (viz článek 8.2.4) sestavit soustavu rovnic pro neznámé proudy. Tyto rovnice budou ovšem obsahovat charakteristické funkce

<sup>79</sup> Pro poučení o této problematice, kterou se již nebudeme zabývat, odkazujeme na již citovanou knihu B. Kvasil: *Elektrické lineární obvody*, Nakl. dopravy a spojů, Praha 1967.

dvojpólu a budou tedy nelineární. Nebudou-li navíc uvažované nelineární prvky jen odporovými dvojpóly, povede daný problém obecně na soustavu diferenciálních rovnic. Je zřejmé, že na analogickou soustavu rovnic povede i úloha o řešení obvodů obsahujících jako nelineární prvky také nelineární čtyřpóly.

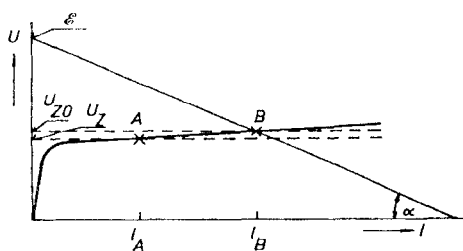
Jsou-li známa analytická vyjádření charakteristických funkcí nelineárních prvků, je úloha fyzikálně určena, i když nemusí být z matematického hlediska exaktně řešitelná. I potom je ovšem možné použít pro řešení aproximativní numerické metody.

Ve většině případů však analytické vyjádření charakteristik nelineárních prvků známo není. Pak zbývají možnosti:

- Aproximovat charakteristické funkce empirickými vztahy, pokud možno takového tvaru, aby získané rovnice byly z matematického hlediska řešitelné.
- Jsou-li vlastnosti nelineárních prvků dány soustavou charakteristik, použít grafické metody.
- V případech, kdy je to možné, nelineární prvky linearizovat. Použití dvou posledně jmenovaných postupů budeme demonstrovat na několika jednoduchých případech.

#### a) Stabilizace napětí Zenerovou diodou

V článku 7.3.4 byla zmínka o tom, že vhodně konstruované diody nazývané Zenerovy diody mohou trvale pracovat v oblasti Zenerova proudu. V současné elektronice představují Zenerovy diody důležitý prvek, který se užívá zejména ke stabilizování napětí. Všimneme si blíže podstaty této funkce.



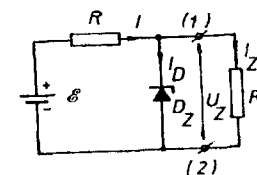
Obr. 8.25 Grafická metoda nalezání pracovního bodu Zenerovy diody.

Zařadíme-li Zenerovu diodu na místo obecného nelineárního dvojpólu do obvodu, který vidíme na obr. 8.24, můžeme snadno určit jeho parametry tak, aby dioda měla žádaný pracovní bod. Máme-li například zadáno elektromotorické napětí zdroje  $\mathcal{E}$  a požadujeme-li proud obvodem  $I_B$ , je možné z podmínky (8.103) určit hodnotu odporu  $R$ , známe-li tvar funkce  $f_1(I)$ . Je-li charakteristika diody dána graficky, je možné potřebnou velikost odporu určit grafickou metodou podle obr. 8.25. Požadovanému proudu  $I_B$  odpovídá na charakteristice diody (srov. obr. 7.28) bod  $B$ . Takzvaná zatěžovací přímka vedená body  $A$  a  $B$  je gra-

fem rovnice typu (3.33) a udává závislost napětí mezi svorkami (1) a (2) na protékajícím proudu. Její průsečík s charakteristikou diody určuje pracovní bod diody, daný proudem  $I_B$  a napětím  $U_{Z,0}$ . Ze směrnice zatěžovací přímky, pro níž platí  $\tan \alpha = -R$ , je možné určit hledaný odpor  $R$ .

Při použití Zenerovy diody ve funkci stabilizátoru napětí připojujeme zátěž  $R_Z$  na níž chceme napětí stabilizovat, ke svorkám (1) a (2) podle schématu na obr. 8.26. Předpokládáme-li, že přípustný proud diodou leží v intervalu  $(I_A, I_B)$ , volíme odpor  $R$  tak, aby bez odběru proudu do zátěže tekla diodou proud poněkud menší než  $I_B$ . Po připojení zátěže platí pro obvod podmínky

$$I = I_D + I_Z, \quad \mathcal{E} = RI + U_Z, \quad U_Z = R_Z I_Z.$$



Obr. 8.26 Zapojení Zenerovy diody jako stabilizátoru napětí.

Předpokládáme-li dále, že charakteristika diody je mezi body  $A$  a  $B$  přibližně přímková, můžeme zavést dynamický vnitřní odpor diody  $R_{i,D} = \Delta U_Z / \Delta I_D$  a s jeho pomocí vyjádřit změnu napětí  $\Delta U_Z$  na zátěži (při dané změně elektromotorického napětí zdroje  $\Delta \mathcal{E}$ ). Platí

$$\Delta U_Z = \Delta \mathcal{E} \frac{R_{i,D} R_Z}{R R_{i,D} + R R_Z + R_{i,D} R_Z}. \quad (8.104)$$

Speciálně pro  $R_{i,D} \ll R_Z$  platí

$$\Delta U_Z = \Delta \mathcal{E} \frac{R_{i,D}}{R + R_{i,D}} \quad (8.104a)$$

a je-li dále  $R_{i,D} \ll R$ , dostáváme

$$\Delta U_Z = \Delta \mathcal{E} \frac{R_{i,D}}{R}. \quad (8.104b)$$

Vztahy (8.104) až (8.104b) udávají pro jednotlivé případy faktor stabilizace  $\Delta U_Z / \Delta \mathcal{E}$  při změnách elektromotorického napětí zdroje.

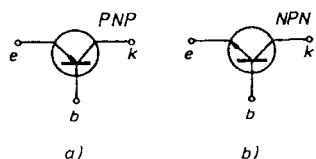
Zapojení Zenerovy diody podle obr. 8.26 představuje vůči zátěži  $R_Z$  efektivní zdroj. Jeho elektromotorické napětí mezi svorkami (1) a (2) (při nulovém odběraném proudu  $I_Z = 0$ ) je  $U_{Z,0}$ . Efektivní vnitřní odpor tohoto zdroje  $R_{i,ef}$  je možné snadno určit užitím Théveninovy věty (srov. způsob řešení obvodu z obr. 8.14 v článku 8.2.5). Platí

$$R_{i,ef} = \frac{RR_{i,D}}{R + R_{i,D}} \quad (8.105)$$

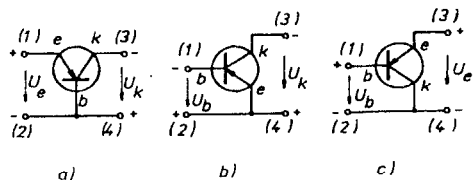
Speciálně je-li  $R \gg R_{i,ef}$ , platí přibližně  $R_{i,ef} \doteq R_{i,D}$ .

### b) Stanovení pracovního bodu tranzistoru

Grafická metoda využívající soustavu charakteristik může být užita i k určení pracovního bodu čtyřpólu. Jako příklad jejího užití ukážeme postup stanovení pracovního bodu tranzistoru.



Obr. 8.27 Schematické značky tranzistoru: a) tranzistor PNP, b) tranzistor NPN.

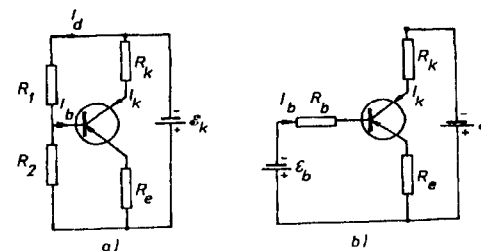


Obr. 8.28 Způsoby zapojení tranzistoru: a) zapojení se společnou bází (SB), b) zapojení se společným emitorem (SE), c) zapojení se společným kolektorem (SK).

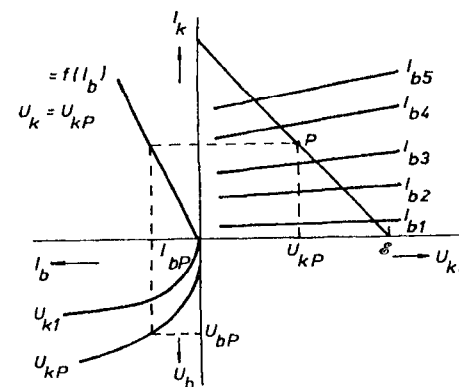
V článku 7.3.4b byl vyložen princip činnosti na příkladu tranzistoru PNP. V případě tranzistoru NPN je jediný rozdíl v opačné polaritě napětí přikládáných na jednotlivé přechody  $p-n$ . Ve schématech obvodů se tranzistory zobrazují smluvenými značkami, které jsou pro oba typy tranzistorů zobrazeny na obr. 8.27. Vedle základního zapojení, kdy je společný pól zdrojů napájejících oba přechody připojen k bázi tranzistoru (tzv. *zapojení se společnou bází (SB)*), mohou být tranzistory používány i v *zapojení se společným emitorem (SE)* a se *společným kolektorem (SK)*. Tyto způsoby zapojení se liší v konkrétních vlastnostech při přenosu signálu. Polarita napětí na jednotlivých přechodech  $p-n$  však musí ve všech případech zůstat zachována. Na obrázku 8.28 jsou schematicky zobrazeny všechny uvedené typy zapojení s vyznačenou polaritou napětí pro tranzistory typu PNP.

Principiální zapojení, v němž byla činnost tranzistoru vyšetřována v čl. 7.3.4 (kdy jsou oba přechody  $p-n$  napájeny zdroji elektromotorického napětí s malým vnitřním odporem), není vhodné pro praktické použití. Důvodem je teplotní závislost proudu tekoucího tranzistorem. Zvýšení teploty přechodu  $p-n$  protékajícím proudem vede totiž k dalšímu zvýšení proudu a dalšímu zvýšení teploty,

kteří by (při použití zdrojů schopných dodávat dostatečně velký proud) nakonec vedlo ke zničení tranzistoru. V praxi použitelné zapojení tranzistoru musí být schopné automaticky pracovní bod stabilizovat. Lze k tomu využít regulační schopnosti tranzistoru, například tak, že vzrůst proudu kolektorem vyvolaný vzrůstem teploty vede ke snížení proudu emitorem, což vyvolá pokles kolektorového proudu na hodnotu blízkou hodnotě původní.



Obr. 8.29 a) Zapojení tranzistoru se společným emitorem a teplotně stabilizovaným pracovním bodem. b) Ekvivalentní schéma zapojení obvodu z obr. 8.29a.



Obr. 8.30 Grafická metoda nalezení pracovního bodu tranzistoru.

Aniž bychom se blíže zabývali jak vlastnostmi jednotlivých typů zapojení tranzistorů, tak problematikou stabilizace pracovního bodu, vyšetříme jako příklad často užívané zapojení se společným emitorem, obr. 8.29a. Jak bylo ukázáno v článku 8.1.2, je pracovní bod čtyřpólu určen volbou dvou ze čtyř jeho parametrů.

Zvolíme-li tedy například pracovní bod  $P$  s danými hodnotami kolektorového proudu  $I_{k,P}$  a napětí  $U_{k,P}$  (viz obr. 8.30), je pracovní bod tranzistoru již určen; jde

nyní o to, stanovit zbylé parametry obvodu uvedeného na obr. 8.29a. Jestliže je například dáno elektromotorické napětí napájecího zdroje  $\mathcal{E}$ , je směrnicí zatěžovací přímkou, procházející body  $P$  a  $\mathcal{E}$ , určena i hodnota odporu  $R_k$ . Z charakteristik tranzistoru je pak možné, způsobem naznačeným v obr. 8.30, určit i zbylé hodnoty vstupního proudu a napětí  $I_{b,p}$  a  $U_{b,p}$ .

Pro určení zbyvajících parametrů obvodu, tj. odporů  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_c$ , je výhodné schéma z obr. 8.29a přetřansformovat užitím Théveninovy věty (srov. čl. 8.2.5) na tvar znázorněný na obr. 8.29b, přičemž pro elektromotorické napětí  $\mathcal{E}_b$  a vnitřní odpor  $R_b$  efektivního zdroje napájecího obvodu báze tranzistoru platí

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_k \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (8.106)$$

Užitím II. Kirchhoffova pravidla dostaneme podmínky

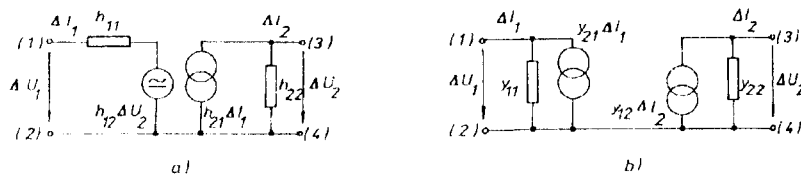
$$\mathcal{E}_k = R_k I_{k,p} + U_{k,p} + R_c I_{k,p}, \quad (8.107)$$

$$\mathcal{E}_b = R_b I_{b,p} + U_{b,p} + R_c I_{k,p},$$

kteří ovšem (spolu s (8.106)) nestačí k určení neznámých veličin. Další potřebnou podmínku dostaneme volbou velikosti proudu  $I_d$  (viz obr. 8.29a), který (spolu s odporem  $R_c$ ) určuje stupeň teplotní stabilizace pracovního bodu. Obvykle se volí  $I_d \approx 10I_{b,p}$ , čímž je určena hodnota součtu  $R_1 + R_2$ . Jejím použitím je již možné hledané odpory  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_c$  vypočítat.

### c) Náhradní schéma linearizovaného čtyřpólu

Pro malé změny napětí a proudů v okolí daného pracovního bodu mohou být nelineární čtyřpóly linearizovány. V článku 8.1.2 jsme viděli, že vlastnosti odporových čtyřpólů mohou být za uvedených předpokladů charakterizovány například parametry  $h$ , popř. parametry  $y$ . Oba typy parametrů jsou přitom reálné veličiny. Na základě linearizovaných rovnic (8.11), respektive (8.13) pak mohou být zkonstruována ekvivalentní náhradní schémata obsahující jen lineární prvky, kterými mohou být vyšetřované čtyřpóly reprezentovány ve schématech složitějších obvodů. Pro analýzu takto linearizovaných obvodů mohou již být použity metody vyložené v oddílu 8.2.



Obr. 8.31 Ekvivalentní schémata linearizovaného čtyřpólu: a) vyjádření pomocí parametrů  $h$ , b) vyjádření pomocí parametrů  $y$ .

Rovnice (8.11) popisuje linearizovaný čtyřpól pomocí parametrů  $h$ . Je zřejmé, že vstupní obvod čtyřpólu může být reprezentován sériovým odporem  $h_{11}$  a zdrojem elektromotorického napětí  $h_{12}\Delta U_2$ . Výstupní obvod je naopak reprezentován zdrojem proudu  $h_{21}\Delta I_1$  s paralelní vodivostí  $h_{22}$  (viz obr. 8.31a).

Rovnice (8.13) popisuje linearizovaný čtyřpól parametry  $y$ , které mají rozměr vodivosti. V náhradním schématu vstupního i výstupního obvodu figurují zdroje proudu  $y_{21}\Delta I_1$  a  $y_{12}\Delta I_2$  s paralelními vodivostmi  $y_{11}$  a  $y_{22}$  (viz obr. 8.31b).

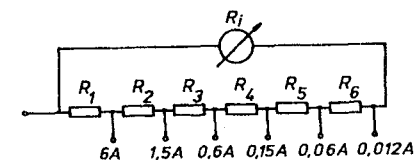
Je samozřejmé, že uvedená náhradní schémata jsou přibližná nejen s ohledem na velikost změn napětí a proudů, ale i s ohledem na rychlost těchto změn. Při vysokých frekvencích nemůže být totiž žádný čtyřpól považován za čistě odporový, neboť se nezanedbatelnou měrou začnou uplatňovat indukčnosti a kapacity jeho jednotlivých částí. Linearizovaná náhradní schémata pak nebudou obsahovat jen reálné prvky. Jejich konstrukce a řešení příslušných obvodů pak může být značně složitý problém.

### ÚLOHY KE KAPITOLE 8

Ú 8.1: Miliampérmetr se stupnicí do  $I_0$  miliampérů má vnitřní odpor  $R_i$ . Určete:

- hodnotu paralelního odporu (bočnicku)  $R_B$ , který zvětší rozsah miliampérmetru  $n$ -krát,
- hodnotu sériového odporu  $R_s$ , který zvýší napěťový rozsah přístroje  $m$ -krát.

Ú 8.2: Ke galvanometru s vnitřním odporem  $R_i$  je připojen bočník, který  $n$ -krát snižuje citlivost galvanometru. Jaký sériový odpor  $R$  je třeba připojit, aby celkový odpor zapojení byl roven odporu galvanometru?



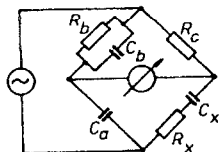
Obr. 8.32 Schéma Ayrtonova bočnicku k úloze Ú 8.3.

Ú 8.3: Navrhněte konstrukci kruhového (Ayrtonova) bočnicku (obr. 8.32) k miliampéru s rozsahem 1,2 mA, popř. 54 mV tak, aby vznikl ampérmetr se šestí rozsahy: 6; 1,5; 0,6; 0,15; 0,06; 0,012 A.

Ú 8.4: Kabel délky  $l$  uložený v zemi je v určitém místě poškozen tak, že jeden z jeho vodičů má zkrat na vodivý plášť. Navrhněte můstkové uspořádání, které na základě měření odporu kabelu umožní určit vzdálenost  $x$  poškozeného místa od jednoho konce kabelu. Předpokládejte, že vodiče kabelu mají odpor  $r_0$  ( $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ ) připadající na jednotkovou délku.

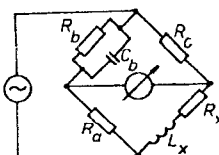
Ú 8.5: Uvažujte sériový rezonanční obvod  $R, L, C$ . Vypočtete výkon  $N$  dodávaný zdrojem napětí  $U$  do obvodu a nalezněte podmínky, za kterých bude výkon maximální.

Ú 8.6: Nalezněte podmínky rovnováhy v Scherringově můstku (obr. 8.33) pro měření kapacity.



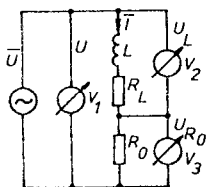
Obr. 8.33 Schéma Scherringova můstku.

Ú 8.7: Nalezněte podmínky rovnováhy v Maxwellově můstku (obr. 8.34) pro měření indukčnosti.



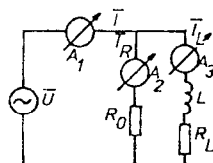
Obr. 8.34 Schéma Maxwellova můstku.

Ú 8.8: Pro měření indukčnosti lze použít metodu tří voltmetrů. Měřená cívka o indukčnosti  $L$  a odporu  $R_L$  je přes známý odpor  $R_0$  připojena ke zdroji střídavého napětí. Pomocí tří voltmetrů se pak změří napětí na cívce  $U_L$ , na známém odporu  $U_R$  a celkové napětí zdroje  $U$  (viz obr. 8.35). Ze známých hodnot  $U_L$ ,  $U_R$ ,  $U$  vypočítejte hodnotu indukčnosti  $L$  a odporu  $R_L$  za předpokladu, že vnitřní odpory voltmetrů můžeme považovat za nekonečně velké. Určete výkon  $N$  dodaný zdrojem do cívky.



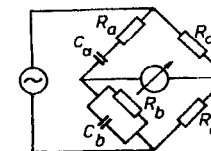
Obr. 8.35 Schéma zapojení pro měření indukčnosti metodou tří voltmetrů.

Ú 8.9: K metodě tří voltmetrů (viz úloha Ú 8.8) je duální metoda tří ampérmetrů, která používá zapojení znázorněném na obr. 8.36. Z údajů ampérmetrů vypočítejte hodnotu indukčnosti  $L$  a odporu  $R_L$ . Zjistěte výkon  $N$  ztracený v cívce. Vnitřní odpory ampérmetrů zanedbejte.



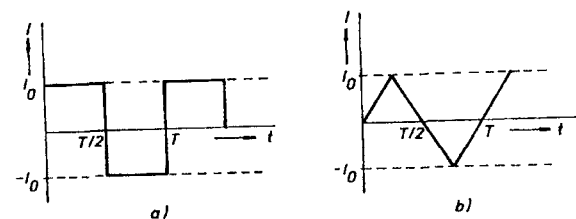
Obr. 8.36 Schéma zapojení pro měření indukčnosti metodou tří ampérmetrů.

Ú 8.10: Nalezněte podmínky rovnováhy ve Wienově můstku pro měření kapacity, respektive kmitočtu (viz obr. 8.37).



Obr. 8.37 Schéma zapojení Wienova můstku.

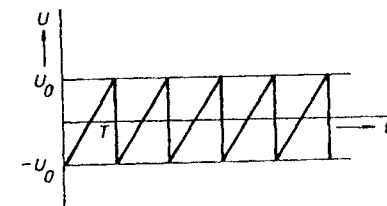
Ú 8.11: Spočítejte střední hodnotu  $I_s$  a efektivní hodnotu  $I_{ef}$  jednocestně a dvoucestně usměrněného proudu s amplitudou  $I_0$  a kruhovou frekvencí  $\omega$ .



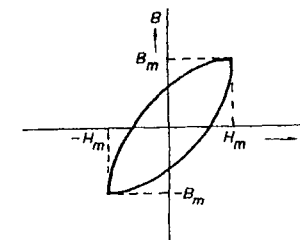
Obr. 8.38 Průběhy proudů pro výpočet středních a efektivních hodnot v úloze Ú 8.12: a) obdélkový průběh, b) trojúhelníkový průběh.

Ú 8.12: Stanovte střední hodnotu  $I_s$  (za půl periody), efektivní hodnotu  $I_{ef}$  a činitele tvaru  $K = I_{ef}/I_s$  proudů, jejichž průběhy jsou zobrazeny na obr. 8.38.

Ú 8.13: Nalezněte efektivní hodnotu napětí  $U_{ef}$  pilového průběhu s amplitudou  $U_0$  a periodou  $T$  (obr. 8.39).



Obr. 8.39 Pilový průběh napětí pro výpočet efektivní hodnoty v úloze Ú 8.13.



Obr. 8.40 Tvar hysterezní smyčky feromagnetika v oboru platnosti Rayleighova zákona.

Ú 8.14 : Toroidní cívka daných rozměrů s feromagnetickým jádrem je přes velký odpor  $R$  připojena ke zdroji střídavého elektromotorického napětí  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Určete průběh napětí  $U(t)$  na svorkách cívky za předpokladu, že ohmický odpor cívky je zanedbatelný a že pro magnetování jádra platí tzv. *Rayleighův zákon*, podle něhož jsou dvě větve hysterezní smyčky (viz obr. 8.40) dány vztahem

$$B = (\mu_p + b_R H_m) H + \frac{b_R}{2} (H^2 - H_m^2),$$

v němž  $B$ ,  $H$  jsou okamžité hodnoty magnetické indukce a intenzity pole v jádru,  $H_m$  je maximální hodnota intenzity magnetického pole v jádře,  $\mu_p$  počáteční permeabilita jádra a  $b_R$  tzv. *Rayleighova konstanta*.

## Dodatek 1

### Přehled vektorové analýzy

#### a) Skalární a vektorové veličiny

Většina fyzikálních veličin jsou buď *skaláry*, nebo *vektory*. Mnohem řídkěji se ve fyzice vyskytují veličiny jiného charakteru, například tenzory druhého a vyššího řádu. *Skalárem* nazýváme takovou veličinu, která je určena jen svou číselnou hodnotou, velikostí, popř. znaménkem (např. čas, hmotnost, náboj). Chceme-li skalární veličinu sledovat kvantitativně, musíme zvolit její jednotku, která pro ni vytvoří stupnici (škála, scala, odtud skalár). Skalární veličina je pak dána (obecně reálným) číslem udávajícím její hodnotu v těchto jednotkách. Počítání se skalárními veličinami je tedy z matematického hlediska dáno pravidly počítání s reálnými čísly a nemusí být již blíže vyšetřováno.

*Vektor* je naproti tomu veličina, u které vedle velikosti je třeba uvažovat směr a orientaci v prostoru (např. rychlost, zrychlení, síla, intenzita pole apod.). Pro plné určení vektorové veličiny je zapotřebí (při zvolené jednotce) udát několik jejích složek (souřadnic).

Z matematického hlediska definujeme obecně vektor jako prvek množiny (vektorového prostoru), v níž je zaveden součet dvou vektorů  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  jako vektor  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  a součin vektoru  $\mathbf{a}$  s číslem  $\alpha$  jako  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a}$ . Výsledky těchto operací jsou opět vektory téhož vektorového prostoru. Dále musí být splněny následující vztahy:

komutativní zákon pro sčítání:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

asociativní zákon pro sčítání:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c},$$

asociativní zákon pro násobení číslem:

$$\alpha (\beta \mathbf{a}) = (\alpha \beta) \mathbf{a},$$

distributivní zákony:

$$(\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}, \quad \alpha (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b},$$

existence nulového vektoru  $\mathbf{0}$ :

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{0} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

(rovnost  $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{0}$  nastane právě tehdy, když  $\alpha = 0$  nebo  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ),

existence opačného vektoru  $-\mathbf{a}$  ke každému vektoru  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{x}, -(\alpha \mathbf{a}) = (-\alpha) \mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a}),$$

násobení číslem 1:

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

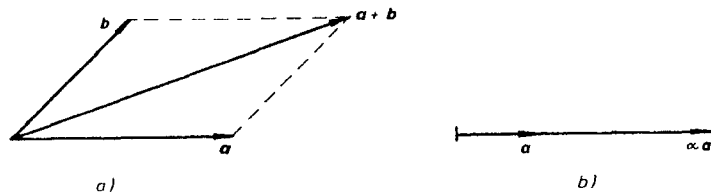
Vektorový prostor mohou tvořit například uspořádané  $n$ -tice komplexních nebo reálných čísel. Omezíme se na uspořádané trojice reálných čísel; tato čísla budeme nazývat kartézskými souřadnicemi vektorů:  $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ . Dva vektory  $\mathbf{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$  budeme považovat za rovné, právě když bude platit  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$ . Součet dvou vektorů a součin vektoru a čísla zavedeme vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), \quad \alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3), \quad (\text{D 1.1})$$

nulový vektor jako  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  a vektor opačný k vektoru  $\mathbf{a}$  jako  $(-a_1, -a_2, -a_3)$ . Snadno ověříme, že tyto vztahy splňují požadavky na vektorový prostor.

Takto zavedený vektorový prostor má přímý vztah k bodům trojrozměrného Eukleidova prostoru. Uspořádaná dvojice bodů o kartézských souřadnicích  $A[a_1, a_2, a_3]$ ,  $B[b_1, b_2, b_3]$  nám definuje vektor  $\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ , který lze znázornit orientovanou úsečkou („šipkou“). Ve smyslu definice rovnosti dvou vektorů všechny stejně dlouhé úsečky téhož směru a orientace určují týž vektor – mluvíme o takzvaných volných vektorech. Počáteční bod takového vektoru můžeme umístit v prostoru libovolně. Přitom je třeba mít na paměti, že ne každá veličina, kterou můžeme znázornit šipkou, je vektor. Vektory musí splňovat zavedený soubor požadavků a jejich souřadnice se musí transformovat při přechodu k jiné souřadnicové soustavě jako souřadnice bodů.

Vztahy mezi vektory můžeme vyjadřovat dvojím způsobem – jednak geometricky, jednak pomocí souřadnic. Geometrická formulace je přitom obecnější, není závislá na typu zvolených souřadnic a má názorný fyzikální smysl. Zavedeme-li ortonormální vektory kartézské báze (tj. jednotkové vektory ve směru tří



Obr. D 1.1 a) Geometrické znázornění sčítání dvou vektorů, b) násobení vektoru reálným číslem.

kolmých souřadnicových os)  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$  jako

$$\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{y}_0 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{z}_0 = (0, 0, 1), \quad (\text{D 1.2})$$

můžeme každý vektor vyjádřit jako součet tří vektorů (složek) mířících ve směru kartézských os  $x, y, z$ :

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \mathbf{x}_0 + a_y \mathbf{y}_0 + a_z \mathbf{z}_0. \quad (\text{D 1.3})$$

Sčítání dvou vektorů a násobení vektoru reálným číslem zavedené vztahy (D 1.1) je geometricky znázorněno na obr. D 1.1.

### b) Součiny vektorů

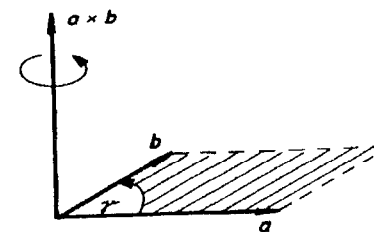
Eukleidův trojrozměrný vektorový prostor je speciální typ vektorového prostoru, ve kterém můžeme zavést další operace, především skalární a vektorový součin. Skalární součin dvou vektorů  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  je definován jako číslo, a to geometricky vztahem

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \gamma. \quad (\text{D 1.4})$$

kde  $a, b$  jsou délky úseček obou vektorů a  $\gamma$  je úhel mezi směry obou vektorů.

V kartézských souřadnicích máme

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (\text{D 1.5})$$



Obr. D 1.2 Geometrický význam vektorového součinu dvou vektorů.

Pro skalární součin platí  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ ,  $\alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ , avšak obecně  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ ! Skalární součin umožňuje zavést velikost (modul, absolutní hodnotu) vektoru, která má geometrický význam vzdálenosti obou koncových bodů vektoru (délky vektorové úsečky):

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (\text{D 1.6})$$

Z (D 1.4) plyne, že nenulové vektory  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  jsou vzájemně kolmé, je-li  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Vektorový součin dvou vektorů  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  je definován jako vektor; a to geometricky (viz obr. D 1.2)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \gamma, \quad (\text{D 1.7})$$

tj. velikost vektorového součinu je rovna obsahu rovnoběžníka vytvořeného oběma vektory. Směr vektorového součinu je kolmý k rovině obou vektorů a jeho smysl je dán pravidlem pravotočivého šroubu, používáme-li pravotočivou (pravou) kartézskou soustavu, v níž směry os  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , tvoří pravotočivý systém. Jinak též směřují-li prsty pravé ruky od vektoru  $\mathbf{a}$  k vektoru  $\mathbf{b}$ , udává vztyčený palec směr vektorového součinu.

V kartézských souřadnicích máme

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{x}_0 + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{y}_0 + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{z}_0. \quad (\text{D 1.8})$$

Pro vektorový součin platí

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{je antikomutativní}),$$

$$\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b},$$

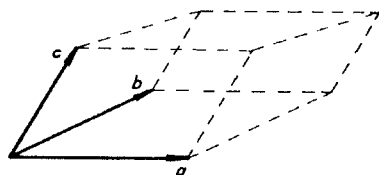
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

avšak obecně

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}!$$

Z (D 1.7) plyne, že nenulové vektory  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  jsou vzájemně rovnoběžné, je-li  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Proto také  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .<sup>80</sup>

*Smíšený součin* tří vektorů  $\mathbf{abc}$  je definován jako *číslo*; *geometricky* (viz obr. D 1.3) je v absolutní hodnotě roven objemu rovnoběžnostěnu vytvořeného třemi vektory. Znaménko má pak kladné, tvoří-li vektory v daném pořadí pravotočivou soustavu, záporné, tvoří-li levotočivou (opět předpokládáme pravou kartézskou soustavu souřadnic).



Obr. D 1.3 Geometrický význam smíšeného součinu tří vektorů.

<sup>80</sup> Skalární součin se někdy též označuje jako  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , vektorový součin jako  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ .

V kartézských souřadnicích máme

$$\mathbf{abc} = [\mathbf{abc}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\text{D 1.9})$$

Zřejmě platí  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ , což umožňuje kompaktní zápis smíšeného součinu  $\mathbf{abc}$ . Naproti tomu je třeba dávat pozor na pořadí vektorů; při jejich liché (sudé) permutaci smíšený součin mění (nemění) znaménko.

Uveďme ještě výraz pro *dvojitý vektorový součin*:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{D 1.10})$$

a některé vícenásobné součiny vektorů:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \quad (\text{Lagrangeova identita}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d})] \mathbf{c} - [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \mathbf{d}, \quad (\text{D 1.11})$$

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \times \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Všechny tyto vztahy snadno dokážeme rozepsáním do kartézských souřadnic.

### c) Transformační vlastnosti vektorů

K tomu, abychom orientovanou úsečku nebo uspořádanou trojici čísel mohli považovat za vektor, musí splňovat určité transformační vlastnosti. Mějme trojrozměrný Eukleidův prostor a v něm kartézskou soustavu souřadnic. Přejdeme-li k jiné kartézské soustavě, budou mezi starými a novými souřadnicemi bodů tohoto prostoru platit určité transformační vztahy. Důležitým případem jsou takzvané ortogonální transformace, kdy mezi starými a novými souřadnicemi platí lineární vztahy a vzdálenost dvou bodů zůstává ve staré i nové soustavě táž (je invariantem). K takovým transformacím patří například posunutí nebo pootočení souřadných os. Zvláštním případem takové transformace je inverze os, při níž se změní pouze znaménka souřadnic všech bodů. Při inverzi přechází pravotočivá (pravá) kartézská soustava v levotočivou (levou).

Podle chování při těchto transformacích lze skaláry a vektory dále klasifikovat. Zavádíme tyto definice:<sup>81</sup>

*Skaláry* jsou invarianty a při ortogonálních transformacích se nemění (hmotnost, elektrický náboj, teplota apod.).

*Pseudoskaláry* se nemění co do velikosti, ale při inverzi mění znaménko.

*Vektory pravé* neboli *polární* mají souřadnice, které se transformují stejně jako souřadnice bodů. Souřadnice polárních vektorů při inverzi tedy mění zna-

<sup>81</sup> Lze ukázat, že skaláry i vektory mohou být považovány za zvláštní případy obecnějších veličin – *tenzorů*. Ve stručné formě lze úvahy tohoto druhu nalézt v matematickém dodatku učebnice [12].



ménko, ale vektor nemění směr. Pravými (polárními) vektory jsou například rychlost, zrychlení, hybnost, síla, intenzita elektrického pole.

*Pseudovektory (vektory nepravé neboli axiální)* mají souřadnice, které se transformují jako souřadnice bodů, avšak při inverzi nemění znaménko. Pseudovektory mění tedy při inverzi směr. Pseudovektory jsou například moment hybnosti, moment síly, magnetická indukce.

Snadno se přesvědčíme, že skalární součin dvou polárních vektorů i dvou axiálních vektorů je skalár, zatímco skalární součin polárního a axiálního vektoru, smíšený součin tří polárních nebo tří axiálních vektorů jsou pseudoskaláry. Vektorový součin dvou polárních vektorů je pseudovektor (axiální vektor).

#### d) Skalární a vektorová pole

Ve fyzice nastává často potřeba přiřadit jednotlivým bodům určité části prostoru skalární či vektorovou veličinu. Může jít například o teplotu v jednotlivých bodech studovaného vzorku nebo o rychlost proudící kapaliny v jednotlivých bodech trubice. Mluvíme pak o skalárním či vektorovém poli.

*Skalární pole* přiřazuje každému bodu v určité oblasti prostoru jednoznačně reálné číslo; může být tedy popsáno pomocí funkce. Zvolíme-li pravouhloú (kartézskou) soustavu souřadnic, můžeme polohu každého bodu  $A$  vyjádřit jeho polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  s danými souřadnicemi  $x, y, z$ , tedy  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Dané skalární pole pak můžeme vyjádřit jako funkci vektoru  $\mathbf{r}$  nebo jako funkci tří proměnných  $x, y, z$

$$f = f(\mathbf{r}) = f(x, y, z). \quad (\text{D 1.12})$$

Podobně *vektorové pole* může být popsáno vektorovou funkcí. Vyjádříme-li sledovanou vektorovou veličinu  $\mathbf{F}$  pomocí jejích složek  $F_x, F_y, F_z$  ve zvolené soustavě souřadnic, může být vektorové pole uspořádanou trojicí skalárních funkcí polohového vektoru  $\mathbf{r}$  či jeho souřadnic  $x, y, z$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(x, y, z)\mathbf{x}_0 + F_y(x, y, z)\mathbf{y}_0 + F_z(x, y, z)\mathbf{z}_0. \quad (\text{D 1.13})$$

Skalární a vektorová pole, která nezávisí explicitně na čase, se nazývají *stacionární*. Obecná pole mohou být ovšem časově závislá. Taková pole  $f(x, y, z, t)$ ,  $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ , která jsou funkcemi čtyř proměnných  $x, y, z, t$ , se nazývají *nestacionární*.

Vlastnosti skalárních a vektorových polí lze s výhodou vyšetřovat metodami matematické analýzy, jejímž základním pojmem je pojem derivace. V případě funkcí více proměnných se používají parciální derivace podle jednotlivých nezávisle proměnných  $x, y, z$ . U stacionárního skalárního pole můžeme vytvořit tři první derivace

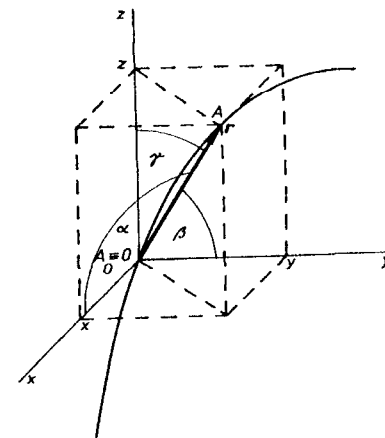
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z},$$

u vektorového pole devět parciálních derivací prvního řádu

$$\frac{\partial F_x}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial y}, \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial y}, \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Parciální derivace vyšších řádů dostatečně hladkých funkcí mají důležitou vlastnost. Derivace podle různých proměnných, tzv. smíšené derivace, nezávisí na pořadí derivování. Platí tedy například  $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ . V dalších úvahách budeme předpokládat, že všechny potřebné parciální derivace vyšetřovaného pole existují a jsou spojitě, takže jsou splněny podmínky pro uvedenou rovnost smíšených parciálních derivací.

Často je třeba vyšetřovat vlastnosti daného pole na určité křivce. Pak je velmi užitečný pojem *derivace pole v daném směru*. Probíhá-li bod  $A$  po nějaké křivce, může být jeho poloha určena délkou oblouku  $s$  měřeného od jistého pevného, předem zvoleného, referenčního bodu  $A_0$  (viz obr. D 1.4). Souřadnice polohového vektoru  $\mathbf{r}$  můžeme vyjádřit pomocí parametru  $s$  jako  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = z(s)$ . Jestliže polohový vektor  $\mathbf{r}$  svírá s osami souřadnic úhly  $\alpha, \beta, \gamma$ , platí  $\cos \alpha = x/r$ ,  $\cos \beta = y/r$ ,  $\cos \gamma = z/r$ , přičemž směrové kosiny splňují podmínku  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .



Óbr. D 1.4 K zavedení pojmu derivace pole v daném směru.

Sledujme nyní situaci, kdy se bod  $A$  neomezeně přibližuje po dané křivce k bodu  $A_0$ . Polohový vektor  $\mathbf{r}$  přejde v diferenciálně malý vektor  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  a bude mít směr tečny ke křivce v bodě  $A_0$ . Jednotkový tečný vektor  $\mathbf{t}$  v bodě  $A_0$  pak bude možné vyjádřit derivacemi souřadnic podle parametru  $s$

$$\mathbf{t} = \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (\text{D 1.14})$$

Získaný výsledek není ovlivněn speciální volbou počátku. Přejít k jinému počátku  $A'_0$  by znamenal přičíst konstantní vektor  $\vec{A_0 A'_0}$ , který po derivování podle  $s$  dá nulový vektor. Derivací (D 1.14) může tedy být vyjádřen jednotkový tečný vektor v libovolném bodě křivky.

Mějme nyní skalární pole  $f(x, y, z)$ . Zvolme opět počátek souřadnic v bodě  $A_0$  (viz obr. D 1.4). Mějme dále bod  $A$ , který se bude pohybovat po dané křivce. Skalární pole na této křivce můžeme vyjádřit složenou funkcí  $g(s) = f(x(s), y(s), z(s))$ , která představuje funkci jediného parametru  $s$ . Obyčejnou derivaci funkce  $g(s)$  v bodě  $A_0$  lze pak vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(A) - f(A_0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f[x(s), y(s), z(s)] - f[x(0), y(0), z(0)]}{s} \quad (D 1.15)$$

a použitím pravidel o derivování složených funkcí více proměnných pro ni s ohledem na (D 1.14) dostaneme

$$\left( \frac{df}{ds} \right)_{A_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (D 1.16)$$

Výsledek (D 1.16) představuje tzv. *derivaci funkce  $f$  ve směru  $\mathbf{t}(s)$* . Je přitom lhostejné, po jaké křivce se bod  $A$  bude k bodu  $A_0$  přibližovat, pokud všechny tyto křivky budou mít též tečný vektor  $\mathbf{t}(s)$  v bodě  $A_0$ .

Derivaci ve směru (nebo obecněji derivaci podle skalárního parametru  $s$ ) lze zavést i pro vektorové pole. Je přirozené zavést pro ni definici

$$\mathbf{F}'(s) = \frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(s + \Delta s) - \mathbf{F}(s)}{\Delta s}. \quad (D 1.17)$$

Užitím (D 1.13) může být tato derivace vyjádřena pomocí derivací jednotlivých složek  $F_x, F_y, F_z$  jako

$$\frac{d\mathbf{F}(s)}{ds} = \frac{dF_x}{ds} \mathbf{x}_0 + \frac{dF_y}{ds} \mathbf{y}_0 + \frac{dF_z}{ds} \mathbf{z}_0, \quad (D 1.17a)$$

takže je dána uspořádanou trojicí derivací skalárních funkcí podle parametru  $s$ . Pro derivaci součtů a součinů vektorových polí platí obdobná pravidla jako pro derivování funkcí:

$$(\mathbf{F} + \mathbf{G})' = \mathbf{F}' + \mathbf{G}', \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}', \quad (\mathbf{F} \times \mathbf{G})' = \mathbf{F}' \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \mathbf{G}'. \quad (D 1.18)$$

Podobně pro součin skalárního a vektorového pole  $f\mathbf{F}$  obdržíme

$$(f\mathbf{F})' = f'\mathbf{F} + f\mathbf{F}'. \quad (D 1.18a)$$

Speciálně, má-li vektor  $\mathbf{F}$  při změně parametru  $s$  konstantní velikost a proměnný směr, platí  $\mathbf{F} \perp \mathbf{F}'$ . Zderivováním  $F^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} = \text{konst}$  totiž dostaneme  $\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}' = 2\mathbf{F}' \cdot \mathbf{F} = 0$  a z vlastnosti skalárního součinu plyne kolmost obou vektorů. Například v mechanice se s takovou situací setkáváme u rovnoměrného kruhového pohybu, kdy vektor dostředivého zrychlení je kolmý k obvodové rychlosti.

V následujících odstavcích budeme vyšetřovat vlastnosti skalárních a vektorových polí pomocí operací gradient, divergence a rotace, které lze vyjádřit parciálními derivacemi.

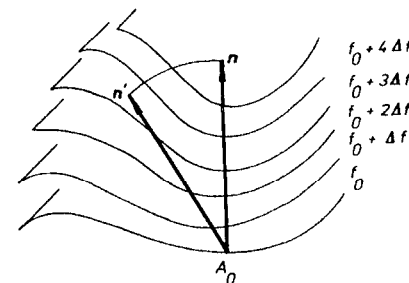
#### e) Gradient skalárního pole

Derivaci skalárního pole  $f(x, y, z)$  v daném směru  $\mathbf{t}(s)$  (D 1.16) lze vyjádřit jako skalární součin vektoru

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (D 1.19)$$

(nazývaného *gradientem pole  $f(x, y, z)$* ) a jednotkového vektoru  $\mathbf{t}(s)$  v daném směru. Tedy

$$\frac{df}{ds} = \text{grad } f \cdot \mathbf{t}(s). \quad (D 1.20)$$



Obr. D 1.5 Ekvipotenciální plochy skalárního pole.

Geometrické místo bodů s danou konstantní hodnotou veličiny  $f$ , které je určeno rovnicí  $f(x, y, z) = \text{konst}$ , se nazývá *ekvipotenciální plochou* daného pole. Jedna z těchto ploch bude procházet i bodem  $A_0$ . V tomto bodě lze pak vztyčit normálu k ekvipotenciální ploše a stanovit jednotkový normálový vektor  $\mathbf{n}$ . Skalární pole nám tak v každém bodě definuje určitý význačný směr. Je snadné se přesvědčit (viz obr. D 1.5), že směr normály k ekvipotenciální ploše je zároveň směrem největší změny (největšího zhuštění) ekvipotenciálních ploch.

V normálovém směru protne totiž jednotkový vektor největší počet těchto ploch. V dvojrozměrném případě zemského povrchu můžeme za skalární pole

považovat pole výšek, ekvipotenciální plochám odpovídají vrstevnice a normála k nim udává směr maximálního stoupání.

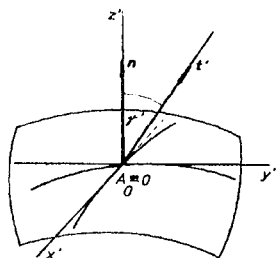
Zvolme na okamžik souřadnou osu  $z'$  ve směru normály  $\mathbf{n}$  a druhé dvě osy  $x'$ ,  $y'$  k ní kolmé (obr. D 1.6). Současně mějme libovolný směr daný jednotkovým vektorem  $\mathbf{r}' = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ . Derivací funkce  $f$  v tomto směru bude podle (D 1.16) výraz

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x'} \cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y'} \cos\beta' + \frac{\partial f}{\partial z'} \cos\gamma'. \quad (\text{D1.16a})$$

Osy  $x'$  a  $y'$  jsou však tečnami ke křivkám, které leží v ekvipotenciální ploše, a proto  $\partial f/\partial x' = \partial f/\partial y' = 0$ . Vztah (D 1.16a) se tak redukuje na

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial z'} \cos\gamma'. \quad (\text{D1.21})$$

Maximální hodnotu nabývá tedy derivace ve směru  $z'$ , kdy  $\cos\gamma' = 1$ .



Obr. D 1.6 K určení směru maximální změny skalárního pole.

Derivace v daném obecném směru je pak projekcí derivace v normálovém směru  $\partial f/\partial z'$  do daného směru. Zejména odtud plyne, že projekce derivace  $\partial f/\partial z'$  do libovolně zvolených souřadných os  $x$ ,  $y$ ,  $z$  jsou rovny  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial f/\partial y$ ,  $\partial f/\partial z$ .

V souladu s výrazem (D 1.19) můžeme tedy zavést tuto definici: *Gradient skalárního pole  $f$  v daném bodě je vektor o velikosti derivace ve směru normály k ekvipotenciální ploše a má směr této normály:*

$$\text{grad } f = \frac{df}{ds} \mathbf{n}_0. \quad (\text{D 1.22})$$

Je zřejmé, že vektor gradientu míří vždy směrem vzrůstu funkce  $f$ .

Ve vektorové analýze zavádíme operátor „nabla“<sup>82</sup> symbolem  $\nabla$ , který představuje formální vektor

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{D 1.23})$$

Výraz (D 1.19) zapisujeme pak ve tvaru

$$\text{grad } f \equiv \nabla f, \quad (\text{D 1.24})$$

přičemž musíme mít na paměti, že tento výraz představuje vektor. Operace (D 1.24) přiřazuje tedy skalárnímu poli  $f$  jednoznačně vektorové pole  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \nabla f. \quad (\text{D1.25})$$

Říkáme, že  $f$  je skalárním potenciálem  $\mathbf{F}$ . Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole  $f$  a  $f + c$ , kde  $c$  je konstantní skalární pole, mají též gradient. Gradient je možné vytvořit ke každému skalárnímu poli (pokud příslušné parciální derivace existují). Naproti tomu ne každé vektorové pole můžeme vyjádřit ve tvaru (D 1.25). Ta, u nichž to je možné, nazýváme *potenciálními*. Pro počítání s gradienty platí tato zřejmá pravidla:

$$\nabla c = \mathbf{0}, \quad \nabla(cf) = c\nabla f, \quad \nabla(f_1 + f_2) = \nabla f_1 + \nabla f_2, \quad (\text{D 1.26})$$

$$\nabla(f_1 f_2) = f_1 \nabla f_2 + f_2 \nabla f_1.$$

### f) Divergence vektorového pole

Mějme vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Definujeme *tok pole  $\mathbf{F}$  plochou  $S$*  jako plošný integrál

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{D 1.27})$$

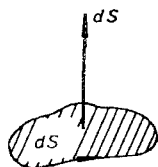
Zde  $dS$  je diferenciální element plochy, jemuž jsme přiřadili směr vektoru normály. Tuto normálu je ovšem třeba orientovat; můžeme to udělat například tak, že stanovíme směr pohybu po obvodu plošky  $dS$  a použijeme pravidla pravotočivého šroubu (obr. D 1.7). Pokud jde o tok *uzavřenou plochou  $S$* , která ohraničuje objem  $V$ , budeme považovat za kladný směr normály ten, který směřuje v e  $\mathbf{n}$  z objemu  $V$  a tok budeme označovat

$$\Phi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{D1.28})$$

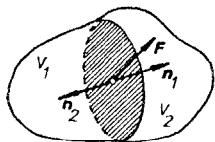
<sup>82</sup> Exotický název „nabla“ je odvozen od názvu fénického hudebního nástroje příbuzného loutně.

Nyní rozdělíme objem  $V$  přepážkami na  $N$  menších objemů  $V_i$ . Určíme toky pole  $\Phi_i$  plochami  $S_i$ , ohraničujícími tyto dílčí objemy, a budeme je počítat. Ukazuje se, že toky vnitřními přepážkami se v tomto součtu vzájemně vyruší, neboť při sčítání toků hranicí dvou sousedních objemů se objeví totiž vždy dvakrát, jednou s kladným a jednou se záporným znaménkem (viz obr. D 1.8). Sumární tok bude proto roven právě původnímu toku plochou  $S$ :

$$\sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{S}_i = \Phi. \quad (\text{D } 1.29)$$



Obr. D 1.7 Zavedení vektoru diferenciálního elementu plochy.



Obr. D 1.8 Sčítání toků vektorového pole uzavřenými plochami ohraničujícími dílčí objemy.

Zmenšujeme-li objemy  $V_i$ , zůstává jejich součet  $V$  konstantní; stejně tak se zmenšují i toky  $\Phi_i$ , a jejich součet  $\Phi$  zůstává konstantní. Nabízí se tedy možnost vytvořit podíl těchto dvou neomezeně se zmenšujících veličin a zkoumat vlastnosti jeho limity.

V prostoru zvolíme bod  $A$  o souřadnicích  $x, y, z$  a obklopíme jej malým objemem  $\Delta V$ . Tento objem budeme libovolným způsobem dělit na stále menší části a vyčleníme posloupnost těch částí  $\Delta V_i^{(A)}$ , které obsahují bod  $A$ . Označíme

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{\Delta V_i^{(A)} \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_i^{(A)}}{\Delta V_i^{(A)}}. \quad (\text{D } 1.30)$$

Pokud limita na pravé straně (D 1.30) existuje a nezávisí na způsobu dělení objemu  $\Delta V$ , představuje tok pole  $\mathbf{F}$  v bodě  $A$  vztahovaný k jednotce objemu a nazýváme jej *divergencí pole*  $\mathbf{F}$  v bodě  $A$ .

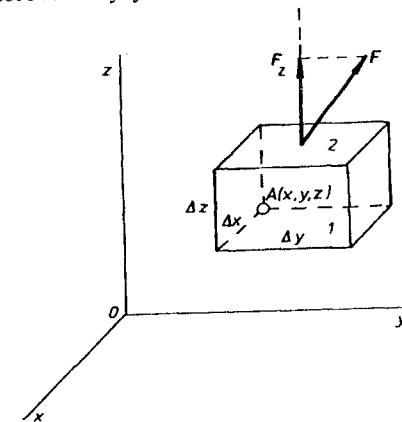
Vraťme se nyní k objemu  $V$  ohraničenému plochou  $S$  a upravme vztah (D 1.29) takto:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \Phi_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_i}{V_i} V_i. \quad (\text{D } 1.31)$$

Pokračujeme přitom v neomezeném dělení dílčích objemů  $V_i$  dalšími přepážkami. Pro každý bod objemu  $V$  se souřadnicemi  $x, y, z$  tak vytvoříme posloupnost neomezeně se zmenšujících objemů tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl  $\Phi_i/V_i$  v divergenci  $\text{div } \mathbf{F}$  a sumu na pravé straně (D 1.31) můžeme nahradit integrálem přes objem  $V$ :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{F} dV. \quad (\text{D } 1.32)$$

Tok vektorového pole  $\mathbf{F}$  uzavřenou plochou je roven celkové divergenci v objemu, který uzavírá tato plocha. Vztah (D 1.32) umožňuje přejít od objemového integrálu k plošnému integrálu přes ohraničující plochu, nazýváme jej *Gaussovou větou* a je jednou ze základních vět vektorové analýzy.



Obr. D 1.9 K odvození výrazu pro divergenci v kartézských souřadnicích.

Geometrická definice divergence jako skalárního pole  $\text{div } \mathbf{F}$  je sice obecná a názorná, ale neumožňuje provádět přímý výpočet. Vyjádříme ji proto v kartézských souřadnicích. Uvažujme elementární objem ve tvaru kvádrů o hranách  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami (viz obr. D 1.9). Nechť jeho levý dolní zadní vrchol má souřadnice  $x, y, z$ . Tok dvojicí rovnoběžných podstav tohoto kvádrů (například horní a dolní) bude

$$\Delta \Phi_{12} = \Delta \Phi_2 + \Delta \Phi_1 = F_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - F_z(x, y, z) \Delta x \Delta y = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (\text{D } 1.33)$$

Pro celkový tok povrchem kvádrů obdržíme

$$\Delta \Phi \approx \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta V, \quad \Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (\text{D } 1.34)$$

a tedy

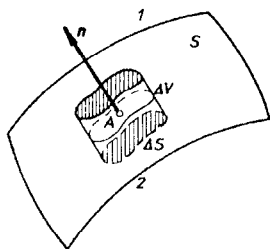
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (\text{D } 1.35)$$

Operátor nabla  $\nabla$  umožňuje vyjádřit divergenci vektorového pole  $\mathbf{F}$  kompaktním způsobem jako skalární součin tohoto operátoru a vektoru  $\mathbf{F}$ ; pořadí obou symbolů ovšem nelze zaměnit. Volba elementárního objemu ve tvaru kvádrů neomezuje obecnost, neboť objem libovolného tvaru můžeme s libovolnou přesností pomocí takových malých kvádrů sestavit. Vztah

$$f = \operatorname{div} \mathbf{F} \quad (\text{D } 1.36)$$

přirazuje vektorovému poli  $\mathbf{F}$  jednoznačně skalární pole  $f$ . Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{F}'$ , kde  $\operatorname{div} \mathbf{F}' = 0$ , mají touž divergenci. Pro počítání s divergencí platí tato zřejmá pravidla:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{C} &= 0, \quad \nabla \cdot (c\mathbf{F}) = c\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \nabla \cdot \mathbf{F}_1 + \nabla \cdot \mathbf{F}_2, \\ \nabla \cdot (f\mathbf{F}) &= f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f. \end{aligned} \quad (\text{D } 1.37)$$



Obr. D 1.10 K odvození takzvané plošné divergence.

Uvažme zvláštní případ, kdy objem  $\Delta V$  těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole) a má tvar části vrstvy o zanedbatelné tloušťce (obr. D 1.10). Tok  $\Delta \Phi$  bude pak roven součtu toků normálových složek pole oběma podstavami takového objemu:

$$\Delta \Phi = (F_{1n} - F_{2n}) \Delta S. \quad (\text{D } 1.38)$$

Směr normály k ploše jsme zvolili za kladný, míří-li z oblasti 2 do oblasti 1. Provedeme-li úvahu o limitním zmenšování plochy  $\Delta S$  v okolí bodu  $A$  na ploše, můžeme definovat tak zvanou *plošnou divergenci* vztahem

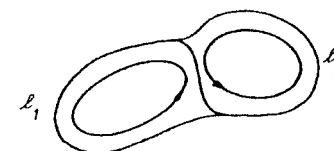
$$\operatorname{Div} \mathbf{F} = F_{1n} - F_{2n} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2). \quad (\text{D } 1.39)$$

### g) Rotace vektorového pole

Mějme vektorové pole  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . Definujme cirkulaci pole podél uzavřené křivky  $l$  jako křivkový integrál

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{D } 1.40)$$

Zde  $d\mathbf{l}$  je diferenciální vektorový element křivky ve směru tečny. Jeho orientace je dána dohodou o smyslu obcházení křivky, například proti směru hodinových ručiček. Uzavřená křivka  $l$  tvoří hranici plochy  $S$ ; tato plocha není ovšem určena jednoznačně (na rozdíl od objemu  $V$  uvnitř uzavřené plochy). Na ploše obehnané



Obr. D 1.11 Sčítání cirkulací vektorového pole podél uzavřených křivek obehávajících dílčí plochy.

křivkou  $l$  můžeme opět vést dělicí křivky, vytvářet soustavu dílčích ploch, počítat cirkulaci podél jejich hranic a sčítat je. Ukazuje se, že příspěvky k cirkulacím podél společných hranic dvou sousedních ploch se vzájemně vyruší. Zachováme-li totiž jednotný smysl obcházení křivek, budeme takovou společnou hranici obcházet vždy v opačném směru (viz obr. D 1.11). Sumární cirkulace bude tedy rovna právě původní cirkulaci podél křivky  $l$ :

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \oint_{l_i} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_i = \Gamma. \quad (\text{D } 1.41)$$

Zvolíme v prostoru bod  $A$  o souřadnicích  $x, y, z$ , vedeme tímto bodem rovinu libovolné orientace a vymežíme v této rovině uzavřenou křivku malých rozměrů obklopující bod  $A$ . Plochu omezenou touto křivkou označíme  $\Delta S$ , cirkulaci podél této křivky  $\Delta \Gamma$ . Nyní budeme dělit tuto plošku na menší části a vyčleníme posloupnost plošek obsahující bod  $A$ . Budeme uvažovat limitu

$$\lim_{\Delta S^{(A)} \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma^{(A)}}{\Delta S^{(A)}}, \quad (\text{D } 1.42)$$

pokud taková limita existuje a nezávisí-li na způsobu dělení plošky  $\Delta S$ . Tato limita bude však přesto závislá na volbě orientace roviny procházející bodem  $A$  nebojí na směru normály  $\mathbf{n}$  k elementární plošce, na jejíž hranici cirkulaci určujeme. Můžeme tedy (podobně jako u definice gradientu) považovat tuto limitu za projekci určitého vektoru do směru normály k plošce:

$$(\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\Delta S_i^{(A)} \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma_i^{(A)}}{\Delta S_i^{(A)}}. \quad (\text{D 1.43})$$

Projekce vektoru  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  do daného směru představuje tedy poměr cirkulace pole  $\mathbf{F}$  po obvodu malé kolmé plošky k velikosti této plošky. Vektor  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  nazýváme rotací pole  $\mathbf{F}$  v bodě  $A$ .<sup>83</sup>

Vraťme se nyní k obecně uzavřené křivce  $l$  obepínající plochu  $S$ . Upravíme vztah (D 1.41) na

$$I' = \oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N \Delta \Gamma_i' = \sum_{i=1}^N \frac{\Delta \Gamma_i'}{\Delta S_i} \Delta S_i. \quad (\text{D 1.44})$$

Pro každý bod  $A$  na ploše  $S$  můžeme vytvořit posloupnost neomezeně se zmenšujících dílčích plošek tento bod stále obsahujících. V limitě přejde tedy podíl  $\Delta \Gamma_i' / \Delta S_i$  v  $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  a sumu na pravé straně (D 1.44) můžeme nahradit integrálem přes celou plochu  $S$ :

$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{D 1.45})$$

Cirkulace vektorového pole podél uzavřené křivky je rovna celkovému toku pole libovolnou plochou, pro níž křivka  $l$  představuje hranici. Vztah (D 1.45) umožňující přejít od plošného integrálu ke křivkovému integrálu podél hranice se nazývá *věta Stokesovou* a je jednou ze základních vět vektorové analýzy.

Geometrická definice rotace jako vektoru  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  je sice obecná a názorná, ale neumožňuje provádět přímý výpočet. Proto jej vyjádříme v kartézských souřadnicích. Uvažujme elementární plošku ve tvaru obdélníka o stranách  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  rovnoběžných s příslušnými kartézskými osami (viz obr. D 1.12). Nechť jeho levý zadní vrchol má souřadnice  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Příspěvek k cirkulaci podél dvojice rovnoběžných stran (například levé a pravé) bude

$$\Delta \Gamma_{12} = \Delta \Gamma_1 + \Delta \Gamma_2 = F_x(x, y, z) \Delta x - F_x(x, y + \Delta y, z) \Delta x = -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (\text{D 1.46})$$

Celková cirkulace podél obvodu obdélníka

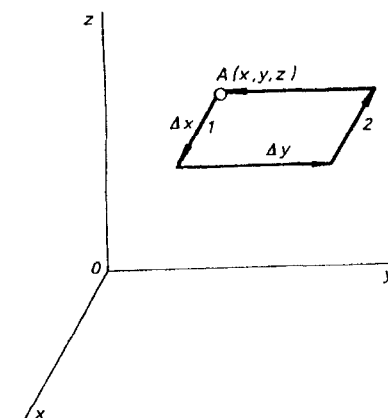
$$\Delta \Gamma = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta S, \quad \Delta S = \Delta x \Delta y, \quad (\text{D 1.47})$$

<sup>83</sup> V anglosaské literatuře se někdy užívá pro rotaci názvu a označení *curl*  $\mathbf{F}$ . Poznamenejme ještě, že rotaci lze zavést též stejným limitním pochodem jako u divergence, a to vztahem

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{G}_i}{\Delta V_i}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{G} = \oint d\mathbf{S} \times \mathbf{F}.$$

a tedy

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{F}. \quad (\text{D 1.48})$$



Obr. D 1.12 K odvození výrazu pro rotaci v kartézských souřadnicích.

Operátor nabla  $\nabla$  umožňuje vyjádřit rotaci vektorového pole  $\mathbf{F}$  kompaktním způsobem jako vektorový součin tohoto operátoru a vektoru  $\mathbf{F}$ ; pořadí symbolů nelze ovšem měnit. Volba elementární plošky ve tvaru obdélníka opět neomezuje obecnost výsledku. Vztah

$$\mathbf{G} = \operatorname{rot} \mathbf{F} \quad (\text{D 1.49})$$

přiřazuje vektorovému poli  $\mathbf{F}$  jednoznačně jiné vektorové pole  $\mathbf{G}$ . Zpětné přiřazení není již jednoznačné; pole  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{F}'$ , kde  $\operatorname{rot} \mathbf{F}' = \mathbf{0}$ , mají touž rotaci. Pro počítání s rotacemi platí tato zřejmá pravidla:

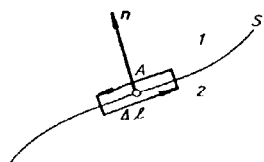
$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{C} &= \mathbf{0}, \quad \nabla \times (c\mathbf{F}) = c\nabla \times \mathbf{F}, \quad \nabla \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \nabla \times \mathbf{F}_1 + \nabla \times \mathbf{F}_2, \\ \nabla \times (f\mathbf{F}) &= f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (\text{D 1.50})$$

Uvažme zvláštní případ, kdy se elementární křivka  $l$  těsně přimyká z obou stran k nějaké ploše (například ploše nespojitosti pole), takže její úseky ve směru kolmém k této ploše jsou zanedbatelně krátké (obr. D 1.13). Cirkulace bude pak rovna součtu integrálů podél obou tečných větvi:

$$\Delta l = (F_{1l} - F_{2l}) \Delta l. \quad (D 1.51)$$

Provedeme-li úvahu o limitním zkracování větvi  $\Delta l$  okolí bodu  $A$  na ploše, můžeme definovat takzvanou plošnou rotaci vztahem

$$\text{Rot } \mathbf{F} = \mathbf{n} \times (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2), \quad |\text{Rot } \mathbf{F}| = F_{1l} - F_{2l}. \quad (D 1.52)$$



Obr. D 1.13 K odvození takzvané plošné rotace.

#### h) Operátory $(\mathbf{a}\nabla)$ a $\nabla$

Položme si otázku, jak vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu nebo gradient skalárního součinu dvou vektorových polí. K tomu účelu zavedeme další operátor  $(\mathbf{a}\nabla)$  předpíšeme

$$(\mathbf{a}\nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (D 1.53)$$

Tento operátor „ $a$  – grad“ může působit jak na skalární, tak na vektorová pole:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\nabla)f &= a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{a} \cdot \nabla f, \\ (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{F} &= a_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + a_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + a_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \left( a_x \frac{\partial F_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial F_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial F_x}{\partial z}, \dots \right). \end{aligned} \quad (D 1.54)$$

Bude-li  $\mathbf{s}$  jednotkový vektor, potom výraz  $(\mathbf{s}\nabla)f$  je projekcí gradientu skalárního pole  $f$  do směru  $\mathbf{s}$ , a je tedy totožný s derivací pole v tomto směru. Podobně bychom mohli interpretovat výraz  $(\mathbf{s}\nabla)\mathbf{F}$  jako derivaci vektorového pole ve směru  $\mathbf{s}$ .

Nyní můžeme vyjádřit divergenci a rotaci vektorového součinu a gradient skalárního součinu dvou vektorových polí:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) &\equiv \nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_1) - \mathbf{F}_1 \cdot (\nabla \times \mathbf{F}_2), \\ \text{rot}(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) &\equiv \nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \nabla) \mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \nabla) \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 (\nabla \cdot \mathbf{F}_2) - \mathbf{F}_2 (\nabla \cdot \mathbf{F}_1), \\ \text{grad}(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) &\equiv \nabla (\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \nabla) \mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \nabla) \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1). \end{aligned} \quad (D 1.55)$$

O platnosti těchto poněkud komplikovanějších, avšak velmi užitečných vzorců se můžeme přesvědčit alespoň rozepsáním příslušných výrazů v kartézských souřadnicích. Všimněte si, že druhý vzorec (D 1.55), který je vlastně dvojitým vektorovým součinem, se liší od vztahu (D 1.10) dvěma dalšími členy. Je to tím, že s operátorem  $\nabla$  nemůžeme zacházet jako s běžným vektorem a musíme mít na paměti, že působí vždy na všechny funkce, které po něm následují.

Uvědomíme-li si dále, že operátory div a rot mohou působit pouze na vektorová pole a operátor grad pouze na skalární pole, můžeme z těchto operátorů sestavit pět kombinací operátorů druhého řádu:

rot grad, div rot, div grad, grad div a rot rot.

Vyjádřením v kartézských souřadnicích se snadno přesvědčíme, že vždy platí rot grad  $f = 0$  a div rot  $\mathbf{F} = 0$ . Hlubší význam těchto vztahů bude objasněn v následujícím odstavci. Operátor div grad  $\equiv \Delta$  nazýváme *Laplaceovým operátorem* delta a formálně odpovídá čtverci operátoru nabla:

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2. \quad (D 1.56)$$

V kartézských souřadnicích má zřejmě tvar

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (D 1.57)$$

Laplaceův operátor („laplasiján“) podobně jako operátor  $(\mathbf{a}\nabla)$  může působit jak na skalární, tak i na vektorové pole.

Pro dvojnásobnou operaci rotace platí vztah

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}, \quad \text{jinak } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}, \quad (D 1.58)$$

kteřý je obdobou vektorové identity (D 1.10).

#### i) Vektorová pole potenciální a solenoidální

Vektorové pole, které lze vyjádřit jako gradient nějakého skalárního pole:

$$\mathbf{F} = \text{grad } f = \nabla f, \quad (D 1.59)$$

se nazývá *potenciálním* (bezvírovým). Uvažme křivkový integrál  $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$  po nějaké křivce mezi body  $A, B$ . Je-li  $\mathbf{F}$  silové pole, pak tento integrál představuje práci vykonanou silou po této dráze. Použijeme-li pro vyjádření  $\mathbf{F}$  vzorec (D 1.59), můžeme skalární součin v integrálu upravit na

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \text{grad } f \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df. \quad (D 1.60)$$

Tento výraz představuje totální diferenciál funkce  $f(x, y, z)$  a křivkový integrál je možné vypočítat jako rozdíl hodnot funkce  $f$  v koncových bodech

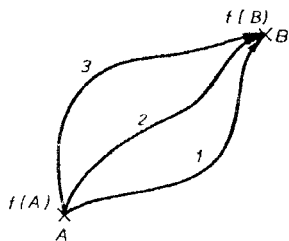
$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A). \quad (\text{D 1.61})$$

Zejména odtud plyne, že výsledek nezávisí na volbě dráhy mezi body  $A$  a  $B$  (viz obr. D 1.14). Protože se při zpětné integraci od  $B$  do  $A$  mění pouze znaménko integrálu, zjišťujeme, že cirkulace pole  $\mathbf{F}$  s vlastností (D 1.59) podél uzavřené křivky  $l$  je vždy rovna nule:

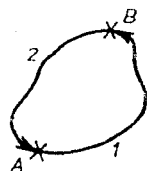
$$\oint_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \text{grad } f \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{D 1.62})$$

(obr. D 1.15). Ze Stokesovy věty (D 1.45) dostaneme

$$\oint_l \text{grad } f \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot grad } f) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{D 1.63})$$



Obr. D 1.14 K nezávislosti křivkových integrálů potenciálního pole na volbě dráhy mezi dvěma stanovenými body.



Obr. D 1.15 K určení cirkulace potenciálního vektorového pole.

Vzhledem k tomu, že volba plochy  $S$  o hranici  $l$  je zcela libovolná, musí v celém prostoru platit

$$\text{rot } \mathbf{F} = \text{rot grad } f = \mathbf{0}. \quad (\text{D 1.64})$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole  $\mathbf{F}$  bylo potenciální. Z podmínky  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$  plyne i fyzikální představa o potenciálním poli. Siločáry takového pole nesmějí vytvářet víry, uzavírat se samy do sebe.

Vektorové pole, které je možné vyjádřit jako rotaci nějakého jiného vektorového pole

$$\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{G}, \quad (\text{D 1.65})$$

se nazývá *solenoidálním* (bezzdrojovým). Vytvoříme uzavřenou plochu  $S$  tak, že budeme uvažovat dvě různé plochy  $S_1, S_2$  o společné hranici  $l$  (obr. D 1.16). Podle Stokesovy věty tok pole  $\mathbf{F}$  s vlastností (D 1.65) uzavřenou plochou  $S = S_1 \cup S_2$  bude nulový

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}_1 - \int_{S_2} \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_l \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} - \oint_l \mathbf{G} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (\text{D 1.66})$$

Aplikujeme-li nyní větu Gaussovu, dostaneme

$$\oint_S \text{rot } \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div rot } \mathbf{G} \, dV = 0. \quad (\text{D 1.67})$$

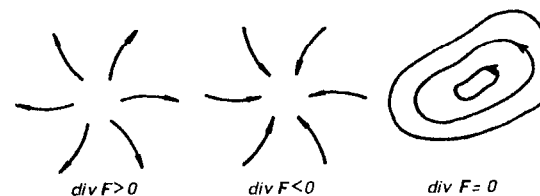


Obr. D 1.16 K určení toku solenoidálního vektorového pole uzavřenou plochou.

Vzhledem k tomu, že plochu  $S$  a objem  $V$  je možné volit zcela libovolně, musí v celém prostoru platit

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div rot } \mathbf{G} = 0. \quad (\text{D 1.68})$$

To je nutná a postačující podmínka k tomu, aby pole  $\mathbf{F}$  bylo solenoidální. Odtud plyne i fyzikální představa o solenoidálním poli. Siločáry takového pole nesmějí mít nikde v prostoru zdroje (v kladném nebo záporném smyslu).



Obr. D 1.17 Kvalitativní průběh siločar vektorových polí: a) potenciální pole s kladným zdrojem, b) potenciální pole se záporným zdrojem, c) solenoidální pole.







Obecné vektorové pole samozřejmě nemusí být ani potenciální, ani solenoidální a bude mít  $\text{div } \mathbf{F} \neq 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ . Lze však dokázat, že každé vektorové pole, které dostatečně rychle klesá v nekonečno, může být jednoznačným způsobem rozloženo na součet potenciálního a solenoidálního pole. Na obrázku D 1.17 je orientačně znázorněn charakter průběhu siločar potenciálního pole s kladnými a zápornými zdroji a pole solenoidálního.

j) *Některé integrální věty vektorové analýzy*

Upravme Gaussovu větu tak, že položíme  $\mathbf{F} = f_1 \text{grad } f_2$  a použijme vztahů D 1.37. Tak dostaneme *první Greenovu větu*

$$\oint_S f_1 \text{grad } f_2 \cdot d\mathbf{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 + \text{grad } f_1 \cdot \text{grad } f_2) dV. \quad (\text{D } 1.69)$$

Z ní snadnými úpravami vyplyne *druhá Greenova věta*

$$\oint_S (f_1 \text{grad } f_2 - f_2 \text{grad } f_1) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1) dV \quad (\text{D } 1.70)$$

a též *třetí Greenova věta*

$$\oint_S \text{grad } f \cdot d\mathbf{S} = \int_V \Delta f dV. \quad (\text{D } 1.71)$$

Důležité jsou zvláštní případy *zobecněné Gaussovy věty*, kterou bychom mohli formulovat takto: *Objemový integrál, v němž operátor nabla působí nějakým způsobem na následující vektorová a skalární pole, se rovná příslušnému plošnému integrálu, v němž stejným způsobem vystupuje vektor elementu plochy  $d\mathbf{S}$ .* Shrňme dosud známé zvláštní případy této věty a uveďme některé další:

$$\int_V \nabla f dV = \oint_S d\mathbf{S} f, \quad \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}, \quad \int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}. \quad (\text{D } 1.72)$$

Například poslední z těchto vět dokážeme standardním postupem. Vynásobíme integrál na levé straně skalárně konstantním vektorem  $\mathbf{C}$ , použijeme výraz pro divergenci vektorového součinu a nakonec opět vektor  $\mathbf{C}$  vykrátíme:

$$\mathbf{C} \cdot \int_V \nabla \times \mathbf{F} dV = \int_V \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{C}) dV = \oint_S (\mathbf{F} \times \mathbf{C}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{F}.$$

Analogicky můžeme dokázat i první z vět (D 1.72).

Nakonec uvedeme ještě větu o křivkovém integrálu skalárního pole:

$$\oint_l f dl = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla f. \quad (\text{D } 1.73)$$

Také důkaz této věty lze provést vynásobením pomocným vektorem  $\mathbf{C}$  a použitím Stokesovy věty.

ÚLOHY K DODATKU I

Ú D1.1. Sestavte si tabulku hlavních vzorců a vět vektorové analýzy.

Ú D1.2. Určete divergenci a rotaci těchto vektorových polí:  $\mathbf{F} = (x + y, -x + y, -2z)$ ;  $\mathbf{F} = (2y, 2x + 3z, 3y)$ ;  $\mathbf{F} = (x^2 - z^2, 2, 2xz)$ . Je-li  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , najděte skalární pole  $f$  takové, aby  $\mathbf{F} = \nabla f$ .

Ú D1.3. Určete gradient skalárních polí ( $\mathbf{r}$  je polohový vektor,  $\mathbf{c}$  je konstantní vektor): a)  $r^n$ ; b)  $\frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r^n}$ .

Ú D1.4. Určete divergenci a rotaci vektorových polí:

a)  $\frac{\mathbf{r}}{r^n}$  (všimněte si zejména případu  $n=3$ ); b)  $\frac{\mathbf{c}}{r^n}$ .

## Dodatek 2

### Soustavy fyzikálních jednotek

#### a) Charakteristiky soustav jednotek

Centralizované státy již od dob starověku usilovaly o vytvoření jednotného systému měr a vah, především z důvodů hospodářských. Rozvoj moderní vědy a techniky učinil takový systém naprosto nezbytným.

U nás vznikaly soustavy měrových jednotek již za Přemysla Otakara II., další zákonodárné akty ke sjednocení měr a vah vydali Karel IV., Ferdinand II., Marie Terezie. Podobný vývoj byl i v jiných zemích (např. v Anglii míry a váhy sjednotila Magna Charta vydaná r. 1215).

Počet a charakter měřených veličin se ovšem neustále rozšiřoval: vedle délky, plochy, objemu, hmotnosti a času bylo třeba měřit rychlost, sílu, teplotu, tlak, průtok a konečně i veličiny elektrické, magnetické, optické a další.

Má-li soustava měrových jednotek v současné době optimálně plnit svůj účel, musí vyhovovat několika základním obecným požadavkům. Především musí být *jednotná*, mezinárodně i mezioborově. Dalším požadavkem je *koherentnost*, tj. jednotky různých veličin musí být odvozovány z jednotek několika veličin základních pomocí vztahů, které platí mezi těmito veličinami. Tím je možné zavést *fyzikální rozměr*, který vyjadřuje vztah dané veličiny k veličinám základním. Vzhledem k tomu, že je všeobecně přijat metrický systém, je žádoucí k vyjadřování větších či menších hodnot veličin užívat jednotek tvořených *deka-dickými násobky* jednotek základních. A konečné základní jednotky musí být definovány pomocí neměnných, snadno a přesně měřitelných vlastností přírodních objektů nebo umělých *prototypů* (etalonů).

Poslední požadavek představuje velmi obtížnou úlohu, kterou se zabývá *metrologie*. Jde o to, že umělý prototyp může podléhat změnám, zkáze nebo ztrátě a zvolíme-li vlastnost přírodního objektu, bude hodnota základní jednotky s rozvojem měřicích metod neustále upřesňována, což by vedlo k neustálým změnám základní jednotky. Snažíme se proto zafixovat velikost základní jednotky přesnou a snadno realizovatelnou definicí a tuto velikost již pokud možno neměnit.

Základem dnešních měrových soustav je *systém metrický*, který byl poprvé uzákoněn za Velké francouzské revoluce (dekret Konventu z 1.8.1793, zákony ze 7.4.1795 a 10.12.1799). Souvislost metrické soustavy s francouzskou revolucí byla též jedním z důvodů, který dlouho bránil přijetí této soustavy v některých, zejména anglosaských, zemích.

Jako příklad vývoje definice základních jednotek může sloužit definice jednotky délky (metr) a jednotky hmotnosti (kilogram). Jednotka metr byla původně definována na základě výběru z různých návrhů (mezi nimi byla například délka sekundového kyvadla v určité zeměpisné šířce apod.) jako desetimiliontá část kvadrantu zemského poledníku a realizována pomocí prototypu. Od roku 1799 jím byl tzv. archivní metr jako koncová míra. V roce 1889 byl nahrazen mezinárodním prototypem, který představoval míru „čárkovou“ kolejnicového profilu. V roce 1869 bylo upuštěno od definice pomocí délky poledníku a za metr prohlášena délka prototypu. V roce 1960 byla délka metru definována pomocí vlnové délky světla.<sup>84</sup> Poslední úprava definice metru byla přijata v říjnu 1983 a metr byl definován jako vzdálenost, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 sekundy. Podotkněme, že touto definicí je vlastně fixována velikost rychlosti světla ve vakuu a každé její experimentální upřesnění vede ke změně velikosti metru.

Tabulka D 2.1 Základní veličiny a jednotky Mezinárodní soustavy

Veličina	Definice základní jednotky
délka [l] = L	<i>Metr</i> (m) je délka rovnající se vzdálenosti, kterou uběhne světlo ve vakuu za 1/299 792 458 s (17. GKMV 1983)
hmotnost [m] = M	<i>Kilogram</i> (kg) je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu, který je uložen v Mezinárodním úřadě pro míry a váhy v Sèvres u Paříže (1. GKMV 1889)
čas [t] = T	<i>Sekunda</i> (s) je doba trvání 9 192 631 770 period záření, které přísluší přechodu mezi dvěma hyperjemnými hladinami základního stavu atomu cesia 133 (13. GKMV 1967)
elektrický proud [I] = I	<i>Ampér</i> (A) je proud, který při stálém průtoku dvěma rovnoběžnými přímými nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzdálenosti 1 metru, vyvolá mezi vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ newtonu na 1 metr délky (9. GKMV 1948)
teplota [T] = $\Theta$	<i>Kelvin</i> (K) je 273,16-tá část termodynamické teploty trojného bodu vody (10. GKMV 1954)
svítivost [I] = J	<i>Kandela</i> (Cd) je svítivost zdroje, který vysílá monochromatické záření frekvence $540 \cdot 10^{12}$ Hz a jehož zářivost v daném směru činí 1/683 wattů na steradián (16. GKMV 1979)
látkové množství [n] = N	<i>Mol</i> (mol) je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců, kolik je atomů v 0,012kg uhlíku 12 (14. GKMV 1971)

K základním jednotkám se v Mezinárodní soustavě přiřazují ještě dvě jednotky doplňkové:

rovinný úhel	<i>Radián</i> (rad) je rovinný úhel sevřený dvěma poloměry, které vytínají na obvodě kruhu oblouk stejné délky jako je poloměr
prostorový úhel	<i>Steradián</i> (sr) je prostorový úhel, který s vrcholem ve středu koule vytíná na jejím povrchu plochu velikosti čtverce o straně rovné poloměru koule

<sup>84</sup> Jako délka rovnající se 1 650 763,73 násobku vlnové délky záření, šifřičho se ve vakuu, které přísluší přechodu mezi energetickými hladinami  $2p_{10}$  a  $5d_5$  atomu kryptonu 86.

Naproti tomu jednotka kilogram je od r. 1889 stále definována jako hmotnost mezinárodního prototypu a kupodivu se dosud nepodařilo najít pro ni vhodný přírodní etalon. Při zavádění prototypu se vycházelo z hmotnosti 1 litru vody 4,2 °C teplé.

Tabulka D 2.2 Nejdůležitější jednotky mechanické

veličina	označení	definiční vztah	rozměr	hlavní jednotka
hustota, měrná hmotnost	$\rho$	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-1}M$	$kg \cdot m^{-3}$
frekvence (kmitočet)	$f$	$f = \frac{1}{T}$	$T^{-1}$	hertz (Hz)
rychlost	$v$	$v = \frac{dr}{dt}$	$LT^{-1}$	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení	$a$	$a = \frac{dv}{dt}$	$LT^{-2}$	$m \cdot s^{-2}$
úhlová rychlost	$\omega$	$\omega = \frac{d\phi}{dt}$	$T^{-1}$	$rad \cdot s^{-1}$
úhlové zrychlení	$\varepsilon$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	$T^{-2}$	$rad \cdot s^{-2}$
hybnost	$p$	$p = mv$	$LM T^{-1}$	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$
síla	$F$	$F = \frac{dp}{dt}$	$LM T^{-2}$	newton (N)
moment hybnosti	$l$	$l = r \times p$	$L^2 M T^{-1}$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
moment síly	$M$	$M = r \times F$	$L^2 M T^{-2}$	newton metr (N.m)
moment setrvačnosti	$I$	$I = mr^2$	$L^2 M$	$kg \cdot m^2$
tlak, napětí	$p, \sigma, \tau$	$p = \frac{dF}{dS}$	$L^{-1} M T^{-2}$	pascal (Pa)
práce, energie	$W, A, E$	$dA = F \cdot dl$	$L^2 M T^{-2}$	joule (J)
výkon	$P$	$P = \frac{dA}{dt}$	$L^2 M T^{-3}$	watt (W)
intenzita gravitačního pole	$K$	$K = \frac{F}{m}$	$LT^{-2}$	newton na kilogram ( $N \cdot kg^{-1}$ )
hustota energie	$w$	$w = \frac{W}{V}$	$L^{-1} M T^{-2}$	joule na krychlový metr ( $J \cdot m^{-3}$ )
hustota hybnosti	$g$	$g = \frac{p}{V}$	$L^{-2} M T^{-1}$	$kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$
hustota toku energie	$S$	$S = wv$	$MT^{-3}$	$J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$

V roce 1875 byla uzavřena mezinárodní *metrická konvence*. Původně k ní přistoupilo 17 států a jejich počet se od té doby neustále zvětšoval (Československo přistoupilo k této konvenci 24.11.1922). Nejvyšším mezinárodním orgánem metrické konvence je Generální konference pro míry a váhy (GK MV), která se pravidelně schází ve čtyřletých intervalech. Na svém 11. zasedání v roce

1960 přijala závaznou *Mezinárodní soustavu jednotek SI* (le Système International d'Unités).

Otázky jednotek pro měření elektrických a magnetických veličin byly původně rozhodovány na Mezinárodních elektrotechnických kongresech, z nichž první se sešel v Paříži v r. 1881. Tyto jednotky byly nakonec organicky začleňeny rovněž do soustavy SI. U nás byla soustava SI zavedena zákonem 35/1962 Sb. a vyjádřena v normě ČSN 01 1300 z 2. 5. 1974 a dalších. V tabulce D 2.1 uvádíme přehled základních jednotek soustavy SI spolu s jejich definicemi, v tabulce D 2.2 je uveden přehled nejdůležitějších mechanických jednotek.

Ve světové fyzikální literatuře jsou stále ještě používány některé další soustavy jednotek, především *absolutní soustava Gaussova*. Je proto třeba znát tvar jednotlivých rovnic v Gaussově soustavě, jednotky jednotlivých veličin a převodní vztahy mezi nimi. Při řešení některých fyzikálních problémů volíme někdy různé speciální jednotky, například některé bezrozměrné veličiny a podřízujeme volbu jednotek danému cíli. I když normativní závaznost Mezinárodní soustavy jednotek je nezbytná pro vzájemné dorozumění, sjednocení a především fyzikální aplikace, je třeba v ní vidět pouze určitý vhodný nástroj k vyjádření přírodních zákonitostí.

Vývoj soustav jednotek fyzikálních veličin je velmi poučný, protože odráží vývoj fyzikálních poznatků a vztahy mezi potřebami fyzikálního výzkumu a technické praxe. V následujícím textu uvedeme stručně vývoj jednotek pro měření elektrických a magnetických veličin.

### b) Vývoj elektrických a magnetických jednotek

Elektrické a magnetické jednotky navazovaly původně na mechanickou soustavu CGS (centimetr – gram – sekunda). Vycházely ze symetrie elektrických a magnetických jevů vyjádřené Coulombovými zákony pro elektrické náboje  $Q$  a „magnetická množství“  $Q_m$  chápaná jako obdoba elektrických nábojů:

$$F = k_1 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad F = k_2 \frac{Q_{m1} Q_{m2}}{r^2}. \quad (D 2.1)$$

Vztahy (D 2.1) lze využít pro zavedení jednotek náboje  $Q$  a magnetického množství  $Q_m$ , zvolíme-li hodnoty konstant  $k_1$ , resp.  $k_2$ . Navíc lze pomocí těchto vztahů definovat velikost intenzity elektrického, resp. magnetického pole

$$E = \frac{F}{Q}, \quad H = \frac{F}{Q_m}. \quad (D 2.2)$$

Proto také vznikly dvě oddělené soustavy fyzikálních jednotek pro elektrické a magnetické veličiny. Položíme-li konstantu  $k_1 = 1$  (a bezrozměrnou), dostaneme ze vztahu (D 2.1) jednotku pro měření náboje v *absolutní elektrostatické*

soustavě CGSE. Podobně položíme-li  $k_2 = 1$ , dostaneme jednotku „magnetického množství“ v *absolutní elektromagnetické soustavě* CGSM. Je zřejmé, že v uvedených soustavách bude mít elektrický náboj a „magnetické množství“ též fyzikální rozměr<sup>85</sup>

$$[Q] = [Q_m] = L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}, \quad (D 2.3)$$

kde  $L$  je rozměr délky,  $M$  hmotnosti a  $T$  času. V těchto soustavách není ve vakuu rozdíl mezi vektory intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  a elektrické indukce  $\mathbf{D}$  a mezi vektory intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$  a všechny tyto vektory mají též rozměr

$$[E] = [D] = [H] = [B] = L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}. \quad (D 2.4)$$

Všechny elektrické a magnetické veličiny se tak vyjadřují jen pomocí tří základních veličin mechanických a není třeba volit žádnou další základní veličinu.

Víme, že mezi elektrickými a magnetickými jevy existuje souvislost, která se musí promítnout i do vztahů mezi fyzikálními jednotkami. Uvažme například sílu  $\mathbf{F}$ , kterou magnetické pole intenzity  $H$  působí na elektrický náboj  $Q$  pohybující se rychlostí  $v$ ,

$$F = k_3 Q v H, \quad (D 2.5)$$

kde  $k_3$  je další konstanta úměrnosti. Budeme-li elektrický náboj měřit v jednotkách CGSE a intenzitu magnetického pole v jednotkách CGSM, můžeme konstantu  $k_3$  určit experimentálně. Dosazením příslušných jednotek ze vztahů (D 2.1) a (D 2.2) zjistíme, že platí

$$k_3 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \frac{1}{c}. \quad (D 2.6)$$

Konstanta  $c$  má přitom rozměr rychlosti a je číselně rovna rychlosti světla ve vakuu. Položíme-li tedy  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1$ , bude síla (D 2.5) působící na pohybující se náboj rovna

$$F = \frac{1}{c} Q v H. \quad (D 2.7)$$

Postupně se vyjasnilo, že „magnetické množství“ nebo „magnetický náboj“ je vlastně fiktivní, nanejvýš pomocný pojem (i když se někdy pro názornost používá)<sup>86</sup>, a že magnetické síly jsou vlastně silové účinky mezi elektrickými proudy. Máme-li dva rovnoběžné nekonečně dlouhé přímé vodiče ve vzájemné

<sup>85</sup> Rozměr veličiny označujeme hranatou závorkou, jednotku kulatou závorkou.

<sup>86</sup> Anglický teoretický fyzik P.A.M. Dirac ukázal, že podle kvantové teorie by mohla existovat částice, která by byla nositelem magnetického náboje (tzv. Diracův magnetický monopol). Tato částice by však měla velmi specifické vlastnosti a dosud nebyla objevena.

vzdálenosti  $r$ , jimiž protékají proudy  $I_1$  a  $I_2$  bude každý vodič působit na jednotku délky druhého vodiče silou

$$f_m = k \frac{I_1 I_2}{r}. \quad (D 2.8)$$

Pokud by tyto vodiče byly nabitы elektrickými náboji s lineárními hustotami  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , působila by mezi nimi elektrická síla na jednotku délky

$$f_e = k' \frac{\tau_1 \tau_2}{r}. \quad (D 2.9)$$

Obě tyto síly můžeme změřit, a protože elektrický proud  $I = Q/t$ , jsou jednotky náboje a jednotky proudu v jednoduchém vztahu  $(I) = (Q)/s$ .

Máme tedy vlastně jen dvě konstanty úměrnosti  $k$  a  $k'$ , které jsou vzájemně závislé, a tuto závislost lze určit buď experimentálně, nebo na základě nějaké hlubší teorie objasňující vztahy mezi elektrickými a magnetickými jevy, jako je například speciální teorie relativity.

V roce 1855 publikovali němečtí fyzikové Wilhelm Weber a Rudolf Kohlrausch výsledky měření sil (D 2.8) a (D 2.9), na jejichž základě určili poměr konstant  $k$  a  $k'$ . Elektrický náboj leidenské láhve měřili pomocí torzních vah a vyjádřili v jednotkách CGSE, zatímco proud procházející dvěma dlouhými přímými vodiči měřili zrcátkovým galvanometrem na základě magnetických účinků a vyjadřovali v jednotkách CGSM. Dospěli přitom k překvapujícímu závěru, že

$$\sqrt{\frac{k'}{k}} = c, \quad (D 2.10)$$

přičemž veličina  $c$  je rovna rychlosti světla ve vakuu. To byl vlastně první impuls, který později přivedl Maxwella k závěru, že nejde o pouhou náhodnou shodu, ale že světlo je elektromagnetická vlna a že optika je vlastně součástí elektromagnetismu.

Absolutní soustava jednotek zvaná Gaussova, která se i dnes ve fyzikální literatuře dále používá vedle soustavy SI, považuje v Coulombově zákoně konstantu  $k_1 = 1$  za bezrozměrnou (tomu odpovídá  $k' = 2$  v (D 2.9)) a sílu na jednotku délky mezi proudy zapisuje ve tvaru

$$f = \frac{1}{c^2} \frac{2 I_1 I_2}{r}. \quad (D 2.11)$$

Výraz pro Lorentzovu sílu, která je vlastně definičním vztahem pro vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$ , má v Gaussově soustavě tvar

$$\mathbf{F} = Q \left[ \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (\text{D 2.12})$$

Mnozí fyzikové stále dávají Gaussově soustavě přednost pro její symetrii (viz vztah D 2.4) a proto, že neobsahuje konstanty  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  bez přímého fyzikálního významu. S potřebami mezinárodní praxe a jednotnosti však soustava SI postupně převládá.

Vraťme se však ještě do 19. století. S rozvojem elektrotechniky nabývala na významu praktická realizace jednotek pro měření elektrických a magnetických veličin. Rozhodnutím 4. Mezinárodního elektrotechnického kongresu v Chicagu roku 1893 byly zavedeny tzv. *praktické mezinárodní jednotky* odporu, proudu a napětí, které byly realizovány prototypy, respektive experimentálními definicemi:

*ohm*:  $\Omega = 10^9$  jednotek CGSM jako odpor rtuťového sloupce stálého průřezu a délky 106,300 cm s hmotností 14,452 g při teplotě tajícího ledu;

*ampér*:  $A = 10^{-1}$  jednotek CGSM jako stálý proud, který při průchodu vodním roztokem dusičnanu stříbrného vyloučí za jednu sekundu 0,001 118 g stříbra;

*volt*:  $V = 10^8$  jednotek CGSM jako 1000/1434 elektromotorického napětí článku Latimerova-Clarkova, resp. 0,982 03 elektromotorického napětí článku Westonova při 20 °C.

Velikosti těchto jednotek byly zvoleny tak, aby v tehdejší situaci řádově odpovídaly hodnotám vyskytujícím se v praxi. Přitom praktická jednotka výkonu odpovídá jednomu wattu:  $1V \cdot 1A = 1W = 10^7$  jednotek CGS. Tento řádový nesoulad s mechanickými jednotkami soustavy CGS vedl Giorgiho (1901) a Ascoliho (1904) k návrhu upravit základní jednotku délky a hmotnosti a nahradit centimetr jednotkou o  $m$  řádů vyšší a gram jednotkou o  $n$  řádů vyšší. Bude-li splněna podmínka

$$2m + n = 7, \quad (\text{D 2.13})$$

bude v nové soustavě jednotkou výkonu právě watt. Možnou volbou je přitom soustava MKS (metr – kilogram – sekunda).

V roce 1882 Heaviside navrhl tzv. *racionalizaci jednotek*, spočívající v zavedení faktoru  $4\pi$  do rovnic elektromagnetického pole (což v podstatě odpovídá normování toku siločar vycházejících z bodového náboje k jednotce prostorového úhlu). Coulombův zákon a zákon pro sílu mezi proudy by se pak zapisoval pomocí nových konstant jako

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r}. \quad (\text{D 2.14})$$

Konstanty  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  můžeme zatím považovat za neurčeny, ale podle (D 2.10) mezi nimi platí experimentálně zjištěný vztah

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{D 2.15})$$

Dlouho panovala nejednotnost v názoru, zda a kterou elektrickou či magnetickou veličinu zvolit jako základní. Až teprve v roce 1948 zvolila 9. Generální konference pro míry a váhy za tuto veličinu proud s jednotkou ampér A, tak že položila konstantu  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m.kg.s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$  (zkráceně henry na metr  $\text{H.m}^{-1}$ ); konstanta  $\mu_0$  se dnes nazývá *permeabilita vakua*. Tím byl položen základ soustavy MKSA (metr – kilogram – sekunda – ampér), z níž později vznikla *Mezinárodní soustava jednotek SI*, jejíž základní jednotky jsou uvedeny v tabulce D 2.1. Pro konstantu  $\epsilon_0$ , nazývanou *permitivita vakua* pak z (D 2.15) vychází  $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 10^7/(4\pi c^2) \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$  (zkráceně farad na metr  $\text{F.m}^{-1}$ ). Uvedeným postupem byla zároveň stanovena jednotka elektrického náboje coulomb (C). Coulombův zákon a zákon pro sílu mezi proudy (D 2.14) lze ovšem v daných jednotkách zapisovat i bez explicitního použití konstant  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  ve tvaru

$$F = c^2 10^{-7} \frac{Q_1 Q_2}{r}, \quad f = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I_1 I_2}{r}. \quad (\text{D 2.14a})$$

V původní verzi soustavy SI byl metr definován pomocí vlnové délky světla a konstanta  $c$  byla určována experimentálně. V této situaci i konstanta  $\epsilon_0$  představovala experimentální konstantu, která podléhala upřesňování při zdokonalování měřicích metod. Protože však rychlost světla fixována (viz tabulka D 2.1), v souvislosti s novou definicí metru rychlost světla fixována (viz tabulka D 2.1), má dnes i konstanta  $\epsilon_0$  neměnnou hodnotu, vyplývající z přijaté hodnoty rychlosti světla. V platné verzi soustavy jednotek SI mají tedy právě diskutované konstanty tyto hodnoty:

$$\begin{aligned} c &= 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}, \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566\,370\,614 \dots \times 10^{-7} \text{ N.A}^{-2}, \\ \epsilon_0 &= 1/(\mu_0 c^2) = 8,854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{D 2.16})$$

V soustavě SI jsou silové účinky elektrického a magnetického pole popsány pomocí vektorů  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  takže Lorentzova síla (D 2.12) se zapisuje ve tvaru

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (\text{D 2.17})$$

Konstanty  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  v (D 2.1) a (D 2.5) jsou v soustavě SI podle (D 2.6) rovny

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi\mu_0}, \quad k_3 = \mu_0. \quad (\text{D } 2.18)$$

Magnetická síla na pohybující se náboj ve vakuu (D 2.5) bude tedy

$$F = Qv\mu_0 H = QvB, \quad (\text{D } 2.19)$$

takže vektory  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  a  $\mathbf{H}$  se budou lišit číselně i rozměrem. Stejně tak zavádíme vektor elektrické indukce  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

### c) Přehled rovnic elektromagnetického pole v Gaussově soustavě

Při používání literatury psané v absolutní soustavě jednotek musíme mít na paměti, že nejen velikost používaných jednotek, ale i způsob zápisu základních fyzikálních vztahů a rovnic se liší od zápisu v Mezinárodní soustavě. Pro snazší orientaci v této literatuře uvádíme proto v tab. D 2.3 hlavní vztahy s odlišným způsobem zápisu a odkazem na číslování příslušných rovnic v textu učebnice. Maxwellovy rovnice mají tento zápis, viz rovnice G (5.21):

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{array}$$

Tabulka D 2.3 Rovnice elektromagnetického pole v Gaussově soustavě

G(1.4)	$f = \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^2}$	G(1.5)	$F = Q \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^2} \mathbf{R}_i$
G(1.25)	$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}}$	G(1.33)	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i^2} \mathbf{R}_i$
G(1.47)	$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$	G(1.48)	$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}_i } + C$
G(1.69)	$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' ^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV$	G(1.70)	$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } dV$
G(1.72)	$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi\sigma$	G(1.77)	$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r})$
G(1.85)	$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$	G(1.91)	$w_e = \frac{ \mathbf{E} ^2}{8\pi}$
G(1.93)	$E_z = \frac{2\tau}{r}$	G(1.96)	$E_z = 2\pi\sigma$
G(1.99)	$E = 4\pi\sigma$	G(1.104)	$E = \frac{Q}{r^2}$
G(1.148)	$\varphi_A = \frac{\rho \cdot \mathbf{r}}{r^3}$	G(1.180)	$\mathbf{E}_p = -4\pi\mathbf{P}$

G(1.203)	$C = \frac{1}{4\pi} \frac{S}{d}$	G(1.246)	$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$
G(1.247)	$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$	G(1.248)	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$
G(1.247)	$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = 4\pi\sigma$	G(1.255)	$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$
G(1.258)	$\epsilon_r = 1 + 4\pi\chi_e$	G(1.259)	$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r})$
G(1.267)	$w_e = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}$	G(1.274)	$\mathbf{D} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$
G(3.68)	$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I$	G(3.71)	$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
G(3.79)	$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$	G(3.81)	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3} dV$
G(3.84)	$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$	G(3.115)	$\mathbf{M} \times \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{m})_s}{c}$
G(3.116)	$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \frac{(\mathbf{m})_j}{c}$	G(3.137)	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I$
G(3.138)	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$	G(3.139)	$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$
G(3.142)	$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$	G(3.142)	$\mu_r = 1 + 4\pi\chi_m$
G(3.142)	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_r \mathbf{H}(\mathbf{r})$	G(4.2)	$\epsilon_r = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$
G(4.16)	$\Psi_i = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N L_{ik} I_k$	G(4.90a)	$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^N \Psi_i I_i$
G(4.99)	$w_m = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi}$	G(5.9)	$\mathbf{j}_i = \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
G(5.48)	$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$		

### d) Převodní vztahy jednotek elektrických a magnetických veličin v Mezinárodní a Gaussově soustavě

Převodní vztahy mezi jednotkami dané veličiny v obou soustavách lze odvodit ze srovnání odpovídajících rovnic. Uvedeme příklady takových výpočtů pro několik nejdůležitějších veličin. Příslušné jednotky vyjadřujeme kulatými závorkami. Připomínáme, že číselná hodnota dané veličiny a velikost její jednotky se mění v obráceném poměru.

*Elektrický proud I:* Definiční vztah pro zavedení jednotky v soustavě SI je

$$f = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$



V Gaussově soustavě se tento vztah zapisuje ve tvaru

$$f = \frac{2 I^2}{c^2 r}.$$

Rychlost světla  $c$  je zde přitom třeba vyjadřovat v  $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ; budeme brát přibližně  $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ . Máme tedy

$$(I)_{\text{SI}} = [10^{-7} \cdot (f)_{\text{SI}} \cdot (r)_{\text{SI}} \cdot 9 \cdot 10^{20}]^{1/2} = [10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 10^{20}]^{1/2} (I)_{\text{G}} = 3 \cdot 10^9 (I)_{\text{G}}$$

neboli

$$1 \text{ A} = 3 \cdot 10^9 (I)_{\text{G}}.$$

Odvozování dalších převodních vztahů budeme zapisovat již zkráceně a při výpočtu budeme u jednotek vynechávat index SI.

*Elektrický náboj Q*: Protože v obou soustavách platí  $I = Q/t$ , je převodní koeficient pro jednotky náboje a proudu týž:

$$1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 (Q)_{\text{G}}.$$

*Elektrický potenciál  $\varphi$ , napětí U, elektromotorické napětí  $\mathcal{E}$* :

$$\varphi = \frac{A}{Q}, \quad (\varphi) = \frac{(A)}{(Q)} = \frac{10^7}{3 \cdot 10^9} (\varphi)_{\text{G}} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} (\varphi)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ V} = \frac{1}{300} (\varphi)_{\text{G}}.$$

*Intenzita elektrického pole E*:

$$E = \frac{\varphi}{l}, \quad (E) = \frac{(\varphi)}{(l)} = \frac{1}{3 \cdot 10^2 \cdot 10^2} (E)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 10^4} (E)_{\text{G}}.$$

*Elektrická indukce D*:

$$D = \epsilon_0 E, \quad (D) = (\epsilon_0)(E) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^4} (D)_{\text{G}} = 12\pi \cdot 10^5 (D)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2} = 12\pi \cdot 10^5 (D)_{\text{G}}.$$

*Magnetická indukce B*:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{v Gaussově soustavě } B = \frac{2 I}{c r},$$

$$(B) = \frac{1}{10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{10}} \frac{(I)}{(r)} = \frac{3 \cdot 10^9}{10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^2} = 10^4 (B)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}.$$

*Magnetický indukční tok  $\Phi$* :

$$\Phi = BS, \quad (\Phi) = (B)(S) = 10^4 \cdot 10^4 (\Phi)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ maxwell}.$$

*Intenzita magnetického pole H*:

$$H = \frac{B}{\mu_0}, \quad (H) = \frac{(B)}{(\mu_0)} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 (H)_{\text{G}},$$

$$1 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ oersted}.$$

Podobným způsobem lze postupovat i pro další veličiny. Převodní koeficienty, jakož i rozměry elektrických a magnetických veličin jsou uvedeny v tabulce D 2.3.

#### e) Vybrané základní fyzikální konstanty

Základní fyzikální konstanty jsou neodmyslitelnou součástí kvantitativních vztahů mezi fyzikálními veličinami. Soubor základních fyzikálních konstant užívaný v určité době na jedné straně přímo odráží dosažený stupeň fyzikálního poznání, na druhé straně je do značné míry výsledkem konvence dané mimo jiné i způsobem definice základních jednotek užívané soustavy.

Dramatickým, a v tomto dodatku již probíraným příkladem je historie patrně jedné z neznámějších a v jistém smyslu i nejoblíbenějších fyzikálních konstant – rychlosti světla ve vakuu  $c$ , o jejíž přesné stanovení měřením usilovali nejpřednější fyzikové mnoha generací. Jak jsme viděli, díky dosažené přesnosti se její hodnota od roku 1983 stala podkladem pro definici metru v soustavě jednotek SI. Zavedením tak zvaného racionalizovaného zápisu rovnic a volbou jednotky proudu *ampér* základní jednotkou byly pak do rovnic elektromagnetického pole, vyjadřovaných v této soustavě, zavedeny dvě známé konstanty (D 2.16) bez přímého fyzikálního významu.

Tabulka D 2.4 Jednotky elektrických a magnetických veličin

veličina	označení	definiční vztah		rozměr		hlavní jednotka SI	k (SI) = k <sub>e</sub> (Gaussova)	poznámka
		SI	Gaussova	SI	Gaussova			
elektrický náboj	Q	Q = It	$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$	TI	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	coulomb (C)	3 · 10 <sup>9</sup>	v Gaussově soust. někdy <i>statcoulomb</i>
objemová hustota náboje	ρ	$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$		L <sup>3</sup> TI	$L^{-3/2} M^{1/2} T^{-1}$	coulomb na metr krychlový (C.m <sup>-3</sup> )	3 · 10 <sup>3</sup>	
plošná hustota náboje	σ	$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$		L <sup>2</sup> TI	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	coulomb na metr čtverečný (C.m <sup>-2</sup> )	3 · 10 <sup>5</sup>	
lineární hustota náboje	τ	$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l}$		L <sup>1</sup> TI	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	coulomb na metr (C.m <sup>-1</sup> )	3 · 10 <sup>7</sup>	v Gaussově soust. někdy <i>statampér</i>
elektrický proud	I	základní veličina	$I = \frac{Q}{t}$	I	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-2}$	ampér (A)	3 · 10 <sup>9</sup>	
hustota proudu	J		$dI = J \cdot dS$	L <sup>2</sup> I	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-2}$	ampér na metr čtverečný (A.m <sup>-2</sup> )	3 · 10 <sup>5</sup>	
lineární hustota proudu	i <sub>s</sub>		$dI = i_s \cdot dl$	L <sup>1</sup> I	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-2}$	ampér na metr (A.m <sup>-1</sup> )	3 · 10 <sup>7</sup>	
elektrický potenciál, rozdíl potenciálů, elektrické napětí, elektromotorické napětí	φ φ <sub>21</sub> U ε		$\varphi = \frac{A}{Q}$	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup> I <sup>-1</sup>	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	volt (V)	$\frac{1}{3 \cdot 10^2}$	v Gaussově soust. někdy <i>statvolt</i>

intenzita elektrického pole	E	$E = \frac{F}{Q}$	LMT <sup>-3</sup> I <sup>-1</sup>	L <sup>-1/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	volt na metr (V.m <sup>-1</sup> )	$\frac{1}{3 \cdot 10^4}$	
tok intenzity elektrického pole	Φ <sub>e</sub>	$d\Phi_e = E \cdot dS$	L <sup>3</sup> MT <sup>-3</sup> I <sup>-1</sup>	L <sup>3/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	volt metr (V.m)	$\frac{1}{3}$	
elektrická indukce	D	$D = \epsilon_r \epsilon_0 E$ $D = \epsilon_r \cdot E$	L <sup>2</sup> TI	L <sup>-1/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	coulomb na metr čtverečný (C.m <sup>-2</sup> )	12π · 10 <sup>5</sup>	
elektrický indukční tok	ψ	$d\psi = D \cdot dS$	TI	L <sup>3/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	coulomb (C)	12π · 10 <sup>9</sup>	
elektrický dipólový moment	P	$p = Ql$	LTI	L <sup>5/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	coulomb metr (C.m)	3 · 10 <sup>11</sup>	
elektrická polarizace	P	$p = \sum \frac{p}{V}$	L <sup>2</sup> TI	L <sup>-1/2</sup> M <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	coulomb na metr čtverečný (C.m <sup>-2</sup> )	3 · 10 <sup>5</sup>	v Gaussově soust. jednotka <i>centimeter (statfarad)</i>
kapacita, kapacitní koeficient	C	$C = \frac{Q}{\varphi}$	L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>4</sup> I	L	farad (F)	9 · 10 <sup>11</sup>	v Gaussově soust. někdy <i>statohm</i>
elektrický odpor, impedance	R Z	$R = \frac{U}{I}$	L <sup>2</sup> MT <sup>-3</sup> I <sup>-2</sup>	L <sup>-1</sup> T	ohm (Ω)	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$	v Gaussově soust. někdy <i>statohm</i>
elektrická vodivost, admittance	G Y	$G = \frac{1}{R}$	L <sup>-2</sup> M <sup>-1</sup> T <sup>3</sup> I <sup>2</sup>	L <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	siemens (S)	9 · 10 <sup>11</sup>	v Gaussově soust. někdy <i>statohm</i>

veličina	označení	definiční vztah		rozměr		hlavní jednotka SI	k (SI) = k.(Gaussova)	poznámka
		SI	Gaussova	SI	Gaussova			
rezistivita (měrný elektrický odpor)	$\rho_R$	$F = \rho_R \frac{l}{S}$	Gaussova	$L^3 M^{-3} T^{-3} I^{-2}$	T	ohm metr ( $\Omega \cdot m$ )	$\frac{1}{9 \cdot 10^9}$	v Gaussově soust. jednotka <i>sekunda</i>
konduktivita (měrná elektrická vodivost)	$\gamma$	$\gamma = \frac{1}{\rho_R}$		$L^3 M^{-1} T^{-1} I^2$	$T^{-1}$	siemens na metr ( $S \cdot m^{-1}$ )	$9 \cdot 10^9$	
magnetická indukce	$B$	$F = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ $F = \frac{1}{c} Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	Gaussova	$M T^{-2} I^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	tesla (T)	$10^4$	v Gaussově soust. jednotka <i>gauss</i>
magnetický (indukční) tok	$\Phi$	$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$		$L^2 M T^{-2} I^{-1}$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	weber (Wb)	$10^8$	v Gaussově soust. jednotka <i>maxwell</i>
intenzita magnetického pole	$H$	$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_0}$ $H = \frac{B}{\mu_c}$		$L^{-1} I$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	ampér na metr ( $A \cdot m^{-1}$ )	$4\pi \cdot 10^{-3}$	v Gaussově soust. jednotka <i>oersted</i>
magnetický moment (Ampěrův)	$m$	$m = I S$ $m = \frac{1}{c} I S$		$L^2 I$	$L^{3/2} M^{1/2} T^{-1}$	ampér metr čtverečný ( $A \cdot m^2$ )	$10^3$	alternativně ( $J \cdot T^{-1}$ )
magnetický moment (Coulombův)	$m_C$	$m_C = \mu_0 m$ $m_C = Q_m l$		$L^3 M T^{-2} I^{-1}$	$L^{5/2} M^{1/2} T^{-1}$	weber metr ( $Wb \cdot m$ )	$\frac{10^{10}}{4\pi}$	$Q_m$ značí magnetické množství

magnetizace	$M$	$M = \sum \frac{m}{V}$	$L^{-1} I$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	ampér na metr ( $A \cdot m^{-1}$ )	$10^{-3}$	
magnetická polarizace	$P_m$	$P_m = \sum \frac{m_C}{V}$	$M T^{-2} I^{-1}$	$L^{-1/2} M^{1/2} T^{-1}$	tesla (T)	$\frac{10^4}{4\pi}$	
indukčnost, vzájemná indukčnost	$L$	$L = \frac{\Phi}{I}$ $L = c \frac{\Phi}{I}$	$L^2 M T^{-2} I^{-2}$	L	henry (H)	$10^9$	v Gaussově soust. jednotka <i>centimetr (statihenry)</i>
magnetický potenciál, magnetické napětí, magnetomotornické napětí	$\phi_m$ $U_m$ $\mathcal{E}_m$	$d\phi_m = H \cdot dl$	I	$L^{1/2} M^{1/2} T^{-1}$	ampér (A)	$4\pi \cdot 10^{-1}$	v Gaussově soust. jednotka <i>gilbert</i>
magnetický odpor	$R_m$	$R_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\Phi}$	$L^{-2} M^{-1} T^{-2} I^2$	$L^{-1}$	ampér na weber ( $A \cdot Wb^{-1}$ ) (reciproký henry $H^{-1}$ )	$4\pi \cdot 10^{-7}$	
magnetická vodivost	$G_m$	$G_m = \frac{1}{R_m}$	$L^2 M T^{-2} I^{-2}$	L	weber na ampér ( $Wb \cdot A^{-1}$ ) (henry H)	$\frac{10^7}{4\pi}$	v Gaussově soust. jednotka <i>centimetr</i>
permitivita, permitivita vakua	$\epsilon$ $\epsilon_0$	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$L^{-3} M^{-1} T^{-4} I^2$		farad na metr ( $F \cdot m^{-1}$ )	$4\pi \cdot 9 \cdot 10^9$	
permeabilita, permeabilita vakua	$\mu$ $\mu_0$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$	$L M T^{-2} I^{-2}$		henry na metr ( $H \cdot m^{-1}$ )	$4\pi \cdot 10^7$	

Rozvoj fyziky ve dvacátém století, kdy byla významná pozornost věnována mikrostruktuře hmoty na atomové a subatomové úrovni, vedl k vytvoření relativně ustáleného souboru základních fyzikálních konstant, jejichž hodnoty se určují měřeními a periodicky se upřeshňují tzv. *adjustacemi* (viz např. [2]). V tabulce D 2.5 uvádíme stručný výběr hodnot základních fyzikálních konstant obecnějšího charakteru, které mají blízký vztah k látce obsažené v této učebnici, v tabulce D 2.6 parametry některých částic, podle adjustace 1998.<sup>87</sup>

Tabulka D 2.5 Výběr základních konstant obecnějšího charakteru

veličina	symbol	hodnota	jednotka
gravitační konstanta	$G$	6,673(10)	$10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Planckova konstanta	$h$	6,626 068 76(52)	$10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
$h/2\pi$	$\hbar$	1,054 571 596(82)	$10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Boltzmannova konstanta	$k_B$	1,380 650 3(24)	$10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
elementární náboj	$e$	1,602 176 462(63)	$10^{-19} \text{ C}$
Rydbergova konstanta	$R_\infty$	1,097 373 156 854. 9(83)	$10^7 \text{ m}^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A$	6,022 141 99(47)	$10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Faradayova konstanta	$F$	96 485,341 5(39)	$1 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Bohrův poloměr atomu	$a_0$	0,529 177 208 3(19)	$10^{-10} \text{ m}$
Bohrův magneton	$\mu_B$	9,274 008 99(37)	$10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
jaderný magneton	$\mu_N$	5,050 783 17(20)	$10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$

Tabulka D 2.6 Parametry některých částic

elektron			
veličina	symbol	hodnota	jednotka
hmotnost	$m_e$	9,109 381 88(72)	$10^{-31} \text{ kg}$
měrný náboj	$e/m_e$	1,758 820 174(71)	$10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$
magnetický moment	$\mu_s$	9,284 770 1(31)	$10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
	$\mu_s$	1,001 159 652 186 9(41)	$\mu_B$
anomálie mag. momentu	$\mu_s/\mu_B - 1$	0,001 159 652 186 9(41)	-
proton			
veličina	symbol	hodnota	jednotka
hmotnost	$m_p$	1,672 621 58(13)	$10^{-27} \text{ kg}$
poměr hmotností protonu a elektronu	$m_p/m_e$	1836,152 667 5(39)	-
magnetický moment	$\mu_p$	1,410 606 633(58)	$10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
	$\mu_p$	2,792 847 337(29)	$\mu_N$
neutron			
veličina	symbol	hodnota	jednotka
hmotnost	$m_n$	1,674 927 16(13)	$10^{-27} \text{ kg}$
magnetický moment	$\mu_n$	-0,966 236 40(23)	$10^{-26} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$
	$\mu_n$	-1,913 042 72(45)	$\mu_N$

<sup>87</sup> P. J. Mohr, B. N. Taylor: CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998, Rev. Mod. Phys. 72(2000)351.

Z uvedených konstant, veličina  $(\mu_s/\mu_B - 1)$ , nazývaná *anomálie magnetického momentu elektronu*, vyžaduje jistý komentář. Tato veličina vyjadřuje korekci hodnoty magnetického momentu elektronu, která byla do nerelativistické kvantové mechaniky na základě tehdy známých experimentů dodatečně zavedena ve 20. letech minulého století a později vyplynula z Diracovy relativistické teorie elektronu (viz čl.3.5.1 a 7.1.4). Nutnost korekce vyplynula z přesnějších spektroskopických měření, prováděných v polovině 20. století, a z jejich interpretace v rámci kvantové elektrodynamiky, zahrnující tzv. *radiační korekce*, reprezentující interakční energii elektronu s jeho vlastním kvantovaným elektromagnetickým polem.<sup>88</sup>

<sup>88</sup> V populárnější a přehledné formě je možné se o této problematice poučit v [2], kde je možné nalézt seznam knižní literatury k dalšímu studiu.

# Historický přehled

## Od Thaleta ke Gilbertovi

Čtenář této kapitoly si může položit otázku o smyslu studia historického přehledu. Historie vědy však není jen nějakou zábavnou ilustrací, sbírkou historek o vzniku jednotlivých objevů, úsměvných nebo naopak truchlivých příběhů ze života badatelů. Víme-li, jak lidské poznání vznikalo a rozvíjelo se, jak se některé objevy stávaly impulsem k lavině objevů dalších a naopak jiné zůstávaly po staletí zapomenuty a nedoceny, jak se vzájemně ovlivňovaly a podmiňovaly vnitřní, imanentní rozvoj vědy a historické potřeby lidské společnosti, poznáme-li vnitřní zákonitosti a dynamiku rozvoje vědy, můžeme snáze předvídat i její budoucí rozvoj, utvářet metodologii vědy, lépe organizovat a směřovat výzkum. Známe-li historii objevu, lépe porozumíme i jeho podstatě, významu a souvislostem. Neméně poučné jsou i historie omylů ve vědě a naopak osobní příklad průkopníků vědy má morální a inspirující hodnotu.

Historie postupného získávání poznatků o elektřině a magnetismu, experimentálních i teoretických, patří k nej-poučejším kapitolám dějin fyziky a vědy vůbec. Elektrické jevy v podobě atmosférické elektřiny, blesku, zapůsobily z přírodních dějů snad nejvíce na duševní život pravěkého člověka. Ze starověku pocházejí zprávy o elektrostatické elektřině vznikající při tření jantaru a o vlastnostech magnetovce. *Thales Miletský* (asi 624–543 př. n. l.), první známý evropský vědec, se o obou těchto jevech zmiňuje a praví o magnetovci, že má duši, neboť hýbe železem. Původ slova elektřina se odvozuje od řeckého „elektron“, což znamená jantar, slovo magnetismus má patrně kořen v názvu maloasijského města Magnesia, v jehož blízkosti se magnetovec vyskytoval (Magnesia lithos, tj. kámen z Magnesie). Ve starověku byla též známa a dokonce využívána živočišná elektřina některých druhů ryb.

Použití magnetky jako kompasu bylo známo Číňanům ještě před počátkem letopočtu. Asi ve 12. století se tato zna-

1. pol. 6. st. př. n. l.  
Thales Miletský

## OD THALETA KE GILBERTOVI

595

lost dostala prostřednictvím Arabů do Evropy a začala se uplatňovat v námořní navigaci. Katolická církev však používání této „d'ábelské síly“ dlouho odsuzovala; proto křesťanští, ale i muslimští kapitáni přenechávali orientaci podle kompasu raději židovským kormidelníkům a lodivodům. V 15. století byla zjištěna magnetická deklinace (Kolumbus při cestě na západ pozoroval odchylku magnetické stříelky od směru k polární hvězdě), v 16. století i magnetická inklinace.

Z období středověku se zachoval spis o magnetismu *Petra Peregrina* (Pierre de Maricourt) „Epistola de magnete“ popisující též konstrukci kompasu. Peregrinus věděl, že pŕlením magnetu vzniká opět magnet se dvěma póly, že se póly opačného znamení přitahují, a zdůrazňoval, že kompas se neorientuje ke hvězdám, ale k zemským pólům. V duchu své doby se pokusil využít magnetů i při konstrukci perpetua mobile.

První systematické vědecké dílo o elektřině a magnetismu, které otevřelo éru novodobého fyzikálního zkoumání těchto jevů, je práce anglického lékaře *Williama Gilberta* (1540–1603) „De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellurae physiologia nova“. Gilbert zřetelně rozlišil síly magnetické a elektrické (zavedl pojmenování elektřina), zkonstruoval první stěblový elektroskop (tak zvané „Gilbertovo versorium“) a uvádí více než dvacet různých látek, u nichž zjistil schopnost přitahovat po zelektrování drobná tělíška. Označil je jako elektrická, neboť se chovají jako jantar. Zejména významné jsou však jeho experimenty se zmagnetovanou koulí, které ho přivedly k hypotéze o tom, že naše Země a ostatní nebeská tělesa představují gigantické magnety. Magnetickými silami, které považoval za prvotní, vysvětloval i přitahování nebeských těles a tuto jeho představu převzal i Galilei a Kepler – gravitační síly zavedl do fyziky teprve Newton.

## Od Gilberta ke Coulombovi

Je zajímavé, že Gilbert znal pouze elektrické síly přitažlivé; o elektrickém odpuzování se poprvé zmiňuje *Nicolo Cabeo* (1585–1650). Teprve vynález třecí elektřiky však umožnil provést řadu základních elektrostatických experimentů prozkoumat povahu elektrostatických sil. První takový elektrostatický generátor zkonstruoval německý fyzik a magde-

1269  
P. Peregrinus

1600  
W. Gilbert

1629  
N. Cabeo

burský starosta *Otto Guericke* (1602–1686), známý svými pokusy s atmosférickým tlakem. Jeho přístroj byl ovšem velmi primitivní a představoval vlastně rotující sírovou kouli, která se třením elektrizovala. Ve svém spise „*Experimenta nova*“ popsal Guericke přitažlivé a odpudivé síly, vznik elektrické jiskry, světélkování plynů v silném elektrickém poli a další jevy. *Robert Boyle* (1627–1691), který zopakoval Guerickeovy experimenty, dokázal, že přitažlivost dvou zelektrizovaných těles je vzájemná a že elektrické síly působí i ve vakuu.

V osmnáctém století bylo v podstatě dovršeno poznání zákonů elektrostatiky, které našlo nakonec svůj výraz ve formulaci Coulombova zákona. *Stephen Gray* (1670–1736) provedl v letech 1729–1731 řadu dosti kuriózních pokusů, při nichž vyjasnil rozdíl mezi vodiči a nevodíči a ukázal, že k uchování elektřiny musí být vodič izolován.

Grayovy experimenty inspirovaly nadaného francouzského fyzika *Charlese Françoise Dufaye* (1698–1739), který se pokusil o první výklad elektrických jevů. Zjistil, že existují dva druhy elektřiny („skelná“ a „pryskyřicová“), pomocí elektroskopu s korkovými kuličkami na hedvábném vlákně určil, že tělesa nabitá elektřinou téhož druhu se odpuzují, opačného druhu se přitahují, a zkoumal též možnost zelektrizování lidského těla. Jeho práce, které byly publikovány v letech 1733–1737 v memoárech Pařížské akademie, nevyvolaly však odpovídající zájem a byly později zopakovány jinými badateli.

*Ewald Kleist* (1700–1748) a *Pieter Musschenbroek* (1692–1761) vytvořili první kondenzátor – známou leidskou láhev – umožňující hromadit náboj a zvyšovat elektrické napětí. *Musschenbroek* podrobně popisuje nepříjemné pocity při vybíjení láhve lidským tělem. Tyto pokusy s vybíjením baterií kondenzátorů uzavřenými obvody (jako řadou osob držících se za ruce, úseky vodních toků, řetězy a konečně i kovovými dráty) byly v polovině 18. století velmi populární a efektní a přispěly k poznání vodivosti látek. Přitom se stále zdálo, že elektřina nebude nikdy sloužit k ničemu jinému než k podobným hříčkám.

V padesátých letech 18. století dokázal *Benjamin Franklin* (1706–1790) elektrickou povahu blesku a vynalezl bleskosvod. D'Alembert jej pozdravil slovy „vyrvál nebi blesk a žezlo tyranům“. Franklinův tyčový bleskosvod se od roku

1672  
O. Guericke

1675  
R. Boyle

1731  
S. Gray

1733  
Ch. Dufay

1745  
E. Kleist  
P. Musschenbroek

1750  
B. Franklin

1754 začal rozšiřovat i v Evropě. V téže době sestrojil a 15. 6. 1754 instaloval svůj bleskosvod vlastní originální koncepce i *Prokop Diviš* (1698–1765) v Příměticích u Znojma. Diviš chtěl předejít blesku svedením atmosférické elektřiny do země.

Franklin podal teoretické vysvětlení elektřiny jako přebytku či nedostatku zvláštní jemné substance, fluida, o němž předpokládal, že má částicovou strukturu. Proto také zavedl názvy kladné a záporné elektřiny. Existenci fluida jako nositele elektrických, magnetických a gravitačních sil ostatně předpokládal již Newton, který jinak zdůrazňoval svůj odmítavý postoj k vytváření experimentálně nepodložených hypotéz. Podle jednofluidové hypotézy by ovšem elektřina měla sršet pouze z kladně nabitých hrotů, kde je fluida přebytek. Experiment však ukazoval, že kladně i záporně nabitá tělesa srší z hrotů stejně intenzivně. To přivedlo Angličana *Roberta Symmera* (?–1763) k vytvoření dualistické teorie dvou různých fluid, která se vzájemně neutralizují. Symmer tak na vyšší úrovni obnovil Dufayovy představy, avšak chápal kladnou a zápornou elektřinu spíše jako dvě protikladné síly. Symmerovo pojetí předznamenalo pozdější představu elektrického pole, zatímco Franklinův přístup byl zárodkem představy o atomismu elektřiny. Franklin se zamýšlel i nad povahou magnetismu a v r. 1750 sdělil, že se mu podařilo zmagnetovat železný hřebík tak, že jím propustil elektrický náboj. Tak vznikaly první náznaky tušení souvislosti elektrických a magnetických jevů.

Významný přínos v rozvíjení nauky o elektřině a výkladu atmosférické elektřiny znamenaly práce vědců spojených s petrohradskou Akademií věd, zejména *Georga Wilhelma Richmana* (1711–1753) a *Franze Ulricha Theodora Aepina* (1724–1802). Richman prováděl pomocí svého elektrometru kvantitativní pokusy s atmosférickou elektřinou a 26. 7. 1753 se stal obětí těchto pokusů. Událost je možné podle líčení očitého svědka interpretovat tak, že se Richmanovi podařilo vyvolat vznik kulového blesku, který se pohyboval místností a experimentátora usmrtil.

Mimořádně významný je přínos Aepinův. Tento všestranný vědec studoval jev elektrostatické indukce, dále rozvíjel Franklinovu jednofluidovou teorii, zavedl však ještě fluidum magnetické a zabýval se souvislostí mezi elektřinou a magnetismem. Zaujal jej pyroelektrický jev u turmalínu,

1754  
P. Diviš

1759  
R. Symmer

1753  
G. Richman

1759  
F. Aepinus

známý již starým Indům – turmalín má po zahřátí v horkém popelu schopnost přitahovat drobná tělíska a nazýval se též „ceylonským magnetem“. Ve svém traktátu „Tentamen Theoriae Electrificationis et Magnetismi“ srovnává chování magnetik a dielektrik, magnetizaci látek a elektrostatickou indukci a pokouší se o kvantitativní popis elektrických a magnetických sil. Jako důsledný žák Newtonův přiblížil se Aepinus těsně k poznání zákona sil působících mezi bodovými náboji.

Je příznačné, že v tomto období, kdy ještě nebylo možné budovat kvantitativní matematickou teorii elektrických jevů, protože nebyl znám zákon interakce, nechyběly hluboké myšlenky o obecných souvislostech zkoumaných jevů. Tak *Michail Vasiljevič Lomonosov* (1711–1765) a *Leonard Euler* (1707–1783) zdůrazňovali souvislost elektřiny, magnetismu, světla a gravitace jako projevů pohybu hmoty (éteru, fluida). Lomonosov například ve svých poznámkách k práci „Teorieja električestva razrabotannaja matěmatičeskim sposobom“ (1756) navrhuje pokus s lomem světla v zelektrizovaném prostředí.

Do tohoto období spadají i objev polarizace dielektrik, který učinil *Johann Carl Wilcke* (1732–1796), a objev diamagnetismu bismutu, který poprvé pozoroval *Anton Brugmans* (1732–1789). Tyto objevy nemohly být ve své době ani pochopeny, ani doceněny.

Myšlenka o tom, že bodové (resp. kulové) elektrické náboje na sebe působí silami úměrnými převráceným čtvercům vzdálenosti, podobně jako tělesa působící na sebe gravitací, visela ovšem ve vzduchu. Neměla-li však zůstat pouhou spekulací, bylo třeba dokázat ji experimentálně. Nepřímý experimentální důkaz podali *Joseph Priestley* (1733–1804) a jeden z nejzručnějších experimentátorů *Henry Cavendish* (1731–1810) tím, že dokázali, že se elektrický náboj zdržuje na povrchu vodičů. Priestley byl inspirován ke svým experimentům radou Franklinovou a publikoval výsledky v roce 1767. Cavendish provedl kvantitativní experiment s vysokou přesností a odhadem chyb a také odtud vyvodil správný závěr o silovém působení elektrických nábojů. Tyto své práce však nepublikoval a upozornil na ně teprve J. C. Maxwell v roce 1879.

Přímé experimentální měření sil (přitažlivých i odpudivých) působících mezi náboji provedl pomocí torzních vah až

1750–1760  
M. V. Lomonosov

1707–1783  
L. Euler

1758  
J. Wilcke  
1778  
A. Brugmans

1767  
J. Priestley  
1772  
H. Cavendish

*Charles August Coulomb* (1736–1806) a formuloval zákon nazvaný jeho jménem. Nezávisle na Cavendishovi změřil též rozložení nábojů na povrchu vodičů a sílu působící na náboj v blízkosti povrchu nabitého vodiče. V roce 1788 změřil Coulomb i sílu působící mezi dvěma póly dlouhého tyčového magnetu a formuloval analogický silový zákon pro magnetická množství.

S Coulombem vstoupila nauka o elektřině a magnetismu do nové etapy založené na kvantitativních měřeních. Nebylo však zcela ujasněno, co se má vlastně měřit, jaký je charakter elektrických veličin. V tomto smyslu měly proto velký význam práce *Alessandra Volty* (1745–1827), který zavedl pojem elektrického napětí a kapacity kondenzátoru. Těmito dvěma veličinami je ovšem nepřímě určeno i „množství elektřiny“, velikost elektrického náboje. Coulombův zákon dal možnost matematické teorie potenciálních polí a vedl později k formulaci Gaussova zákona. *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855) přitom upřesnil i pojem velikosti elektrického náboje a rozpracoval systém elektrických a magnetických jednotek.

Vcelku je možné říci, že v období od prvního novodobého vědeckého pojednání o elektřině a magnetismu, které představovala práce Gilbertova z roku 1600, do objevu Coulombových zákonů elektrostatiky (1785) a magnetismu (1788) bylo dovršeno poznání zákonitostí elektrostatických jevů a tyto jevy našly pak zhuštěný kvantitativní výraz v Coulombově zákonu analogickém k Newtonovu zákonu gravitačnímu. Souvislost mezi elektrickými a magnetickými jevy zůstala tušena, ale nevyjasněna.

### Od Coulomba k Ampèrovi

V roce následujícím po objevení Coulombova zákona pozoroval profesor medicíny na univerzitě v Bologni *Luigi Galvani* (1737–1798) bioelektrické jevy při svých slavných pokusech se žábami. Tělní tekutina žabího těla mezi měděnou a stříbrnou elektrodou působila jako elektrolyt v galvanickém článku a docházelo ke stahům svalových vláken. Galvani jako lékař tento jev z fyzikálního hlediska dále nezkoumal, ale jeho význam plně pochopil A. Volta. Uvědomil si, že elektromotorické napětí vzniká v důsledku spojení různých

1785  
Ch. Coulomb

1800  
A. Volta

1839  
C. F. Gauss

1786  
L. Galvani

druhů vodičů, kovu a elektrolytu, a objevil kontaktní rozdíl potenciálů. V roce 1800 zkonstruoval svůj věhlasný „Voltův sloup“, který představoval baterii galvanických článků s měděnými (stříbrnými) a olověnými elektrodami oddělenými kartonem nasyceným slanou vodou.

Objev galvanických článků jako prvních víceméně stálých zdrojů elektromotorického napětí umožnilo systematické studium vlastností elektrického proudu (tehdy nazývaného galvanismem) a otevřelo novou etapu ve vývoji poznání elektrických jevů. Přesto již v 18. století, kdy jediným zdrojem elektřiny byly elektrostatické generátory a bylo možné zkoumat jen krátkodobé výboje těchto generátorů (takzvaný „elektrický konflikt“), byla řada vlastností elektrického proudu již známa, a to včetně jeho chemických a magnetických účinků. Sám pojem elektrického proudu však ještě zaveden nebyl.

Voltův objev inspiroval i další badatele jednak ke zdokonalování galvanických článků, jednak ke studiu elektrochemických jevů. *Johann Wilhelm Ritter* (1776–1810) zjistil galvanickou polarizaci, na níž je založen princip akumulátoru. *Humphrey Davy* (1778–1829) elektrolyticky izoloval alkalické kovy. První galvanický článek, v němž byla odstraněna polarizace elektrod, byl zkonstruován *Johnem Fredericem Daniellem* (1790–1845). Na zdokonalování článků pracovali dále *Robert Bunsen* (1811–1899), *Georges Leclanché* (1839–1882), *Josiah Latimer Clark* (1822–1898) a další. Westonův článek (*Edward Weston* 1850–1936) je dokonce vhodný jako etalon elektromotorického napětí. Zákony elektrolýzy kvantitativně formuloval *Michael Faraday* (1791–1867), elektrolytickou disociaci a další elektrochemické jevy studovali později *Svante Arrhenius* (1854–1927), *Walter Nernst* (1864–1941) a další.

Také tepelné a světelné účinky elektrického proudu byly známy již počátkem 19. století. Ohromujícím efektem působil například elektrický oblouk získaný ruským fyzikem *Vasilijem Vladimirovičem Petrovem* (1761–1834) již roku 1802 a později znovuobjevený Davym. V téže době se též zrodil první elektrický telegraf (*Samuel Thomas von Sömmering* (1755–1830)).

Rozhodující význam však mělo poznání souvislosti mezi elektrickým proudem a magnetickými jevy, o něž se zasloužil dánský fyzik *Hans Christian Oersted* (1777–1851). Oer-

1803  
J. W. Ritter  
  
1807  
H. Davy  
  
1836  
J. Daniell  
1841  
R. Bunsen  
1867  
G. Leclanché  
1878  
J. Clark  
1893  
E. Weston  
1834  
M. Faraday  
1882  
S. Arrhenius  
1901  
W. Nerst  
  
1802  
V. Petrov  
1810  
H. Davy  
1809  
S. T. Sömmering  
  
1820  
H. Oersted

sted se již od mládí zamýšlel nad spojitostí mezi elektřinou, magnetismem, teplem a světlem a zkoumal zahřívání vodiče při průchodu elektrického proudu. Při těchto pokusech (díky náhodě, která však pomáhá pouze připraveným) zjistil vliv proudu na magnetickou střílku. Své pokusy popsal v práci „*Experimenta circa efficaciam conflictus electrici in acum magneticam*“, která vyšla v Kodani roku 1820.

Jestliže ještě na počátku 19. století, kdy byla elektřina (rozuměj statická), galvanismus (rozuměj elektrický proud) a magnetismus považovány za víceméně nezávislé jevy, podnítil Oerstedův pokus jejich syntézu a otevřel tak cestu zkoumání nového okruhu fyzikálních jevů, elektromagnetismu a elektrodynamiky.

Oerstedův objev umožnil jednak měřit elektrický proud, jednak studovat jeho magnetické a dynamické působení. Vyvolal lavinu nových objevů, k nimž došlo hned v následujících dvou letech. Francouzští fyzikové *Francois Arago* (1786–1853) a *Joseph Louis GayLussac* (1778–1850) zjistili magnetizující účinek proudové smyčky, *Jean Baptiste Biot* (1774–1862) a *Félix Savart* (1791–1841) našli zákon magnetického působení proudového elementu později zobecněný *Pierrem Simonem Laplaccem* (1749–1827). *André Marie Ampère* (1775–1836) stanovil směr magnetického pole v okolí vodiče („pravidlo plavce“, později známé jako „pravidlo pravé ruky“) a formuloval svůj základní zákon elektrodynamiky o silovém působení elektrických proudů. Ampère zasáhl do více vědních oblastí a v roce 1830 matematicky zformuloval teoretické základy elektrodynamiky ve své práci „*Théorie des phénomènes électrodynamiques*“. V témž období zjistil Faraday otáčivý účinek permanentního magnetu na proudovou smyčku a naopak, tedy základní princip elektromotoru a dynamy.

#### Od Ampèra k Maxwellovi

Na základě Oerstedova objevu zkonstruoval *Johann Schweigger* (1779–1857) a *Johann Christian Poggendorf* (1796–1877) první ampérmetr (tzv. „elektromagnetický multiplikátor“). S jeho pomocí se pustil *Georg Simon Ohm* (1787–1854) do studia závislosti proudu na napětí a odporu vodiče. Tento dnes snad nejpůvodnější zákon elektrického

1820–1822  
F. Arago  
J. L. GayLussac  
J. B. Biot  
F. Savart  
P. S. Laplace  
A. M. Ampère  
M. Faraday

1820  
J. Schweigger  
J. Ch. Poggendorf

1826  
G. S. Ohm



1821  
T. J. Seebeck

proudu se rodil kupodivu velmi obtížně. Pojem elektrického proudu a jeho vztah k elektrickému náboji nebyly ještě zcela ujasněny, používané galvanické články měly větší vnitřní odpor než zkoumané vodiče, nadto časově nestálý, nebyla též známa závislost odporu na geometrii vodiče. Teprve objev termoelektrického jevu *Thomasem Johannem Seebeckem* (1770–1831) umožnil Ohmovi zkonstruovat termočlánek (Cu–Bi) a získat tak zdroj konstantního napětí. Po překonání těchto překážek dospěl Ohm v roce 1826 ke správnému znění zákona, avšak trvalo ještě několik desetiletí, než byl obecně uznán. Zákony proudu ve větvích obvodů formuloval v roce 1847 *Gustav Robert Kirchhoff* (1824–1887).

1847  
G. R. Kirchhoff

Postupně byly seznány vlastnosti a účinky elektrického proudu. Tak vedle již zmíněných elektrochemických jevů byly zkoumány jevy termoelektrické. Na základě Seebeckova jevu zkonstruovali nezávisle na sobě Oersted a *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1786–1830) první termobaterii. Vznik tepla dodatečného k teplu Jouleovu při průchodu proudu kontaktem z různých vodičů, tedy obrácený Seebeckův jev, pozoroval *Jean Charles Peltier* (1785–1845) v roce 1834. Později *William Thomson* (lord Kelvin) (1824–1907) podal teoretické vysvětlení termoelektrických jevů a zjistil, že i podél nestejně zahřátého homogenního vodiče vzniká (nebo se pohleuje) určité množství dodatečného tepla.

1823  
H. Ch. Oersted  
J. B. J. Fourier

1851  
J. Ch. Peltier  
1834  
W. Thomson

Ve čtyřicátých letech 19. století byla značná pozornost věnována otázkám energie a jejích přeměn ve stacionárních (a kvazistacionárních) soustavách. *James Prescott Joule* (1818–1889) se zabýval otázkou energetických přeměn elektrického proudu a vzniku tepla při průchodu vodičem. Jeho práce spolu s výsledky *Julia Roberta Mayera* (1818–1878) vedly k formulaci zákona zachování energie *Hermannem Helmholtzem* (1821–1894) ve známé práci „Über die Erhaltung der Kraft“.

1843  
J. P. Joule  
1842  
J. R. Mayer

1847  
H. Helmholtz

Souvislost látky a elektřiny, úlohu atomárních částic jako nositelů elektrických nábojů prokázal již Faraday při studiu zákonů elektrolýzy. To přirozeně přivádí na myšlenku zákona zachování elektrického náboje, který byl také Faradajem experimentálně dokázán v roce 1843 elektrometrickým měřením náboje nabitě koule v elektricky izolovaném prostoru.

1843  
M. Faraday

Michael Faraday vystupuje v dějinách fyziky jako jeden z nejnadanějších experimentátorů všech dob. Jeho práce

a pronikavá fyzikální intuice připravily půdu J. C. Maxwellovi pro formulaci základních rovnic elektromagnetismu, podobně jako práce Galileiho a Keplerovy připravily půdu Newtonovi. Faraday se původně zabýval chemií a Oerstedův objev (podobně jako u Ampèra) definitivně obrátil jeho pozornost k elektrickým a magnetickým jevům.

Faraday pocházel z chudých poměrů, vyučil se knihařem a pracoval jako laborant u Davyho, který měl k němu přezíravý vztah. V podstatě samouk, projevil Faraday neobyčejně hluboké chápání fyzikálních procesů. Zůstal přitom experimentátorem a nepoužíval matematický aparát. Při jeho zvolení členem Královské společnosti jediný Davy hlasoval proti; když se však Faraday stal členem 68 akademií, prohlásil Davy, že jeho největším „objevem“ byl Faraday.

Již na počátku si Faraday vytkl za cíl „převést magnetismus na elektřinu“. Vedle již zmíněných zákonů elektrolýzy a zákona zachování elektrického náboje studoval Faraday vliv dielektrika na kapacitu kondenzátoru a elektrickou interakci a zavedl pojem permitivity. Navázal na práce *Alexandra Edmonda Becquerela* (1820–1891), který v roce 1851 objevil fotogalvanický jev a zabýval se studiem diamagnetismu.<sup>89</sup> Faraday rozdělil látky na diamagnetické a paramagnetické a zavedl pojem permeability. V roce 1845 objevil stáčení roviny polarizace světla magnetickým polem (Faradayův magnetooptický jev). Faraday byl zastáncem atomismu, uvědomoval si jednotnou podstatu všech elektrických jevů a souvislost mezi elektřinou, magnetismem a optikou.

Nejvýznamnějším Faradayovým objevem je objev elektromagnetické indukce z roku 1831. Pravidla o směru indukovaného pole, která Faraday stanovil pro různé konkrétní případy, zobecnil *Heinrich Friedrich Lenz* (1804–1865). Nezávisle na Faradayovi (dokonce dříve, i když svůj objev publikoval později) dospěl k principu elektromagnetické indukce i americký fyzik a vynálezce *Joseph Henry* (1791–1878). *Wilhelm Weber* (1804–1891) pak zobecnil Ampèrův zákon tak, aby zahrnoval i indukční jevy, a spolu s *Rudolfem Hermannem Arndtem Kohlrauschem* (1809–

1851  
A. E. Becquerel

1845  
M. Faraday

1831  
M. Faraday  
1833  
H. F. Lenz

1832  
J. Henry  
1852  
W. Weber  
R. Kohlrausch

<sup>89</sup> A. E. Becquerel byl synem Antoina Césara Becquerela (1788–1878), který je znám množstvím prací z oblasti elektřiny a magnetismu – zkoumal elektrizaci krystalů tlakem, pyroelektrické vlastnosti turmalínu, diamagnetismus, zkonstruoval řadu elektrických přístrojů. A. E. Becquerel je otcem Antoina Henriho Becquerela (1852–1908), objevitele radioaktivity.

1858) zjistil, že poměr jednotek proudu v elektrostatické a elektromagnetické soustavě je dán konstantou rovnou rychlosti světla ve vakuu.

1845  
F. E. Neuman  
1853  
W. Thomson

Objev elektromagnetické indukce přivedl Faradaye ke koncepci elektromagnetického pole charakterizovaného siločarami a na rozdíl od newtonské představy k závěru o konečné rychlosti šíření interakcí. Faraday přitom předpověděl i možnost existence elektromagnetických vln. První matematickou teorií elektromagnetické indukce vypracoval jeden ze zakladatelů teoretické fyziky v Německu *Franz Ernst Neumann* (1798–1895), který též zavedl pojem vektorového potenciálu. V této souvislosti je třeba připomenout i práce W. Thomsona v oblasti elektromagnetismu, zejména stanovení periody oscilací v kmitavém obvodu. W. Thomson studoval též vodivost látek v magnetickém poli a účastnil se kladení prvního transatlantického telegrafního kabelu. K pozoruhodným matematickým teoriím elektromagnetismu patří i rotační model nestlačitelného čturu vybudovaný *Jamesem MacCullaghem* (1809–1847).

1839  
J. MacCullagh

1879  
J. C. Maxwell

*James Clerk Maxwell* (1831–1879) teoreticky a matematicky zobecnil nahromaděné experimentální poznatky o elektřině a magnetismu, jejichž dovršení představovaly práce Faradayovy, a zformuloval soustavu rovnic elektromagnetického pole. Svou teorii prezentoval Maxwell postupně ve třech zprávách Královské společnosti („O Faradayových siločarách“ 1855, publikováno 1856, „O fyzikálních siločarách“ 1862 a „Dynamická teorie pole“ 1865) a shrnul v proslulém „Traktátu o elektřině a magnetismu“ („Treatise on Electricity and Magnetism“) roku 1873. Použil přitom nový matematický formalismus kvaternionů objevený tehdy W. R. Hamiltonem. Teprve později dal *Oliver Heaviside* (1850–1925) Maxwellově teorii podobu dnešního formalismu vektorové analýzy.

1900  
O. Heaviside

Maxwellova teorie představuje jeden z největších triumfů lidského ducha, velkolepou a matematicky elegantní syntézu experimentálních poznatků a stala se jedním z pilířů teoretické fyziky i základem rozvoje elektrotechniky. Nejen že se řadí vedle teorie Newtonovy, ale předčí ji svou obecností a znamená nový, hlubší pohled na fyzikální realitu. Na rozdíl od Newtonovy teorie je relativisticky invariantní (Maxwellovy rovnice se transformují nikoli podle Galileiho, ale podle Lorentzovy transformace) a předpokládá takzvané „působení nablízko“ zprostředkované elektromagnetickým polem.

Z Maxwellových rovnic vyplynula řada nových fyzikálních jevů, které tenkrát nebyly ještě experimentálně zjištěny. Byly to například existence elektromagnetických vln, posuvného proudu, toku energie a hybnosti elektromagnetického pole a tlaku světla, skin-efektu a dalších. Rozpor s vžitými představami newtonské fyziky, nedůvěra k existenci zmíněných jevů a v neposlední řadě ne příliš srozumitelný způsob Maxwellova podání způsobily, že tato teorie zůstávala celá desetiletí nepochopena a zpochybňována. Sám Maxwell se jejího obecného uznání nedožil.

Maxwell poukázal na elektromagnetický charakter světla, odvodil vztah mezi permitivitou a indexem lomu, a završil tak sjednocení jevů elektrických, magnetických a optických. Jeho teorie přivedla k novému chápání vztahu mezi látkou a elektřinou. Jestliže elektrické, magnetické a optické jevy byly dosud vysvětlovány v duchu Newtonovy fyziky pomocí mechanických modelů pohybujících se částic nebo různých fluid, Maxwellova teorie popisovala vlastnosti elektromagnetického pole jako nové fyzikální substance. Současně ovšem reprezentovala i vzájemný vztah a souvislost mezi látkou (přetržitost) a polem (spojitost). Sám Maxwell byl na rozpácích nad těmito důsledky své teorie, přidržoval se spíše mechanického výkladu siločar, i když tušil, že ho jeho teorie vlastně nepotřebuje. Na druhé straně bylo paradoxní, že teprve teorie elektromagnetického pole poukázala na existenci takových mechanických účinků a vlastností, jakými jsou hybnost a hustota toku energie pole, tlak světla. Není bez zajímavosti, že Maxwell předpověděl i takové jevy, které se podařilo zjistit až v našem století pokusy Tolmanovými–Stewartovými a Einsteinovými–de Haasovými.

1888  
H. Hertz

Další rozvinutí a experimentální potvrzení Maxwellovy teorie přinesly především práce *Heinricha Hertze* (1857–1894), který experimentálně zjistil existenci neviditelných elektromagnetických vln a určil jejich rychlost jako rovnou rychlosti světla. Jak známo, tento objev přivedl v devadesátých letech minulého století k vynálezu radiotelegrafie A. S. Popovem, N. Teslou, G. M. Marconim a E. Rutherfordem (Rutherford používal magnetický detektor elektromagnetických vln).

1900  
H. A. Lorentz  
H. Poincaré  
1899  
P. N. Lebeděv

Tyto nové objevy nastolily otázky interpretace zákona zachování energie v nestacionárním elektromagnetickém poli, o jejichž řešení se zasloužil v roce 1874 *Nikolaj Alexe-*

1874  
N. A. Umov  
1884  
J. H. Poynting  
O. Heaviside  
1900  
H. A. Lorentz  
H. Poincaré

1899  
P. N. Lebeděv

1898  
A. M. Liénard  
1900  
E. Wiechert

jevič Umov (1846–1915) a o deset let později nezávisle John Henry Poynting (1852–1914) a O. Heaviside. Poynting zavedl pojem vektoru hustoty toku energie, čímž vznikla dnešní podoba věty o energii elektromagnetického pole. Henrik Antoon Lorentz (1853–1928) a Henri Poincaré (1854–1912) vyslovili závěr o existenci hybnosti elektromagnetického pole. Tyto předpovědi našly přesvědčivé experimentální potvrzení v brilantním pokusu Petra Nikolajeviče Lebeděva (1866–1912), jemuž se v roce 1899 podařilo změřit tlak světla.

K matematickému propracování klasické elektrodynamiky přispěli ještě na přelomu století i Alfred Marie Liénard a Emil Wiechert (1861–1928) zavedením retardovaného potenciálu, který matematicky vyjadřuje konečnost rychlosti šíření elektromagnetického působení.

### Od Maxwella k Einsteinovi

V poslední třetině devatenáctého století došlo k nahromadění celé řady nových experimentálních poznatků, které jednak upřesnily znalosti o elektromagnetických polích pohybujících se nabitých částic a těles a o elektrických a magnetických vlastnostech látek, jednak přivedly k mimořádně významnému objevu první elementární částice – elektronu.

Velmi zevrubně byla studována otázka ekvivalence magnetických účinků různých mechanismů proudu. Poznamenává se, že i konvekční proudy mají tytéž magnetické účinky jako indukční proudy ve vodičích, náleží americkému fyzikovi Henrymu Rowlandovi (1848–1901). Podobně Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923) prokázal, že elektricky polarizované dielektrikum jeví při pohybu magnetické účinky. Magnetické pole konvekčních proudů bylo dále zkoumáno v experimentech Alexandra Alexandroviče Eichenwalda (1863–1944), magnetické pole volně se pohybujícího svazku elektronů (katodových paprsků) měřil Abram Fjodorovič Ioffe (1880–1960). Zejména Eichenwaldovy pokusy měly velký význam pro určení polí pohybujících se nabitých těles a předcházely těsně vzniku speciální teorie relativity.

Roku 1875 objevil John Kerr (1824–1907) elektrooptický jev, vznik dvojtlomu světla v opticky izotropním prostředí nacházejícím se v elektrickém poli. Existenci jevu předpo-

1876  
H. Rowland  
1888  
W. W. Röntgen

1901  
A. A. Eichenwald  
1911  
A. F. Ioffe

1875  
J. Kerr

kládal již Faraday, ale nepodařilo se mu ji prokázat. V roce 1879 rozpracoval Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822–1888) teorii polarizace dielektrik a dospěl ke známému Clausiovu–Mossottiovu vzorci. Ottaviano Fabricio Mossotti (1791–1863) jej v první verzi zformuloval již v roce 1846.

Umístíme-li vodič do magnetického pole, vznikne na bočních stěnách vodiče potenciální rozdíl. Tento jev zjistil Edwin Herbert Hall (1855–1938) v roce 1880. V témž roce objevil Pierre Curie (1859–1906) se svým bratrem přímý i obrácený piezoelektrický jev u krystalu křemene a využil jej k měření malých nábojů a proudů.<sup>90</sup>

Postupně byly poznány různé jevy magnetomechanické. Tak již v roce 1840 zjistil J. P. Joule saturaci u magnetizační křivky feromagnetik a o dva roky později změny objemu u pružných látek při jejich zmagnetování (magnetostrikce). Gustav Heinrich Wiedemann (1826–1899) pozoroval v roce 1858 zkrucování válcové tyče protékané proudem vlivem vnějšího magnetického pole (tzv. Wiedemannův jev), roku 1865 zjistil Emilio Villari (1836–1904) změny magnetizační křivky feromagnetik při mechanickém namáhání (tzv. Villariův neboli magnetoelastický jev). Jevo hystereze byl pozorován již v roce 1872 Alexandrem Grigorjevičem Stoletovem (1839–1896) a podrobně prozkoumán Emilem Warburgem (1846–1931) a Jamesem Alfredem Ewingem (1855–1935). Zejména významné byly pak práce P. Curieovy v devadesátých letech, které vedly k poznání teplotních závislostí magnetických vlastností látek a k objevu tzv. Curieovy teploty, při níž mizí feromagnetismus.

Pro další vývoj fyziky měl velký význam výzkum takzvaných katodových paprsků pozorovaných Juliem Plückerem (1801–1868) a kanálových paprsků, které popsal Eugen Goldstein (1850–1931). Postupně bylo zjištěno, že katodové paprsky představují svazek záporně nabitých částic (elektronů), zatímco kanálové paprsky jsou tvořeny kladně nabitými ionty. O prostudování vlastností těchto korpuskulárních paprsků se zasloužili zejména Johann Wilhelm Hittorf (1824–1914) (odchylování katodových paprsků magnetem), Cromwell Fleetwood Varley (1828–1883) (negativní náboj katodových paprsků), William Crookes (1832–1919) (přenos energie a hybnosti katodovými paprsky), Philip Lenard

1879  
R. J. E. Clausius  
1846  
O. F. Mossotti

1880  
E. H. Hall  
P. Curie

1840–1842  
J. P. Joule

1858  
G. H. Wiedemann

1865  
E. Villari  
1872

A. G. Stoletov  
1880  
E. Warburg  
1882  
J. A. Ewing  
1895  
P. Curie

1859  
J. Plücker  
1886  
E. Goldstein

1869  
J. W. Hittorf  
1871  
C. F. Varley  
1879  
W. Crookes

1893  
P. Lenard

<sup>90</sup> Analogický piezomagnetický jev je mnohem vzácnější, může existovat jen u antiiferomagnetických látek a byl zjištěn až v roce 1982.

1895  
J. B. Perrin

1897  
J. J. Thomson

1891  
J. Stoney

1907  
F. A. Ehrenhaft  
1911  
R. A. Millikan  
1912  
A. F. Ioffe

1900  
H. A. Lorentz  
J. Larmor

1898  
C. V. E. Riecke

1900  
P. C. Drude  
J. J. Thomson

1853  
G. H. Wiedemann  
R. Franz

1905  
P. Langevin

(1862–1947) (pronikavost katodových paprsků pevnými látkami) a *Jean Baptiste Perrin* (1870–1942) (katodové paprsky představují svazek záporně nabitých částic).

Objev Röntgenova záření v roce 1895 usnadnil studium ionizovaných plynů, jímž se usilovně zabýval *Joseph John Thomson* (1856–1940). Při těchto pokusech Thomson zjistil, že při ionizaci plynů vznikají vedle iontů lehké nabitě částice, jejichž vlastnosti nezávisí na druhu plynu a které jsou totožné s částicemi katodových paprsků. Určil jejich měrný náboj a stal se tak objevitelem elektronu (Nobelova cena v r. 1906). Téhož roku jako J. J. Thomson referoval o vlastnostech elektronu nezávisle též E. Wiechert. Sám název částice „elektron“ pochází od *Johnstona Stoneye* (1826–1911) z roku 1891. Stoney vyslovil předpoklad o existenci elektronu a odhadl velikost elementárního náboje již v sedmdesátých letech 19. století. Přímé experimentální měření elementárního náboje na základě sledování pohybu olejových kapiček v elektrickém poli navrhl *Felix Albert Ehrenhaft* (1879–1952) a úspěšně jej provedl *Robert Andrews Millikan* (1868–1953) v roce 1911. Náboj elektronů uvolňovaných při fotoefektu určil v roce 1912 A. F. Ioffe.

Objev elektronu umožnil vytvořit takzvanou elektronovou teorii látky jako syntézu teorie Maxwellovy a poznatků o vlastnostech nabitých částic. Tvůrcem této teorie byl především H. A. Lorentz a v poněkud jiné podobě ji formuloval *Joseph Larmor* (1857–1942). Pomocí elektronové teorie se podařilo vysvětlit, i když nikoliv beze zbytku, některé jevy v látkovém prostředí, jako například Faradayův magnetooptický jev, Zeemanův jev (rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli), elektronovou vodivost kovů, kterou studovali *Carl Victor Eduard Riecke* (1845–1915) v roce 1898 a po něm *Paul Carl Ludwig Drude* (1863–1906) a J. J. Thomson, a konečně i základní jevy magnetické. Elektronová teorie kovů zdůvodnila i jev Wiedemannův–Franzův, zjištěný v roce 1853 G. H. Wiedemannem a *Rudolphem Franzem* (1827–1902), o vzájemné úměrnosti tepelné a elektrické vodivosti kovů.

Pokud jde o jevy magnetické, aplikoval na ně novou teorii vynikající fyzik *Paul Langevin* (1872–1946) v roce 1905. Langevin si však přitom uvědomoval, že při výkladu elektromagnetických jevů probíhajících v látkovém prostředí nelze vystačit s představami klasické fyziky a relativní

úspěch jeho teorie magnetismu byl podmíněn tím, že použil i některých dodatečných předpokladů (týkajících se například mikroskopických proudů nevykazujících elektrický odpor), které později hlouběji zdůvodnila kvantová teorie. Dnes víme, že elektrické a magnetické vlastnosti pevných látek nelze správně vysvětlit bez kvantové teorie, která se stala jedním z hlavních pilířů fyziky 20. století.

Současně s výzkumem vlastností nabitých částic a látkového prostředí se dále rozvíjela i teorie elektromagnetického pole. Významně k tomu přispěl O. Heaviside, který zavedl dnešní operátorová označení do Maxwellova formalismu, poukázal na symetrii Maxwellových rovnic a studoval elektromagnetická pole pohybujících se nábojů. V roce 1886 podal nezávisle na *Johnovi Williamu Rayleighovi* (1842–1919) teorii skin efektu objeveného tři roky před tím. Od r. 1888 publikuje Heaviside řadu prací, v nichž podává obecná řešení Maxwellových rovnic s konvekčními proudy a zabývá se otázkou syntézy mikroskopického a makroskopického přístupu k elektrodynamice. Lorentz v té době již zformuloval své mikroskopické rovnice, které pak dále rozvíjel v rámci elektronové teorie.

Jak víme, Maxwellova teorie je relativisticky invariantní, zachovává svůj tvar při Lorentzových transformacích a dříve či později musela přivést ke vzniku speciální teorie relativity. Koncepce elektromagnetického pole jako nové fyzikální reality však vyžadovala vypořádat se s představami o éteru jako prostředí s mechanickými vlastnostmi, které je nositelem optických a elektromagnetických jevů.

Jestliže v průběhu devatenáctého století trvala snaha vysvětlovat všechny jevy na základě mechanických představ, objevily se ke konci století pod vlivem Maxwellovy teorie i opačné snahy převést všechny jevy na elektromagnetické. Tak dospěl *Max Abraham* (1875–1922) k výrazu pro elektromagnetickou hmotnost elektronu závislou na rychlosti. I když tyto práce přinesly cenné myšlenkové podněty, ukázalo se, že úsilí převést mechaniku na elektromagnetické děje je stejně neudržitelné jako dříve snahy opačné a Abrahamova teorie byla pak vyvrácena teorií relativity.

Nemůžeme se podrobně zabývat experimenty a myšlenkovými proudy, které nakonec vyústily ve vznik speciální teorie relativity formulované *Albertem Einsteinem* (1879–1955) v roce 1905 ve slavné práci „K elektrodynamice

1886  
O. Heaviside  
J. W. Rayleigh

1902  
M. Abraham

1905  
A. Einstein

1892  
H. A. Lorentz  
G. F. Fitzgerald

1902  
W. Kaufmann  
1904–5  
J. H. Poincaré

pohybujících se těles“ („Zur Elektrodynamik bewegten Körper“). Uvedeme jen, že všechny základní myšlenky teorie i experimentální fakta byla nahromaděna předchozím vývojem a řada vědců se přiblížila k formulaci na dosah ruky. Tak H. A. Lorentz současně s *Georgem Francisem Fitzgeraldem* (1851–1901) formuloval v roce 1892 hypotézu o zkracování délek pohybujících se těles, v roce 1895 zavedl Lorentz takzvaný „místní čas“ závisející na vztažné soustavě a v roce 1904 zformuloval své známé transformace (na které přišel mimochodem nezávisle již dříve i J. Larmor). *Walter Kaufmann* (1871–1947) změřil v roce 1902 relativistickou změnu hmotnosti elektronu v závislosti na rychlosti. *Jules Henry Poincaré* (1854–1912) zformuloval obecný princip relativity jako obecný přírodní zákon projevující se v nemožnosti zjistit rovnoměrný přímočarý pohyb soustavy. Všichni tyto vědci se přitom marně snažili vysvětlit negativní výsledky experimentů, které měly odhalit existenci pohybu vzhledem ke světovému éteru (pokus Michelsonův–Morleyův 1887, Troutonův–Nobleův 1903 aj.). Teprve A. Einstein však projev il odvalu zcela nového pohledu na přírodu, odstranil éter vůbec, nově pojal vztah mezi prostorem a časem, úlohu inerciální vztažné soustavy, jak se říká postavil Kolombovo vejce na špičku. Teprve speciální teorie relativity umožnila proniknout celou hloubkou Maxwellovy teorie.

### Od Einsteina k dnešku

Správně bychom měli napsat „od Einsteina a Plancka k dnešku“, neboť jak teorie relativity, tak především teorie kvantová ovlivňovaly rozhodující měrou vývoj nových poznatků o elektromagnetických jevech v našem století. Maxwellova teorie prošla úspěšně myšlenkovým převratem, který znamenal nástup moderní relativistické a kvantové fyziky. Fyzika elementárních částic si na jedné straně vynutila vzít v úvahu pohyby částic relativistickými rychlostmi, kvantová mechanika vlnový charakter jejich pohybu. Syntéza obou teorií sice vyvolala určité problémy, ale nakonec vyústila v kvantovou elektrodynamiku, která dnes patří k nejlépe propracovaným a experimentálně ověřeným teoriím. Jejich vznik na konci 40. let 20. století je spojen se jmény *Juliana*

*Schwingera* (nar. 1918), *Richarda Phillipse Feynmana* (1918–1988), *Šimičiro Tomonagy* (1906–1979) a *Freemana Johna Dysona* (nar. 1923).

Relativistickou rovnici popisující chování elektronu sestavil v roce 1927 *Paul Adrien Maurice Dirac* (1902–1984). Diracova teorie přispěla k hlubšímu poznání vlastností elektronu a mimo jiné z ní vyplynula i existence spinu, vlastního mechanického momentu částice. To mělo podstatný význam pro kvantovou teorii magnetismu.

Vlastnosti feromagnetických látek se pokusil objasnit *Pierre Ernest Weiss* (1865–1940) vycházející z Langevinovy teorie, do níž zavedl fenomenologické „molekulární pole“. Pro pochopení fyzikální podstaty magnetického uspořádání však byly podstatné experimenty umožňující specifikovat povahu částic odpovědných za magnetické vlastnosti. Tak v roce 1915 provedli A. Einstein a *Wander Johannes de Haas* (1878–1960) známý pokus s přemagnetováním tělesa, které tím získá moment hybnosti, a v témže roce provedl obrácený pokus *Samuel Jackson Barnett* (1873–1956). Zmíněné pokusy (které umožnily určit gyromagnetický poměr částic tvořících magnetický moment látek) ukázaly, že pro feromagnetismus klasických feromagnetik je podstatný spin elektronu. Podstatu feromagnetismu objasnili nezávisle *Werner Heisenberg* (1901–1976), *Jakov Iljič Frenkel* (1894–1952) a *Felix Bloch* (1905–1983) na základě tzv. výměnné interakce mezi spiny elektronů, která je elektrické povahy a má čistě kvantový charakter.

Současně bylo mnoho úsilí věnováno objasnění procesů magnetování feromagnetik a chování látek v časově proměnných polích. V tomto směru je třeba připomenout objev doménové struktury a objasnění jejich změn v magnetickém poli, formulace fenomenologické pohybové rovnice magnetizace (kterou v roce 1935 sestavili *Lev Davidovič Landau* (1905–1968) a *Jevgenij Michajlovič Lifšic* (1915–1985)) a objev jevu magnetické rezonance (k němuž pro elektrony v paramagnetiku došel *Jevgenij Konstantinovič Zavojskij* (1907–1976)).

Také další magnetické vlastnosti látek byly teoreticky objasněny. *Wolfgang Pauli* (1900–1958) vytvořil teorii paramagnetismu elektronového plynu v kovech, *Leon Brillouin* (1889–1969) v téže době podal kvantovou teorii paramagnetismu molekul, navazující na starší Langevinovu teorii. Dia-

40. léta  
J. Schwinger  
R. P. Feynmann  
Š. Tomonaga  
F. J. Dyson

1927  
P. A. Dirac

1907  
P. E. Weiss

1915  
A. Einstein  
W. J. de Haas  
S. J. Barnett

1928  
W. Heisenberg  
J. I. Frenkel

1930  
F. Bloch

1935  
L. D. Landau  
E. M. Lifšic

1944  
J. K. Zavojskij

1927  
W. Pauli  
L. Brillouin

1933  
L. D. Landau

1948  
L. Néel

1912  
P. J. Debye

magnetismem volných elektronů se zabýval L. D. Landau, který také v roce 1933 zavedl pojem antiferomagnetismu jako zvláštního typu magnetického uspořádání. Francouzský fyzik *Louis Néel* (1904–2000) se rovněž zabýval antiferomagnetismem, zkoumal vlastnosti feritů a objasnil jejich podstatu. Vytvořil teorii obecnějšího typu magnetického uspořádání feromagnetismu, který je pro ferity charakteristický (Nobelova cena roku 1970).

Podobně byly zkoumány i vlastnosti dielektrik a jejich schopnost vytvářet silná vnitřní elektrická pole. Tak teplotní závislost elektrické susceptibility vysvětlil *Peter Joseph Debye* (1884–1966) vycházející z Langevinovy teorie. Má též zásluhu na vytvoření teorie vodivosti elektrolytů, založené na popisu elektrické interakce mezi ionty.

I když se zdálo, že dielektrické vlastnosti látek jsou již dostatečně prozkoumány, došlo ve dvacátých letech k objevu nové třídy těchto látek, feroelektrik, které představují elektrickou podobu feromagnetik. První látkou, u níž byl feroelektrický jev pozorován, byla tzv. larochellská nebo Seignettova sůl, pojmenovaná podle jejího objevitele, francouzského lékárníka *Pierra Seignetta* (1660–1719). Proto jsou feroelektrika někdy nazývána též seignettoelektriky. Některé anomálie v chování Seignettovy soli v elektrickém poli, jako jev hysterese, teplotní závislost polarizace a především neobvyklé piezoelektrické vlastnosti, byly pozorovány v letech 1918–1920 americkými fyziky (zejména *Josephem Valasekem*). Objasnění těchto anomálií a objev feroelektrického jevu pak náleží *Igoru Vasiljeviči Kurčatovovi* (1903–1960) a *Pavlu Pavloviči Kobekovi* (1897–1954). Objev feroelektrik stimuloval i teoretické práce L. D. Landaua týkající se fázových přechodů.

Důležitou nevyjasněnou otázkou zůstával mechanismus vodivosti kovů, tím spíše, že Hallův jev ukazoval na možnost nosičů náboje záporného i kladného znaménka. Aktuálnost tohoto problému ještě vzrostla, když se v roce 1911 *Heike Kamerlinghovi-Onnesovi* (1853–1926) v kryogenní laboratoři v Leidenu (v roce 1908 zde bylo poprvé zkvapalněno helium) podařilo objevit zásadně nový jev – supravodivost kovů při nízkých teplotách.

Pokusy provedené v r. 1916 *Richardem Chasem Tolmanem* (1881–1948) a *T. D. Stewartem* prokázaly, že proud v kovech je zprostředkovan elektronem. Obrácený elektrome-

1930  
I. V. Kurčatov  
P. P. Kobeko

1937  
L. D. Landau

1911  
H. Kamerlingh-Onnes

1916  
R. C. Tolman  
T. D. Stewart

chanický pokus provedl v roce 1931 S. J. Barnett, elektro-  
nový charakter vodivosti supravodičů demonstroval magne-  
tomechanickým pokusem v roce 1938 *Isaak Konstatinovič Kikoin* (nar. 1908), autor řady prací týkajících se Hallova jevu a magnetismu. Kvantově mechanická teorie vodivosti kovů byla pak vypracována řadou teoretických fyziků, především *Arnoldem Johannem Wilhelmem Sommerfeldem* (1868–1951), J. I. Frenkelem a dalšími. Záhadu různých znamének nábojů u Hallova jevu vyřešil nakonec *Rudolf Ernst Peierls* (1907–1995), který zformuloval představu o děrové vodivosti a zpracoval též obecnou teorii diamagnetismu kovů.

Stále však zůstávala neobjasněná záhada supravodivosti. Navíc byly v letech 1932–1933 experimentálně zjištěny další vlastnosti supravodičů, zejména jejich chování v magnetickém poli, které studovali W. J. de Haas, *Max Laue* (1879–1960), *Walter Fritz Meissner* (1882–1974) a *R. Ochsensfeld*. Poslední dva zjistili, že magnetické pole je z objemu supravodiče vytěšňováno (takzvaný Meissnerův–Ochsensfeldův jev). První fenomenologickou teorii supravodivosti vytvořili *Fritz London* (1900–1954) a *Heinz London* (1907–1970) v roce 1935. Hlubší fyzikální přístup založený na teorii fázových přechodů znamenala teorie supravodivosti L. D. Landaua a *Vitalije Lazareviče Ginzburga* (nar. 1916) z roku 1950. Avšak teprve teorie *Johna Bardeena* (1908–1991), *Leona Coopera* (nar. 1930) a *Johna Roberta Schrieffera* (nar. 1931) z roku 1957 znamenala skutečně mikroskopickou teorii supravodivosti. Je založena na představě o vázaných stavech elektronů (takzvaných Cooperových párech), které se řídí jinými statistickými zákony než jednotlivé elektrony.

Významné praktické použití našel takzvaný Josephsonův jev spočívající v průchodu supravodivého proudu tenkou vrstvou dielektrika oddělujícího dva supravodiče. Předpověď jej *Brian David Josephson* (nar. 1940) v roce 1962 a rok poté byl jev experimentálně zjištěn. Umožňuje konstruovat neobyčejně citlivé magnetometry (označované zkratkou SQUID) schopné měřit magnetickou indukci až  $10^{-18}$  T, proudy až  $10^{10}$  A a napětí až  $10^{-15}$  V. Josephsonův kontakt je založen na kvantovém tunelovém jevu. Využití tohoto jevu v polovodičích vedlo ke konstrukci tunelové diody *Leo Esakim* (nar. 1925) v roce 1957. Josephson i Esaki dostali

1931  
S. J. Barnett

1938  
I. K. Kikoin  
A. J. W. Sommerfeld  
J. I. Frenkel  
1929  
R. E. Peierls

1933  
W. F. Meissner  
R. Ochsensfeld

1935  
F. London  
H. London  
1950  
L. D. Landau  
V. L. Ginzburg

1957  
BCS teorie

1926  
B. D. Josephson

1957  
L. Esaki

Nobelovu cenu v roce 1973. Přestože se zdálo, že Hallův jev je již dostatečně prozkoumán, podařilo se *Klausu von Klitzingovi* (nar. 1943) pozorovat kvantový Hallův jev a upřesnit tak znalosti o proudtech protékajících v polovodičích při velmi nízkých teplotách a velmi silných magnetických polích (Nobelova cena 1985). Konečně v roce 1987 byla udělena Nobelova cena *Johannesu Georgu Bednorzovi* (nar. 1950) a *Karlu Alexu Müllerovi* (nar. 1927) za experimentální objev vysokoteplotní supravodivosti některých keramických materiálů.

Vedle dielektrik, magnetik a vodičů staly se právě polovodiče látkami, jimž byla věnována ve dvacátém století největší pozornost a které také našly nejvíce praktických aplikací. Z 19. století byly známy především fotoelektrické vlastnosti některých polovodičů (selenový článěk). V roce 1874 zjistil *Carl Ferdinand Braun* (1850–1918) usměrňovací účinek polovodičů, který se stal později základem polovodičových diod. (Braun obdržel v roce 1909 Nobelovu cenu za práce na bezdrátové telegrafii spolu s G. M. Marconim.) Zákonitosti průchodu proudu polovodiči a jejich ovlivnění různými příměsemi, světlem, teplem, elektrickým a magnetickým polem, mohly být zkoumány teprve po vzniku kvantové teorie, především pásové teorie vodivosti pevných látek (F. Bloch 1928, L. Brillouin 1930). K výzkumu polovodičů významně přispěla i ruská fyzikální škola pod vedením A. F. Ioffeho v letech 1931–1938. Snad nejvýznamnější objev ve fyzice a technice polovodičů znamenal tranzistorový jev, který se stal základem moderní polovodičové mikroelektroniky. Dospěli k němu v roce 1948 američtí fyzikové *William Bradford Shockley* (1910–1989), *J. Bardeen* a *Walter Brattain* (1902–1987) a získali tak v roce 1956 Nobelovu cenu. Poslední Nobelovu cenu ve 20. století za rok 2000 si rozdělili ruský fyzik *Žores Ivanovič Aljorov* (nar. 1930) a Američan německého původu *Herbert Kroemer* (nar. 1928) za vývoj polovodičových heterostruktur pro ultrarychlou elektroniku a optoelektroniku a dále *Jack St. Clair Kilby* (nar. 1923) za objev integrovaného obvodu.

Poznatky o elektřině a magnetismu ve spojení s výsledky dalších fyzikálních disciplín se staly základem rozsáhlých technických aplikací v elektrotechnice, technice spojů a zpracování informace, elektronové a iontové optice, hmotové spektroskopii, technice urychlovačů nabitých částic,

1986  
J. G. Bednorz  
K. A. Müller

1874  
C. F. Braun

1928  
F. Bloch  
1930  
L. Brillouin

1931–38  
A. F. Ioffe

1948  
J. B. Shockley  
J. Bardeen  
W. Brattain

fyzice a technice plazmatu, jaderné technice a napomohly též rozvoji dalších přírodních věd, jako chemii, biologii, geologii, astronomii aj.

### Výzkum elektřiny a magnetismu v našich zemích

Z českých fyziků se vedle již zmíněného Prokopa Diviše, který se v teoretických představách přidržoval stále ještě aristotelismu, zabýval elektrickými experimenty jako první *Joseph Stepling* (1716–1778) a dále pak *Josef Tadeáš Klínkoš* (1734–1778). Klínkoš zkoumal elektrostatickou indukci a v roce 1774 zkonstruoval elektrofor, systém z pohyblivých nevodivých a vodivých desek nabíjených indukci. Korespondoval v této věci s A. Voltou, jemuž je objev elektroforu připisován. Klínkoš též instaloval roku 1775 první trvalý bleskosvod Franklinova typu v Čechách.

Rychlý růst poznatků o elektřině a magnetismu ve světě v první polovině 19. století pronikal k nám jen pomalu a často ve zkreslené podobě. *František Adam Petřina* (1799–1855), profesor pražské univerzity a český vlastenec, vycházel stále z představ elektrického fluida (nazývaného „mluník“ podle mluno = blesk) a jeho práce byly zatíženy četnými chybami. Přesto však byl Petřina nadšeným propagátorem využití elektřiny a magnetismu v technické praxi, a jeho práce o větvení proudů přispěly ke zdokonalení telegrafie. Petřina zkonstruoval i řadu přístrojů, z nichž „elektromagnetický rotační aparát“ byl jakýmsi předchůdcem elektromotoru a „magnetoelektrický stroj“ předchůdcem dynamu. Dosud se při výuce elektřiny demonstruje jeho přerušovač proudu známý jako „Petřinova spirála“.

Ve druhé polovině 19. století se teorii elektromagnetického pole u nás zabýval *Emil Weyr* (1848–1894), *Augustin Seydler* (1849–1894), *František Koláček* (1851–1913) a *Karel Domalíp* (1846–1909). Koláček rozvíjel teorii elektromagnetických oscilací a proměnných magnetických polí, studoval některé problémy elektrostatiky a vodivosti kapalin, Domalíp zkoumal též vlastnosti katodových paprsků. Ve světě známou se stala práce *Čeňka (Vincence) Strouhala* (1850–1922) o galvanických a magnetických vlastnostech oceli z roku 1885.

1745  
J. Stepling  
1774  
J. T. Klínkoš

F. A. Petřina

E. Weyr

A. Seydler  
F. Koláček  
K. Domalíp

1885  
Č. Strouhal

3. Kučera

922

I. Heyrovský

3. Macků

3. Závíška

1924

A. Žáček

*Bohumil Kučera* (1874–1921) svými experimenty s kapkovými elektrodami připravoval půdu k vrcholnému objevu české fyzikální chemie, polarografii. Jeho autorem se stal *Jaroslav Heyrovský* (1880–1967) v roce 1922. Nobelovu cenu za chemii obdržel v roce 1959.

Ke studiu vlastností a využití elektromagnetických vln přispěla celá řada českých fyziků. Patří k nim *Bedřich Macků* (1879–1929) svými pracemi o kohereru a sprážených kmitavých obvodech, *František Závíška* (1879–1945), který působil též v Cavendishově laboratoři u J. J. Thomsona a jenž se zabýval šířením elektromagnetických vln ve vlnovodech a prosazoval u nás myšlenky speciální teorie relativity, a konečně *August Žáček* (1886–1961), objevitel krátkovlnných elektromagnetických oscilací v magnetronu.

Po druhé světové válce se začala československá fyzika rozvíjet na nových základech na pracovištích ČSAV, dnes AV ČR, dalších ústavů a na vysokých školách. Světově známými se staly práce československých fyziků ve výzkumu polovodičů, magnetických látek a elektrických výbojů v plynech.

## Výsledky a návody řešení úloh

### Kapitola 1

$$\text{Ú 1.1: } 2,30 \cdot 10^{-28} \text{ N}, 8,99 \cdot 10^9 \text{ N.}$$

$$\text{Ú 1.2: } 4,15 \cdot 10^{42} \text{ krát.}$$

$$\text{Ú 1.3: } q_1 = 2(\pi\epsilon_0)^{1/2} r \left[ (F_1 + F_2)^{1/2} \pm F_2^{1/2} \right],$$

$$q_2 = -2(\pi\epsilon_0)^{1/2} r \left[ (F_1 + F_2)^{1/2} \mp F_2^{1/2} \right],$$

horní znaménko pro  $|q_1| > |q_2|$ , dolní znaménko pro  $|q_1| < |q_2|$ .

$$\text{Ú 1.4: } 7,63 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

$$\text{Ú 1.5: } -q/\sqrt{3}, \text{ nebude.}$$

$$\text{Ú 1.6: } 1,73 \cdot 10^{-8} \text{ N}, -3,46 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

$$\text{Ú 1.7: } \text{Náboje v pořadí } -e, -e, e, \text{ vzdálenosti } a, b = (1/2)(1 + \sqrt{5})a.$$

$$\text{Ú 1.8: } -3,79 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

$$\text{Ú 1.9: } \Delta W = 67 \text{ pJ.}$$

$$\text{Ú 1.10: } \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + (a^2 + x^2)^{1/2}}{x}.$$

$$\text{Ú 1.11: } \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ \pm 1 - \frac{h}{(R^2 + h^2)^{1/2}} \right], \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [(R^2 + h^2)^{1/2} - |h|].$$

$$\text{Ú 1.12: } \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

$$\text{Ú 1.13: } 4 \cdot 10^5 \text{ V.}$$

$$\text{Ú 1.14: } -4,5 \cdot 10^5 \text{ C}, -6,4 \cdot 10^8 \text{ V.}$$

$$\text{Ú 1.15: } 3,3 \cdot 10^{-6} \text{ C.}$$

$$\text{Ú 1.16: } aq\sqrt{3}, 2aq, 0, aq\sqrt{10}.$$

$$\text{Ú 1.17: } \frac{a^2\tau}{6}.$$

$$\text{Ú 1.18: } 2\pi\sigma R^3.$$

$$\text{Ú 1.19: } \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4}, \text{ směr } p_2 \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3}.$$

$$\text{Ú 1.20: } \left( 0, \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 a^3}, 0 \right), \left( 0, 0, -\frac{qp}{4\pi\epsilon_0 a^3} \right).$$



- Ú 1.21:  $26^\circ 34'$ .  
 Ú 1.22:  $1,14 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .  
 Ú 1.23:  $-q/2$ .  
 Ú 1.24:  $6,9 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ ,  $2,09 \cdot 10^{-5} \text{ J}$ .  
 Ú 1.25:  $710 \mu\text{F}$ .  
 Ú 1.26:  $40$ .  
 Ú 1.27:  $10^{16}$ ,  $10^{23}$ .  
 Ú 1.28:  $800 \text{ pF}$ , nemá.  
 Ú 1.29:  $2 \mu\text{F}$ ,  $900 \text{ V}$ .  
 Ú 1.30:  $(11/5) \text{ C}$ .  
 Ú 1.31:  $2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $1,1 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $58,1 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ .  
 Ú 1.32:  $U / \left( r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = 9,2 \cdot 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .  
 Ú 1.33:  $\epsilon_0 \frac{S(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{d \ln(\epsilon_1 / \epsilon_2)}$ .  
 Ú 1.34:  $\frac{2\epsilon}{\epsilon + 1} C_0$ ,  $\frac{\epsilon + 1}{2} C_0$ .  
 Ú 1.35:  $5,5$ .  
 Ú 1.36:  $1,1 \cdot 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### Kapitola 3

- Ú 3.1:  $\rho = \rho_0 \exp(t/\tau)$ , kde  $\tau = \epsilon/\gamma$ . Pro měď, polovodič a sklo vychází řádové hodnoty konstanty  $\tau$  postupně:  $10^{-19} \text{ s}$ ,  $10^{-13} \text{ s}$ ,  $10 \text{ s}$ .  
 Ú 3.2: a)  $R_{AB} = \left( R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2} \right) / 2$ . Návod: Využijte podmínku, že v případě nekonečného řetězce má odpor  $R_{AB}$  mezi body  $A$ ,  $B$  a odpor  $R_{A'B'}$  mezi body  $A'$ ,  $B'$  stejnou hodnotu (viz obr. 3.35), b)  $(5/11)R$ , c)  $5R/6$ .  
 Ú 3.3:  $\Delta R = [R^2(R_1 + R_2)^2] \Delta R_2$ .  
 Ú 3.4: Odpor vzroste o 2 %.  
 Ú 3.5:  $R = \ln(r_2/r_1) / 2\pi\gamma t$ .  
 Ú 3.6: Asi za 27 minut.  
 Ú 3.7: Existují dvě hodnoty odporu  $R$ :  $R \approx 37,5 \Omega$ ,  $R \approx 0,2965 \Omega$ .  
 Ú 3.8: Položíme-li počátek osy  $x$ , tožné se společnou osou závitů, do středu jednoho z nich, bude mít střed druhého závitu souřadnici  $x = l$ . Pro pole v libovolném bodě  $x$  na spojnici obou středů platí

$$B = \frac{\mu_0}{2} I_0 \left[ \frac{R_0^2}{(R_0^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{R_0^2}{(R_0^2 + (l-x)^2)^{3/2}} \right],$$

$$B_z \approx 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}, B_H \approx 1,34 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

$$\text{Ú 3.9: } r_0 = l.$$

$$\text{Ú 3.10: } l > 7D.$$

$$\text{Ú 3.11: } B = \frac{\mu_0 (2 + \pi) I}{4 \pi r}.$$

$$\text{Ú 3.12: a) } B = \mu_0 I / 2r, \text{ b) } B = 18\mu_0 I / 4\pi a, \text{ c) } B = 2\sqrt{2} \mu_0 I / \pi a,$$

$$\text{d) } B = 2\mu_0 I \sqrt{a^2 + b^2} / \pi ab, \text{ e) } B = \sqrt{3} \mu_0 I / \pi a.$$

$$\text{Ú 3.13: } B = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

$$\text{Ú 3.14: } B = \mu_0 j a / 2.$$

$$\text{Ú 3.15: } \Phi = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}.$$

$$\text{Ú 3.16: } \text{Hustota proudu má osovou symetrii vzhledem ke směru } \mathbf{B}_0. \text{ Platí } j_s(\mathbf{r}) = (3B_0/2\mu_0) \sin \vartheta, \text{ kde } \vartheta \text{ je úhel mezi } \mathbf{r} \text{ a } \mathbf{B}_0. \mathbf{m} = (2\pi/\mu_0) r^3 \mathbf{B}_0.$$

$$\text{Ú 3.17: } r_0 = (\mu_0 m / \mu_0 B_0)^{1/3}, B_r = 0.$$

$$\text{Ú 3.18: } {}^{(m)}\mathbf{j} = 2k\mathbf{e}_1, {}^{(m)}\mathbf{j}_s = 2kr\mathbf{e}_1, \text{ kde } \mathbf{e}_1 \text{ je jednotkový vektor ve směru osy tyče orientovaný tak, že spolu s orientací vektoru } \mathbf{M} \text{ tvoří pravotočivý systém. } \mathbf{H} = 0, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}.$$

$$\text{Ú 3.19: } \text{Intenzita pole uvnitř koule je o 0,05 promile vyšší než intenzita vnějšího pole. } M = 130 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\text{Ú 3.20: } \text{Intenzita pole uvnitř koule je přibližně rovna jednomu procentu intenzity vnějšího pole; } H = 8 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}, M = 2,4 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}.$$

### Kapitola 4

$$\text{Ú 4.1: } \mathcal{E} = \frac{\mu_0 I (a_2 - a_1)}{2 a_1 a_2} l v.$$

$$\text{Ú 4.2: } \Delta \varphi = \pi f R^2 B.$$

$$\text{Ú 4.2: } \mathcal{E} = 1,73 \text{ V}.$$

$$\text{Ú 4.4: } \mathcal{E} = 1 \text{ V}, F = 1,25 \text{ N}, N_M = N_Q = 5 \text{ W}.$$

$$\text{Ú 4.5: } \text{Návod: Vyjádřete energii, kterou do indukčnosti dodá zdroj konstantního elektromotorického napětí } \mathcal{E} \text{ v časovém intervalu } (0, t). \text{ W} = (\mathcal{E}^2/2L)t^2 > 0.$$

$$\text{Ú 4.6: } \text{Návod: Výsledná energie magnetického pole obou smyček nemůže záviset na způsobu, jakým proudy ve smyčkách vznikaly. Srovnejte dva způsoby vyjádření této energie: Za prvé za předpokladu, že proudy}$$

v obou smyčkách vzrůstaly současně na konečné hodnoty  $I_1$ ,  $I_2$ , za druhé za předpokladu, že nejprve proud  $I_1$  dosáhl konečné hodnoty a teprve pak vzrůstal proud  $I_2$  ve druhé smyčce. Pro energii  $W_m$  pak vychází srovnání

$$\frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + \frac{L_{12} + L_{21}}{2}I_1I_2 = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + L_{12}I_1I_2.$$

$$\text{Ú 4.7: } L = \frac{\mu}{\pi} \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 + r_2} N^2.$$

$$\text{Ú 4.8: } L = \frac{\mu}{2\pi} N^2 (r_1 - r_2)^2 \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

$$\text{Ú 4.9: } L_{12} = \frac{\mu}{\pi} \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_1 - r_2} N_1 N_2.$$

$$\text{Ú 4.10: } L = 435 \text{ mH}.$$

Ú 4.11:  $W_m = \Phi I / 2$ , kde  $\Phi$  je magnetický tok připadající na jednotkovou délku plochy mezi vodiči,

$$L_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln \frac{2r - a_0}{a_0}.$$

$$\text{Ú 4.12: a) } L^{(+)} = L_1 + L_2 + 2L_{12}, \quad L^{(-)} = L_1 + L_2 - 2L_{12},$$

$$\text{b) } W_m^{(+)} = \frac{L^{(+)} I^2}{2}, \quad W_m^{(-)} = \frac{L^{(-)} I^2}{2},$$

$$\text{c) } W_m = L_{12} I^2.$$

$$\text{Ú 4.13: } W_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{R^3} - 3 \frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{R})}{R^5} \right).$$

$$\text{Ú 4.14: } B = 0,55 \text{ T}.$$

### Kapitola 5

$$\text{Ú 5.1: } \mathbf{E} = \left[ 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(kz - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \right. \\ \left. 2E_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(kz - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), 0 \right],$$

tj. směr lineární polarizace se pomalu stáčí s úhlovou frekvencí  $(\omega_2 - \omega_1)/2$ .

$$\text{Ú 5.2: } 2,74 \cdot 10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$$\text{Ú 5.3: } 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}.$$

$$\text{Ú 5.4: } I = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} r^2 E^2 = 1,1 \text{ W}.$$

$$\text{Ú 5.5: } 23 \text{ m}.$$

### Kapitola 6

$$\text{Ú 6.1: } \mathbf{p} = q\mathbf{E}t + \mathbf{p}_0, \quad v^2 = \frac{(qEt/m_0)^2}{1 + (qEt/m_0c)^2} c^2,$$

$$W = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = \sqrt{W_0^2 + (cqEt)^2},$$

kde  $W_0$  je energie v čase  $t = 0$ .

$$\text{Ú 6.2: } B = \frac{m_0 v}{e} \left( \frac{s^2}{4\pi^2} + R_0^2 \right)^{1/2} \doteq 4,11 \cdot 10^{-3} \text{ T}.$$

Ú 6.3:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{v}$  vzájemně kolmé, tvořící v uvedeném pořadí pravotočivou soustavu,  $\mathbf{v} = EIB$ .

$$\text{Ú 6.4: } I = 20 \text{ mA}.$$

$$\text{Ú 6.5: } \Delta R \doteq 4,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

$$\text{Ú 6.6: } n = 925 \text{ 000}, \quad l = 290 \text{ km}, \quad W = 18,5 \text{ MeV}.$$

### Kapitola 7

Ú 7.1: Experimentálně zjištěná hodnota  $\alpha_{H_1} = 1,1 \cdot 10^{-40} \text{ F} \cdot \text{m}^2$ . Návod: Uvažujte rovnováhu mezi Coulombovou silou jádra s elektronem, odstředivou silou a působením vnějšího pole. Předpokládejme, že vliv vnějšího pole je malý, takže lze zanedbat jeho vliv na poloměr dráhy a úhlovou frekvenci. Užitím uvedené hodnoty permitivity dostaneme z Clausiusovy–Mosottioho formule pro polarizovatelnost  $\alpha_{H_2} = 0,96 \cdot 10^{-40} \text{ F} \cdot \text{m}^2$ .

$$\text{Ú 7.2: } 1,1 \cdot 10^{-39} \text{ F} \cdot \text{m}^2.$$

Ú 7.3: Návod: V případě plynů je možné zanedbat rozdíl mezi makroskopickým a lokálním polem. Užitím stavové rovnice ideálního plynu a zadané teplotní závislosti relativní permitivity je pak možné jednoduše vypočítat teplotní závislost molární polarizace, kterou je možné interpretovat pomocí vztahu (7.71).

$$\text{Ú 7.4: } P = 0,097 \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}, \quad p_V = 3 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}.$$

$$\text{Ú 7.5: } R_{Al}/R_{Bi} = \sqrt[3]{\chi_{Bi}/\chi_{Al}}$$

$$\text{Ú 7.6: } P_{m,s} = 2,2 \text{ T}$$

$$\text{Ú 7.7: } \Delta n_0/n_0 = 7,4 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Ú 7.8: } \text{Užitím měrného odporu } \rho_R = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \text{ a hustoty } \rho_M = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ dostáváme pro pohyblivost } \mu = 4,36 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}.$$

$$\text{Ú 7.9: } \mu = 0,42 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$\text{Ú 7.10: } n_0 = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{Ú 7.11: } 3,1 \text{ eV}$$

$$\text{Ú 7.12: } \alpha = 0,77$$

$$\text{Ú 7.13: } \alpha = 1,8 \cdot 10^{-9}, \quad \rho_R = 2,1 \cdot 10^5 \Omega \cdot \text{m}$$

$$\text{Ú 7.14: } \mu_{Na^+} = 5,24 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}, \quad \mu_{Cl^-} = 7,86 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}. \text{ Návod: Použijte vztahu (7.84) a vztahu } \Lambda_{\infty} = F(\mu^{(+)} + \mu^{(-)}).$$

$$\text{Ú 7.15: } \Lambda_{\infty}(\text{CH}_3\text{COOH}) = 39,0 \text{ m}^2 \cdot \Omega^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}. \text{ Návod: Využijte Kohlrauschova zákona.}$$

$$\text{Ú 7.16: } \rho_R = 1,2 \cdot 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\text{Ú 7.17: } \text{a) } n_0 = \sqrt{\Delta n/K}; \text{ b) } n(t) = n_0/(1+n_0 Kt); \text{ c) veličinu } n(t) \text{ lze měřit, přiložíme-li postupně, v různých okamžicích po vypnutí záření, na kondenzátor dostatečně velké napětí a změříme prošlý náboj.}$$

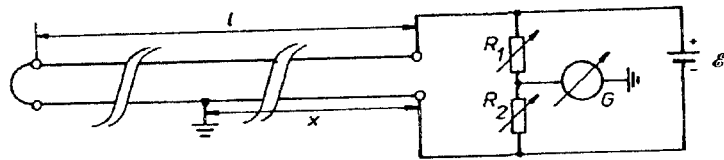
## Kapitola 8

$$\text{Ú 8.1: } \text{a) } R_B = R_1/(n-1);$$

$$\text{b) Základní napětíový rozsah přístroje } U_0 = R_1 I_0, \quad R_5 = R_1(m-1).$$

$$\text{Ú 8.2: } R = R_1(n-1)/n.$$

$$\text{Ú 8.3: } R_1 = 0,01 \Omega, R_2 = 0,03 \Omega, R_3 = 0,06 \Omega, \\ R_4 = 0,3 \Omega, R_5 = 0,6 \Omega, R_6 = 4 \Omega,$$



Obr. 8.41 Můstkové uspořádání pro měření polohy poškozeného místa kabelu v úloze Ú 8.4.

$$\text{Ú 8.4: } \text{Podmínka rovnováhy můstku podle obr. 8.41 je } R_1/R_2 = (2l-x)/x.$$

$$\text{Ú 8.5: } N = U^2 \frac{R}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega L - \omega C}\right)^2}. \text{ Při rezonanci } N_{\max} = U^2/R.$$

$$\text{Ú 8.6: } C_x = C_a R_b/R_c, \quad R_x = C_b R_c/R_a.$$

$$\text{Ú 8.7: } L_x = R_a R_c C_b, \quad R_x = R_a R_c/R_b.$$

$$\text{Ú 8.8: } R_L = \frac{(U^2 - U_L^2 - U_R^2) R_0}{2U_R^2},$$

$$\omega^2 L^2 = \frac{R_0^2 U_L^2}{U_R^2} - \frac{R_0^2 (U^2 - U_L^2 - U_R^2)}{4U_R^2},$$

$$N = \frac{(U^2 - U_L^2 - U_R^2)}{2R_0}.$$

$$\text{Ú 8.9: } R_L = \frac{(I^2 - I_L^2 - I_R^2) R_0}{2I_L^2},$$

$$\omega^2 L^2 = \frac{R_0^2 I_R^2}{I_L^2} - \frac{R_0^2 (I^2 - I_L^2 - I_R^2)}{4I_L^2},$$

$$N = \frac{(I^2 - I_L^2 - I_R^2) R_0}{2}.$$

$$\text{Ú 8.10: } \omega^2 R_a R_b C_a C_b = 1, \quad R_b R_c - R_a R_d = R_b R_d C_b/C_a.$$

$$\text{Ú 8.11: } \text{Jednocestně usměrněný proud: } I_s = I_0/\pi, \quad I_{ef} = I_0/2.$$

$$\text{Dvoucestně usměrněný proud: } I_s = 2I_0/\pi, \quad I_{ef} = I_0\sqrt{2}/2.$$

$$\text{Ú 8.12: } \text{a) } I_s = I_0, \quad I_{ef} = I_0, \quad K = I_{ef}/I_0 = 1.$$

$$\text{b) } I_s = I_0/2, \quad I_{ef} = I_0/\sqrt{3}, \quad K = I_{ef}/I_0 = 2/\sqrt{3}.$$

$$\text{Ú 8.13: } U_{ef} = U_0/\sqrt{3}.$$

$$U(t) = nS \left[ \frac{4\omega}{\pi} b_R \frac{n^2 \epsilon_0^2}{4\pi^2 R^2 r_0^2} \left( \frac{1}{3} \cos \omega t + \frac{1}{5} \cos 3\omega t + \frac{1}{5.7} \cos 5\omega t \right) - \omega \left( \mu_a + b_R \frac{n \epsilon_0}{2Rr_0} \right) \frac{n \epsilon_0}{2\pi R r_0} \sin \omega t \right],$$

kde  $n$  je počet závitů cívky,  $S$  průřez jádra a  $r_0$  jeho střední poloměr. Návod: Při znalosti časového průběhu proudu cívkou lze vypočítat průběh intenzity pole v jádru. Průběh magnetické indukce je pak dán Fourierovou řadou (8.95a), jejíž koeficienty (8.96) lze vypočítat užitím

Rayleighova zákona. Napětí na cívce je určeno zákonem elektromagnetické indukce. Uvedený výsledek byl získán při omezení Fourierova rozvoje nejvýše na pátou harmonickou.

**Dodatek I**

Ú D1.2:  $0, (0, 0, -2); 0, (0, 0, 0), 2xy + 3zy; 4x, (0, -4z, 0).$

Ú D1.3: a)  $n r^{n-2} \mathbf{r}$ , b)  $(\mathbf{c} \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^n} = \frac{r^2 \mathbf{c} - n(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^{n+2}}$ .

Ú D1.4: a)  $\frac{3-n}{r^n}, \mathbf{0}$ .

V případě  $n = 3$  jde o centrální pole, které klesá nepřímo úměrně čtverci vzdálenosti jako Coulombovo pole bodového náboje umístěného v počátku souřadnic. Toto pole má všude kromě počátku nulovou divergenci i rotaci.

b)  $-\frac{n(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})}{r^{n+2}}, \frac{n(\mathbf{c} \times \mathbf{r})}{r^{n+2}}$

**LITERATURA**

- [1] I. ÚLEHLA, M. SUK, Z. TRKA: Atomy, jádra, částice. Academia, Praha 1990.
- [2] J. BROŽ, V. ROSKOVEC: Základní fyzikální konstanty. SPN, Praha 1988.
- [3] J. KVASNICA: Teorie elektromagnetického pole. Academia, Praha 1986.
- [4] V. VOTRUBA, C. MUŽIKÁŘ: Teorie elektromagnetického pole. Nakladatelství ČSAV, Praha 1958.
- [5] J. BROŽ A KOL.: Základy fyzikálních měření I, II. přepracované vydání, SPN, Praha 1983.
- [6] J. A. STRATTON: Teorie elektromagnetického pole. SNTL, Praha 1961.
- [7] L. D. LANDAU, E. M. LIŠIČ: Elektrostatika plošných střed. Izd. Nauka, Moskva 1982.
- [8] M. A. PRESTON: Fyzika jádra. Academia, Praha 1970.
- [9] V. PETRŽILKA, S. ŠAFRATA: Elektřina a magnetismus. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1953, Nakladatelství ČSAV, Praha 1956.
- [10] E. SVOBODA, R. BAKULE: Molekulová fyzika. Academia, Praha 1991.
- [11] J. BROŽ, V. ROSKOVEC, M. VALOUCH: Fyzikální a matematické tabulky. SPN, Praha 1980.
- [12] J. KVASNICA, A. HAVRÁNEK, P. LUKÁČ, B. SPRUŠIL: Mechanika. Academia, Praha 1988.
- [13] V. J. MOORE: Fyzikální chemie. SNTL, Praha 1979, 1981.
- [14] K. REKTORYS: Přehled užité matematiky. SNTL, Praha 1963, 1981, Prometheus, Praha 1995.
- [15] M. BRDIČKA, A. HLADÍK: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987.
- [16] R. BRDIČKA, J. DVOŘÁK: Základy fyzikální chemie. Academia, Praha 1977.

## REJSTRÍK

**A**  
 admittance komplexní prvku 506  
 - vlastní 522  
 afinita atomu k elektronu 405  
 akceptor 442  
 akumulátor Edisonův (Ni-Fe) 468  
 - olověný 467  
 alternátor 287  
 ampér 23, 176, 247  
 ampérsekunda 23  
 ampérvávit 247  
 amplituda komplexní 505  
 analýza Fourierova 538  
 - obvodu elektrického 497  
 antiferomagnetika 244  
 atomy přechodové 415

**B**  
 bočník Ayrtonův 549  
 bod pracovní 501, 502

**C**  
 cirkulace pole 567  
 citlivost můstku proudová 533  
 coulomb 23  
 cykloida 381  
 cyklotron 391, 393

**Č**  
 čára proudová 175  
 čáry indukční 153  
 čas vlastní 144  
 činitel jakosti cívky 513  
 -- obvodu 301  
 - vazby 293  
 - ztrátový 512  
 čísla převodní Hittorfova 462, 489  
 číslo kvantové hlavní 401  
 -- magnetické 403  
 -- vedlejší 402  
 články galvanický 463  
 -- Daniellův 464  
 -- Leclanchéův 466, 467  
 - lithio-iontový 468  
 - nikl-kadmiový 468

článek galvanický primární 466  
 -- sekundární 466  
 -- Westonův 466  
 - termoelektrický 440  
 čtyřpól (dvojbran) 497  
 - odporový 502

**D**  
 délka vlastní 144  
 - vlnová 351  
 derivace pole (v daném směru) 559  
 diagram fázový 509  
 dielektrika nepolární 120  
 - polární 119  
 dielektrikum ideálně měkké 125  
 -- tvrdé 125  
 dilatace času 143  
 dioda elektroluminiscenční 446  
 - polovodičová 445  
 - vakuová 458  
 - Zenerova 544  
 dipól elektrický 33  
 - magnetický 221  
 -- bodový 223  
 disociace elektrolytická 459, 489  
 - molekuly 406  
 divergence pole vektorového 564  
 domény ferroelektrické 419  
 - magnetické 427  
 donor 442  
 dvojmost Thomsonův 534  
 dvojpól (jednobran) 497  
 - lineární 500  
 - odporový 500  
 dvojrůzstva elektrická 75  
 - magnetická 227

**E**  
 ekvivalent elektrochemický 462  
 - chemický 460, 462  
 elektret 420  
 elektrodynamika 173  
 elektrolyt 458  
 - silný 458  
 - slabý 458, 491

## REJSTRÍK

elektrolýza 461  
 elektrometr 116  
 elektromotor 265  
 elektroskop 116  
 emise elektronová 453  
 energie disociační 407  
 - elektrostatická 27  
 - Fermiho 409  
 - ionizační 402  
 - vnitřní 344  
 - volná 344  
 entropie 344  
 experiment Franckův-Hertzův 475  
 - Millikanův 23  
 - Tolmanův-Stewartův 430

**F**  
 faktor demagnetizační 253  
 - depolarizační 134  
 - Heavisideův 156  
 farad 99  
 feromagnetika 244  
 ferroelektrika 119  
 feromagnetika měkká 244  
 - tvrdá 244  
 fluxmetr 317  
 formule Grüneisenova 435  
 foton 402  
 frekvence cyklotronová 378  
 - Larmorova 386  
 - rezonanční paralelní 514, 530  
 - úhlová 538  
 -- Rydbergova 401  
 funkce Grüneisenova 435  
 - Hamiltonova 375  
 - charakteristická dvojpólu 500, 544  
 - Lagrangeova 374  
 - Langevinova 482

**G**  
 galvanometr balistický 317  
 generátor elektrický 265  
 - van de Graaffův 391  
 gradient pole (v daném směru) skalárního 561

**H**  
 henry 274  
 heteropřechod 447  
 hmotnost klidová 146

hodnota efektivní napětí 313  
 -- proudu 313  
 hustota energie objemová 338  
 -- pole elektrostatického 52  
 -- magnetického 308  
 - hybnosti objemová 340  
 - momentu dipólového plošná 75  
 - náboje lineární 26  
 -- objemová 25  
 -- plošná 26  
 - proudu 174  
 -- Maxwelllova 328  
 -- plošného 176  
 -- polarizačního 328  
 - toku energie 338  
 -- intenzity pole 34  
 hybnost zobecněná 375

**CH**  
 charakteristika tranzistoru 447  
 - voltampérová dvojpólu 501

**I**  
 identita Lagrangeova 557  
 impedance 290  
 - komplexní prvku 506  
 - prostředí charakteristická 351  
 indukce elektrostatická 89  
 indukčnost smyčky vlastní 271  
 - vzájemná 272  
 intenzita pole elektrostatického 31  
 -- magnetického 238  
 -- vtištěná 186  
 interakce výměnná 406, 428  
 invarianty pole elektromagnetického 172

**J**  
 jednotky mezinárodní praktické 582  
 jev Bohmův-Aharonovův 376  
 - Hallův 431  
 -- kvantový 432  
 - Meissnerův-Ochsenfeldův 449  
 - Peltierův 439  
 - piezoelektrický 420  
 - povrchový (skinefekt) 363  
 - Seebeckův 438  
 - termoelektrický 438  
 - Thomsonův 439  
 - tranzistorový 446  
 - tunelový 445

jev Zenerův 444  
jevy přechodové 291

**K**

kapacita kondenzátoru 102  
– tělesa osamocené 99  
kmitočet 351  
kmity netlumené 290  
– obvodu vlastní 288  
koeficient admitance vzájemné 528  
– Thomsonův 439  
koeficienty vlnění 101  
– kapacitní 101  
– potenciálové 100  
kolečko Barlowovo 265  
kondenzátor 101  
konduktivita 183  
konstanta Curicova 241  
– – feroelektrická 420  
– disociační 490  
– Hallova 432, 486  
– Madelungova 31  
– piezoelektrická 420  
– Planckova 231  
– Rayleighova 552  
– Rydbergova 401  
– útlumu 288  
kontrakce dělek 143  
kostra obvodu 499  
křivka prvotního magnetování 242  
– rezonanční obvodu 300  
– – redukovaná 300  
kvadrupól elektrický 33

**L**

laser polovodičový 446  
látky diamagnetické 241  
– feroelektrické 418  
– feromagnetické 241  
– paramagnetické 241  
– silně magnetické 240  
– slabě magnetické 240

**M**

magnetika ideálně měkká 244, 309  
– – tvrdá 244, 309  
magnetizace remanentní 242  
– spontánní 242  
magneton Bohrovův 231, 414  
– jaderný 232

## REJSTŘÍK

mechanika relativistická 142  
metoda Rabiho 398  
– tří ampérmetrů 550  
– – voltmetrů 550  
– zobrazení elektrostatického 98, 110  
metrologie 576  
model Debyeův 435  
molekula nepolární 413  
– polární 413  
moment atomu orbitální 402  
– dipólový bodový 66  
– – elektrický 65  
– – direkční 314  
– kvadrupólový elektrický 74  
– magnetický Ampèrův 222  
– – Coulombův 222  
– orbitální 231  
– spinový magnetický 231  
momenty multipólové elektrické 72  
monopól magnetický (Diracův) 153, 205, 580  
můstek Maxwellův 550  
– Scherringův 550  
– Wheatstonův 531  
– Wienův 551

**N**

náboj bodový 19  
– elektrický 17  
– elementární 18, 23  
– Faradayův 24, 462  
– magnetický 222  
– měrný 24  
náboje vázané 122  
– volné 122  
napětí elektromotorické 187  
– – indukované 259  
– elektrostatické 40  
– Hallovo 431  
– magnetické 246  
– magnetomotorické 246  
– svorkové 188  
nevodiče 87  
nositel proudu majoritní 443

**O**

obvod aktivní 498  
– elektrický 187, 261, 281, 497  
– – kvazistacionární 261  
– lineární 498  
– magnetický 245

## REJSTŘÍK

obvod nelineární 498  
– nesouvislý 524  
– oscilační 290  
– pasivní 498  
– rezonanční paralelní 514  
– – sériový 300, 528  
– střídavý 290  
– ve stavu neustáleném 498  
– – ustáleném 498  
odpor aperiodický 316  
– dynamický (diferenciální) 501  
– elektrický 183  
– – měrný 183  
– Hallův 432, 486  
– magnetický 247  
odraz totální 361  
ohm 184  
omegatron 396  
operátor Laplaceův 571  
optika částicová 386

**P**

paramagnetismus Pauliho 424  
parametry čtyřpólu  $h, y$  503  
– soustředěné 284  
– vnější 343  
– vnitřní 343  
páry Cooperovy 452  
permeabilita 240  
– maximální 243  
– počáteční 243  
– relativní 240  
– vakua 161, 202, 583  
permittivita 127  
– relativní 118, 126  
– vakua 23, 583  
plocha ekvipotenciální 42, 561  
podmínka kalibrační 206  
– Lorentzova 335  
– Wideröeho 395  
podslupka elektronového obalu atomu 404  
pohyblivost nositelů proudu 484  
polarizace elektrodová 465  
– orientační 120  
polarizovatelnost atomu 476  
– – elektronová 420  
– – iontová 420  
– – orientační 420  
polarografie 469  
pole elektrické indukované 323  
– – nestacionární 324

pole elektromagnetické 330  
– – kvazistacionární 326  
– – makroskopické 322  
– – mikroskopické 322  
– elektromagnetické nestacionární 32  
– koerzivní 243  
– magnetické nestacionární 327  
– magnetostatické 248  
– makroskopické 88  
– mikroskopické 88  
– molekulární 428  
– potenciální 39, 563  
– skalární 558  
– solenoidální 153, 205  
– vektorové 558  
poloměr cyklotronový 378  
– Debyeův–Hückelův 491  
pološifka křivky rezonanční 300  
polovodiče 87  
poměr gyromagnetický 229, 384, 386, 414  
potenciál elektroodový 463  
– – standardní 463  
– chemický 412  
– ionizační 402  
– magnetický skalární 227  
– pole elektrostatického 39  
– skalární 163  
– vektorový 163, 205  
– Liénardův–Wiechertův 164  
práce výstupní 453  
pravidla Kirchhoffova 190, 191, 285  
– – v komplexním tvaru 506  
pravidlo Lenzovo 259  
– Matthiesenovo 434  
precese Larmorova 386, 479  
princip relativity Einsteinův 141  
– – Galileiho 140  
– superpozice 21  
– symetrie 22  
proud elektrický 173  
– vedení 176  
– konvekční 176  
– magnetizační 177, 235  
– Maxwellův 177  
– nestacionární 174  
– okamžitý 174  
– polarizační 177, 328  
– průměrný 173  
– smyčkový 518  
– stacionární 174  
– vázaný 177

proud volný 176  
 proudy vířivé (Poucaultovy) 294  
 přechod  $p$ - $n$  443  
 přiblížení kvazistacionární 258, 326  
 – stacionární 173  
 přístroje měřící elektrostatické 116  
 pseudoskalár 557  
 pseudovektor 558

**R**

racionalizace jednotek 582  
 reakce anodická 465  
 – katodická 465  
 rezistivita 183  
 rezistor 284  
 rezonance magnetická 398  
 rotace plošná 570  
 – pole vektorového 567  
 rovnice Hamiltonovy kanonické 375  
 – charakteristická čtyřpólu 502  
 – kontinuity proudu 179  
 – Lagrangeovy II. druhu 374  
 – Laplaceova 50  
 – Londonovy 452  
 – Lorentzovy 162, 322, 366  
 – Maxwellovy 162, 322, 331  
 – Poissonova 50  
 – vlnová homogenní 335  
 – – nehomogenní 335  
 – – zobecněná 362  
 rovnováha termodynamická 344  
 rozměr fyzikální 576  
 rozvoj multipólový 71, 213  
 rychlost driftová 382  
 – vlny fázová 347

**S**

schéma náhradní prvku 509  
 siemens 184  
 síla centrální 21  
 – izotropní 21  
 siločáry 33  
 skalár 553, 557  
 skla spinová 425  
 slupka elektronového obalu atomu 404  
 směr magnetizace snadný 427  
 smyčka obvodu 499  
 součin vektorů skalární 555  
 – – smíšený 556  
 – – vektorový 555  
 součinitel odporu teplotní 433

## REJSTŘÍK

soustava absolutní elektromagnetická 580  
 – – elektrostatická 579  
 – inerciální 139  
 – jednotek Gaussova 579  
 – měřných 576  
 – – mezinárodní (SI) 579, 583  
 – vlastní 144  
 soustavy vícefázové 287  
 spektroskopie hmotnostní 395  
 spektrum pásové 406  
 spin 231  
 – elektronu 403  
 spojení kondenzátorů paralelní 102  
 – – sériové 102  
 srážka nepružná 492, 494  
 stav aperiodický 288  
 – – kritický 315  
 – atomu stacionární 401, 475  
 – neustálený 291, 298  
 – paracelektrický 419  
 – ustálený 291  
 strom obvodu úplný 517  
 stupeň disociační 490  
 sůl Seignettova 418  
 supravodivost 448  
 – I. typu 449  
 – II. typu 449  
 – slabá 452  
 – vysokoteplotní 452  
 susceptibilita elektrická 126  
 – magnetická 240  
 – – měrná 240  
 – plynu elektronového 424  
 syntéza obvodu elektrického 497  
 systém Deprezův–d'Arsonvalův 314  
 – magnetoelektrický 314

**T**

tenzor 553  
 – napětí Maxwellův 342  
 – permitivity 127  
 teorie disociační Arrheniova 490  
 – relativitativní speciální 141  
 – supravodivosti BCS 452  
 – – Ginzburgova–Landauova 452  
 – vodivosti Drudeho 486  
 teplo Jouleovo 193  
 teplota Curieova 244, 425  
 – – feroelektrická 418  
 – Debyova 435  
 – Néelova 425

## REJSTŘÍK

tesla 200, 234  
 tok intenzity pole elektrostatického 34  
 – magnetický 201, 205  
 – pole vektorového 564  
 tomografie nukleární rezonanční 399  
 transformace Galileiho 140  
 – kalibrační 336  
 – Laplaceova 543  
 – Lorentzova 141  
 transformátor 293  
 – ideální 293  
 – nakrátko 295  
 – naprázdno 295  
 tranzistor 446, 546  
 trioda 458  
 trubice proudová 175  
 – tokové magnetické 245

**U**

účinník 313  
 úhel Brewsterův 361  
 – ztrátový 511  
 úloha elektrostatičky základní 97  
 urychlovač elektrostatický 391  
 – lineární 392  
 – tandemový 392  
 urychlovače cyklické 392, 393  
 uspořádání antiferomagnetické 425  
 – ferimagnetické 425  
 – feromagnetické 424  
 – magnetické 424  
 – – nekolineární 425  
 – – momentů spontánní 244  
 uzel obvodu 499

**V**

váhy Thomsonovy 116  
 vana elektrolytická 194  
 vazba heteropolární (iontová) 406  
 – homopolární 406  
 vektor 553  
 – axiální (pseudovektor) 413, 558  
 – indukce elektrické 123  
 – – magnetické 153, 200  
 – magnetizace 226, 233  
 – polarizace elektrické 77, 120  
 – – magnetické 226, 233  
 – polární 413  
 – Poyntingův 339  
 – pravý (polární) 557  
 – vlnový 352

veličiny stavové 344  
 velikost vektoru 555  
 věta Buschova 384  
 – Coulombova 90, 115  
 – Earnshawova 30, 48, 107  
 – Gaussova 565  
 – Nortonova 511  
 – o vzájemnosti 274  
 – Poyntingova 339  
 – Stokesova 568  
 – Théveninova 522, 536  
 – Thomsonova 107  
 větev obvodu 499  
 věty Greenovy 574  
 vlna polarizovaná elipticky 353  
 – – kruhově 354  
 – – lineárně 354  
 – příčná 350  
 – rovinná postupná 347  
 vlnočet 351  
 vlnoplocha 347  
 vodiče 87  
 vodivost 183  
 – dřevá 432  
 – dynamická (diferenciální) 501  
 – ekvivalentová 460  
 – elektronová 429  
 – iontová 429  
 – měrná 183, 459  
 – molární 460  
 – polovodiče přímčesová 442  
 – – vlastní 441  
 – typu  $n$  442  
 – typu  $p$  442  
 volt 32, 41  
 voltmetr elektrostatický 116  
 výboj elektrický doutnavý 472  
 – – nesamostatný 471  
 – – obloukový 474  
 – – samostatný 471  
 – nesamostatný 492  
 vzorce Fresnelovy 360  
 vzorec Ampérův 202  
 – Biotův–Savartův 207  
 – Langevinův–Debyeův 483  
 – Lorentzův 153, 200  
 – Thomsonův 289  
 vztah Arrheniův 491  
 – Clausiův–Mosottiův 478  
 – disperzní 352  
 – Einsteinův 455

vztah Langmuirův 457, 501  
 – Richardsonův–Dushmanův 454  
 vztahy materiálové 125, 239

**W**

weber 201

**Z**

zákon Ampèrův 204  
 – – zobecněný 327  
 – Coulombův 21  
   Curieův 241  
 – Curieův–Weissův 420, 426  
 – Gaussův 38, 46, 181  
 – Hopkinsonův 247  
 – Jouleův 193  
 – Kohlrauschův 461

zákon Ohmův 182, 184, 187, 188, 429  
 – – v komplexním tvaru 506  
 – Ostwaldův zředňovací 491  
 – Paschenův 474, 494  
 – Rayleighův 552  
 – termodynamiky druhý 344  
 – – první 344  
 – Wiedemannův–Franzův 436, 487  
 zákony elektrolýzy Faradayovy 461, 452,  
   489  
 záření brzděné 165  
 – dipólové 354  
 – elektromagnetické 357  
 – rovnovážné 345  
 – synchrotronové 165  
 zóna vlnová 354  
 ztráty hysterezní 294, 313



prof. RNDr. BEDŘICH SEDLÁK, DrSc.  
 doc. Ing. IVAN ŠTOLL, CSc.

## ELEKTŘINA A MAGNETISMUS

Vydala Academia, nakladatelství Akademie věd České republiky  
 Legerova 61, 120 00 Praha 2  
 s finanční pomocí, kterou poskytla Akademie věd České republiky

Vazbu navrhl Robin Brichta  
 Redaktor publikace Mgr. Aleš Baďura  
 Redaktor 1. vydání Daniel Zítka  
 Sazbu připravili autoři  
 Grafická úprava a zlom RNDr. Václav Havlíček, CSc.

Vytiskla Těšínská tiskárna, a. s., Štefánikova 2, Český Těšín  
 Vydání 2., opravené a rozšířené, 2002  
 Ediční číslo 5505

ISBN 80-200-1004-1