

Obsah

1 Makroskopická Maxwellova teorie	3
1.1 Úvodem	3
1.2 Základní rovnice elektrodynamiky	4
1.3 Časová závislost veličin pole	8
1.4 Podmínky na rozhraní	9
1.4.1 Stacionární rozhraní	10
1.4.2 Nestacionární rozhraní	12
1.5 Materiálové vztahy	15
1.5.1 Materiálové matice	15
1.6 Klasifikace prostředí podle materiálových matic	18
1.6.1 Dielektrika	19
1.6.2 Magnetika	21
1.6.3 Anizotropní prostředí	23
1.6.4 Elektromagnetická pole v anizotropním prostředí	23
1.6.5 Prostorové bianizotropní	25
2 Speciální teorie relativity a teorie elektromagnetického pole	27
2.1 Prostorová transformace	30
2.1.1 Postup při odvození	30
2.2 Maxwell-Minkowského teorie	37
3 Rovinné vlny v homogenním izotropním prostředí	49
3.1 Rovinné vlny	49
3.2 Rovinné elektromagnetické vlny v homogenním izotropním prostředí	54
3.3 Tok energie a zákon zachování	61
3.4 Polarizace elektromagnetických vln	64
4 Šíření vln v disperzním prostředí	73
4.1 Úvod	73
4.2 Elektromagnetické pole v disperzním prostředí	74
4.2.1 Frekvenční disperze permitivity $\varepsilon(\omega)$	76
4.3 Šíření elektromagnetických vln v dielektrikách při respektování disperze	79
4.4 Elektromagnetické pole v polarizovaném prostředí	86

5	Elektromagnetické vlny v anizotropních prostředích	95
5.1	Obecné vlastnosti šíření elektromagnetických vln v anizotropních prostředích	96
5.2	Šíření rovinných vln v krystalických prostředích	99
5.2.1	Tenzor permitivity jednoosého prostředí	103
5.3	Magnetoaktivní prostředí	106
5.4	Rovinné vlny v magnetoaktivním prostředí plazmatického typu .	112
5.5	Šíření elektromagnetických vln v gyromagnetických prostředích .	115
6	Elektromagnetické vlny v nehomogenních prostředích	125
6.1	Odvození rovnice eikonálu a rovnice přenosu	126
6.2	Odvození rovnice eikonálu z Maxwellových rovnic	131
6.3	Odvození rovnice paprsku z rovnice eikonálu	133
6.4	Jiný způsob odvození rovnice paprsku	135
6.5	Analogie mezi geometrickou optikou a mechanikou hmotného bodu	139
6.6	Použití rovnice přenosu	141
6.7	Použití geometrické optiky ve vrstevnatém nehomogenním prostředí	144
7	Vlnové svazky	151
7.1	Skalární teorie difrakce	151
7.2	Difrakce na rovinném stínítku	154
7.3	Úhlové spektrum rovinných vln	160
7.4	Přibližné metody výpočtu difrakčního pole	165
7.4.1	Fresnelova difrakce	170
7.4.2	Fresnelovy zóny	172
7.4.3	Fraunhoferova difrakce	175

Kapitola 1

Makroskopická Maxwellova teorie

1.1 Úvodem

Klasická elektrodynamika vznikla začátkem 19. století, na jehož konci dosáhla i své konečné podoby. Spolu s *klasickou mechanikou* vytvořila výchozí základnu, z níž vzniklo soudobé nazírání na strukturu a pohyb hmoty.

Základní názory klasické elektrodynamiky jsou zformovány v *Maxwellových* a *Maxwellových-Lorentzových* rovnicích, jež mají v elektrodynamice obdobný význam jako *Newtonovy* rovnice v klasické mechanice. V elegantní matematické podobě shrnuje *Maxwellova teorie* všechny staletými získané poznatky o elektřině a magnetismu. *Maxwellovi* se zároveň podařilo popsat nejdůležitější elektromagnetické jevy, související se vznikem a vyzařováním elektromagnetických vln tím, že v jedné ze svých rovnic *přidal* člen, kterým *postuloval* existenci *posuvného proudu*, jenž *nebyl* do té doby *experimentálně pozorován*.

Hlavní pozornost v předkládané látce z elektrodynamiky je věnována studiu *šíření elektromagnetických vln*. Jde o pojmy, které, obecně vzato, patří svým způsobem do širší problematiky *vlnových procesů*, jež jsou bez výjimky v různých podobách vlastní všem objektům materiálního světa. Vlnové procesy představují jednu z nejdůležitějších forem pohybu hmoty.

Vynálezem *oscilátorů* a *zesilovačů*, jejichž funkce je založena na zákonitostech vlnových procesů (klystrony, elektronky s postupnou a zpětnou vlnou, atd.), bylo možno dosáhnout generací v pásmu *cm* a *mm* vln, jež jsou srovnatelné nebo dokonce i menší, než rozměry vysílacích nebo přijímacích zařízení. Během dalšího vývoje byly postupně realizovány generátory ještě kratších vlnových délek pracující na zcela nových principech — *masery* a *lasery* — které umožnily generaci elektromagnetických polí takových parametrů, jež jsou srovnatelné s poli uvnitř atomů. Generace silných intenzit pole v pásmu světelných vln vedla ke vzniku a objevu celé řady nových *nelineárních* jevů vznikajících při šíření a interakci elektromagnetických polí s prostředím.

Co tedy budeme sledovat při studiu *šíření* a *vyzařování* elektromagnetických vln a jaký bude výsledek *interakce* pole s prostředím?

Odpověď na takto formulovanou otázku znamená nalézt řešení úlohy o cho-

vání *elektromagnetické vlny* při *interakci* s okolím. Z elektromagnetického hlediska je možno prostředí charakterizovat zavedením *materiálových* (konstitučních) vztahů a odpovídající *geometrické konfigurace*. Libovolné *makroskopické* prostředí lze však považovat za soubor *mikroskopických* částic, jež tvoří *zdroje* elektromagnetického pole, které jsou s ním *zpětně v interakci*. Fenomenologické vlastnosti prostředí popsané pomocí materiálových vztahů, tvoří spolu s *Maxwellovými* rovnicemi *self-konzistentní* soustavu rovnic.

Ve většině případů budeme vycházet z *Maxwellových* rovnic v *diferenciálním* tvaru, které budeme řešit, například v *homogenním izotropním* prostředí s materiálovými konstantami ε a μ . Takováto formulace elektromagnetického problému je tedy vhodná, jestliže se vlastnosti prostředí v uvažované oblasti mění *spojitě*. V praxi se však často setkáváme i s problémy, kdy se vlastnosti prostředí mění *skokem*. V těchto případech (do nichž zahrnujeme i oblasti, jež obsahují *zdroje* elektromagnetického pole) *nelze* použít *Maxwellových* rovnic v *diferenciálním* tvaru, abychom dostali vazby mezi veličinami pole po *obou stranách* rozhraní. Ukážeme si, že je potom zapotřebí použít *Maxwellových* rovnic v *integrálním* tvaru na základě představy o *nespojité* změně parametrů prostředí na rozhraní jako limitě spojitěho přechodu. Jejich rozbořením získáme *vztahy* mezi jednotlivými složkami vektorů pole po obou stranách rozhraní, které nazýváme *hraničními podmínkami*, které mají podobný tvar jako *Maxwellovy* rovnice. Jsou to *plošné* divergence a rotace vektorů pole, které vlastně nahrazují *Maxwellovy* rovnice na rozhraní dvou prostředí.

Obecně vzato, *fyzikálně možné řešení* elektromagnetické úlohy lze dostat tehdy, budeme-li znát *vlastnosti prostředí* a jeho *geometrickou konfiguraci* včetně zadaného *rozložení proudů* a *nábojů* nebo, jinak řečeno, známe-li příslušné *zdrojové funkce*.

1.2 Základní rovnice elektrodynamiky

Nestacionární elektromagnetické pole buzené pohybujícími se částicemi ve *vakuu* je popsáno soustavou *Maxwellových-Lorentzových* rovnic (*mikroskopických*):

1.

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.1)$$

nebo v alternativní formě zápisu

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

2.

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.2)$$

nebo v alternativní formě zápisu

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

kde \vec{j} je *proudová hustota* realizovaná *pohybem* všech v daném prostředí existujících nábojů (tj. *vázaných* i *volných*) v okolí daného bodu a ρ je *hustota náboje* realizovaná *prostorovým rozložením* všech těchto nábojů v okolí tohoto bodu. Pro prostředí *beze zdrojů* (připomeňme, že v tomto konkrétním případě se jedná o *vakuum*) se poslední *rotační* rovnice dále zjednoduší na tvar:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.3)$$

Zde

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} && \text{permitivita vakua,} \\ \mu_0 &= 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} && \text{permeabilita vakua,} \\ c &= 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} && \text{rychlost světla ve vakuu.} \end{aligned}$$

Z řešení *Maxwellových* rovnic (viz dále v tomto skriptu), vyplývá důležitý vztah mezi ε_0 , μ_0 a rychlostí světla c ve tvaru

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Většinou však je třeba popsat elektromagnetické pole nejen ve *vakuu*, ale i za přítomnosti *makroskopických* těles (v *klidu*). V takovýchto případech vycházíme z *Maxwellových* rovnic *makroskopických*, které dostaneme *středováním Maxwellových-Lorentzových mikroskopických* rovnic pro *lokální* pole přes oblasti *dostatečně malé* z hlediska *makroskopické* přesnosti ($10^{-4} \div 10^{-2}$ m), tedy

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.5)$$

kde

\vec{E}	– intenzita elektrického pole	V/m
\vec{B}	– vektor magnetické indukce	Wb/m ²
\vec{H}	– intenzita magnetického pole	A/m
\vec{D}	– vektor elektrické indukce	C/m ²
\vec{j}	– hustota elektrického proudu	A/m ² (realizovaného pohybem <i>volných</i> nábojů)
ρ	– hustota elektrického náboje	C/m ³ (realizovaného rozložením <i>volných</i> nábojů)

Rovnice

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (\text{zobecněný Ampérův zákon})$$

spolu s rovnicí

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Gaussův zákon elektrického pole})$$

tvoří tzv. *první* sérii *Maxwellových* rovnic, kdežto rovnice

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (\text{Faradayův indukční zákon})$$

spolu s rovnicí

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gaussův zákon magnetického pole})$$

tvoří tzv. *druhou sérii Maxwellových* rovnic. Obě divergenční rovnice

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{a} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

mají význam *počátečních* podmínek.

Lze ukázat, že rovnice *kontinuity* je důsledkem první série *Maxwellových* rovnic. Provedme operaci divergence na rovnici (1.4), tedy

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \vec{j} \quad (1.6)$$

Jelikož platí identita

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{H} \equiv 0 \quad (1.7)$$

dostáváme

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \vec{j} \quad (1.8)$$

Dosadíme-li za

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.9)$$

budeme mít

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.10)$$

což je *diferenciální* tvar zákona o zachování náboje (*rovnice kontinuity*).

Uvážíme-li prostorovou oblast V ohraničenou uzavřenou plochou S , lze tento zákon interpretovat jako *rychlost změny celkového náboje* Q v objemu V , která se rovná celkovému množství náboje prošlého povrchovou plochou S za jednotku času, což je vlastně *elektrický proud* I , který z objemu *vytéká* ($I > 0$) nebo do objemu *vtéká* ($I < 0$). Vyjádřeno v matematické formě

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \text{div} \vec{j} dV = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I(t) \quad (1.11)$$

Vztah (1.11) tedy představuje *integrální* tvar *rovnice kontinuity*.

Časový vývoj elektromagnetického pole je popsán rovnicemi

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.12)$$

Po provedení *divergence* na obě *rotační* rovnice dostáváme s ohledem na (1.8) a (1.10)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D} - \rho) = 0, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (1.14)$$

Odtud plyne, že výrazy $\text{div} \vec{D} - \rho$ ani $\nabla \cdot \vec{B}$ *nezávisí na čase*. A pokud byly rovny *nule* v jednom časovém okamžiku (viz divergenční *Maxwellovy* rovnice),

budou rovny nule v libovolném časovém okamžiku. Takže v každém bodě pole platí vztahy

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.15)$$

To znamená, že rovnice (1.15) lze považovat za *počáteční podmínky* v důsledku platnosti *rovnice kontinuity*. Kromě zákona o zachování náboje platí samozřejmě i jiné zákony zachování — zákon zachování energie, hybnosti a momentu hybnosti, parity, jaderného náboje, nábojové symetrie, izotopického spinu, leptonového náboje, atd.

Maxwellovy rovnice určují tedy *elektromagnetické pole* při daném rozložení zdrojů (proudů a nábojů). Takto vzniklé elektromagnetické pole o intenzitě \vec{E} a hustotě magnetického toku \vec{B} (neboli magnetické indukci) působí *zpětně* na náboje *Lorentzovou* silou

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (1.16)$$

kde \vec{v} je rychlost pohybující se částice. Tato rovnice spolu s *pohybovou* rovnicí (v *relativistickém* tvaru)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.17)$$

určuje pohyb *nabitě* částice v elektromagnetickém poli. Proto potřebujeme k *úplnému* popisu pohybu soustavy nabitých částic řešit *Maxwellovy* rovnice společně s *pohybovými rovnicemi mechaniky*.

Nejsou snad světelné paprsky velmi malými tělesy, která jsou vyzařována svítícími látkami?

I. Newton

Způsob, jímž *Faraday* využil své ideje siločar, aby uspořádal jevy elektromagnetické indukce, dokazuje, že byl matematikem vysoké třídy — jedním z těch, od něhož matematické budoucnosti mohou načerpat cenné a plodné metody.

J. C. Maxwell

Od doby, kdy *Newton* založil teoretickou fyziku, největších změn v jejích teoretických základech, jinými slovy, v našich představách o struktuře reality, bylo dosaženo díky *Faradayovým* a *Maxwellovým* zkoumáním elektromagnetických jevů.

A. Einstein

1.3 Časová závislost veličin pole

Pro řešení *Maxwellových* rovnic se ukazuje jako výhodné přejít od tradičních trigonometrických funkcí $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$ do tzv. *komplexní symboliky* zavedením *komplexní exponenciální časové funkce* $e^{\pm i\omega t}$. Pomocí této funkce je možno rozložit na tzv. *spektrum* $g(\omega)$ libovolný fyzikálně realizovatelný časový průběh $f(t)$ s použitím *Fourierova integrálu*; tedy

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.18)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.19)$$

Hodnota spektra $g(\omega)$ má smysl *amplitudy harmonického* chování s (kruhovým) kmitočtem ω . Zásadní význam uvedených vztahů spočívá v tom, že pro $f(t) = 0$ musí být $g(\omega) = 0$ pro všechna ω (neexistuje jiná alternativa ke splnění této rovnice – jedná se o *spojitou* analogii rozkladu vektorů do *ortonormálního* systému vektorů, *jednotkových*, vzájemně *kolmých*). Tohoto důležitého faktu bude následně často využíváno. Za předpokladu *časově harmonického* průběhu je pak možno *časové derivace* nahradit součinitelem $+i\omega$ nebo $-i\omega$, což znamená přechod od rovnic *diferenciálních* k rovnicím *algebraickým*, jejichž vyřešení je podstatně *jednodušší*.

Pro všechny veličiny pole, tj. $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{j}$ a ϱ , které budou mít *časově harmonický* průběh, lze psát obdobné vztahy jako (1.18) a (1.19); například pro intenzitu elektrického pole \vec{E}

$$\vec{E}(t) = \Re \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] \quad (1.20)$$

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.21)$$

Z uvedeného zápisu plyne, že vektor *spektra* intenzity elektrického pole $\vec{E}(\omega)$ je obecně *komplexní* veličinou ve *frekvenčním* oboru na rozdíl od $\vec{E}(t)$, jež je v *časovém* oboru veličinou vždy *reálnou* (\Re označuje operátor *reálné části*).

Dosazením vztahu (1.20) do rovnice

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (1.22)$$

provedením *časových* derivací a *vytknutím* exponenciálního členu dostáváme

$$\Re \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\nabla \times \vec{E}(\omega) - i\omega \vec{B}(\omega) \right] e^{-i\omega t} d\omega \right\} = \vec{0} \quad (1.23)$$

odkud vyplývá vztah

$$\nabla \times \vec{E}(\omega) - i\omega \vec{B}(\omega) = \vec{0} \quad (1.24)$$

Obdobně dostaneme výrazy i pro ostatní *Maxwellovy* rovnice přepsané do frekvenční oblasti

$$\nabla \times \vec{H}(\omega) + i\omega \vec{D}(\omega) = \vec{j}(\omega) \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\omega) = 0 \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\omega) = \varrho(\omega) \quad (1.27)$$

Všechny uvedené *spektrální* veličiny charakterizující pole budou obecně *komplexními* veličinami. Kdybychom postupovali zcela exaktně, bylo by zapotřebí pro vyjádření komplexních veličin pole použít *jinou* symboliku — tzv. *fázory* — abychom *odlišili* zápis vektorů pole ve *frekvenčním* oboru (*spektrum*) od zápisu pole jako funkce *času*. Obvykle však vystačíme s jednou symbolikou, jestliže časovou závislost vyjádříme pomocí komplexní exponenciální funkce.

1.4 Podmínky na rozhraní

V případě, kdy se vyskytují alespoň dva *různé* typy *prostředí* charakterizované různými ε, μ, σ (což v oblasti jejich *styku* odpovídá případům *skokové* změny parametrů prostředí), nelze použít *Maxwellovy* rovnice v *diferenciálním* tvaru, hledáme-li vztahy mezi složkami pole po obou stranách dělících ploch.

Řešení příslušné úlohy je možno získat pomocí *integrálního* tvaru *Maxwellových* rovnic, jejichž rozborem získáme *podmínky na rozhraní*.

Předtím, než přistoupíme k odvození *podmínek na rozhraní* či hraničních podmínek, zavedme některé *vektorové identity*.

Mějme vektor \vec{a} v objemu V , ohraničeném plochou S , jež má normálu \vec{s} . Použitím *Gaussovy věty* můžeme pro uvažovaný případ psát

$$\int_V \nabla \cdot \vec{a} \, dV = \oint_S \vec{a} \cdot \vec{s} \, dS \quad (1.28)$$

Zvolme libovolný *konstantní* vektor \vec{b} a vytvořme divergenci vektorového součinu $\vec{b} \times \vec{a}$

$$\nabla \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) - \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) = -\vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) \quad (1.29)$$

S uvážením *Gaussovy věty* a vektorové identity $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{s} = \vec{b} \cdot (\vec{s} \times \vec{a})$ lze psát

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) \, dV = \oint_S (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{s} \, dS = - \oint_S \vec{b} \cdot (\vec{s} \times \vec{a}) \, dS \quad (1.30)$$

Levou stranu upravíme s využitím (1.29) tak, aby se vektor \vec{b} nevyskytoval ve vektorovém součinu

$$- \int_V \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) \, dV = - \oint_S \vec{b} \cdot (\vec{s} \times \vec{a}) \, dS \quad (1.31)$$

S uvážením toho, že je vektor \vec{b} *konstantní* nakonec dostáváme pomocný vztah, který dále použijeme při odvození *hraničních podmínek*:

$$\int_V (\nabla \times \vec{a}) \, dV = \oint_S (\vec{s} \times \vec{a}) \, dS \quad (1.32)$$

Předpokládejme, že *Maxwellovy* rovnice v *integrálním* tvaru platí ve všech částech uvažované oblasti včetně hraničních ploch. Zvolme si na uvažovaném rozhraní *malý objem* ve tvaru *válečku* a provedme přes tento objem integraci *Maxwellových* rovnic, které platí v celém tomto objemu. S použitím vztahu (1.32) lze psát pro intenzitu elektrického pole \vec{E}

$$\int_V (\nabla \times \vec{E}) \, dV = \oint_S (\vec{s} \times \vec{E}) \, dS \quad (1.33)$$

Po dosazení za $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ dostáváme

$$\oint_S (\vec{s} \times \vec{E}) dS + \int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = \vec{0} \quad (1.34)$$

Obdobně bude platit, že

$$\int_V (\nabla \times \vec{H}) dV = \oint_S (\vec{s} \times \vec{H}) dS \quad (1.35)$$

po dosazení za $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

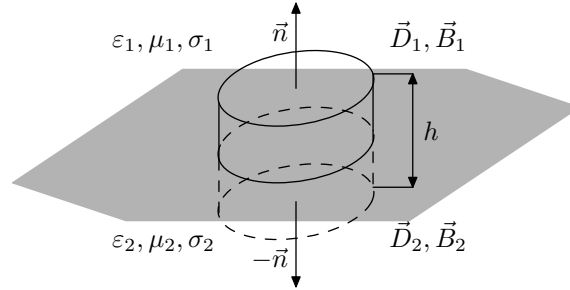
$$\oint_S (\vec{s} \times \vec{H}) dS - \int_V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV = \int_V \vec{j} dV \quad (1.36)$$

Zároveň bude platit

$$\oint_S (\vec{s} \cdot \vec{B}) dS = 0 \quad (1.37)$$

$$\oint_S (\vec{s} \cdot \vec{D}) dS = \int_V \rho dV \quad (1.38)$$

Zvolme nyní podle obr. 1.1 rozhraní procházející myšleným objemem ve tvaru válečku. Nechť \vec{n} je *normála* k *základně* válečku, tedy i normála k *ploše rozhraní* a nechť směřuje do prostředí 1. Nechť se *výška* válečku blíží k *nule*. Z podmínky $h \rightarrow 0$ vyplývá, že obě základny válečku v této limitě *formálně splynou* (ale uchovávají si *směry* svých *normál*, které budou *antiparalelní*) a *objem* válečku se tak stane *nulovým*. Jak dále uvidíme, tento přístup umožní zkoumat *spojitost* resp. *nespojitosť* jednotlivých vektorů pole.



Obrázek 1.1: K odvození podmínek na rozhraní

1.4.1 Stacionární rozhraní

V případě *stacionárního* rozhraní (rozhraní v *klidu*) lze *objemové* integrály těch veličin, které nabývají v objemu válečku pouze *konečných* hodnot (což jsou parciální derivace vektorů \vec{D} a \vec{B} podle času), v limitě $h \rightarrow 0$ (kdy i *objem* válečku jde k *nule*) považovat za *nulové*. U *povrchových* integrálů se v téže limitě ($h \rightarrow 0$) není třeba zabývat integrací přes *plášť* válečku, neboť jeho velikost jde rovněž k *nule*. Zůstávají tak integrace pouze přes *horní* (S_h) resp. *dolní* (S_d) *podstavu* válečku, kdy je \vec{s} ve směru \vec{n} resp. ve směru $-\vec{n}$.

Za výše uvedených předpokladů lze převést rovnici (1.34) do tvaru

$$\int_{S_h} (\vec{n} \times \vec{E}_1) dS - \int_{S_d} (\vec{n} \times \vec{E}_2) dS = \vec{0}, \quad (1.39)$$

Vzhledem k tomu, že *velikosti* podstav S_h a S_d budou *stejné* (v limitě $h \rightarrow 0$ navíc *splynou*) a velikost těchto podstav budeme následně limitně *zmenšovat*, dostáváme pro vektory intenzity *elektrického* pole na rozhraní v prostředí 1 (\vec{E}_1) a 2 (\vec{E}_2) následující vztah

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \quad (1.40)$$

Předpokládejme dále, že na rozhraní (dělicí ploše) existují *plošné proudy* o hustotě \vec{j}_S , kterou lze vyjádřit z *proudové* hustoty \vec{j} (s uvážením *bodových* nábojů nacházejících se přímo v rozhraní) jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h\vec{j}) = \vec{j}_S$$

Zde je třeba si uvědomit, že proudová hustota \vec{j} vzhledem ke svojí definici poroste v limitě $h \rightarrow 0$ nade všechny meze a limita součinu $h\vec{j}$ tak bude mít *nenulovou* hodnotu.

Pro $h \rightarrow 0$ tak lze *Maxwellovu* rovnici (1.36) přepsat do tvaru

$$\int_{S_h} (\vec{n} \times \vec{H}_1) dS - \int_{S_d} (\vec{n} \times \vec{H}_2) dS = \int_V \vec{j} dV = \int_S \vec{j} h dS = \int_S \vec{j}_S dS \quad (1.41)$$

odkud analogickým postupem jako v případě vektoru intenzity elektrického pole (a s uvážením toho, že plochy S_h , S_d a S v limitě $h \rightarrow 0$ *splynou* v *jedinou* plochu) dostáváme podmínku na rozhraní pro vektor intenzity *magnetického* pole

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_S \quad (1.42)$$

Analogicky jako v případě *proudové hustoty* budeme předpokládat, že i *plošná hustota náboje* je definován podobně, tedy

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h\rho) = \rho_S$$

Okrajové podmínky pro vektory \vec{D} a \vec{B} dostaneme použitím *divergenčních* rovnic

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = \int_S (\vec{s} \cdot \vec{B}) dS = 0 \quad (1.43)$$

$$\implies \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.44)$$

a obdobně

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_S (\vec{s} \cdot \vec{D}) dS = \int_S \rho h dS \quad (1.45)$$

$$\implies \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S \quad (1.46)$$

Získané rovnice (1.40), (1.42), (1.44) a (1.46) popisují poměry na rozhraní dvou prostředí, kde se ε a μ mění *skokově* a lze jim přisoudit následující *fyzikální* význam:

a) rovnice

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \quad \text{nebo} \quad \text{Rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (1.47)$$

vyjadřuje *spojitost tečných složek* intenzity elektrického pole \vec{E} na rozhraní prostředí 1 a 2,

b) rovnice

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_S \quad \text{nebo} \quad \text{Rot } \vec{H} = \vec{j}_S \quad (1.48)$$

vyjadřuje *nespojitosť tečných složek* intenzity magnetického pole \vec{H} , jež se rovná hustotě plošného proudu,

c) rovnice

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad \text{nebo} \quad \text{Div } \vec{B} = 0 \quad (1.49)$$

vyjadřuje *spojitosť kolmých složek* magnetické indukce,

d) rovnice

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S \quad \text{nebo} \quad \text{Div } \vec{D} = \rho_S \quad (1.50)$$

vyjadřuje *nespojitosť kolmých složek* \vec{D} , jež se rovná plošné hustotě náboje ρ_S .

Na první pohled je zřejmé, že rovnice, jež popisují poměry na rozhraní, mají obdobný tvar jako *Maxwellovy* rovnice. Liší se však tím, že operátor ∇ je zde nahrazen vektorem normály \vec{n} , *časová derivace* v případě *stacionárních* rozhraní je *nulová* a místo vektorů pole vystupují v rovnicích (1.40), (1.42), (1.44) a (1.46) *rozdíly* těchto veličin na rozhraní (dělicí ploše); místo *proudové hustoty* \vec{j} a *prostorové hustoty náboje* ρ vystupují *plošné hustoty proudu* \vec{j}_S a náboje ρ_S .

1.4.2 Nestacionární rozhraní

Jak už jsme na začátku uvedli, odvozené vztahy (1.40), (1.42), (1.44) a (1.46) platí jen pro *stacionární* rozhraní. Pro *pohybující se nestacionární* rozhraní *nebude* možno u vztahů (1.34) a (1.36) postupovat stejným způsobem, jako u *stacionárního* rozhraní, neboť nyní bude *prostorová* souřadnice *časově proměnná*. U ostatních členů rovnic bude postup zcela *analogický* jako v případě *stacionárních* rozhraní.

Jelikož se *objem*, podle kterého se provádí integrace, *mění s časem*, je nutno provést integraci — vycházející z *kinematické* teorie — pro *pohybující se rozhraní* podle vztahu

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \vec{A} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \vec{A} (\vec{s} \cdot \vec{v}) dS, \quad (1.51)$$

kde \vec{A} je vektor v pohybujícím se prostředí a \vec{v} je *rychlost* pohybu rozhraní.

Znamená to tedy, že v případě *nestacionárního* rozhraní musíme přiřadit k časové derivaci vektoru \vec{A} přes objem V , uzavřený plochou S , ještě *povrchový* integrál přes tutéž plochu S . Použijeme nyní vztah (1.51) při rozboru *Maxwellových* rovnic v *integrálním* tvaru

$$\int_S (\vec{s} \times \vec{E}) dS + \int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = \vec{0}, \quad (1.52)$$

$$\int_S (\vec{s} \times \vec{H}) dS - \int_V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dV = \int_V \vec{j} dV \quad (1.53)$$

a protože podle (1.51)

$$\int_V \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \vec{B} dV - \int_S \vec{B} (\vec{s} \cdot \vec{v}) dS,$$

potom dostaneme po dosazení do (1.52)

$$\int_S (\vec{s} \times \vec{E}) dS + \frac{d}{dt} \int_V \vec{B} dV - \int_S \vec{B} (\vec{s} \cdot \vec{v}) dS = \vec{0}, \quad \vec{s} \parallel \vec{n}$$

Jelikož

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{B} dV = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} h dS, \quad h \rightarrow 0$$

pomocí analogických operací jako v případě stacionárních mezí dostáváme

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) - (\vec{n} \cdot \vec{v}) (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = \vec{0} \quad (1.54)$$

Obdobně z rovnice (1.53) plyne, že

$$\int_S (\vec{s} \times \vec{H}) dS - \frac{d}{dt} \int_V \vec{D} dV + \int_S \vec{D} (\vec{s} \cdot \vec{v}) dS = \int_V \vec{j} dV$$

nebo po dosazení za $\int_V \vec{j} dV$ (a zanedbání $\frac{d}{dt} \int_V \vec{D} dV$) dostaneme

$$\int_S (\vec{s} \times \vec{H}) dS + \int_S \vec{D} (\vec{s} \cdot \vec{v}) dS = \int_S \vec{j}_S h dV, \quad h \rightarrow 0$$

za předpokladu, že

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h \vec{j}) = \vec{j}_S$$

získáme obdobný vztah jako (1.54), tedy

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) + (\vec{n} \cdot \vec{v}) (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{j}_S \quad (1.55)$$

Divergenční rovnice zůstávají beze změny (nezávisí na čase), tedy

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.56)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (1.57)$$

Z odvozených rovnic plyne:

- a) při pohybujícím se rozhraní ($\vec{v} \neq 0$) vzniká *diskontinuita tečných složek* \vec{E} , jež je vyvolána rozdílem odpovídajících kolmých složek magnetické indukce

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = (\vec{n} \cdot \vec{v})(\vec{B}_1 - \vec{B}_2)$$

(pohyb rozhraní se děje ve směru normály \vec{n} , čili $\vec{n} \parallel \vec{v}$),

- b) plošný proud \vec{j}_S již není svázán pouze s nespojitostí intenzity magnetického pole \vec{H} , ale k této nespojitosti přispívají i složky vektoru elektrické indukce \vec{D} , nebude-li rychlost pohybu rozhraní \vec{v} *kolmá* na směr \vec{n} . V případě, že rychlost \vec{v} bude *rovnoběžná* s dělící plochou, redukuje se rovnice (1.55) na rovnici (1.39), jež popisuje poměry na stacionárních rozhraních.

Když *Faraday* poprvé zveřejnil svůj pozoruhodný objev, že změnou magnetického toku vzniká elektromotorická síla, musel odpovídat (jako každý, kdo objeví v přírodě něco nového) na otázku „Jaký je z toho užitek?“ Vždyť přece zjistil jen takovou podivnou věc — v kusu drátu vznikl sotva postižitelný elektrický proud, jestliže s ním pohyboval v blízkosti magnetu. Jaký by z tohohle mohl být „užitek“? *Faraday* odpověděl: „A jaký je užitek z právě narozeného dítěte?“

A teď pomyslete na ty ohromné praktické aplikace, k nimž jeho objev vedl.

R. P. Feynman

Moderní elektrotechnika má ve *Faradayových* objevech svůj počátek. Neužitečné novorozeně vyrostlo v zázrak a způsobilo změnu světa, kterou si jeho hrdý otec nemohl ani představit.

R. P. Feynman

1.5 Materiálové vztahy

Makroskopické Maxwellovy rovnice vyjádřené ve formě I. a II. série představují soustavu 8 *skalárních* rovnic pro 4 *vektory* pole \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} a \vec{H} . Čtyři *homogenní Maxwellovy rovnice* je možno vyřešit formálně vyjádřením \vec{E} a \vec{B} pomocí *skalárního potenciálu* ϕ a *vektorového potenciálu* \vec{A} , kdežto *nehomogenní* tvar těchto rovnic *nelze* vyřešit, aniž bychom znali vztahy mezi \vec{D} a \vec{H} , vyjádřené pomocí \vec{E} a \vec{B} . Tyto vztahy se nazývají *materiálovými vztahy* nebo *konstitučními* relacemi, které v implicitním obecném tvaru lze vyjádřit následovně:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.58)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.59)$$

Mezi dvěma vektorovými a dvěma skalárními rovnicemi (celkem osmi skalárními rovnicemi) se vyskytuje pouze 6 *nezávislých* rovnic, neboť *Gaussův* zákon elektrického pole je důsledkem *Ampérova* zákona a rovnice *kontinuity* a *Gaussův* zákon magnetického pole je důsledkem *Faradayova* zákona, založeného na fyzikální skutečnosti, že *neexistuje* samostatný *magnetický monopol*.

Čtyři vektory elektromagnetického pole představují 12 skalárních složek, pro něž máme pouze 6 *nezávislých* skalárních (*Maxwellových*) rovnic, které samozřejmě *nestačí* k určení všech veličin pole. Zbývajících 6 skalárních rovnic, které obsahují další vztahy mezi vektory pole, lze dostat použitím *materiálových relací*. Tato fyzikální úvaha se opírá o skutečnost, že rovnice pole byly původně zformulovány pro vakuum (*Maxwell-Lorentzovy* rovnice) a nebraly v úvahu *vlastnosti prostředí*, které má zásadní význam při konkrétním řešení příslušné elektrodynamické úlohy.

Na základě provedených úvah dospíváme k závěru, že vektory $\vec{E}(\vec{r}, t)$ a $\vec{B}(\vec{r}, t)$ popisují vlastně *elektromagnetické pole*, kdežto vektory $\vec{D}(\vec{r}, t)$ a $\vec{H}(\vec{r}, t)$ podávají informace o *prostředí* včetně vlivu *vázaných nábojů* a *proudů*, indukovaných v látce. Podle *Sommerfelda* jsou proto vektory \vec{E} a \vec{B} entity *intenzity* a \vec{D} a \vec{H} entity *kvantity*. Ve čtyřrozměrném *Minkowského* prostoru tvoří entity intenzity *tenzor* stejného řádu jako entity kvantity.

Vrátíme-li se nyní k rovnici (1.58) a (1.59), vidíme, že materiálové vztahy vyjadřují v matematické formě funkční závislost mezi vektory *pole* a vektory *prostředí*. Pro popis prostředí v nejobecnější formě bude však vhodné zavést odpovídající *materiálové rovnice*.

Maxwellovy rovnice ve tvaru (1.4) a (1.5) popisují elektromagnetické pole v *látkovém* prostředí, k jehož určení potřebujeme znát *rozložení zdrojů* (hustoty nábojů $\rho(\vec{r}, t)$ a proudové hustoty $\vec{j}(\vec{r}, t)$) popsanych zdrojovými funkcemi a příslušné *materiálové relace*, které lze vyjádřit v *maticové* formě.

1.5.1 Materiálové matice

Z elektrodynamického hlediska lze vyjádřit *materiálové vztahy* v *nejobecnější formě* zavedením *materiálových matic*, jež jsou vhodné i pro sledování elektromagnetických jevů v *pohybujícím* se prostředí.

K vyjádření vektorů *prostředí* pomocí vektorů *pole* zavedeme *tenzory* \mathbf{P} , \mathbf{L} , \mathbf{M} a \mathbf{Q} následujícím způsobem:

$$c\vec{D} = \mathbf{P} \cdot \vec{E} + \mathbf{L} \cdot c\vec{B} \quad (1.60)$$

$$\vec{H} = \mathbf{M} \cdot \vec{E} + \mathbf{Q} \cdot c\vec{B}, \quad (1.61)$$

kde c je rychlost světla, \mathbf{P} , \mathbf{L} , \mathbf{M} a \mathbf{Q} jsou tenzory popsané maticemi o 3×3 prvcích (materiálové parametry příslušného prostředí).

Zápis materiálových vztahů v uvedeném tvaru je založen na *relativistických* úvahách. Jelikož vektory pole $(\vec{E}, c\vec{B})$ tvoří jediný *tenzor v čtyřrozměrném prostoru*, obdobně jako vektory prostředí $(c\vec{D}, \vec{H})$ tvoří další *tenzor* téhož prostoru, budou materiálové vztahy v této formě *Lorentzovsky invariantní*.

V maticové formě lze rovnice (1.60) a (1.61) zapsat jednodušším způsobem, tedy

$$\begin{bmatrix} c\vec{D} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

zde \mathbf{C} je *materiálová matice* o 6×6 prvcích a má rozměr *admitance*,

$$\mathbf{C}_{\vec{E}, \vec{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{L} \\ \mathbf{M} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

Protože jsme zvolili *nejobecnější* zápis materiálových vztahů, může takto zavedená materiálová matice být *funkcí* prostoro-časových souřadnic, termodynamických nebo hydromechanických proměnných nebo intenzit elektromagnetického pole. V nejobecnějším případě může být matice \mathbf{C} funkcí integro-diferenciálních operátorů, dokonce může souviset i s jinými fyzikálními veličinami.

Podle funkční závislosti matice \mathbf{C} je možno různá prostředí rozdělit na:

- *nehomogenní* – je-li \mathbf{C} funkce *prostorových souřadnic*,
- *nestacionární* – je-li \mathbf{C} funkcí *času*,
- *časově disperzní* – je-li \mathbf{C} funkcí *časových derivací*,
- *prostorově disperzní* – je-li \mathbf{C} funkcí *prostorových derivací*,
- *nelineární* – je-li \mathbf{C} funkcí *veličin elektromagnetického pole*,
- *lineární* – *není-li* \mathbf{C} funkcí veličin elektromagnetického pole.

Kromě vyjádření $(c\vec{D}, \vec{H})$ jako funkcí $(\vec{E}, c\vec{B})$ je možno postupovat i jinak a vyjádřit libovolnou jinou kombinaci vektorů, např. (\vec{D}, \vec{B}) jako funkce (\vec{E}, \vec{H}) , atd. V uvedeném případě by to znamenalo, že by platil vztah

$$\begin{bmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{E}, \vec{H}} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

kde

$$\mathbf{C}_{\vec{E}, \vec{H}} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} & \bar{\xi} \\ \bar{\zeta} & \bar{\mu} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{P} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \\ -\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{M} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.65)$$

kde c je rychlost světla a $\mathbf{C}_{\vec{E}, \vec{H}}$ představuje materiálovou matici v \vec{E}, \vec{H} reprezentaci.

Je rovněž možné postupovat obráceně a vyjádřit \vec{E}, \vec{H} pomocí \vec{B}, \vec{D} . V tomto případě bude příslušná závislost vyjádřena následovně:

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{\vec{D}, \vec{B}} \begin{bmatrix} \vec{D} \\ \vec{B} \end{bmatrix}, \quad (1.66)$$

kde

$$\mathbf{C}_{\vec{D}, \vec{B}} = \begin{bmatrix} \bar{\kappa} & \bar{\chi} \\ \bar{\gamma} & \bar{\nu} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \\ \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{Q} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad (1.67)$$

kde $\mathbf{C}_{\vec{D}, \vec{B}}$ je zase materiálová matice, avšak v \vec{D}, \vec{B} reprezentaci. Kromě těchto vyjádření matice \mathbf{C} je možno zavést i jiné reprezentace jako kombinace vztahů mezi $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ a \vec{H} .

Jsem přesvědčen, že nezbytná internacionální péče o ekologickou prosperitu naší planety příznivě ovlivní realizaci zásad mírového soužití států s rozdílným společenským zřízením a postupné řešení úkolu všeobecného odzbrojení. Lidé si začínají uvědomovat, že planeta Země je jejich společným domovem a že by měli společně pečovat o to, jak předejít ekologické krizi, proti které je třeba začít svorně bojovat. Nezbyvá nám k tomu již příliš mnoho času. Určitě méně než sto let. Za tu dobu lze ještě ekologickou krizi odvrátit. Přitom připadá důležitá úloha vědcům, kteří první kvantitativně určili dosah nadcházející krize a mohou velmi přispět k hledání cest, jak odvrátit pohromy hrozící civilizaci.

P. L. Kapica

1.6 Klasifikace prostředí podle materiálových matic

Zavedením čtyř tenzorů \mathbf{P} , \mathbf{L} , \mathbf{M} a \mathbf{Q} lze charakterizovat všechny druhy prostředí včetně prostředí v *pohybujících* se soustavách. Pomocí tenzorů \mathbf{L} a \mathbf{M} (neboli materiálových matic \mathbf{L} a \mathbf{M}) jsou vyjádřeny závislosti mezi *elektrickými* a *magnetickými* poli.

Prostředí, pro které platí, že v rovnici (1.60) a (1.61)

$$\mathbf{L} \neq \bar{\mathbf{0}}, \quad \mathbf{M} \neq \bar{\mathbf{0}}, \quad (1.68)$$

nazýváme *bianizotropní*. Jestliže

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} = \bar{\mathbf{0}}, \quad (1.69)$$

pak takové prostředí bude *anizotropní*. Zvláštní případ *anizotropního* prostředí představuje prostředí, pro něž \mathbf{P} a \mathbf{Q} jsou *skaláry*. Jestliže

$$\mathbf{P} = c\varepsilon\mathbf{I} \quad (1.70)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c\mu}\mathbf{I}, \quad (1.71)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice o 3×3 prvcích, nazýváme takovéto prostředí *izotropním* prostředím.

U *izotropního* prostředí budou mít materiálové vztahy tvar ($\mathbf{L} = \mathbf{M} = \bar{\mathbf{0}}$)

$$c\vec{D} = \mathbf{P} \cdot \vec{E} = c\varepsilon\mathbf{I} \cdot \vec{E} = c\varepsilon\vec{E} \quad (1.72)$$

$$\vec{H} = \mathbf{Q} \cdot c\vec{B} = \frac{1}{c\mu}\mathbf{I} \cdot c\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \quad (1.73)$$

což lze zapsat ve známé formě

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad (1.74)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad (1.75)$$

kde ε a μ jsou *permitivita* a *permeabilita* prostředí (zde *skalární* veličiny). Jak je možno vidět ze vztahů (1.74) a (1.75), bude v *izotropním* prostředí vektor intenzity elektrického pole *rovnoběžný* s vektorem elektrické indukce \vec{D} a vektor intenzity magnetického pole s vektorem magnetické indukce (hustoty magnetického toku). Ve vakuu platí

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0\mu_r = \mu_0, \quad (1.76)$$

kde

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

Vztahy mezi \vec{D} , \vec{E} a \vec{B} , \vec{H} , jakož i \vec{j} a \vec{E} budou záviset na *charakteru interakce* elektromagnetického pole s látkou a mohou mít *velmi složitou* formu. Mohou být *nelinéární*, *nelokální*, respektovat *anizotropii*, dokonce vektory \vec{D} , \vec{B} , \vec{j} v libovolném *bodě* \vec{r} a *čase* t mohou záviset na \vec{E} a \vec{H} v *jiných* bodech prostoru a v předcházejícím čase. Takováto závislost mezi vektory elektromagnetického

pole, jak uvidíme později, vede k výskytu *frekvenční* a *prostorové disperze*, která může podstatně *ovlivnit* proces šíření elektromagnetických vln.

V látkovém prostředí je *permitivita* ε určena *elektrickými* vlastnostmi a *permeabilita* μ *magnetickými* vlastnostmi prostředí. Podle velikosti *relativní permittivity* ε_r dělíme *dielektrika* na

- *měkká* (nepolární), jež mají $\varepsilon_r \doteq 1 \div 10$,
- *tvrdá* (polární) s $\varepsilon_r \doteq 10 \div 100$,
- *feroelektrika* (segnetoelektrika) s $\varepsilon_r \doteq 10^3 \div 10^4$.

U poslední skupiny látek se jejich vlastnosti mění při dosažení *Curieovy* teploty.

1.6.1 Dielektrika

Na dielektrikum můžeme pohlížet jako na *spojité* prostředí charakterizované *objemovou koncentrací elektrických dipólových momentů* vyjádřenou pomocí *elektrické polarizace* \vec{P} . Zde si je třeba uvědomit, že vektor \vec{P} bude determinován vektorem elektrického pole \vec{E} , které bude mít vliv na *orientaci* elektrických dipólů tvořících dielektrikum, a tedy bude platit úměrnost (v oblasti *lineární* závislosti) ve tvaru $\vec{P} \sim \vec{E}$.

Vyjdeme-li ze vztahu mezi *vektorem polarizace* \vec{P} a *koncentrací vázaných nábojů* ϱ_p , kterou lze vyjádřit vztahem

$$\varrho_p = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (1.77)$$

potom divergenční rovnici pro *makroskopickou* hustotu nábojů *volných* a *vázaných* lze psát ve tvaru

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E}) = \varrho + \varrho_p \quad (1.78)$$

Po dosazení za ϱ_p z (1.77) bude tedy

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varrho, \quad (1.79)$$

kde ϱ je nyní třeba chápat jako hustotu *volných* nábojů zavedených do dielektrika. Ve vztahu (1.79) je materiálová část dielektrika charakterizována vektorem polarizace tak, že můžeme zavést vektor \vec{D} vztahem

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.80)$$

pro nějž bude stačit pouze znalost hustoty *volných* nábojů ϱ a rovnice

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad (1.81)$$

bude splněna i v obecném případě *nehomogenního* dielektrika.

Z rovnice (1.80) vyplývá, že vektory \vec{E} a \vec{P} *nemají* stejný fyzikální rozměr. Budeme-li chtít převést výše uvedenou *úměrnost* mezi těmito dvěma vektory do tvaru *exaktního* matematického vztahu, bude třeba tento fakt vzít v úvahu.

Nejprve tedy výchozí úměrnost přepíšeme do vztahu mezi vektory se *shodným* fyzikálním rozměrem, tedy $\vec{P} \sim \varepsilon_0 \vec{E}$. A nyní zavedeme veličinu χ_e , která bude dané dielektrikum charakterizovat:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

Tato *bezrozměrná* veličina χ_e se nazývá *elektrická susceptibilita*. Po dosazení za \vec{P} do (1.80) přejde tato do tvaru

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.82)$$

kde byla zavedena *relativní* permitivita ε_r vztahem $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$. Charakterizace prostředí pomocí veličin \vec{P} , χ_e a ε_r je vzájemně *ekvivalentní*. V praxi se nejvíce používá *materiálový* vztah ve tvaru

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad (1.83)$$

Při určování celkové hustoty náboje ρ v objemu V vyšli ze skutečnosti, že elektrické pole \vec{E} v přítomnosti dielektrik je shodné s polem, které by se vybudilo v nepřítomnosti dielektrika nejen hustotou *volných* nábojů, ale i *vázaných* nábojů ρ_p (nebo ρ_{vaz}) včetně *plošné* hustoty σ_p (nebo σ_{vaz}).

Vázanou hustotu nábojů jsme vyjádřili jako záporně vzatý výtoku vektoru polarizace \vec{P} a vyšli jsme z předpokladu, že molekuly dielektrika lze nahradit *ekvivalentními dipóly* v jednotce objemu.

V přítomnosti vnějšího elektrického pole může být vektor *polarizace* vyvolán *indukovanými* dipólovými momenty, *zorientovaným* permanentních dipólových momentů nebo *migrací* iontových nábojů.

Polarizace dielektrika nevzniká pouze v důsledku působení sil elektrického pole, ale může souviset i s celou řadou dalších fyzikálních jevů — např. jako důsledek mechanického nebo tepelného namáhání.

Při mechanickém namáhání (stlačení) dielektrika dochází ke vzniku potenciálního rozdílu mezi jeho protějšími stranami (jev *elektrostrikce*) a při zahřátí a ochlazení dielektrika dochází ke vzniku *povrchových nábojů* (*pyroelektrický jev*).

U některých druhů *krystalů* pod vlivem střídavého účinku mechanických sil (tlaku a tahu) nebo elektrického pole (obrácený piezoeffekt) dochází ke *střídavé polarizaci*, přičemž elektrické pole sleduje průběh mechanického napětí. Vznikající úkaz je znám jako *piezoelektrický jev*.

Z doposud uvedeného plyne, že *totéž* elektrické pole může vyvolat u různých dielektrik jejich *různou* polarizaci, která závisí nejen na vnějším poli, ale i na hustotě látky, na jejím chemickém složení, krystalické struktuře, atd.

Bude-li elektrická polarizace za stejných vnějších podmínek obecně různá u různých látek, znamená to, že tuto rozdílnost musíme připsat *vnitřním* vlastnostem jednotlivých látek — jinak řečeno — elektrická polarizace je vnitřním parametrem dielektrika.

Na základě *struktury* dielektrik lze vysvětlit rozdíly v hodnotě *relativní* permitivity látek. *Měkká* dielektrika jsou tvořena atomy (molekulami) *bez vlastních* dipólových momentů, zatímco *tvrdá* dielektrika jsou tvořena atomy (molekulami) *s vlastními* dipólovými momenty, které se pod vlivem vnějšího elektrického pole *zorientují*. Zvláštnost feroelektrik spočívá v tom, že mají dipólové

momenty atomů v určitých oblastech (doménách) *spontánně zorientovány*, čímž lze vysvětlit u těchto látek *silné* polarizační účinky i ve *slabých* elektrických polích.

1.6.2 Magnetika

Látkové prostředí, jehož vlastnosti a chování jsou ovlivňovány vnějším *magnetickým* polem, budeme nazývat *magnetikem* a při makroskopickém popisu ho budeme považovat za *spojité* a *bezeztrátové* prostředí.

Podle velikosti *relativní* permeability μ_r , jež může záviset jak na stavu prostředí (teplota, tlak), tak i na magnetickém poli, rozdělujeme rovněž i magnetika do tří skupin

- *diamagnetika*, $\mu_r < 1$, teplotně nezávislá,
- *paramagnetika*, $\mu_r > 1$, převážně teplotně závislá,
- *feromagnetika*, $\mu_r \gg 1$.

Ze srovnání s dielektriky se nabízí *analogie* diamagnetických látek s měkkými (nepolárními) dielektriky, paramagnetických látek s tvrdými (polárními) dielektriky a feromagnetik s feroelektriky.

Pro vysvětlení velikosti relativní permeability μ_r lze použít vhodného dipólového modelu, podle něhož jsou magnetika tvořena soustavou *magnetických dipólů*. Přitom lze předpokládat, že atomy *diamagnetických* látek *nemají* vlastní magnetické dipólové momenty, ale momenty *indukované* vnějším magnetickým polem (podle zákona elektromagnetické indukce), které budou orientovány *proti směru* vnějšího pole, a proto jej *zeslabují*. Naopak, atomy *paramagnetických* látek *mají* vlastní dipólové momenty, orientují se ve směru vnějšího magnetického pole, a proto jej *zesilují*.

Diamagnetické látky po vložení do *nehomogenního* magnetického pole jsou *vytlačovány* ve směru *klesajícího* pole, kdežto *paramagnetické* látky budou *vtažovány* ve směru *narůstajícího* pole.

Obdobná situace jako u *měkkých* a *tvrdých* dielektrik, pokud jde o *teplotní závislost permeability*, platí i u *diamagnetických* a *paramagnetických* látek.

U *feromagnetik* jsou zase magnetické dipóly atomu již *spontánně orientovány* v určitých *doménách* a *relativní* permeabilita μ_r závisí jak na magnetickém poli, tak i na teplotě.

Kromě *feromagnetik* existují však i *antiferomagnetika*, u nichž jsou magnetické dipóly sousedních atomů orientovány *antiparalelně*.

Zvlášť důležitou skupinu představují *ferimagnetika* či *ferity*, u nichž jsou dipólové momenty rovněž orientovány *antiparalelně*, ale v důsledku různé velikosti dipólových momentů u sousedních atomů vzniká jako výsledek *spontánní magnetizace*.

Na magnetickou látku či magnetikum lze tedy pohlížet jako na *spojité* prostředí charakterizované *objemovou hustotou magnetických dipólových momentů* vyjádřenou pomocí *vektoru magnetizace* (nebo magnetické polarizace)

\vec{M} . Vyjádříme-li hustotu *vázaných proudů* (vyvolaných pohybem *vázaných nábojů po uzavřených smyčkách*, jež jsou ekvivalentem *magnetických dipólů*) pomocí magnetické polarizace pro neohrazené magnetikum

$$\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}, \quad (1.84)$$

kde \vec{j}_m je *hustota vázaných proudů*, lze rotorovou rovnici z první série *Maxwellových* rovnic pro *stacionární* pole psát ve tvaru

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) \quad (1.85)$$

nebo po dosazení za \vec{j}_m

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}, \quad (1.86)$$

kde nyní pod proudovou hustotou \vec{j} rozumíme hustotu *volných* proudů vyvolaných v magnetikách pod vlivem *vnějších* zdrojů.

Obdobně jako u dielektrik, můžeme i magnetické látky či magnetika popsat vztahem, jehož jedna část závisí na *volném* prostoru a druhá část na *vektoru magnetizace* \vec{M} , což lze vyjádřit pomocí vektoru \vec{H}

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1.87)$$

nebo psát ve formě (podobně jako u dielektrik)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (1.88)$$

kde \vec{M} je objemová hustota magnetických dipólových momentů a \vec{H} je vektor *intenzity* magnetického pole.

Zavedením vektoru \vec{H} se lze omezit pouze na znalost *hustoty volných proudů*. Na rozdíl od vektoru \vec{B} , který charakterizuje *silové* pole, vektor intenzity magnetického pole \vec{H} , zavedený výše uvedeným způsobem, charakterizuje navíc vliv *vázaných* proudů indukovaných v látce. Vzhledem k tomu, že vektor \vec{M} bude ovlivněn působením vektoru \vec{H} , je možné napsat formálně vztah $\vec{M} \sim \vec{H}$. A protože vektory \vec{H} a \vec{M} mají *stejný* fyzikální rozměr, lze přepsat úměrnost na rovnost zavedením veličiny χ_m , která bude dané prostředím charakterizovat:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Tato *bezrozměrná* veličina χ_m se nazývá *magnetická susceptibilita*. Po dosazení za \vec{M} do (1.88) přejde tato do tvaru

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.89)$$

kde byla zavedena *relativní* permeabilita μ_r vztahem $\mu_r = 1 + \chi_m$. Charakterizace prostředí pomocí veličin \vec{M} , χ_m a μ_r je vzájemně *ekvivalentní*. V praxi se nejvíce používá *materiálový* vztah ve tvaru

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1.90)$$

1.6.3 Anizotropní prostředí

Anizotropní prostředí jsou taková prostředí, jejichž fyzikální vlastnosti závisejí na *směru*. Stejně prostředí může být *izotropní* vzhledem k jednomu fyzikálnímu vlastnostem a *anizotropní* vzhledem k jiným (tak např. při šíření světla považujeme prostředí krystalu za magneticky izotropní, avšak elektricky anizotropní).

Anizotropie může souviset se strukturou prostředí (např. u krystalů) nebo může vzniknout v důsledku použití vnějších polí — elektrického, magnetického, polí pružných deformací, atd.

Všechna v přírodě se vyskytující prostředí lze rozdělit do *tří* základních skupin (v závislosti na *symetrii* tenzorů prostředí).

Do *první* skupiny patří látková prostředí, u nichž lze *navzájem zaměnit* všechny tři hlavní osy, což znamená, že platí

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \quad (1.91)$$

a z optického hlediska se takové prostředí chová jako *izotropní*. Sem patří *krystaly kubické soustavy*.

Ve *druhé* skupině jsou prostředí, jež mají *výrazněn jeden směr* a zbylé dva směry (hlavní osy) jsou *navzájem rovnocenné*, a tudíž i zaměnitelné (*jednoosé krystaly*); to znamená, že pro taková prostředí platí

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}, \quad (\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon) \quad (1.92)$$

Sem patří například *krystaly hexagonální, trigonální a tetragonální*, včetně prostředí původně izotropních, u nichž je anizotropie vyvolána použitím vnějších polí nebo jinou vnější silou (např. mechanickou). Mezi nimi rozlišujeme krystaly *pozitivně* (kladně) jednoosé, jestliže $\varepsilon_{33} > \varepsilon$ a *negativně* (záporně) jednoosé, když $\varepsilon_{33} < \varepsilon$.

Do *třetí* skupiny patří *všechny ostatní krystalické látky*, u nichž platí

$$\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}, \quad (1.93)$$

přičemž existují obecně *dva význačné optické směry*. Proto se taková prostředí nazývají *biaxiální* nebo *dvouosá*.

Materiálové vztahy pro *anizotropní* prostředí se obvykle zapisují v \vec{E}, \vec{H} reprezentaci, tedy

$$\vec{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \vec{E} \quad \vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (1.94)$$

kde $\bar{\varepsilon}, \bar{\mu}$ označují *tenzory* permitivity a permeability.

1.6.4 Elektromagnetická pole v anizotropním prostředí

Interakce elektromagnetického pole s látkou může mít *velmi složitou* formu v závislosti na poli a prostředí.

V případě *harmonicky* proměnných polí lze uvedené závislosti psát ve tvaru

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}) \quad (1.95)$$

$$B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}) \quad (1.96)$$

Reálná prostředí bývají taková, že *tenzorem* je buď $\bar{\varepsilon}(\omega)$ nebo $\bar{\mu}(\omega)$, což znamená, že druhá z těchto veličin je *skalárem*. Proto můžeme materiálové vztahy pro *anizotropní* prostředí psát buď ve tvaru

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}) \quad \vec{B}(\omega, \vec{r}) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega, \vec{r}) \quad (1.97)$$

zde $\mu(\omega)$ je *skalár*, nebo ve tvaru

$$\vec{D}(\omega, \vec{r}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{r}) \quad B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}) \quad (1.98)$$

zde je zase $\varepsilon(\omega)$ *skalárem*.

Zvláštním případem jsou prostředí *magnetoaktivní*, jež patří mezi *anizotropní* prostředí vzniklá pod vlivem *stálého magnetického pole*. V takovýchto případech jsou *tenzory* permitivity nebo permeability *nesymetrické*.

V *magnetoaktivním bezztrátovém* prostředí bude tenzor ε_{ij} *hermitovský*, tudíž

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^* \quad (1.99)$$

Reálná a imaginární část je *symetrická*, respektive *antisymetrická*, tedy

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ji}, \quad \varepsilon''_{ij} = -\varepsilon''_{ji}$$

přičemž

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij} \\ \varepsilon_{ji} &= \varepsilon'_{ji} - i\varepsilon''_{ji} \end{aligned}$$

Stejně vlastnosti má i *tenzor permitivity*.

V případě, kdy *permitivita* je *tenzorem* a *permeabilita* μ *skalárem*, nazývají se taková prostředí *gyroelektrická*. Jako příklad můžeme uvést elektronové *plazma* vložené do silného vnějšího *magnetického pole* \vec{B}_0 . Příslušný tenzor permitivity $\bar{\varepsilon}$ má (pro magnetické pole \vec{B}_0 ve směru osy z) tvar

$$\bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & -i\varepsilon_g & 0 \\ i\varepsilon_g & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \right) \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned} \quad (1.100)$$

Vztah mezi magnetickým polem a materiálovými parametry je vyjádřen pomocí *cyklotronové frekvence*

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m}$$

tak, že maticový člen ε_g je určen, jak ukážeme později, následovně:

$$\varepsilon_g = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)},$$

zde ω_p^2 je *plazmová frekvence* daná výrazem

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0},$$

kde N je hustota elektronů, e je náboj elektronu a m jeho hmotnost.

Bude-li plazma vloženo do nekonečně silného magnetického pole, potom $\varepsilon_g \rightarrow 0$ a plazma se stává jednoosým prostředím, a v tom případě

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_0$$

kdežto

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Abychom dostali výraz pro tenzor permitivity, je třeba vypočítat pohyb elektronů, iontů a neutrálních molekul plazmy v přítomnosti stejnosměrného magnetického pole a střídavých vnějších polí. Výchozími vztahy budou kinetická rovnice pro částice a odpovídající rovnice elektromagnetického pole. Příslušná úloha je velmi složitá, a proto se při řešení jednotlivých konkrétních elektrodynamických úloh používají různá přiblížení.

V případě, že je permeabilita $\bar{\mu}$ tenzorem a permitivita ε skalárem, jedná se o gyromagnetické prostředí. Příkladem může být ferit vložený do stálého magnetického pole. Jeho permeabilita je hermitovským tenzorem, jež je charakterizován příslušnou maticí (analogicky jako u permitivity $\bar{\varepsilon}$)

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

I když zde vystupují imaginární maticové prvky, nejedná se přesto o ztrátové prostředí (neboť tenzor $\bar{\mu}$ je zde tenzorem hermitovským, což je podmínkou bezztrátovosti).

Bude-li $\vec{B} = \vec{0}$ (čili ferit mimo magnetické pole), stane se jeho permeabilita skalární veličinou.

Z dosavadního výkladu plyne, že v případech jak izotropních, tak i anizotropních prostředí, udávají materiálové vztahy závislost mezi dvěma elektrickými a dvěma magnetickými vektory pole, ať jsou parametry prostředí skaláry nebo tenzory. Zjistili jsme rovněž, že vložení látky do elektrického pole dochází k její polarizaci, vložení do magnetického pole pak k její magnetizaci.

1.6.5 Prostředí bianizotropní

Existují však i prostředí, jež se vyznačují současnou závislostí jak na elektrických, tak i magnetických polích. Jsou to prostředí bianizotropní.

Vložení bianizotropních prostředí zároveň do elektrického i magnetického pole dochází současně jak k elektrické polarizaci, tak i k magnetizaci. Magnetoelektrické materiály byly předpovězeny koncem padesátých let a experimentálně pozorovány v roce 1960 u antiferomagnetického oxidu chromu. Později se zjistilo, že dokonce 50 tříd magnetických krystalů projevuje magnetoelektrické vlastnosti.

Protože předpona bi- znamená závislost \vec{B} nebo \vec{D} jak na \vec{E} , tak i na \vec{H} , bylo nutno pro vyjádření této závislosti zavést další parametr ξ . Materiálové

vztahy pro bianizotropní prostředí lze potom psát ve tvaru

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \xi_{ij} H_j \quad (1.102)$$

$$B_i = \xi_{ij} E_j + \mu_{ij} H_j, \quad (1.103)$$

kde $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}, \xi_{ij}$ jsou *diagonální* matice pro *bezeztrátové* prostředí, pro něž

$$\xi_{ij} = \xi_{ji}$$

Budou-li ε, μ *skaláry*, budeme nazývat takováto prostředí *biizotropním*. Pro

$$\bar{\xi} = \bar{0}$$

se prostředí stává *izotropním*. Bude-li $\bar{\xi}$ *ryze imaginární*, pak se jedná o *biizotropní prostředí reciproké*; jinak jsou tato prostředí *nereciproká*.

První bianizotropní prostředí byla realizována ještě v 19. století. Již *Röntgen* zjistil, že *pohybující se dielektrikum se magnetizuje*, je-li vloženo do elektrického pole, a v roce 1905 *Wilson* ukázal, že *pohybující se dielektrikum v homogenním magnetickém poli je elektricky polarizováno*.

Téměř každé prostředí se *při pohybu* stává *bianizotropním* prostředím. Pohybuje-li se *biizotropní* prostředí, stává se rovněž *bianizotropním* prostředím.

Kapitola 2

Speciální teorie relativity a teorie elektromagnetického pole

V druhé polovině 19. století byla už vybudována kromě mechaniky i *klasická elektrodynamika*, jejíž teoretický základ byl zformulován v podobě *Maxwellových rovnic*. Byl už znám *princip relativity* založený na *Galileově transformaci* (známý jako *Galileova relativita*), který postuloval *rovnoprávnost* všech *inerciálních* souřadných soustav, avšak pouze k *mechanickým* jevům v nich probíhajících. Z toho vyplývalo, že *Newtonovy* zákony zůstávají platné ve všech inerciálních soustavách.

Avšak *Galileovu* transformaci prostoru a času, na jejímž základě byly odvozeny transformační zákony mezi pozorovateli, jež jsou (vůči sobě) v relativním pohybu, *nebylo možno úspěšně aplikovat* v případě *Maxwellových* rovnic, které, jak se ukázalo, *nejsou* vůči této transformaci *invariantní*¹, t.j. při přechodu k veličinám z druhé souřadné soustavy *nezachovávají* formálně svůj tvar.

V roce 1904 zkoumal *Lorentz* podmínky invariantnosti *Maxwellových* rovnic ve vakuu mezi pohybujícími se pozorovateli a dospěl k transformačním vztahům, vůči nimž byly *Maxwellovy* rovnice invariantní. Při těchto transformacích sehrála zvláštní roli právě *rychlost světla*. Ukázalo se totiž, že vzájemná rychlost dvou inerciálních soustav *nemůže překročit* tuto horní mez a že při rychlosti $v \ll c$ přecházejí *Lorentzovy* transformace v transformace *Galileovy*. Skutečnost, že rychlost světla zůstávala *konstantní* ve všech inerciálních soustavách, vedla k výsledkům, jež byly v rozporu se závěry plynoucími z *Galileovy* transformace (zákon o skládání rychlostí). Rozpor spočíval v tom, že *Newtonovy* rovnice mechaniky a *Maxwellovy* rovnice elektrodynamiky byly nyní *invariantní* vůči *dvěma různým* transformacím.

Protože *Lorentzova* teorie v konečné podobě již svým způsobem dovedla vysvětlit všechny tehdy známé *makroskopické* elektromagnetické jevy v *pohy-*

¹Přesněji bychom měli v tomto případě použít termínu *kovariantní* a termín *invariantní* ponechat pouze pro případ skalárních veličin, jejichž velikost se při přechodu mezi souřadnými soustavami zachovává. Pro jednoduchost však budeme v dalším textu používat v obou případech termínu *invariantní*.

bujících se tělesech, převzal *Einstein* (Albert, 1879 - 1955) do své nové teorie (*relativity*) celou soustavu základních *Maxwell-Lorentzových* rovnic elektrodynamiky *formálně beze změny*. A přesto je mezi oběma teoriemi *hluboký rozdíl*, především ve fyzikálním pojmání a interpretaci.

Zatímco *Lorentz* setrval na *Newtonových* představách o *absolutním čase* a *prostoru* vyplněném *nehybným éterem*, *Einstein* naproti tomu *neuznával* jeho existenci, a tedy ani existenci absolutního pohybu, a uvažoval pouze o pohybech *relativních*. Tím vlastně odhalil hluboký fyzikální smysl zmíněné invariance *Maxwellových* rovnic vůči *Lorentzově* transformaci, ve které spatřuje projev *nových vlastností* prostoru a času.

Rozborem fyzikálního pojmu *současnosti* dvou prostorově vzdálených událostí *Einstein* ukázal, že je nutno opustit *Newtonovy* představy o prostoru a čase a nahradit je *relativistickým* pojetím, zcela novým a zásadně odlišným.

Relativistické pojetí prostoru a času logicky vedlo k revizi a korekci i samotných *Newtonových* rovnic mechaniky, které se ve světle nového pojmání jeví jen jako *aproximace* relativistických rovnic v případě rychlostí malých ve srovnání s rychlostí světla. Jinak řečeno — pohybové rovnice relativistické mechaniky, jež jsou invariantní vůči *Lorentzovým* transformacím, jsou vlastně *Lorentzovsky* invariantní.

V roce 1905 zformuloval *Einstein* dva *základní postuláty* své *speciální teorie relativity*:

1. Všechny fyzikální děje probíhají stejně ve všech inerciálních soustavách. Z toho plyne, že rovnice, jež popisují fyzikální zákony, musí mít stejný tvar ve všech inerciálních soustavách — musí být invariantní vůči *Lorentzově* transformaci prostoru a času.
2. Mezi rovnoměrně se pohybujícími pozorovateli se prostorové a časové transformace řídí podle *Lorentzových* transformačních zákonů.

Lorentzovy transformační vztahy lze odvodit z předpokladu, že *rychlost světla nezávisí na pohybu inerciální soustavy*. V tom případě vlnoplocha světla vyslaného bodovým světelným zdrojem zůstává ve všech těchto soustavách kulovou plochou.

Einsteinova teorie vychází z rozboru měření délek a času v pohybujících se soustavách. Jak jsme již uvedli, podle základního *Einsteinova* postulátu mají rovnice, jež popisují fyzikální zákony, stejný tvar ve všech inerciálních soustavách. Tudíž i *Maxwellovy* rovnice musí mít ve všech inerciálních soustavách *tentýž tvar*, jaký mají podle *Lorentzovy* teorie v systému klidovém vůči éteru. Z toho mimo jiné vyplývá, že se světlo šíří v každé inerciální soustavě *stejnou* rychlostí *c* všemi směry.

Důsledek postulátu invariance *Maxwellových* rovnic povýšil *Einstein* na *princip*, na kterém založil všechny své úvahy, čímž docílil podstatného *zjednodušení* celého postupu při odvození závěrů své teorie. *Einsteinův* princip relativity, založený na *Lorentzově* transformaci, je tedy *speciální teorií relativity*.

Jestliže *Einstein* založil svou teorii na principu stejné rychlosti světla ve všech inerciálních soustavách, znamená to, že mlčky předpokládal, že *neexistuje* přímé působení na dálku, ale také, že *neexistuje* zásadně ani možnost vysílat

signály o větší rychlosti, než je rychlost c . Proto rychlost světla c má v teorii relativity mnohem větší význam — nejde pouze o rychlost šíření elektromagnetických vln ve vakuu. Přisouzením fundamentálního významu rychlosti světla se rozšířila platnost *Lorentzovy* transformace i na ostatní obory fyziky, jinak řečeno — *Lorentzova* transformace zahrnuje fundamentální vlastnosti samotného prostoru a času jako formy existence vesmíru jako takového.

Spojením prostoru a času v jediné *prostorčasové kontinuum* neboli světový prostor zavedl *Minkowski* (Hermann, 1864 - 1919) *metriku*, která se liší od metriky obyčejného (trojrozměrného) prostoru. Proto se říká, že *prostorčas* má metriku *pseudoeukleidovskou*. *Minkowského* geometrické pojetí *Lorentzovy* transformace a spojení *Einsteinových* pojmů relativního prostoru a času ve vyšší pojmovou jednotku — *absolutní prostorčas* — mělo pro další rozvoj teorie relativity mimořádný význam (zavedení obecné *Lorentzovy* transformace). Díky *Minkowského* formulaci bylo možné prokázat *logické opodstatnění teorie relativity*. Novou teorii prostoru a času a úvahy o relativnosti současnosti, kontrakci délek a dilataci času bylo nyní možno nahradit geometrickými konstrukcemi. Na druhé straně *Minkowského* geometrizace *Lorentzovy* transformační grupy měla ten význam, že při relativistické formulaci odpovídajících fyzikálních zákonů (ať *elektrodynamiky* nebo *mechaniky*) umožnila zavedení pojmů *vektorů* a *tenzorů* v *prostorčase* a vybudování nového vektorového a tenzorového počtu pro teorii relativity (zestručnění složkového zápisu operací a rovnic). Význam tenzorů pro formulaci fyzikálních zákonů invariantních vůči *Lorentzovým* transformacím souřadnic spočívá v tom, že rovnice, vyjadřující rovnost dvou tenzorů téhož typu, platí ve všech souřadných systémech, platí-li v jednom z nich (toto plyne z homogenity transformačních rovnic pro složky tenzorů).

Před *Minkowského* prací nebyl znám přesný a obecný tvar základních rovnic makroskopického pole v *pohybujícím se materiálovém* prostředí. Byly známy pouze neúplné a nepřesné rovnice platné pro prostředí magneticky nepolarizovatelné, které se pohybuje malou rychlostí vůči rychlosti světla.

Minkowského zásluhou byla formulace základních rovnic fenomenologické teorie makroskopického elektromagnetického pole v tenzorovém tvaru, rovnic invariantních vůči *Lorentzovým* transformacím. Jsou to rovnice v tenzorovém tvaru, jež platí pro makroskopické pole v libovolném, elektricky i magneticky polarizovatelném látkovém (materiálovém) prostředí v pohybu.

Ze znalosti transformačních vztahů prostoru a času je možno získat transformační relace pro vektory pole a odvodit materiálové vztahy pro různá pohyblivá prostředí.

Musíš se vyhýbat takovému bádání, jehož výsledek umírá v tu chvíli, kdy se rodí.

Leonardo da Vinci

Přesvědčení o existenci vnějšího světa nezávisle na poznávacím subjektu leží v základech každého učení o přírodě.

A. Einstein

Představme si dva fyziky, z nichž každý má laboratoř vybavenou všemi myslitelnými přístroji. Laboratoř jednoho z nich je pod širým nebem a laboratoř druhého je ve vagónu vlaku, který uhání určitým směrem. Princip relativity tvrdí: když oba fyzikové použijí všechny přístroje ke studiu všech zákonů, které v přírodě existují — první fyzik v nepohyblivé laboratoři, druhý ve vagónu — zjistí, že zákony jsou stejné, pohybuje-li se vagón rovnoměrně. Řekneme-li tato tvrzení v abstraktnější formě, pak to vypadá takto: podle principu relativity přírodní zákony nezávisí na translačním pohybu inerciálních souřadných soustav.

A. Einstein

Princip relativity ve spojení s *Maxwellovými* rovnicemi vyžaduje, aby hmotnost byla úměrná energii v tělese obsažené. Světlo odnáší hmotnost. Tato úvaha je veselá a podmaňující. Ale zдалipak se tomu Hospodin nesměje a nevodí mě za nos — to nemohu vědět.

A. Einstein

V roce 1919 se devítiletý *Einsteinův* syn Eduard zeptal otce: „Tati, proč právě ty jsi takový slavný?“ Einstein se rozesmál, pak vážně vysvětlil: „Podívej se na slepého brouka, který leze po povrchu koule. Nevšimne si, že jeho cesta je zakřivená. Mně se poštěstilo, že jsem si toho povšiml.“

A. Einstein

2.1 Prostorová transformace

Teorie *Maxwell-Lorentzova* vyjadřuje základní zákony elektromagnetického pole ve tvaru *parciálních diferenciálních rovnic* pro neznámé funkce souřadnic a času. Vzhledem k tomu, že jde o rovnice značně složitější, než jsou rovnice *Galileo-Newtonovy* mechaniky, musel *Lorentz* hledat jiné východisko pro splnění postulu o neměnnosti tvaru fyzikálních zákonů ve všech inerciálních soustavách.

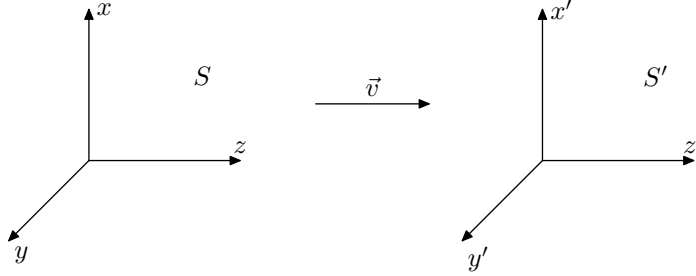
Ve snaze dosáhnout invariance rovnic elektromagnetického pole nahradil *Lorentz Galileovu* transformaci souřadnic transformací, jež respektuje kontrakci délek ve směru pohybující se soustavy. Po prozkoumání takto zavedené transformace zjistil, že ještě nedostal rovnice elektromagnetického pole, jež by měly v *pohybující* se soustavě stejný tvar jako v soustavě *klidové*. Ukázalo se totiž, že samotná kontrakce délek nestačí k tomu, aby pohybující se inerciální soustava byla fyzikálně úplně rovnocenná se soustavou v absolutním klidu.

Při dalším zkoumání *Lorentz* zjistil, že kromě zavedení nových souřadnic x'_i pro pohybující se soustavu je nutno zavést i novou nezávisle proměnnou souřadnici pro čas t' , aby formálně docílil zachování stejného tvaru *Maxwellových* rovnic i v nové pohybující se soustavě.

2.1.1 Postup při odvození

Uvažujme jednoduchý případ dvou souřadných soustav S a S' (S je klidová a S' pohybující se soustava). Nechť jsou osy obou těchto souřadných soustav

rovnoběžné a jejich počátky se v čase $t = 0$ kryjí. Nechť se soustava S' pohybuje vzhledem k soustavě S rovnoměrně rychlostí v ve směru osy z . V každé z těchto soustav necht' je pozorovatel, který je vůči svojí vlastní souřadné soustavě v klidu.



Obrázek 2.1: Uvažované souřadné soustavy

Galileovu transformaci pro uvedený případ lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= y \\ z' &= z - vt, & t' &= t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde poslední rovnost ($t = t'$) vyjadřuje skutečnost, že chod času považujeme za nezávislý na pohybu inerciální soustavy (z uvedených transformací plyne zákon skládání rychlostí).

Vyjdeme-li, podle *Einsteina*, z předpokladu, že rychlost světla nezávisí na pohybu inerciální soustavy, znamená to, že vlnoplocha světla vyslaného bodovým světelným zdrojem zůstává ve všech inerciálních soustavách kulovou plochou. Z této skutečnosti je možno odvodit *Lorentzovy* transformační vztahy mezi klidovou soustavou S a soustavou v pohybu S' ; napíšme nejdříve odpovídající rovnice vlnoploch v těchto soustavách, tedy

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (2.2)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2.3)$$

Vyjdeme-li z platnosti *Galileovy* transformace (2.1), je možno dostat z rovnice (2.3) (s ohledem na vztah pro souřadnici $z' = z - vt$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t'^2 + 2zvt - v^2 t^2 \quad (2.4)$$

Z porovnání rovnice (2.4) s rovnicí (2.2) vidíme, že původní tvar rovnice je možno dostat nahrazením času podle lineární transformace ve tvaru

$$t' = t - az, \quad ct' = c(t - az),$$

potom

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2zvt + v^2 t^2 = c^2 t^2 - 2c^2 atz + c^2 a^2 z^2 \quad (2.5)$$

položením za

$$a = \frac{v}{c^2},$$

lze po přeskupení a vykrácení napsat rovnici (2.5) ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.6)$$

Vydělením z a t výrazem $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$ lze dospět ke shodnému tvaru rovnice s rovnicí (2.2); tím jsme vlastně získali *Lorentzovy* transformace, neboť nyní

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2.7)$$

Lorentzovu transformaci je možno psát i ve tvaru obecnějším pomocí *dyadického tenzorového* zápisu, tedy

$$\vec{r}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct \quad (2.8)$$

$$ct' = \gamma \left(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r} \right), \quad (2.9)$$

kde

$$\bar{\alpha} = \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{(\vec{\beta})^2} = \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \quad (2.10)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{\beta} \vec{\beta} \equiv \overline{\beta\beta} \quad (2.11)$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \beta^2 = \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \quad (2.12)$$

Zde $\bar{\alpha}, \overline{\beta\beta}$ představují *tenzorové dyady* o 3×3 členech, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s je rychlost světla ve vakuu a \mathbf{I} je *jednotková dyada*. Speciální tenzorová dyada $\overline{\beta\beta}$ je definována maticí

$$\overline{\beta\beta} \equiv \begin{pmatrix} \beta_1\beta_1 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ \beta_2\beta_1 & \beta_2\beta_2 & \beta_2\beta_3 \\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3\beta_3 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Předpokládejme znovu pohyb souřadné soustavy S' konstantní rychlostí \vec{v} ve směru osy z . Znamená to, že $\vec{v} \equiv (0, 0, v)$ resp. $\vec{\beta} \equiv (0, 0, \beta)$. Transformační vztahy vyjádřené pomocí dyadického tenzorového zápisu pak můžeme (po rozpisu do složek) vyjádřit ve tvaru (symbolem \emptyset je zde formálně vyznačena *nula*)

$$x' = x + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{\emptyset}{\beta^2} x - \gamma \emptyset \cdot ct = x \quad (2.14)$$

$$y' = y + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{\emptyset}{\beta^2} y - \gamma \emptyset \cdot ct = y \quad (2.15)$$

$$z' = z + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{\beta^2}{\beta^2} z - \gamma \beta \cdot ct = \gamma (z - \beta ct) \quad (2.16)$$

$$ct' = \gamma (ct - \beta z) \quad (2.17)$$

nebo

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.18)$$

Z Lorentzovy transformace plyne, že ani čas není univerzální veličinou — dvě fyzikální události, jež jsou současné v soustavě S' , nebudou zároveň současné i v soustavě S .

Nyní se podíváme na některé vlastnosti zavedených dyad. Dyada $\bar{\alpha}$ je *symetrická* dyada o 3×3 členech

$$\bar{\alpha}^T = \bar{\alpha},$$

kde horní index T označuje *transponovanou* matici. Z této matice odvodíme některé důležité identity. S uvážením

$$\overline{\beta\beta} \cdot \overline{\beta\beta} = \beta^2 \overline{\beta\beta}$$

lze ukázat platnost součiny

$$\begin{aligned} \overline{\alpha^{-1}} \cdot \bar{\alpha} &= \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \left[\mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right] = \\ &= \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta} \cdot \overline{\beta\beta}}{\beta^4} = \\ &= \mathbf{I} + \left[\frac{1}{\gamma} - 1 + \gamma - 1 + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) (\gamma - 1) \right] \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.19)$$

tedy

$$\overline{\alpha^{-1}} = \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2}, \quad \bar{\alpha} = \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \quad (2.20)$$

což lze zapsat i v jiné formě

$$\begin{aligned} \overline{\alpha^{-1}} &= \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} + \left[\left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} - (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right] = \\ &= \bar{\alpha} + \frac{1 - \gamma - \gamma^2 + \gamma \overline{\beta\beta}}{\gamma \beta^2} = \frac{1 - \frac{1}{1 - \beta^2} \overline{\beta\beta}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \bar{\alpha} \end{aligned}$$

tedy

$$\overline{\alpha^{-1}} = \bar{\alpha} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \bar{\alpha} - \gamma \overline{\beta\beta} \quad (2.21)$$

Obdobně lze dostat následující vztahy

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha})^2 &= \left[\mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \left[\mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right] = \mathbf{I} + 2(\gamma - 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} + \\ &\quad + (\gamma - 1)^2 \frac{\overline{\beta\beta} \cdot \overline{\beta\beta}}{\beta^4} = \\ &= \mathbf{I} + 2\gamma \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} - 2 \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} + \\ &\quad + (\gamma^2 - 2\gamma + 1) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \mathbf{I} + \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \\ &= \mathbf{I} + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} = \mathbf{I} + \gamma^2 \overline{\beta\beta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Podobným postupem dostáváme

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}^{-1})^2 &= (\bar{\alpha} - \gamma \bar{\beta}) \cdot \bar{\alpha}^{-1} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}^{-1} - \gamma \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}^{-1} = \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \right] = \\ &= \mathbf{I} - \gamma \bar{\beta} \bar{\beta} - \frac{\bar{\beta} \bar{\beta} \cdot \bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} + \gamma \frac{\bar{\beta} \bar{\beta} \cdot \bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} = \mathbf{I} - \bar{\beta} \bar{\beta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

neboť

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \bar{\beta} \bar{\beta} \cdot \bar{\beta} \bar{\beta} = \beta^2 \bar{\beta} \bar{\beta}$$

Rovněž platí

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \cdot \bar{\alpha} &= \bar{\alpha}^T \cdot \vec{\beta} = \bar{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \left[\mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \vec{\beta} = \\ &= \vec{\beta} + (\gamma - 1) \frac{\bar{\beta} \beta^2}{\beta^2} = \gamma \vec{\beta} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \cdot \bar{\alpha}^{-1} &= \bar{\alpha}^{-1} \cdot \vec{\beta} = \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \vec{\beta} = \\ &= \vec{\beta} + \frac{1}{\gamma} \vec{\beta} - \vec{\beta} \frac{\beta^2}{\beta^2} = \frac{1}{\gamma} \vec{\beta} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lze také ukázat, že pro libovolný vektor \vec{A} platí

$$|\bar{\alpha} \cdot \vec{A}|^2 = |\vec{A}|^2 + \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2 \quad (2.26)$$

K tomu budeme postupovat následovně (s uvážením $\bar{\beta} \bar{\beta} \cdot \vec{A} = \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{A})$):

$$\begin{aligned} |\bar{\alpha} \cdot \vec{A}|^2 &= \left[\left(\mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \right) \cdot \vec{A} \right]^2 = \left[\vec{A} + (\gamma - 1) \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \cdot \vec{A} \right]^2 = \\ &= |\vec{A}|^2 + (\gamma - 1)^2 \left[\frac{\bar{\beta} \bar{\beta} \cdot \vec{A}}{\beta^2} \right]^2 + 2(\gamma - 1) \vec{A} \cdot \frac{\bar{\beta} \bar{\beta}}{\beta^2} \cdot \vec{A} = \\ &= |\vec{A}|^2 + (\gamma^2 - 2\gamma + 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2}{\beta^2} + 2(\gamma - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2}{\beta^2} = \\ &= |\vec{A}|^2 + (\gamma^2 - 2\gamma + 1 + 2\gamma - 2) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2}{\beta^2} = \\ &= |\vec{A}|^2 + (\gamma^2 - 1) \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2}{\beta^2} = \\ &= |\vec{A}|^2 + \frac{1}{1 - \beta^2} - 1 (\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2 = |\vec{A}|^2 + \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{A})^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Bude-li $\bar{\beta}$ antisymetrický tenzor (tenzorová dyada) definovaný maticovým zápisem

$$\bar{\beta} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & \beta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

potom se skalární součin této dyady s libovolným vektorem bude rovnat

$$\bar{\beta} \cdot \vec{A} = \vec{\beta} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{\beta} \quad (2.29)$$

Pro takto definovanou dyadu budou platit následující rovnosti

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} = \overline{\alpha^{-1}} \cdot \bar{\beta} = \bar{\beta} \cdot \overline{\alpha^{-1}} = \bar{\beta} \quad (2.30)$$

neboť lze snadno dokázat, že platí vztah

$$\overline{\beta\beta} \cdot \bar{\beta} = \bar{0}$$

Jelikož platí (s uvážením $\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{A}) = \overline{\beta\beta} \cdot \vec{A}$), že

$$\begin{aligned} \bar{\beta}^2 \cdot \vec{A} &= \bar{\beta} \cdot \bar{\beta} \cdot \vec{A} = \bar{\beta} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{A}) = \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{A}) = \\ &= \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{A}) - \beta^2 \vec{A} = (\overline{\beta\beta} - \beta^2 \mathbf{I}) \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (2.31)$$

plyne odsud srovnáním následující vztah

$$\bar{\beta}^2 = \overline{\beta\beta} - \beta^2 \mathbf{I} \quad (2.32)$$

Vraťme se znovu ke vztahům pro *Lorentzovu* transformaci a odvoďme použitím uvedených vztahů druhou mocninu (čtverec) *intervalu*. Ukážeme, že tato veličina je *invariantem Lorentzovy* transformace:

$$\vec{r}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct \quad (2.33)$$

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (2.34)$$

Vytvořme si druhou mocninu absolutní hodnoty těchto výrazů

$$|\vec{r}'|^2 = |\bar{\alpha} \cdot \vec{r}|^2 - 2 |(\bar{\alpha} \cdot \vec{r}) \cdot (\gamma \vec{\beta} ct)| + |\vec{\beta}|^2 \gamma^2 c^2 t^2 \quad (2.35)$$

$$|ct'|^2 = \gamma^2 c^2 t^2 + |\vec{\beta} \cdot \vec{r}|^2 \gamma^2 - 2ct\gamma^2 |\vec{\beta} \cdot \vec{r}| \quad (2.36)$$

S použitím vztahů pro $|\bar{\alpha} \cdot \vec{A}|^2$ a $\vec{\beta}\bar{\alpha}$ pak získáme hledaný výraz pro rovnost obou intervalů

$$|\vec{r}'|^2 - |ct'|^2 = |\vec{r}|^2 - |ct|^2 \quad (2.37)$$

Tím jsme dokázali, že *interval* je skutečně *invariantem Lorentzovy* transformace.

Mějme nyní dvě události, z nichž jedna (*A*) probíhá v okamžiku t_1 a v bodě (x_1, y_1, z_1) a druhá (*B*) v okamžiku t_2 a v bodě (x_2, y_2, z_2) v soustavě *S*. Vytvoříme-li časové a prostorové vzdálenosti mezi těmito událostmi, budeme mít

$$\Delta l = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_{kA} - x_{kB})^2} \quad (2.38)$$

$$\Delta t = |t_B - t_A| = |t_2 - t_1| \quad (2.39)$$

Po přechodu do soustavy S' najdeme pomocí *Lorentzovy* transformace čas $\Delta t'$ a vzdálenost $\Delta l'$ a zjistíme, že se časový interval mezi dvěma událostmi a prostorová vzdálenost mezi dvěma body mění při přechodu od jedné do druhé inerciální soustavy.

Existuje však výraz, jak jsme výše uvedli, který zůstává konstantní a je invariantem *Lorentzových* transformací, tzn. čtverec či kvadrát intervalu s . Spojením prostoru a času v prostoročasové kontinuum, ve kterém je vzdálenost dvou bodů analogická se vzdáleností dvou bodů v eukleidovském prostoru, dostáváme tzv. světoprostor (světový prostor), který má odlišné vlastnosti od eukleidovského prostoru a nazývá se pseudoeukleidovským nebo *Minkowského* prostorem.

Metrika *Minkowského* prostoru není stejná s metrikou obyčejného eukleidovského prostoru. Zde čtverec prostoru může být veličina kladná, záporná nebo nulová. O imaginárních intervalech říkáme, že jsou časové povahy a o reálných, že jsou prostorové povahy. Případ intervalu imaginárního (čtverec intervalu záporný) odpovídá událostem, jež nemají příčinnou souvislost. Je-li interval nulový, říkáme, že jde o světlopodobný interval (interval světelného charakteru), kdy se jedná o události spočívající ve vyslání a přijetí signálu pohybujícího se rychlostí světla.

Je zajímavé provést srovnání *Lorentzovy* a *Galileovy* transformace pro případ *malých* rychlostí. Z obecných vztahů

$$\vec{r}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct \quad (2.40)$$

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (2.41)$$

za předpokladu, že $\frac{v}{c} \ll 1$ tedy pro

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \doteq 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{\alpha} = \mathbf{I} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \vec{\beta}}{\beta^2} \doteq \mathbf{I} \quad (2.42)$$

potom plyne

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\beta} ct \quad (2.43)$$

$$ct' = ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r} \quad (2.44)$$

Protože \vec{r} může být *velké* i při *malých* rychlostech, znamená to, že součin $\vec{\beta} \cdot \vec{r}$ nemusí být zanedbatelný. Získané transformační vztahy bývají také označovány jako *Lorentzova* transformace *prvního řádu* (FOLT - First Order Lorentz Transformation).

Srovnáním vztahů (2.43) a (2.44) s *Galileovou* transformací času a prostoru (GT)

$$t' = t, \quad \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (2.45)$$

se na první pohled zdá, že GT je limitním případem LT pro malé rychlosti \vec{v} . Ve skutečnosti se *Lorentzova* transformace prvního řádu redukuje na GT pro případ malých rychlostí \vec{v} a pro \vec{r} zanedbatelné ve srovnání s $\frac{ct}{\beta}$, což je stejné s požadavkem, aby $c \rightarrow \infty$.

Uvažované transformace byly provedeny ze soustavy S do soustavy S' . Zpětné či inverzní transformace z S' do S se dostanou pouhou záměnou $\vec{\beta}$ za $-\vec{\beta}$, což fyzikálně znamená, že se soustava S pohybuje rychlostí $-\vec{v}$ vzhledem k soustavě S' . Inverzní transformace z S' do S budou mít tvar

$$\vec{r} = \vec{\alpha} \cdot \vec{r}' + \gamma \vec{\beta} ct' \quad (2.46)$$

$$ct = \gamma (ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{r}') \quad (2.47)$$

kdežto z S do S'

$$\vec{r}' = \vec{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct \quad (2.48)$$

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (2.49)$$

2.2 Maxwell-Minkowského teorie

Základní rovnice fenomenologické teorie makroskopického elektromagnetického pole v tenzorovém tvaru, jež jsou invariantní vůči *Lorentzovým* transformacím, formuloval *Minkowski*. Jsou to rovnice platné pro makroskopická pole v libovolném elektricky i magneticky polarizovatelném látkovém prostředí v pohybu.

Zavedením čtyřrozměrného formalismu zrovnoprávnil *Minkowski* časové a prostorové souřadnice v rámci zvolené metriky jako složky jediného čtyřvektoru. Teprve jeho formulace prokázala opodstatněnost teorie relativity jakožto teorie prostoru a času. Zavedl pojem vektoru a tenzoru v prostoročase a vybudoval nový vektorový a tenzorový počet, jehož význam pro teorii relativity je obdobný významu vektorového a tenzorového počtu v obyčejném (trojrozměrném) prostoru v předrelativistické fyzice.

Čtyřrozměrný formalismus byl zejména vhodný pro charakterizování spojitých soustav o nekonečném počtu stupňů volnosti jako jsou pole (matematicky popisovaná pomocí spojitých funkcí prostoru a času).

Abychom mohli zapsat *Maxwellovy* rovnice v invariantním tvaru, je třeba mít k dispozici pro jednotlivé vektory pole odpovídající transformační vztahy, jež jsou důsledkem *Lorentzovy* transformace prostoru a času, a vyjít z *Minkowského* postulátu, který praví, že makroskopické *Maxwellovy* rovnice jsou *Lorentzovsky* invariantní (jinak řečeno — tyto rovnice je možno zapsat takovým způsobem, že všechny jejich členy mají stejné transformační vlastnosti při *Lorentzově* transformaci).

Uvažujme nejdříve pozorovatele v klidové soustavě S , ve které lze zapsat *Maxwellovy* rovnice ve tvaru

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad (2.50)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.51)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (2.52)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.53)$$

a zákon zachování náboje

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.54)$$

Zvolme nyní pozorovatele v soustavě S' , který se pohybuje rychlostí \vec{v} vzhledem k soustavě S , a aplikujme *Minkowského* postulát, podle něž platí, že *Maxwellovy* rovnice (MR) musí mít *stejný* tvar i v soustavě S' ; můžeme tedy psát MR ve tvaru

$$\nabla' \times \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} = \vec{0} \quad (2.55)$$

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = 0 \quad (2.56)$$

$$\nabla' \times \vec{H}' - \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} = \vec{j}' \quad (2.57)$$

$$\nabla' \cdot \vec{D}' = \rho' \quad (2.58)$$

a zákon zachování náboje

$$\nabla' \cdot \vec{j}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0 \quad (2.59)$$

Jak už bylo dříve uvedeno, vektory \vec{D} a \vec{H} tvoří *excitační tenzor* v čtyřdimenzionálním *Minkowského* prostoru, který obsahuje informace o materiálovém prostředí, zatímco vektory \vec{E} , \vec{B} tvoří *vlastní tenzor pole*. V obou případech se jedná o tenzory druhého řádu.

Pomocí *Minkowského* postulátu můžeme najít transformační vztahy pro všechny proměnné pole, vyjdeme-li z *Lorentzovy* prostoročasové transformace

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (2.60)$$

$$\vec{r}' = \vec{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct \quad (2.61)$$

Pro přepis *Maxwellových* rovnic ze soustavy S do soustavy S' je třeba najít příslušné *transformační operátory* $\frac{\partial}{\partial ct}$ a $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial ct} &= \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial ct} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial ct} = \frac{\partial}{\partial ct'} \gamma - \gamma \vec{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} = \\ &= \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \vec{\beta} \cdot \nabla' \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial ct'} \frac{\partial ct'}{\partial \vec{r}} = \vec{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial ct'} \quad (2.63)$$

neboť

$$\vec{r} = \vec{r}(t', \vec{r}'), \quad t = t(t', \vec{r}')$$

Operátory, jež se vyskytují v *Maxwellových* rovnicích v soustavě S , máme nyní vyjádřeny pomocí čárkovaných souřadnic, takže je možno tyto rovnice přepsat do pohybuující se soustavy S' , při současném splnění požadavků, aby tvar *Maxwellových* rovnic zůstal stejný.

Pomocí odvozených operátorů (2.62) a (2.63) hledejme nejdříve tvar rovnice kontinuity v soustavě S' . To znamená, že v rovnici

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.64)$$

nahradíme operátory ∇ a $\frac{\partial}{\partial ct}$ pomocí ∇' a $\frac{\partial}{\partial ct'}$, tedy

$$\left(\bar{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial ct'}\right) \cdot \vec{j} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \vec{\beta} \cdot \nabla'\right) c\rho = 0 \quad (2.65)$$

$$\bar{\alpha} \cdot \nabla' \cdot \vec{j} - \gamma \vec{\beta} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial ct'} + \gamma \frac{\partial c\rho}{\partial ct'} - \gamma \vec{\beta} \cdot \nabla' (c\rho) = 0 \quad (2.66)$$

a po přeskupení

$$\nabla' \cdot (\bar{\alpha} \cdot \vec{j} - \gamma \vec{\beta} c\rho) + \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} (c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j}) = 0 \quad (2.67)$$

Abychom dostali stejný tvar rovnice kontinuity, tj. aby rovnice (2.67) byla *Lorentzovsky* invariantní, musí se proudová hustota \vec{j}' a nábojová hustota ρ' rovnat

$$c\rho' = \gamma (c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j}) \quad (2.68)$$

$$\vec{j}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{j} - \gamma \vec{\beta} c\rho \quad (2.69)$$

Z podmínky *invariantnosti* jsme tak dospěli ke zjištění, že vektor *čtyřproudové hustoty* se transformuje podobně jako *polohový čtyřvektor* \vec{r}'

$$\vec{r}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{r} - \gamma \vec{\beta} ct$$

Ze získaných vztahů zároveň plyne, že i *stacionární* rozložení náboje v soustavě S vyvolává *proudovou hustotu* v soustavě S' .

Nyní zavedeme operátory (2.62) a (2.63) do první série *Maxwellových* rovnic, čímž dostáváme

$$\left(\bar{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta}\right) \times \vec{H} - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \vec{\beta} \cdot \nabla'\right) c\vec{D} = \vec{j} \quad (2.70)$$

$$\left(\bar{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta}\right) \cdot c\vec{D} = c\rho \quad (2.71)$$

K získání transformačních vztahů pro \vec{D}' a \vec{H}' stačí požadovat splnění *invariantnosti* (tj. aby rovnice I. série *Maxwellových* rovnic měly stejný tvar jako v soustavě S), tedy že bude platit

$$\nabla' \times \vec{H}' - \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} = \vec{j}' \quad (2.72)$$

$$\nabla' \cdot \vec{D}' = \rho' \quad (2.73)$$

K nalezení odpovídajících transformačních vztahů pro \vec{H}' a $c\vec{D}'$ využijeme získanou transformační rovnici pro proud a náboj v pohybující se soustavě (2.68), (2.69). Nejdříve hledíme transformační vztah pro $c\vec{D}'$. Použijme k tomu rovnici (2.68)

$$c\rho' = \gamma (c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j})$$

Abychom mohli dosadit za členy na pravé straně této rovnice, vynásobme nejprve rovnici (2.71) součinitelem γ a rovnici (2.70) skalárně $\vec{\beta}$. Po dosazení dostáváme

$$\begin{aligned} & \gamma \left(\vec{\alpha} \cdot \nabla' \cdot c\vec{D} - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta} \cdot c\vec{D} \right) - \gamma \vec{\beta} \cdot \left(\vec{\alpha} \cdot \nabla' \times \vec{H} - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta} \times \vec{H} \right) + \\ & + \gamma^2 \left[\frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta} \cdot c\vec{D} - \vec{\beta} \cdot \nabla' (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) \right] = \gamma (c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j}) = c\rho' \end{aligned} \quad (2.74)$$

Po vzájemném zrušení se dvěma členů s opačnými znaménky a s uvážením

$$\vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H}) = 0 \quad (2.75)$$

přejde rovnice na tvar

$$\gamma \left[(\vec{\alpha} \cdot \nabla') \cdot c\vec{D} - \vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H} - \gamma (\vec{\beta} \cdot \nabla') (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) \right] = c\rho' \quad (2.76)$$

V získaném výrazu (2.76) provedeme zjednodušení členu $\vec{\beta} \cdot (\vec{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H}$ pomocí již zadaného vyjádření pro tenzor $\vec{\alpha}$. Dosazením za $\vec{\alpha}$ lze psát

$$\vec{\beta} \cdot [(\vec{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H}] = \vec{\beta} \cdot \left\{ \left[\nabla' + (\gamma - 1) \vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \nabla'}{\beta^2} \right] \times \vec{H} \right\} \quad (2.77)$$

Jelikož

$$(\gamma - 1) \vec{\beta} \cdot \left[\frac{\vec{\beta} \cdot \nabla'}{\beta^2} \vec{\beta} \times \vec{H} \right] = \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \times \vec{H} = 0, \quad (2.78)$$

dostaneme, že

$$\vec{\beta} \cdot [(\vec{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H}] = \vec{\beta} \cdot (\nabla' \times \vec{H}) \quad (2.79)$$

Rovnici (2.76) lze potom napsat ve tvaru

$$\gamma \left[(\vec{\alpha} \cdot \nabla') \cdot c\vec{D} - \vec{\beta} \cdot (\nabla' \times \vec{H}) - \gamma (\vec{\beta} \cdot \nabla') (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) \right] = c\rho' \quad (2.80)$$

Provedme seskupení členů této rovnice podle $c\vec{D}$; nejdříve upravme část

$$\begin{aligned} & (\vec{\alpha} \cdot \nabla') \cdot c\vec{D} - \gamma (\vec{\beta} \cdot \nabla') (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) = \nabla' \cdot (\vec{\alpha} - \gamma \vec{\beta} \vec{\beta}) \cdot c\vec{D} = \\ & = \nabla' \cdot \overline{\alpha^{-1}} \cdot c\vec{D} \end{aligned} \quad (2.81)$$

neboť, jak víme

$$\vec{\alpha} - \gamma \vec{\beta} \vec{\beta} = \overline{\alpha^{-1}}$$

Po převedení operátoru ∇' před závorku s využitím identity

$$\vec{\beta} \cdot (\nabla' \times \vec{H}) = -\nabla' \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H})$$

dostáváme

$$\nabla' \cdot [\gamma \overline{\alpha^{-1}} \cdot c\vec{D} + \gamma \vec{\beta} \times \vec{H}] = c\rho' \quad (2.82)$$

Podle *Minkowského* postulátu musí být zachován tvar divergenční rovnice pro \vec{D}' v soustavě S' , tedy

$$\nabla' \cdot c\vec{D}' = c\rho' \quad (2.83)$$

Ze srovnání (2.82) a (2.83) tak plyne, že

$$c\vec{D}' = \gamma\bar{\alpha}^{-1} \cdot c\vec{D} + \gamma\vec{\beta} \times \vec{H}$$

A protože vzhledem k (2.29) platí také

$$\vec{\beta} \times \vec{H} = \vec{\beta} \cdot \vec{H},$$

dostáváme hledaný výraz pro transformaci $c\vec{D}'$ ve tvaru

$$c\vec{D}' = \gamma \left(\bar{\alpha}^{-1} \cdot c\vec{D} + \vec{\beta} \cdot \vec{H} \right) \quad (2.84)$$

Zcela analogickým způsobem budeme postupovat při hledání transformačního výrazu pro \vec{H}' . Nyní však musíme vyjít ze vztahu pro \vec{j}'

$$\vec{j}' = \bar{\alpha} \cdot \vec{j} - \gamma\vec{\beta}c\rho \quad (2.85)$$

To znamená, že proudovou hustotu \vec{j}' dostaneme (s použitím pravých stran rovnic (2.70) a (2.71)), když rotorovou rovnici (2.70) vynásobíme zleva tenzorem $\bar{\alpha}$ a divergenční rovnici (2.71) vektorem $\gamma\vec{\beta}$. Po vynásobení a odečtení takto upravených rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha} \cdot \left[(\bar{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H} - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} \vec{\beta} \times \vec{H} - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} (c\vec{D}) + \gamma\vec{\beta} \cdot \nabla' (c\vec{D}) \right] - \\ & - \gamma\vec{\beta} \cdot \left[(\bar{\alpha} \cdot \nabla') (c\vec{D}) - \gamma \frac{\partial}{\partial ct'} (\vec{\beta} \cdot c\vec{D}) \right] = \bar{\alpha} \cdot \vec{j} - \gamma\vec{\beta}c\rho = \vec{j}' \end{aligned} \quad (2.86)$$

Po přeskupení a úpravě budeme mít

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha} \cdot \left[(\bar{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H} \right] + \gamma\bar{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} - \gamma\vec{\beta} \cdot (\bar{\alpha} \cdot \nabla') c\vec{D} + \\ & + \frac{\partial}{\partial ct'} \left[-\gamma\bar{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H}) - \gamma\bar{\alpha} \cdot c\vec{D} + \gamma^2\vec{\beta}\vec{\beta} \cdot c\vec{D} \right] = \vec{j}' \end{aligned} \quad (2.87)$$

Nejdříve postupně upravíme první člen na levé straně rovnice (2.87):

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha} \cdot \left[(\bar{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H} \right] = \bar{\alpha} \left\{ \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta}\vec{\beta} \right) \cdot \nabla' \right] \times \vec{H} \right\} = \\ & = \bar{\alpha} \cdot \left\{ \nabla' \times \vec{H} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} \right\} = \\ & = \left(\mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \vec{\beta}\vec{\beta} \right) \cdot \left\{ \nabla' \times \vec{H} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} \right\} = \\ & = \nabla' \times \vec{H} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \left[(\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} + \vec{\beta}\vec{\beta} \cdot (\nabla' \times \vec{H}) \right] + \\ & \quad + \frac{(\gamma-1)^2}{\beta^4} \vec{\beta}\vec{\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} = \\ & = \nabla' \times \vec{H} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \left[(\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} - \vec{\beta}\nabla' \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H}) \right] = \\ & = \nabla' \times \vec{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \left[\nabla' \times (\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{H})) \right] = \\ & = \nabla' \times \left\{ \vec{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \left[\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{H}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

S ohledem na

$$\left\{ \nabla' \times \left[\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{H}) \right] \right\} = -(\vec{\beta} \cdot \nabla') \vec{\beta} \times \vec{H} + \vec{\beta} \nabla' \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H}) \quad (2.89)$$

$$\left(\vec{\beta} \right)^2 = \overline{\beta\beta} - \mathbf{I}\beta^2 \quad (2.90)$$

postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \cdot [(\bar{\alpha} \cdot \nabla') \times \vec{H}] &= \nabla' \times \left\{ \vec{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \left[(\vec{\beta})^2 \cdot \vec{H} \right] \right\} = \\ &= \nabla' \times \left[\vec{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \overline{\beta\beta} \cdot \vec{H} + (\gamma-1) \mathbf{I} \cdot \vec{H} \right] = \\ &= \nabla' \times \left(\vec{H} - \frac{\gamma-1}{\beta^2} \overline{\beta\beta} \cdot \vec{H} + \gamma \vec{H} - \vec{H} \right) = \\ &= \nabla' \times \left[\gamma \vec{H} \left(\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \right) \right] = \nabla' \times (\gamma \bar{\alpha}^{-1} \cdot \vec{H}), \end{aligned} \quad (2.91)$$

kde

$$\bar{\alpha}^{-1} = \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \quad (2.92)$$

$$\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{A}) = \overline{\beta\beta} \cdot \vec{A} - \beta^2 \vec{A} = (\vec{\beta})^2 \cdot \vec{A} \quad (2.93)$$

Nyní provedeme úpravu na dalších dvou členech na levé straně rovnice (2.87) – pro jednodušší zápis vynecháme u obou multiplikativní koeficient γ . S ohledem na identity

$$\left(\mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \overline{\beta\beta} \right) \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} = (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \overline{\beta\beta} \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} \quad (2.94)$$

$$\vec{\beta} \left[\left(\mathbf{I} + \frac{\gamma-1}{\beta^2} \overline{\beta\beta} \right) \cdot \nabla' \right] c\vec{D} = (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} + \vec{\beta} \frac{\overline{\beta\beta}}{\beta^2} \cdot \nabla' c\vec{D} (\gamma-1) \quad (2.95)$$

lze získat po úpravách tvar

$$\bar{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} - \vec{\beta} [(\bar{\alpha} \cdot \nabla') c\vec{D}] = (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} - \vec{\beta} (\nabla' \cdot c\vec{D}) \quad (2.96)$$

Výsledek (2.96) lze napsat ve tvaru dvojitého vektorového součinu

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} - \vec{\beta} [(\bar{\alpha} \cdot \nabla') \cdot c\vec{D}] &= \\ &= (\vec{\beta} \cdot \nabla') c\vec{D} - \vec{\beta} (\nabla' \cdot c\vec{D}) = \\ &= -\nabla' \times (\vec{\beta} \times c\vec{D}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Dále upravíme zbývající část na levé straně rovnice (2.87)

$$\begin{aligned} -\gamma \bar{\alpha} \cdot c\vec{D} + \gamma^2 \overline{\beta\beta} \cdot c\vec{D} &= -\gamma (\bar{\alpha} - \gamma \overline{\beta\beta}) \cdot c\vec{D} = \\ &= -\gamma \bar{\alpha}^{-1} \cdot c\vec{D} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Jelikož

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \times c\vec{D} &= \vec{\beta} \cdot c\vec{D}, \\ \vec{\beta} \times \vec{H} &= \vec{\beta} \cdot \vec{H}, \\ \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{H}) &= \vec{\beta} \times \vec{H} = \vec{\beta} \cdot \vec{H}\end{aligned}$$

dostáváme nakonec (s opětovným zahrnutím koeficientu γ u dvojitého vektorového součinu)

$$\nabla' \times (\gamma \overline{\alpha^{-1}} \cdot \vec{H} - \gamma \vec{\beta} \times c\vec{D}) - \frac{\partial}{\partial ct'} (\gamma \overline{\alpha^{-1}} \cdot c\vec{D} + \gamma \vec{\beta} \times \vec{H}) = \vec{j}' \quad (2.99)$$

nebo

$$\nabla' \times \underbrace{(\gamma \overline{\alpha^{-1}} \cdot \vec{H} - \gamma \vec{\beta} \cdot c\vec{D})}_{\vec{H}'} - \frac{\partial}{\partial ct'} \underbrace{(\gamma \overline{\alpha^{-1}} \cdot c\vec{D} + \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{H})}_{c\vec{D}'} = \vec{j}' \quad (2.100)$$

Z požadavku invariantnosti *Maxwellových* rovnic plyne, že musí platit i v soustavě S' stejný tvar téže rovnice, tedy

$$\nabla' \times \vec{H}' - \frac{\partial}{\partial ct'} c\vec{D}' = \vec{j}' \quad (2.101)$$

To znamená, že výraz v první závorce na levé straně rovnice (2.100) se musí rovnat intenzitě magnetického pole v soustavě S' , čili že to musí být \vec{H}' , kdežto druhý výraz na levé straně téže rovnice se musí rovnat (jak již bylo odvozeno) vektoru elektrické indukce \vec{D}' v téže soustavě S' . Nakonec dostáváme hledané vztahy v soustavě S'

$$c\vec{D}' = \gamma (\overline{\alpha^{-1}} \cdot c\vec{D} + \vec{\beta} \cdot \vec{H}) \quad (2.102)$$

$$\vec{H}' = \gamma (\overline{\alpha^{-1}} \cdot \vec{H} - \vec{\beta} \cdot c\vec{D}), \quad (2.103)$$

což je možno zapsat v maticové formě

$$\begin{bmatrix} c\vec{D}' \\ \vec{H}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \overline{\alpha^{-1}} & \vec{\beta} \\ -\vec{\beta} & \overline{\alpha^{-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\vec{D} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

(ve všech výpočtech bylo použito identit $\vec{\beta} \cdot \vec{A} = \vec{\beta} \times \vec{A}$).

Obdobným způsobem se postupuje při odvození transformačních vztahů pro vektory \vec{E} , $c\vec{B}$. Vydeme z II. série *Maxwellových* rovnic

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

a dosazením za operátory ∇ a $\frac{\partial}{\partial ct}$

$$\nabla = \vec{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial ct'} \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial ct} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \vec{\beta} \cdot \nabla' \right) \quad (2.106)$$

dostaneme

$$\left(\bar{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial ct'}\right) \times \vec{E} + \gamma \left(\frac{\partial}{\partial ct'} - \vec{\beta} \cdot \nabla'\right) \cdot c\vec{B} = \vec{0} \quad (2.107)$$

$$\left(\bar{\alpha} \cdot \nabla' - \gamma \vec{\beta} \frac{\partial}{\partial ct'}\right) \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.108)$$

Po provedení příslušných operací a po úpravách dostaneme, že

$$\vec{E}' = \gamma \left(\bar{\alpha}^{-1} \cdot \vec{E} + \vec{\beta} \cdot c\vec{B}\right) \quad (2.109)$$

$$c\vec{B}' = \gamma \left(-\vec{\beta} \cdot \vec{E} + \bar{\alpha}^{-1} \cdot c\vec{B}\right), \quad (2.110)$$

což lze napsat v maticové formě

$$\begin{bmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} \bar{\alpha}^{-1} & \vec{\beta} \\ -\vec{\beta} & \bar{\alpha}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

Z odvozených transformačních vztahů pro vektory pole $c\vec{D}, \vec{H}, c\vec{B}, \vec{E}$ lze dostat, že složky pole *rovnoběžné* s rychlostí zůstávají *beze změny*, zatímco *kolmé* složky se *mění* podle odpovídajících transformačních vztahů. Toto lze ukázat následovně.

Každou z veličin pole vyjádříme jako součet paralelní a kolmé složky vzhledem k rychlosti $\vec{\beta}$. Uvažme nejdříve transformační vztah pro paralelní složku \vec{E}'_{\parallel} ($\vec{\beta} \equiv \vec{\beta}_{\parallel}$)

$$\vec{E}'_{\parallel} = \gamma \left(\bar{\alpha}^{-1} \cdot \vec{E}_{\parallel} + \vec{\beta} \cdot c\vec{B}_{\parallel}\right) \quad (2.112)$$

Jelikož

$$\vec{\beta} \cdot c\vec{B}_{\parallel} = \vec{\beta} \times c\vec{B}_{\parallel}, \quad \text{a} \quad \vec{\beta} \parallel \vec{B}_{\parallel} \quad (2.113)$$

zůstává na pravé straně rovnice (2.112) jen první člen, tedy

$$\vec{E}'_{\parallel} = \gamma \bar{\alpha}^{-1} \cdot \vec{E}_{\parallel} = \gamma \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{\beta^2}\right] \cdot \vec{E}_{\parallel} \quad (2.114)$$

Vyjádříme intenzitu pole \vec{E} *rovnoběžnou* s vektorem $\vec{\beta}$ následovně

$$\vec{E}_{\parallel} = a\vec{\beta}$$

Protože

$$\vec{\beta}\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} \cdot \mathbf{I} = \beta^2 \vec{\beta}$$

dostáváme, že

$$\vec{\beta}\vec{\beta} \cdot a\vec{\beta} = a\vec{\beta}\beta^2 = \beta^2 \vec{E}_{\parallel} \quad (2.115)$$

Po dosazení do (2.114) bude

$$\vec{E}'_{\parallel} = \gamma \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{\beta^2}\right] a\vec{\beta} = \gamma a\vec{\beta} + a\vec{\beta} - \gamma a\vec{\beta} = \vec{E}_{\parallel} \quad (2.116)$$

tedy

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$$

Obdobné výsledky dostaneme pro všechny ostatní složky vektorů pole, jež jsou *rovnoběžné* s vektorem $\vec{\beta}$

$$\vec{D}'_{\parallel} = \vec{D}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel} \quad (2.117)$$

Jak to bude vypadat v případě *kolmých* složek? Pro kolmou složku \vec{E}_{\perp} lze psát ve shodě s výchozí rovnicí pro \vec{E}'

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \gamma \left[\overline{\alpha^{-1}} \cdot \vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \cdot c\vec{B}_{\perp} \right] = \\ &= \gamma \left\{ \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{\beta^2} \right] \cdot \vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times c\vec{B}_{\perp} \right\} = \\ &= \gamma \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times c\vec{B}_{\perp} \right) \end{aligned} \quad (2.118)$$

neboť zde

$$\vec{E}_{\perp} = a\vec{\beta}_{\perp}, \quad \overline{\beta\beta} \cdot \vec{\beta}_{\perp} = \vec{0}$$

Obdobné vztahy dostaneme i pro ostatní *kolmé* složky vektorů pole

$$c\vec{D}'_{\perp} = \gamma \left(c\vec{D}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{H}_{\perp} \right) \quad (2.119)$$

$$c\vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(c\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp} \right) \quad (2.120)$$

$$\vec{H}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{H}_{\perp} - \vec{\beta} \times c\vec{D}_{\perp} \right) \quad (2.121)$$

Srovnáme-li získané výsledky pro *příčné* a *podélné* složky vektorů elektromagnetického pole s výsledky pro transformaci prostoročasových souřadnic, lze vidět, že se zde mění *kolmé* složky, kdežto *kolmé souřadnice* zůstávají *neměnné* a mění se pouze *souřadnice rovnoběžné* se směrem rychlosti.

V případech malých rychlostí je možno položit $\gamma = 1$. V tom případě je

$$\overline{\alpha^{-1}} = \mathbf{I} + \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) \frac{\vec{\beta}\vec{\beta}}{\beta^2} \doteq \mathbf{I} \quad (2.122)$$

a odpovídající *Lorentzovu* transformaci prvního řádu (FOLT) lze popsat transformační maticí ve tvaru

$$\begin{bmatrix} c\vec{D}' \\ \vec{H}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{\beta} \\ -\vec{\beta} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\vec{D} \\ \vec{H} \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{\beta} \\ -\vec{\beta} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Galileova transformace se dostane z odvozených vztahů pro vektory pole, položíme-li $c \rightarrow \infty$ a $\gamma = 1$, potom bude

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{\beta} \times c\vec{B} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.125)$$

$$c\vec{B}' = c\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E} = c\vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}, \quad (\vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (2.126)$$

$$\vec{D}' = \vec{D} \quad (2.127)$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \ll 1 \quad (2.128)$$

Jak je vidět ze získaných výsledků, u obou transformací — *Lorentzovy* i *Galileovy* — dochází k vytváření elektrického pole v soustavě S' , i kdyby v soustavě S existovalo jen magnetické pole. Tedy i pro $\vec{E} = \vec{0}$ bude v soustavě S' intenzita elektrického pole \vec{E}' nenulová

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.129)$$

což je ve shodě se zkušeností, že se v pohybujícím vodiči *indukuje napětí*, má-li jeho rychlost *nenulovou* složku *kolmou* k siločarám magnetického pole \vec{B} .

Z *Lorentzovy* transformace rovněž plyne, že v soustavě S' bude magnetické pole nenulové i v případě, kdy v soustavě S bude existovat jen pole elektrické. Zároveň to znamená, že magnetické pole je důkazem pohybu soustavy S' (stacionární elektron pozorován z pohybující se soustavy vyvolává magnetické pole). Ze vztahu pro kolmou složku \vec{B}'_{\perp} plyne, že

$$c\vec{B}'_{\perp} = -\gamma\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp}, \quad \text{pro } \vec{B} \equiv \vec{0} \quad (2.130)$$

Avšak podle *Galileovy* transformace dostáváme jiný výsledek. Magnetické pole v soustavě S' je nenulové pouze v případě, kdy i v soustavě S bude magnetické pole \vec{B} nenulové, tedy podle GT

$$\vec{B}' = \vec{B}$$

Zavedení matice \mathbf{L}_G

Pro jednoduchost zápisu dříve odvozených transformačních vztahů vektorů polí se formálně zavádí transformační matice \mathbf{L}_G , jež má 6×6 členů; transformační vztah pro $(\vec{E}, c\vec{B})$ lze potom zapsat následovně

$$\begin{bmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{bmatrix} = \mathbf{L}_G(\vec{\beta}) \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Inverzní transformace se získá inverzí $\mathbf{L}_G(\vec{\beta})$, což odpovídá případu, kdy nahradíme $\vec{\beta}$ pomocí $-\vec{\beta}$. Lze dokázat, že platí

$$\mathbf{L}_G^{-1}(\vec{\beta}) = \mathbf{L}_G(-\vec{\beta}) = \gamma \begin{bmatrix} \overline{\alpha^{-1}} & -\overline{\beta} \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha^{-1}} \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

jinak řečeno — inverze *Lorentzovy* transformace je fyzikálně ekvivalentní *změně směru rychlosti*.

Jelikož $\overline{\alpha}$ je symetrická matice a $\overline{\beta}$ nesouměrně symetrická matice, platí potom, že

$$\mathbf{L}_G^T = \gamma \begin{bmatrix} \overline{\alpha^{-1}}^T & -\overline{\beta}^T \\ \overline{\beta}^T & \overline{\alpha^{-1}}^T \end{bmatrix} = \mathbf{L}_G, \quad (2.133)$$

kde horní index T označuje *transponovanou* matici. Pro zajímavost uvedme některé další užitečné identity:

$$\mathbf{L}_G^T \cdot \begin{bmatrix} \vec{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \vec{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} \vec{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \vec{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_G^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{L}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

Pomocí uvedených vztahů lze nalézt *invarianty*, tj. takové veličiny, jež jsou invariantní vůči *Lorentzově* transformaci. Jako výsledek lze dostat, že rozdíl velikosti čtverců intenzity pole \vec{E} a $c\vec{B}$ je konstantou nezávislou na pohybu, což znamená, že jde o veličinu stejnou v obou soustavách (S a S'), tedy

$$|\vec{E}'|^2 - |c\vec{B}'|^2 = |\vec{E}|^2 - |c\vec{B}|^2 \quad (2.135)$$

Dalším invariantem je skalární součin vektorů pole \vec{E} a \vec{B} , tedy

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (2.136)$$

Dyadický tenzorový zápis se s výhodou používá při popisu vyzařování *Hertzova* dipólu, *Čerenkovova* záření, apod.

Ve světle již nabytého poznání se nám zdálo to, čeho jsme šťastně dosáhli, téměř samozřejmé a každý inteligentní student to pochopí bez přílišné námahy. Ale hledání v temnu, plné předtuch a trvajících roky, napjatá touha, střídání naděje a skleslosti a konečné proniknutí k pravdě, to zná jen ten, kdo to sám zažil.

A. Einstein

Kapitola 3

Rovinné vlny v homogenním izotropním prostředí

3.1 Rovinné vlny

Řešení vlnových rovnic ve formě *rovinných* vln představuje jedno z *nejjednodušších* řešení. V důsledku *linearity* vlnové rovnice lze libovolné řešení sestavit jako *superpozici* jednoduchých vln, tedy vln rovinných.

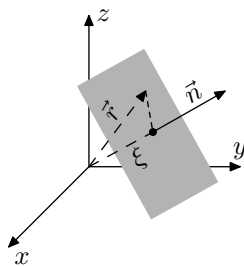
Uvažujme nejprve nejjednodušší případ *rovinných vln* v *izotropním homogenním* prostředí, při *zanedbání absorpce, disperze a nelineárních jevů*. V takovém prostředí je možno popsat vlnový proces pomocí *lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu hyperbolického typu*

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

známé jako *vlnová rovnice*. U rovinné vlny je vlnový proces funkcí *vzdálenosti* odečtené ve směru kolmém na vlnoplochu (který označíme jednotkovým vektorem \vec{n}) a *času* t ; tedy

$$u = u(\xi, t), \quad (3.2)$$

kde $\xi = \vec{r} \cdot \vec{n} = n_x x + n_y y + n_z z$ je rovnice plochy, n_x, n_y, n_z jsou složky jednotkového vektoru v případě volby *kartézské* souřadné soustavy.



Obrázek 3.1: K výkladu pojmu rovinné vlny

V libovolném okamžiku t má funkce u konstantní velikost v rovině

$$\xi = konst = \vec{r} \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

50KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

V případě rovinné vlny je operátor Δ roven $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ a vlnová rovnice (3.1) bude mít tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

Zavedením nových proměnných lze dostat jiný - *kanonický* - tvar vlnové rovnice; v našem případě necht

$$\tau = t - \frac{\xi}{c}, \quad \eta = t + \frac{\xi}{c} \quad (3.5)$$

Po provedení příslušných derivací

$$\frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

dosazením do výchozí vlnové rovnice dostáváme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0 \quad (3.6)$$

Integrací podle η (bude-li integrační konstanta funkcí τ) dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = f_1'(\tau) \quad (3.7)$$

Po integraci podle τ (přičemž nyní bude integrační konstanta funkcí η , integrál je zde uvažován ve smyslu primitivní funkce) dostaneme

$$u = \int f_1'(\tau) d\tau + f_2(\eta) = f_1(\tau) + f_2(\eta) = u_1(\tau) + u_2(\eta), \quad (3.8)$$

kde

$$f_1(\tau) = \int f_1'(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

Po dosazení za τ a η máme

$$u = u_1\left(t - \frac{\xi}{c}\right) + u_2\left(t + \frac{\xi}{c}\right), \quad (3.10)$$

kde u_1, u_2 jsou *libovolné* funkce, jež popisují vlny šířící se v *kladném* a *záporném* směru osy ξ , přičemž argument $t \mp \frac{\xi}{c}$ charakterizuje *fázi* vln (je jí *přímo úměrný*, *není* ale *bezrozměrný*), jež se šíří v *protichůdných* směrech rychlostí c . V případě šíření ve směru vektoru $\pm \vec{n}$ bude možné tuto veličinu vyjádřit ve tvaru

$$t \mp \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{c}$$

Rovinné vlny popsané funkcemi u_1, u_2 si lze rovněž představit ve formě *superpozice harmonických vln*, jestliže funkce u_1, u_2 lze vyjádřit ve formě *Fourierových integrálů*

$$u_{1,2}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{1,2}(\xi, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.11)$$

kde obraz funkce u_1, u_2 je dán vztahem

$$F_{1,2}(\xi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_{1,2}(\xi, t) e^{i\omega t} dt \quad (3.12)$$

Takto definované funkce u_1, u_2 budou řešením vlnové rovnice tehdy, jestliže obrazy $F_{1,2}$ splňují *Helmholtzovu* rovnici

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\xi^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F_{1,2} = 0, \quad (3.13)$$

jež má řešení ve tvaru

$$F_{1,2}(\xi, \omega) = A_{1,2}(\omega) e^{\pm ik\xi}, \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (3.14)$$

To znamená, že *harmonickou rovinnou* vlnu lze vyjádřit pomocí funkce

$$A_{1,2} e^{\pm ik\xi - i\omega t}, \quad (3.15)$$

kde *fáze* vlny v případě kartézských souřadnic bude mít tvar

$$k(n_x x + n_y y + n_z z) - \omega t = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t, \quad \vec{k} = k\vec{n} \quad (3.16)$$

Rovina konstantní fáze je určena vztahem $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{konst.}$ Bude-li \vec{k} *reálný* vektor, bude *amplituda* vlny *konstantní* po celé rovině konstantní fáze. U reálných prostředí (např. vodičích) bývá však \vec{k} vektor *komplexní*. Za předpokladu, že jeho modul bude roven dřívější velikosti $|\vec{k}|$, tedy pro

$$\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}'', \quad (3.17)$$

kde

$$k^2 = (\vec{k}')^2 - (\vec{k}'')^2 + 2i(\vec{k}' \cdot \vec{k}'') = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (3.18)$$

budou funkce $F_{1,2}$ rovněž splňovat *Helmholtzovu* rovnici. Bude-li uvažované prostředí *bez absorpce*, musí být veličina k^2 *reálná*, tedy

$$k'^2 - k''^2 = k^2 \quad (3.19)$$

$$\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = 0 \quad (3.20)$$

a hledané řešení bude mít tvar

$$u(\vec{r}, t) = A e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{-i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r})} \quad (3.21)$$

kde $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$.

Vztahem (3.21) je popsána *neuniformní* rovinná vlna, která nemá shodné roviny *konstantní fáze* a *konstantních amplitud*. Plochy *konstantní fáze* a *konstantní amplitudy* jsou sice *rovinné*, ale *nejsou vzájemně shodné*. V důsledku (3.20) jsou *vzájemně ortogonální*.

Zvláštností *neuniformní* rovinné vlny v případě, že bude platit vztah

$$k'^2 = k^2 + k''^2,$$

52KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

je to, že vlnové číslo neuniformní vlny je *větší* než vlnové číslo vlny uniformní, neboť

$$k'^2 = k^2 + k''^2,$$

tedy

$$k''^2 = \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^2, \quad k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \quad (3.22)$$

a tudíž $\lambda > \Lambda$.

V případě *ztrátového* prostředí bude $k^2(\omega)$ veličina *komplexní*, jak plyne ze vztahu (3.18), takže úhel mezi rovinami stejných fází a amplitud může být obecně libovolný. Ve zvláštním případě, když $\vec{k}' \parallel \vec{k}''$, budou vzájemně shodné roviny konstantních fází a amplitud. To znamená, že neuniformní vlna přechází v uniformní vlnu.

V reálných prostředích mohou probíhat *nevratné* procesy související s *předáním energie* vln částicím prostředí (proces známý jako *disipace*) a rychlost šíření může být funkcí kmitočtu (*disperze*). V takových případech obsahuje vlnová rovnice další *lineární* členy $L(u)$, (jejichž charakter může být různý v závislosti na konkrétních formách interakce elektromagnetických vln s daným prostředím)

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = 0$$

Uvažujme nyní pro jednoduchost vlnovou rovnici ve složkovém tvaru, abychom demonstrovali význam některých parametrů, kterými je možno popsat jevy *disperze* a *útlumu* elektromagnetické vlny,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_3 u = 0, \quad (3.23)$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou parametry, jež jsou v uvažované malé oblasti prostředí konstantní. Provedeme nejdříve rozbor vlivu parametru α_3 ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), tedy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_3 u = 0, \quad (3.24)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$u = u_0 e^{a(\xi \pm vt)} \quad (3.25)$$

a po provedení příslušných derivací

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= u_0 a e^{a(\xi \pm vt)} & \frac{\partial u}{\partial t} &= \pm u_0 a v e^{a(\xi \pm vt)} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= u_0 a^2 e^{a(\xi \pm vt)} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= u_0 a^2 v^2 e^{a(\xi \pm vt)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

dostáváme po vykrácení rovnici pro a , tedy

$$a^2 - \frac{1}{c^2} a^2 v^2 + \alpha_3 = 0$$

odkud

$$a^2 = -\frac{\alpha_3}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (3.27)$$

Hledané řešení bude mít smysl pouze pro $v \neq c$, což znamená, že vlny se budou šířit *jinou* rychlostí, než je rychlost světla c . Příklad $a > 0$ nemá fyzikální smysl, neboť vede k řešení, jež roste nade všechny meze. Naopak pro $a < 0$ bude sice proces tlumen, ale nedochází k šíření, které vzniká jen v případě periodického řešení. Toto nastává pouze pro a^2 komplexní (nebo ryze imaginární).

Bude-li však α_3 funkcí kmitočtu nebo vlnové délky, bude docházet ke změně tvaru vlny a rychlosti jejího šíření. Říkáme, jak uvidíme později, že dochází k *disperzi*, jež je vyvolána prostředím, v němž se vlna šíří.

Při respektování členů s prvními derivacemi ($\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$) budeme hledat řešení ve tvaru

$$u = e^{a\xi + bt} f(\xi, t) \quad (3.28)$$

pro provedení derivace $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a dosazení do výchozí vlnové rovnice (3.23) dostaneme po vykrácení exponenciální funkce

$$\begin{aligned} & a^2 f + 2a \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \left(b^2 f + 2b \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) + \\ & + \alpha_1 \left(a f + \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \alpha_2 \left(b f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \alpha_3 f = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

což po přeskupení dává

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + (2a + \alpha_1) \frac{\partial f}{\partial \xi} + \left(\alpha_2 - \frac{2b}{c^2} \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + \left(\alpha_1 a + \alpha_3 + \alpha_2 b + a^2 - \frac{b^2}{c^2} \right) f = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Při vhodné volbě součinitelů a a b vymizí členy s prvními derivacemi, tedy pro

$$a = -\frac{\alpha_1}{2}, \quad b = \frac{\alpha_2 c^2}{2}$$

a po dosazení bude součinitel u funkce f (poslední člen rovnice (3.30)) roven

$$\alpha_3 - \frac{\alpha_1^2}{2} + \frac{\alpha_2^2 c^2}{2} + \frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{\alpha_2^2 c^2}{4} = \alpha_3 - \frac{\alpha_1^2}{4} + \frac{\alpha_2^2 c^2}{4} \equiv \alpha'_3$$

takže lze nyní dostat obdobný tvar rovnice jako v předcházejícím případě (3.24), tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \alpha'_3 f = 0 \quad (3.31)$$

Obecné řešení homogenní rovnice (3.23) můžeme tedy napsat ve tvaru

$$u = u_0 e^{-\frac{\alpha_1}{2}\xi + \frac{\alpha_2 c^2}{2}t} \cdot e^{\sqrt{\frac{-\alpha'_3}{1 - (\frac{v}{c})^2}}(\xi - vt)},$$

kde v je rovněž rychlost šíření vln a kde součinitelé α_1 a α_2 budou popisovat zeslabení nebo zesílení vln při průchodu prostředím. V obecném případě, kdy platí, že $\alpha'_3 \neq 0$, dochází i k disperzi. Pouze ve zvláštním případě při $\alpha'_3 = 0$ by se vlny šířily *bez disperze*, i kdyby v daném prostředí útlum existoval.

V mládí získej znalosti, aby ti nahradily škodu, kterou přináší stáří. A když myslíš, že stáří bude mít jako pokrm moudrost, chovej se v době svého mládí tak, aby stáří netrpělo hladem.

Leonardo da Vinci

Ani jedno lidské bádání nelze nazvat pravou vědou, jestliže neprojde matematickými důkazy.

Leonardo da Vinci

Některé nejdůležitější procesy učení probíhají tehdy, když se nikdo nedívá, a to cestami, které je velmi těžko vystopovat. Je naivní předpokládat, že si lidé pamatují to, co se jim říká, a že chápou věci, které se jim jasně vysvětlí. Mnohem častěji si lidé pamatují to, co je zajímavá, a chápou ty věci, jejichž pochopení jim dělá radost. Intelektuální vývoj je tedy svázán s rozvojem osobnosti a zjemňování a rozšiřování estetického vnímání je podstatnou částí intelektuálního růstu. Tento druh růstu se nedá zmechanizovat.

E. E. Moise

... nezáleží na tom, jak bezvadný, úplný a jasný je text učebnice nebo skripta, ale studenti musí vědět, že tuto přednášku konám výhradně pro ně a že kvůli nim jsem ochoten všechno znovu přebudovat.

G. Piranian

3.2 Rovinné elektromagnetické vlny v homogenním izotropním prostředí

Mějme prostředí charakterizované materiálovými parametry ε, μ a znovu uvažujme odpovídající soustavu *Maxwellových* rovnic

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (3.32)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho \quad (3.33)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.34)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.35)$$

kde \vec{j}, ϱ jsou hustoty proudu a elektrických nábojů prostředí, jež vzniknou působením elektromagnetického pole. Mezi těmito veličinami platí, jak známo, *rovnice kontinuity*

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad (3.36)$$

Jak již bylo uvedeno v předcházející části pro výpočet elektromagnetického pole v různých prostředích, je třeba uvedenou soustavu rovnic *doplnit* rovnicemi,

které udávají *materiálové vztahy*

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}) \quad (3.37)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \quad (3.38)$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}) \quad (3.39)$$

Získaná *selfkonzistentní* soustava stačí k určení *všech* veličin pole. Vztahy mezi \vec{D} a \vec{E} , \vec{j} a \vec{E} a \vec{B} a \vec{H} závisí na charakteru *interakce* elektromagnetického pole s prostředím a mohou mít různé formy. Tato závislost může být *nelineární*, *nelokální* nebo respektovat *anizotropii*. Uvažujme nejdříve jednodušší případ, kdy charakteristická vnitřní *prostorová* a *časová* měřítká prostředí *neovlivňují* proces šíření. Nechť závislost mezi vektory pole bude *lokální* a *lineární*. V případě *izotropního* a *homogenního* prostředí tak *materiálové vztahy* píšeme ve tvaru

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3.40)$$

kde ε, μ, σ jsou *skaláry* charakterizující *permitivitu*, *permeabilitu* a *vodivost* prostředí.

Nechť $\sigma \neq 0$ (*vodivé* prostředí). Na základě vztahů

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}, \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (3.41)$$

dostáváme po dosazení do *rovnice kontinuity*, že

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad (3.42)$$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{t_0}} \quad (3.43)$$

kde jsme zavedli charakteristický čas $t_0 = \frac{\varepsilon}{\sigma}$. Z toho plyne, že v prostředí s *konečnou vodivostí* bude hustota volných nábojů *klesat exponenciálně* s časem (tím *rychleji*, čím *větší* bude *vodivost* σ). Pomocí zavedených materiálových vztahů lze *Maxwellovy* rovnice napsat ve tvaru (s uvážením $\rho = 0$)

$$\text{rot } \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (3.44)$$

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (3.45)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.46)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (3.47)$$

Provedením rotace na třetí rovnici a po dosazení z první a s ohledem na platnost vztahu

$$\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

bude v případě, že $\text{div } \vec{E} = 0$, platit

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Po dosazení za rot \vec{H} dostáváme rovnici

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.48)$$

Pro $\sigma = 0$ (stále s uvážením $\varrho = 0$) nabude vlnová rovnice pro vektor \vec{E} známý tvar

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.49)$$

Tato vlnová rovnice (ve vektorovém tvaru) představuje vlastně tři skalární vlnové rovnice. Uvažujeme opět případ, kdy intenzita elektrického pole \vec{E} závisí pouze na prostorové souřadnici ξ a čase t (zde obdobně jako v předcházející části $\xi = \vec{r} \cdot \vec{n}$), tedy

$$\vec{E} = \vec{E}(\xi, t)$$

potom

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.50)$$

Každá z kartézských složek \vec{E} (stále uvažujeme kartézskou souřadnou soustavu) splňuje tedy formálně stejnou jednorozměrnou skalární vlnovou rovnici, jež má, jak už jsme poznali, řešení ve tvaru rovinných postupných vln. Rovnice (3.50) popisuje proces šíření vln ve směrech $\pm \vec{n}$ fázovou rychlostí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \equiv v_f = \frac{\omega}{k} \quad (3.51)$$

dvou rovinných vektorových vln, tedy

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E} \left(t \mp \frac{\xi}{v} \right) \quad (3.52)$$

Zcela analogickým způsobem bychom dostali po vyloučení \vec{E} vlnovou rovnici pro \vec{H} a pro stejný případ i řešení ve tvaru

$$\vec{H}_{1,2} = \vec{H} \left(t \mp \frac{\xi}{v} \right) \quad (3.53)$$

Nyní ukážeme, že elektromagnetické vlny v dielektrickém prostředí jsou vlnami příčnými a že vektory \vec{E} a \vec{H} leží v rovině čela vlny. Uvažujme nejdříve vlnu ve směru $+\vec{n}$ a vyjádříme vztah pro divergenci (v jednorozměrném případě)

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{n} \quad (3.54)$$

tedy

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{E}) \quad (3.55)$$

Obdobně vyjádříme rotaci

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (3.56)$$

3.2. ROVINNÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ 57

takže soustava *Maxwellových* rovnic v tomto případě bude mít tvar

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{n} \times \vec{E}] &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial \xi} [\vec{n} \times \vec{H}] &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{E}) &= 0 & \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \cdot \vec{H}) &= 0\end{aligned}\quad (3.57)$$

Jelikož

$$\vec{n} \cdot \vec{E} = E_\xi$$

dostáváme, že

$$\frac{\partial E_\xi}{\partial \xi} = \frac{\partial H_\xi}{\partial \xi} = 0 \quad (3.58)$$

což znamená, že projekce vektoru \vec{E} nebo \vec{H} do směru šíření (směr \vec{n}) *nezávisí* na *souřadnici* (nemůže tedy mít *periodický* charakter v *prostoru*).

Závislost složek elektromagnetického pole na *čase* dostaneme tak, že první dvě rovnice (rotované) vynásobíme *skalárně* směrovým vektorem \vec{n} ; pro složky ve směru ξ budeme mít

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{E}) = -\mu \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.59)$$

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{H}) = \varepsilon \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.60)$$

Jelikož $\vec{n} \cdot \vec{E} = E_\xi$, $\vec{n} \cdot \vec{H} = H_\xi$ dostáváme po dosazení

$$\frac{\partial E_\xi}{\partial t} = \frac{\partial H_\xi}{\partial t} = 0 \quad (3.61)$$

což znamená, že projekce E_ξ, H_ξ *nezávisí* ani na *čase* (nemůže tedy mít *periodický* charakter ani v *čase*). Z tohoto rozboru vyplývá, jako součást elektromagnetické vlny musí být tato složka identicky rovna *nule* (*periodické* kmitání v *podélném* směru *nebude* existovat). Tím jsme dokázali, že vektory \vec{E} a \vec{H} leží v *rovině čela vlny* a že vlna šířící se v *dielektrickém* prostředí bude mít *příčnou* strukturu (*nenulové* jsou pouze *příčné* složky \vec{E}, \vec{H}).

Ještě provedeme analogický rozbor šíření ve *vodivém* prostředí ($\sigma \neq 0$). Ukážeme si, že v případě dostatečně *velkých* σ bude mít pole jen ty složky, které jsou *kolmé* na *směr šíření*. Pro $\sigma \neq 0$ použijeme *Maxwellovu* rovnici ve tvaru

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (3.62)$$

Vynásobme tuto rovnici skalárně vektorem \vec{n} (zde opět použijeme vztah $\nabla \equiv \vec{n} \frac{\partial}{\partial \xi}$)

$$\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (\vec{n} \times \vec{H}) = \varepsilon \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{n} \cdot \vec{E} \quad (3.63)$$

Jelikož levá strana je rovna nule, dostáváme, že

$$\varepsilon \frac{\partial E_\xi}{\partial t} + \sigma E_\xi = 0 \quad (3.64)$$

$$E_\xi = E_\xi(0) e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} \quad (3.65)$$

58KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

kde E_ξ představuje *podélnou* složku intenzity elektrického pole \vec{E} , která *klesá exponenciálně* s časem, a to tím *rychleji*, čím je *větší* vodivost σ . Z toho plyne, že elektromagnetické pole i ve vodivých prostředích má *příčnou* strukturu. V případě *homogenního izotropního* prostředí lze tedy předpokládat řešení ve formě *rovinných* vln vyjádřených pomocí exponenciální funkce

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)},$$

kde \vec{k} je vlnový vektor *rovnoběžný* s jednotkovým vektorem \vec{n} . Po dosazení řešení ve formě rovinných vln do *Maxwellových* rovnic (pro pole *beze zdrojů*) dostaneme soustavu rovnic

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (3.66)$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (3.67)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.68)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.69)$$

Ze získaných vztahů vyplývá, že \vec{k} je *kolmý* jak na \vec{B} , tak i na \vec{D} , \vec{B} je *kolmé* na \vec{k} a \vec{E} , \vec{D} je kolmé na \vec{k} a \vec{H} . Z toho plyne, že vektory \vec{E} , \vec{H} , \vec{n} (nebo \vec{k}) tvoří *pravotočivou* ortogonální soustavu. Vzájemný vztah mezi *intenzitou elektrického a magnetického* pole u *rovinné* vlny lze zjistit následujícím způsobem. Zavedme opět proměnnou

$$\tau = t - \frac{\xi}{v}$$

ve významu souřadnic „místního“ času, spjatého s vlnou a vyjádřeme derivace $\frac{\partial}{\partial \xi}$ a $\frac{\partial}{\partial t}$ pomocí nové proměnné τ

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Po dosazení za $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \xi}$ do rovnice (3.60) dostáváme

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{v} (\vec{n} \times \vec{H}) + \varepsilon \vec{E} \right] = 0 \quad (3.70)$$

odkud

$$\frac{1}{v} (\vec{n} \times \vec{H}) = -\varepsilon \vec{E}, \quad (3.71)$$

kde pro rychlost šíření vlny (*fázovou* rychlost) v platí vztah

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

V daném případě integrační konstantu (integrujeme podle τ) pokládáme rovnou *nule*, neboť uvažujeme jen *harmonicky* proměnná elektrická a magnetická pole. Ve vztahu (3.71) představují \vec{E} a \vec{H} *příčné* složky elektromagnetického pole. Podíl jejich absolutních hodnot (velikostí) se rovná

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z, \quad (3.72)$$

3.2. ROVINNÉ ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ 59

což je závislost, která určuje *kvantitativní* vztah mezi intenzitou elektrického a magnetického pole a má rozměr *impedance*. Jelikož μ a ε jsou materiálové parametry, bude takto určená impedance představovat *impedanci prostředí*, v němž se elektromagnetická vlna šíří. V případě *vakua* je tato hodnota rovna přibližně 377Ω .

Vraťme se znovu k případu *vodivého* prostředí, kdy šíření elektromagnetické vlny je popsáno vlnovou rovnicí (3.48), tj.

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.73)$$

Uvažujeme šíření *rovinné* vlny a nechť

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (3.74)$$

Pro *komplexní amplitudu* \vec{E}_0 po dosazení do (3.73) dostáváme

$$\frac{d^2 \vec{E}_0}{d\xi^2} + \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}_0 = 0 \quad (3.75)$$

Získaný tvar vlnové rovnice se *liší* od rovnice pro *bezeztrátové* prostředí tím, že místo *reálného* vlnového čísla

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$$

máme *komplexní* vlnové číslo

$$k_k^2 = \omega^2 \mu \left(\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) = \omega^2 \mu \varepsilon_k, \quad (3.76)$$

kde ε_k je formálně zavedená *komplexní* permitivita prostředí. Řešení rovnice (3.75) dostaneme ve formě

$$\vec{E}_0 = \vec{A}_1 e^{ik_k \xi} + \vec{A}_2 e^{-ik_k \xi} \quad (3.77)$$

Komplexní vlnové číslo lze vyjádřit pomocí *indexu lomu* n a parametru κ (*koefficient absorpce*), který charakterizuje *rychlost poklesu* amplitudy vlny ve směru šíření, tedy

$$\begin{aligned} k_k &= \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) = k' + ik'', & n &= \frac{c}{v_f} = \frac{ck'}{\omega} \\ k' &= \frac{\omega}{c} n, & k'' &= \frac{\omega}{c} \kappa \end{aligned} \quad (3.78)$$

Po dosazení za k_k budeme mít

$$\vec{E}(\xi, t) = \vec{A}_1 e^{-\frac{\omega}{c} \kappa \xi - i\omega(t - \frac{n}{c} \xi)} + \vec{A}_2 e^{\frac{\omega}{c} \kappa \xi - i\omega(t + \frac{n}{c} \xi)} \quad (3.79)$$

Jako výsledek dostaneme znovu řešení ve formě dvou *postupných rovinných* vln, jejichž amplituda *klesá* ve směru šíření. Známe-li index lomu n , lze určit *fázovou rychlost* šíření v daném prostředí dle vztahu

$$v_f = \frac{c}{n}$$

60KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

K vyjádření *ztrátovosti* prostředí se zavádí další veličina

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \quad (3.80)$$

pomocí které lze vyjádřit druhou mocninu komplexního vlnového čísla k_k^2 následovně

$$\begin{aligned} k_k^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) = \omega^2 \mu \varepsilon (1 + i \operatorname{tg} \delta) = \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\kappa)^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Při šíření rovinné vlny *obecného* profilu ve *vodivém* prostředí bude docházet ke *zkreslení* jejího profilu, protože *fázová rychlost* a *koeficient absorpce* jsou funkcemi *kmitočtu* ($n = n(\omega)$, $\kappa = \kappa(\omega)$). Proto *vodivá* prostředí patří mezi prostředí *disperzní*. Jinak řečeno — velikost *ztrát* a *fázové rychlosti* ve *vodivém* prostředí je určena nejen parametry prostředí (ε, μ, σ), ale *závisí* podstatně i na *kmitočtu*. V případě

$$\operatorname{tg} \delta \gg 1$$

dochází už na *krátkých* vzdálenostech k *rychlému utlumení* vlny, takže vlnový proces vlastně *zaniká*. *Poklesem* amplitudy o veličinu $\frac{1}{e}$ je definována tzv. *hloubka vniku* (nebo se také nazývá *skinovou tloušťkou*). Vztah pro hloubku vniku lze dostat následovně. Vyjdeme z vlnové rovnice pro *vodivé* prostředí

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.82)$$

Za předpokladu, že $\sigma \gg \omega \varepsilon$ lze vlnovou rovnici pro složku ξ napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.83)$$

Pro časově *harmonicky* proměnná pole lze předcházející rovnici napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \xi^2} - i \omega \mu \sigma \vec{E} = 0 \quad (3.84)$$

jež má řešení ve tvaru

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i k_k \xi - i \omega t} \quad (3.85)$$

zde $k_k^2 = i \omega \mu \sigma$; potom

$$k_k = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} + i \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = k' + i k'' = \sqrt{i \omega \mu \sigma} \quad (3.86)$$

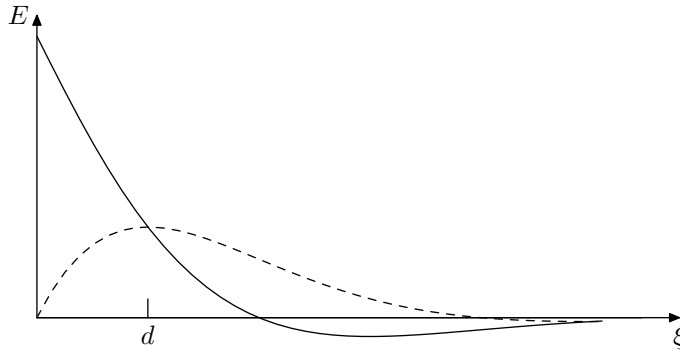
Hloubka vniku je definována jako *převrácená hodnota imaginární části* k_k , tedy

$$d = \frac{1}{\Im(k_k)} = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (3.87)$$

Po dosazení do (3.85) dostáváme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\frac{\xi}{d} - \omega t)} \cdot e^{-\frac{\xi}{d}} \quad (3.88)$$

Veličina d má rozměr *délky*.



Obrázek 3.2: Tvar rovinné vlny ve vodivém prostředí. Plně vykreslená čára představuje $\cos\left(\frac{\xi}{d}\right) e^{-\frac{\xi}{d}}$ a přerušovaná $\sin\left(\frac{\xi}{d}\right) e^{-\frac{\xi}{d}}$

Matematika byla vždy nesmiřitelným nepřítelem nesmyslů.

D. F. Arago

Mnozí badatelé si povšimli, že jasné pochopení problémů nastává během přípravy zpráv, při přednáškách, v diskusích, při poradách, t.j. v procesech systemizace, uspořádávání znalostí, v průběhu logického zpracování. Věda vlastně začíná tam, kde se objevuje touha vyložit vlastní názor druhému.

A. K. Suchotin

Vědec nesmí nikdy zapomínat, že ani činy, ani věk nebo vědecké zásluhy nesmí mít žádný vliv na jeho vědecký styk se žáky, ať jsou jakkoli mladí. Musí s nimi vždy hovořit jako rovný s rovnými. Ve svitu pochodně pravdy mají význam pouze ty vědecké argumenty, které se uplatňují při vzájemné besedě.

N. N. Semjonov

3.3 Tok energie a zákon zachování

Náboje a proudy jsou považovány za *zdroje* pole a zároveň jsou polem *ovlivňovány*. Rovnice pro *Lorentzovu* sílu určuje vztah mezi nabitou částicí s nábojem q , jež se pohybuje rychlostí \vec{v} v elektromagnetickém poli. Jelikož sílu lze vyjádřit jako časovou změnu hybnosti, můžeme psát

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (3.89)$$

Z *Lorentzova* silového zákona (3.89) lze získat rovnici, jež udává *časovou změnu kinetické energie* částice, jež se rovná skalárnímu součinu *Lorentzovy* síly a rychlosti částice \vec{v} tedy

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{v} \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{dW_m}{dt} \quad (3.90)$$

62KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

kde W_m představuje *kinetickou energii* částice. V případě *kontinua*, jež se skládá z toku nábojové hustoty ρ a proudové hustoty \vec{j} , lze rovnici (3.89) a (3.90) napsat ve tvaru

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.91)$$

$$\frac{dW_m}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}, \quad (3.92)$$

kde $\vec{j} = \rho\vec{v}$ – proudová hustota, ρ – nábojová hustota. *Hybnost* a *kinetická energie* popsané rovnicemi (3.91) a (3.92) jsou veličiny vztažené na *jednotku objemu* a tudíž mají význam rovnice pro *hustotu* hybnosti a kinetické energie.

Zákon zachování energie snadno odvodíme pomocí *Maxwellových* rovnic a divergence vektorového součinu $\vec{E} \times \vec{H}$. Po skalárním vynásobení rovnice pro \vec{E} , resp. \vec{H}

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \sigma\vec{E} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad / \cdot \vec{E} \quad (3.93)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad / \cdot \vec{H} \quad (3.94)$$

a po odečtení dostaneme

$$\vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} - \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.95)$$

V případě *izotropního* prostředí platí

$$\vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Jelikož levou stranu rovnice (3.95) lze vyjádřit pomocí $\text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$, můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) &= -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2) = \\ &= -\frac{\partial W_m}{\partial t} - \frac{\partial W_f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (W_m + W_f), \end{aligned} \quad (3.96)$$

kde $W_f = \frac{1}{2} (\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2)$ je hustota energie *samotného* elektromagnetického pole, $\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\partial W_m}{\partial t}$ je časová změna hustoty *kinetické* energie W_m dodané nábojům *vnějším* zdroji. Zavedením *Poyntingova* vektoru $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ můžeme získaný výraz (3.96) napsat ve tvaru

$$\text{div } \vec{S} + \frac{\partial W_c}{\partial t} = 0, \quad (3.97)$$

kde $W_c = W_m + W_f$. Rovnice (3.97) má tvar *konzervačního teoremu*, který je znám jako *Poyntingův* teorem.

Uzavřeme-li *homogenní izotropní* prostředí o objemu V plochou S_p , potom celkový tok výkonu plochou S_p se bude rovnat *úbytku* (obecně *změně*) celkové energie v objemu V obsažené za jednotku času, tedy

$$\int_V \text{div } \vec{S} dV = \oint_{S_p} \vec{S} \cdot d\vec{S}_p = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (W_m + W_f) dV, \quad (3.98)$$

kde vektor \vec{S} představuje *hustotu toku výkonu* (intenzitu). Rovnice (3.98) je *elektromagnetickým ekvivalentem* základního fyzikálního zákona o *zachování energie*.

Lze ukázat, že *hustota toku energie* rovinné vlny (množství energie, které pošlo *kolmo* jednotkou plochy za jednotku času) je rovna součinu *hustoty energie* a *rychlosti* jejího šíření. U *harmonických* vlnových procesů je závislost pole na čase dána vztahem $e^{\pm i\omega t}$, takže *střední hustotu* vektoru \vec{S} za periodu lze vyjádřit ve tvaru (viz *cvičení*)

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \Re (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \langle \vec{S} \rangle \quad (3.99)$$

Jelikož intenzitu pole \vec{E} lze při dosazení za v podle vztahu (3.71) (kde se předpokládalo $\sigma = 0$) vyjádřit jako

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\vec{n} \times \vec{H}) \quad (3.100)$$

nebo úpravou převést do tvaru

$$\vec{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{E} \times \vec{n}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{n} \times \vec{E}), \quad (3.101)$$

dostaneme po dosazení

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \Re (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \Re [\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}^*)] \quad (3.102)$$

a tedy

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \vec{n} = \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2 \frac{\vec{n}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (3.103)$$

kde \vec{n} je *jednotkový* vektor ve směru šíření, $\vec{v} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ je rychlost šíření vlny v prostředí o parametrech ε, μ a $W = \frac{1}{2} \varepsilon |\vec{E}|^2$ je *celková hustota energie* elektromagnetického pole, vyjádřená pomocí *intenzity elektrického pole*.

Po dosazení do rovnice

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = 0 \quad (3.104)$$

dostáváme hledaný vztah

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} (W\vec{v}) = 0, \quad (3.105)$$

což je jiný tvar zákona o *zachování energie*.

Význam vědeckých objevů je třeba hodnotit z hlediska vnitřní logiky rozvoje vědy. To znamená, že je třeba dát přednost výsledkům výzkumů, které vedou k formulování nových přírodních zákonů a objevování jevů překračujících rámec známých přírodních zákonů.

A. Baldin

Téměř všechny základní směry současné přírodovědy jsou nerozlučně spjaty s tou či onou oblastí techniky. Jejich splývání je natolik organické, že je někdy nemožné — hovoříme-li o současné vědě a technice — určit, kde končí věda a začíná technika a naopak, kde končí technika a začíná věda. Příkladem může být jaderná fyzika a „atomová“ energetika, kybernetika a automatika, celá oblast kosmického výzkumu, bionika a mnohé jiné.

B. M. Kedrov

3.4 Polarizace elektromagnetických vln

Tlumicí účinek *konečné vodivosti* izotropního a homogenního prostředí, který se projevuje jako exponenciální *pokles* a je společný *všem* složkám pole, *nemá* vliv na *polarizaci*, a proto jej můžeme *zanedbat*. Jelikož elektromagnetická vlna má *vektorový* charakter, pro její úplný popis je zapotřebí znát kromě *amplitudy*, *fáze* a *kmitočtu* i *polarizaci*. V případě rozboru *rovinných* vln je třeba znát *směry* vektorů \vec{E} a \vec{H} v rovině vlnového čela. V této rovině jsou vektory pole \vec{E} a \vec{H} na sebe vzájemně *kolmé*; jejich skutečná poloha (orientace) může být *obecná* a ještě k tomu se může *měnit* s časem. Způsob, jakým se *koncový bod* vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} pohybuje v rovině vlnového čela, určuje *polarizaci* vlnění. Uvažujeme *kartézské* souřadnice a nechť vektor intenzity elektrického pole má v této soustavě složky do směru x, y

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A_1 \cos(\omega t - kz + \vartheta_1) + \vec{y}_0 A_2 \cos(\omega t - kz + \vartheta_2) \quad (3.106)$$

Uvažujeme-li obě složky v *místě* $z = \frac{\vartheta_1}{k}$, potom lze psát

$$E_x = A_1 \cos \omega t \quad (3.107)$$

$$E_y = A_2 \cos(\omega t + \vartheta_2 - \vartheta_1) = A_2 \cos(\omega t + \vartheta), \quad (3.108)$$

kde $\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1$ je *rozdíl fází*. Po *vyloučení času* t z těchto rovnic

$$\cos \omega t = \frac{E_x}{A_1}, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2} \quad (3.109)$$

po dosazení (3.109) do (3.108) budeme mít

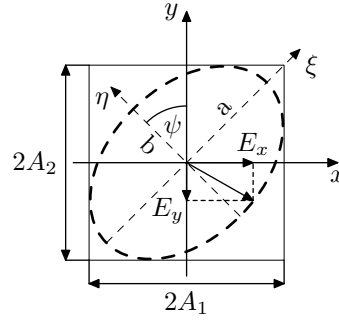
$$\frac{E_y}{A_2} = \cos \omega t \cos \vartheta - \sin \omega t \sin \vartheta \quad (3.110)$$

$$\frac{E_y}{A_2} - \cos \vartheta \frac{E_x}{A_1} = -\sin \vartheta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2} \quad (3.111)$$

Po úpravě dostáváme *obecný tvar* rovnice *elipsy*,

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x E_y}{A_1 A_2} \cos \vartheta = \sin^2 \vartheta \quad (3.112)$$

která vyjadřuje *nejobecnější případ polarizace*.



Obrázek 3.3: Elipticky polarizovaná vlna, a, b — velká a malá poloosa, ψ — úhel orientace mezi osou x a velkou poloosou

Mohou nastat *zvláštní* případy. Bude-li úhel $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ potom dostaneme z rovnice (3.112) vztah

$$\left(\frac{E_x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_2}\right)^2 = 1 \quad (3.113)$$

To znamená, že pro $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi$ budou souřadné osy *shodné* s osami elipsy. Bude-li $A_1 = A_2$, přejde elipsa v *kružnici* v rovině (x, y) , což odpovídá případu *kruhové* polarizace. V případě, že $\vartheta = m\pi, m = 0, 1, 2, \dots$, dostaneme z rovnice (3.112) vztah

$$\left(\frac{E_x}{A_1} \pm \frac{E_y}{A_2}\right)^2 = 0, \quad (3.114)$$

což je rovnice *dvou přímek* — odpovídá případu *lineární* polarizace. *Monochromatická rovinná vlna* je už ze své povahy *elipticky* polarizovaná (konec jejího elektrického vektoru musí v každém bodě prostoru periodicky opisovat jednu z forem elipsy (*přímku, kružnici* nebo *elipsu*), kdežto *nemonochromatická* elektromagnetická vlna může mít *libovolný stupeň polarizace*: od *úplné* polarizace až k *nepolarizovanému* stavu (konec elektrického vektoru se pohybuje zcela *nahodilým* způsobem). V praxi máme často stavy, kdy se polarizace *nevztahuje* ani k jedné z uvedených možností, kdy pole obsahuje jak *polarizované*, tak i *nepolarizované* složky. V takových případech mluvíme o *částečně* polarizovaných vlnách, jež jsou popsány *čtyřmi* parametry, které zavedl v roce 1852 *G. G. Stockes* při zkoumání *částečně* polarizovaného světla.

Existují i případy složité *nahodilé* závislosti *amplitud* $A_1(t), A_2(t)$ a *fázového rozdílu* $\vartheta(t)$ na čase, kdy všechny polohy vektoru \vec{E} v rovině čela vlny jsou *stejně pravděpodobné*, což odpovídá vlnám *nepolarizovaným* (např. *přirozené* světlo).

Stav polarizace harmonické vlny lze charakterizovat *součinitelem polarizace*, který se při použití vyjádření polí v *komplexním* tvaru dá zapsat podílem

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{A_1 e^{i(kz - \omega t - \vartheta_1)}}{A_2 e^{i(kz - \omega t - \vartheta_2)}} = \frac{A_1}{A_2} e^{i\vartheta} \quad (3.115)$$

Je zřejmé, že při *komplexním* P bude mít vlna *eliptickou* polarizaci a při *ryze imaginárním* (a speciálně pro hodnoty $P = \pm i$) bude *kruhově* polarizovaná. V případě *reálného* P bude vlna polarizovaná *lineárně*. *Znaménko* imaginární

části P určuje směr otáčení vektoru \vec{E} v rovině polarizace — znaménko *plus* odpovídá *pravotočivé* a *mínus levotočivé* polarizaci.

Na tomto místě je vhodné zdůraznit, že výše uvedený vztah pro *součinitel polarizace* je v uvedeném tvaru *použitelný* pouze v případě šíření elektromagnetické vlny ve *směru* osy z . Pokud se bude elektromagnetická vlna šířit v *obecném směru* (tedy nikoliv *paralelně* s jednou z *os* souřadného systému), je nutné tento výraz *zobecnit* tak, aby se příslušný *podíl* týkal složek elektrického pole $E_{\perp 1}$ a $E_{\perp 2}$ *kolmých* na *směr šíření* a *kolmých* i *vzájemně* mezi sebou:

$$P = \frac{E_{\perp 1}}{E_{\perp 2}} = \frac{A_{\perp 1}}{A_{\perp 2}} e^{i\vartheta} \quad (3.116)$$

Polarizaci lze určit například *experimentálně*. Bude-li vlna *lineárně* polarizovaná, bude mít *nenulovou* velikost intenzity pouze v *jednom* směru. U *vln kruhově* polarizovaných bude rozložení střední hustoty intenzity *rovnoměrné* po celé ploše, podobně jako u *nepolarizované* vlny. To znamená, že změřením intenzity v různých směrech v rovině (x, y) *nelze* jednoznačně určit, zda je vlna skutečně *kruhově* polarizovaná. K tomu je třeba dosáhnout *fázového zpoždění* u jedné z *pravoúhlých* složek o $\frac{\pi}{2}$ a změnit tak *kruhovou* polarizaci na *lineární* (jestliže předtím byla vlna *kruhově* polarizovaná). V případě *nepolarizované* vlny toto *fázové zpoždění* *nebude* mít žádný viditelný efekt (vlna *zůstane* nepolarizovaná).

Vraťme se nyní k případu *částečně* polarizovaných vln, které jsme definovali jako *superpozici úplně* polarizovaných a *úplně nepolarizovaných* vln. Jde o to, že doposud uvažovaná *monochromatická* vlna je ve skutečnosti *kvazimonochromatická* a lze ji považovat za *superpozici monochromatických* vln s *kmitočty*, jež leží v jistém *intervalu* $\Delta\omega$.

Uvažujme proto *rovinnou úzkopásmovou* (kvazimonochromatickou) *polychromatickou* vlnu šířící se ve směru osy z

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \Re \left\{ \vec{E}_0(t) e^{i(kz - \omega t)} \right\} = \\ &= \Re \left\{ \vec{E}_0(t) e^{i\left(\frac{\omega}{c}z - \omega t\right)} \right\} \end{aligned} \quad (3.117)$$

V důsledku *úzkopásmovosti* se vektor $\vec{E}_0(t)$ za dobu $\frac{1}{\Delta\omega}$ změní *velmi málo*, takže představuje vlastně *pomalou* se měnící funkci času, kterou lze zapsat následovně

$$\vec{E}_0(t) = \vec{x}_0 A_1(t) e^{-i\vartheta_1(t)} + \vec{y}_0 A_2(t) e^{-i\vartheta_2(t)}, \quad (3.118)$$

kde amplitudy $A_1(t), A_2(t)$ a fáze $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$ jsou *pomalou* proměnné funkce času. Nyní lze *složky* intenzity elektrického pole zapsat ve tvaru

$$E_x = A_1(t) \cos[\phi + \vartheta_1(t)] \quad (3.119)$$

$$E_y = A_2(t) \cos[\phi + \vartheta_1(t) + \vartheta(t)] \quad (3.120)$$

$$E_z = 0, \quad (3.121)$$

kde

$$\phi = \omega t - z \frac{\omega}{c}, \quad \vartheta(t) = \vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)$$

nebo ve tvaru

$$E_x = \Re \left\{ A_1(t) e^{ikz - i\vartheta_1(t)} e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.122)$$

$$E_y = \Re \left\{ A_2(t) e^{ikz - i\vartheta_2(t)} e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.123)$$

Zavedením *komplexního* vektoru *amplitudy* \vec{A}^k , kde

$$A_x^k = A_1(t) e^{ikz - i\vartheta_1(t)}, \quad A_y^k = A_2(t) e^{ikz - i\vartheta_2(t)} \quad (3.124)$$

lze složky vektoru intenzity elektrického pole zapsat ve tvaru

$$E_x = \Re \left\{ A_x^k e^{-i\omega t} \right\} \quad (3.125)$$

$$E_y = \Re \left\{ A_y^k e^{-i\omega t} \right\}, \quad (3.126)$$

kde \vec{A}^k je *komplexní amplituda* (fázor) vektoru intenzity elektrického pole. Na rozdíl od komplexní amplitudy *monochromatické* vlny je komplexní amplituda \vec{A}^k *nemonochromatické* vlny funkcí času.

Stav polarizace úzkopásmové monochromatické (polychromatické) vlny lze určit *dvěma alternativními způsoby*: pomocí čtyř *Stockesových* parametrů nebo využitím *koherenční matice* o 2×2 členech, jež charakterizují *stupeň koherence* mezi *příčnými* složkami intenzity elektrického pole.

Prvky koherenční matice lze určit ze vztahu

$$\mathbf{J}_{pq} = \langle A_p A_q^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A_p A_q^* dt, \quad (3.127)$$

kde $p, q \equiv x, y$.

Jsou-li A_p, A_q vzájemně *nezávislé*, potom

$$\langle A_p A_q^* \rangle = 0$$

Koherenční matici lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{xx} & \mathbf{J}_{xy} \\ \mathbf{J}_{yx} & \mathbf{J}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle A_x^k A_x^{k*} \rangle & \langle A_x^k A_y^{k*} \rangle \\ \langle A_y^k A_x^{k*} \rangle & \langle A_y^k A_y^{k*} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{E_x E_x^*} & \overline{E_x E_y^*} \\ \overline{E_y E_x^*} & \overline{E_y E_y^*} \end{bmatrix}, \quad (3.128)$$

kde *pruh* nad jednotlivými členy koherenční matice označuje *středování* podle pozorovacího času, jež má být podstatně *větší* než *perioda kmitu*.

Ze vztahu (3.127) plyne, že

$$\mathbf{J}_{yx} = \mathbf{J}_{xy}^* \quad (3.129)$$

Abychom získali vztahy mezi *Stockesovými parametry* a *prvky* koherenční matice, vyjdeme ze vztahu (3.124) pro komplexní složky vektoru $\vec{A}^k(t)$, které

dosadíme do výrazu (3.127) pro prvky koherenční matice. Po dosazení dostáváme

$$\mathbf{J}_{xx} = \langle A_1^2(t) \rangle \quad (3.130)$$

$$\mathbf{J}_{yy} = \langle A_2^2(t) \rangle \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{xy} &= \langle A_1(t)A_2(t)e^{i\vartheta(t)} \rangle = \langle A_1(t)A_2(t) \cos \vartheta(t) \rangle + \\ &+ i \langle A_1(t)A_2(t) \sin \vartheta(t) \rangle, \end{aligned} \quad (3.132)$$

kde

$$\vartheta(t) \equiv \vartheta_2(t) - \vartheta_1(t) = \vartheta_y(t) - \vartheta_x(t)$$

Přestože *amplitudy* a *fáze* jsou *nahodilými* funkcemi, existují mezi nimi jisté *korelace*. Právě tyto *korelace* nám umožňují určit Stockesovy parametry, a tím i *polarizační* stav vlny. Stockesovy parametry *polychromatické* vlny jsou podle definice *časově středované* veličiny určené vztahy

$$S_0 = \langle A_1^2(t) \rangle + \langle A_2^2(t) \rangle \quad (3.133)$$

$$S_1 = \langle A_1^2(t) \rangle - \langle A_2^2(t) \rangle \quad (3.134)$$

$$S_2 = 2 \langle A_1(t)A_2(t) \cos \vartheta(t) \rangle \quad (3.135)$$

$$S_3 = 2 \langle A_1(t)A_2(t) \sin \vartheta(t) \rangle \quad (3.136)$$

Tyto vztahy představují *zobecnění Stockesových* parametrů pro případ *monochromatické* vlny, pro kterou platí *jednodušší* vztahy

$$S_0 = A_1^2 + A_2^2 \quad (3.137)$$

$$S_1 = A_1^2 - A_2^2 \quad (3.138)$$

$$S_2 = 2A_1A_2 \cos \vartheta \quad (3.139)$$

$$S_3 = 2A_1A_2 \sin \vartheta \quad (3.140)$$

přičemž

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \quad (3.141)$$

V případě *polychromatické* vlny bude

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (3.142)$$

kde znaménko *rovnosti* platí pouze v případě *elipticky* polarizované vlny (libovolné formy).

Ze *srovnání* výrazů pro prvky koherenční matice s výrazy pro *Stockesovy* parametry vyplývá, že

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbf{J}_{xx} + \mathbf{J}_{yy} & S_1 &= \mathbf{J}_{xx} - \mathbf{J}_{yy} \\ S_2 &= \mathbf{J}_{xy} + \mathbf{J}_{yx} & S_3 &= i(\mathbf{J}_{yx} - \mathbf{J}_{xy}) \end{aligned} \quad (3.143)$$

nebo

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{xx} &= \frac{1}{2}(S_0 + S_1) & \mathbf{J}_{yy} &= \frac{1}{2}(S_0 - S_1) \\ \mathbf{J}_{xy} &= \frac{1}{2}(S_2 + iS_3) & \mathbf{J}_{yx} &= \frac{1}{2}(S_2 - iS_3) \end{aligned} \quad (3.144)$$

To znamená, že mezi *Stockesovými* parametry a prvky koherenční matice platí *lineární závislost* a že charakteristiky vlny lze vyjádřit jak pomocí koherenční matice, tak i pomocí *Stockesových* parametrů.

Vzhledem k *lineární závislosti* mezi parametry *Stockese* a maticovými prvky (3.144) lze koherenční matici výsledné vlny \mathbf{J} vyjádřit jako *součet* koherenčních matic *nezávislých* vln šířících se v témže směru, tedy

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \mathbf{J}^{(n)}, \quad (3.145)$$

kde $\mathbf{J}^{(n)}$ je koherenční matice n -té nezávislé vlny.

Ze *Schwartzovy* nerovnosti

$$\int A_p A_p^* dt \int A_q A_q^* dt \geq \int A_p^* A_q dt \int A_p A_q^* dt$$

a z výrazu (3.127) plyne, že

$$\mathbf{J}_{xx} \mathbf{J}_{yy} \geq \mathbf{J}_{xy}^* \mathbf{J}_{xy} \quad (3.146)$$

Jelikož $\mathbf{J}_{xy}^* = \mathbf{J}_{yx}$, dostáváme po úpravě na levé straně nerovnosti formu *determinantu* koherenční matice:

$$\mathbf{J}_{xx} \mathbf{J}_{yy} - \mathbf{J}_{yx} \mathbf{J}_{xy} \geq 0 \quad (3.147)$$

Znaménko *rovnosti* platí pouze v případě na *čase nezávislého* podílu $\frac{A_p}{A_q}$, což znamená, že *determinant* soustavy bude *nulový* pouze v případě *eliptický* polarizované vlny. *Nenulový* determinant odpovídá *částečně* polarizovaným vlnám, tedy

$$\begin{aligned} \det \mathbf{J} &= 0 & \text{pro vlny s } \textit{eliptickou} \text{ polarizací} \\ \det \mathbf{J} &> 0 & \text{pro vlny } \textit{částečně} \text{ polarizované} \end{aligned}$$

Z rozboru *Stockesových* parametrů plyne, že u *nepolarizovaných* vln

$$S_0 \neq 0, \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0$$

Použitím vztahů (3.144) dostaneme pro *nenulové* členy koherenční matice

$$\mathbf{J}_{xx} = \mathbf{J}_{yy} = \frac{1}{2} S_0 \quad (3.148)$$

pomocí nichž vyjádříme koherenční matici *nepolarizovaných vln*, tedy

$$\mathbf{J} = \frac{S_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

70KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

Každý ze *Stockesových* parametrů lze vyjádřit pomocí *orientačního* úhlu ψ (viz obr. 3.3) a pomocí *pomocného* úhlu χ definovaného vztahem ($a \geq b$)

$$\operatorname{tg} \chi = \pm \frac{b}{a}, \quad -\frac{\pi}{4} < \chi \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.150)$$

Odpovídající závislost má tvar (odvození *není* triviální záležitostí)

$$S_1 = S_0 \cos 2\chi \cos 2\psi \quad (3.151)$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\chi \sin 2\psi \quad (3.152)$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\chi \quad (3.153)$$

Použitím těchto vztahů a závislostí mezi Stockesovými parametry (S_0, S_1, S_2, S_3) a členy koherenční matice (3.144) lze dostat koherenční matici pro *elipticky* polarizovanou vlnu ve tvaru

$$\mathbf{J} = \frac{S_0}{2} \begin{bmatrix} (1 + \cos 2\chi \cos 2\psi) & (\cos 2\chi \sin 2\psi + i \sin 2\chi) \\ (\cos 2\chi \sin 2\psi - i \sin 2\chi) & (1 - \cos 2\chi \cos 2\psi) \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

Pro *lineárně* polarizovanou vlnu platí ($b = 0$)

$$\chi = 0$$

Ze vztahu (3.154) tedy pro *lineárně* polarizovanou vlnu, jejíž vektor intenzity elektrického pole leží na přímce svírající s osou x úhel ψ , dostáváme koherenční matici ve tvaru

$$\mathbf{J} = \frac{S_0}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & 1 - \cos 2\psi \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

Pro *kruhově* polarizovanou vlnu ($a = b$)

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{\pi}{4} \quad \text{pravotočivá} \\ \chi &= +\frac{\pi}{4} \quad \text{levotočivá} \end{aligned}$$

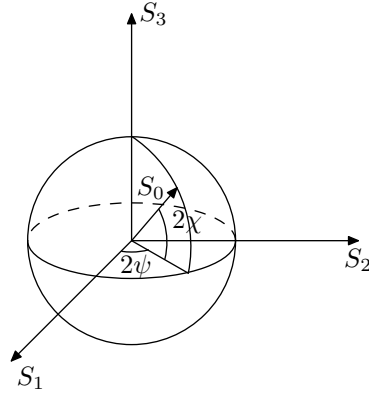
přejde koherenční matice v případě *pravotočivé* polarizace do tvaru

$$\mathbf{J} = \frac{S_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

a pro *levotočivou* polarizaci do tvaru

$$\mathbf{J} = \frac{S_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Z výrazů (3.151) až (3.153) plyne, že S_1, S_2, S_3 lze interpretovat jako *kartézské souřadnice jistého bodu na kouli* (známé jako *Poincarého koule*) o poloměru S_0 , jenž je úměrný *intenzitě* vlny. Poloha libovolného bodu na kouli je určena *sférickými* souřadnicemi (délkou 2ψ a šířkou 2χ). To znamená, že existuje *vzájemně jednoznačný* vztah mezi *bodem* na kouli a *druhem polarizace* vlny.



Obrázek 3.4: Bod znázorněný na Poincarého kouli má délku 2ψ a šířku 2χ (sférické úhlové souřadnice)

K určení *polarizační elipsy monochromatické vlny* je třeba mít zadán soubor *tří nezávislých veličin* (amplitudy A_1, A_2 a fázový rozdíl ϑ nebo *poloosy* a, b a *orientační úhel* ψ mezi velkou poloosou a osou x použité souřadné soustavy). Mezi oběma soubory platí následující vztahy (jejich odvození *není* zcela triviální)

$$a^2 + b^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad (3.158)$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 - A_2^2} \cos \vartheta, \quad 0 \leq \psi < \pi \quad (3.159)$$

Kromě toho *pomocný úhel* χ lze vyjádřit buď pomocí poloos a, b

$$\operatorname{tg} \chi = \pm \frac{b}{a}, \quad -\frac{\pi}{4} < \chi \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.160)$$

nebo pomocí A_1, A_2, ψ

$$\sin 2\psi = \frac{2A_1A_2}{A_1^2 + A_2^2} \sin \vartheta \quad (3.161)$$

U *lineárně polarizovaných vln* je rozdíl fází ϑ buď *nulový* nebo se rovná násobkům π (pomocný úhel χ se rovná nule). To znamená, že body na *rovníku* koule budou odpovídat *lineárně polarizovaným vlnám*. Pro *kruhově polarizované vlny* platí, že

$$A_1 = A_2, \quad \vartheta = \pm \frac{\pi}{2}$$

V závislosti na směru otáčení vektoru intenzity elektrického pole bude platit pro *levotočivou polarizaci*

$$2\chi = \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \chi \leq \frac{\pi}{4}$$

a pro *pravotočivou polarizaci*

$$2\chi = -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi < 0$$

72KAPITOLA 3. ROVINNÉ VLNY V HOMOGENNÍM IZOTROPNÍM PROSTŘEDÍ

Z toho plyne, že *severní* resp. *jižní pól* zobrazují *levotočivou* resp. *pravotočivou kruhovou* polarizaci. Všechny ostatní body koule znázorňují *levotočivou* eliptickou polarizaci na *severní* polokouli a *pravotočivou* na *jižní* polokouli.

Mnozí lidé vědí všechno tak, jako známe hádanku, jejíž vyluštění jsme si přečetli nebo nám je někdo řekl, a to je ten nejhorší způsob vědění, který by si člověk měl osvojovat co nejméně. Měl by se snažit získat takové znalosti, které mu umožní, aby v nutném případě sám odhalil mnohé, co si jiní musejí přečíst nebo poslechnout, aby se to dověděli.

G. H. Lichtenberg

Chtěl bych znovu zdůraznit, že pro správnou výchovu dnešní mládeže je nutné rozvíjet její tvůrčí schopnosti. To se musí dělat s ohledem na zvláštní nadání každého jednotlivce, musí se s tím začít již brzy ve škole a pokračovat na univerzitě. Je to velký úkol, na jehož řešení závisí budoucnost naší civilizace nejen ve vlastní zemi, nýbrž na celém světě. Tento problém není o nic méně důležitý než problém míru a zamezení atomové války. Jestliže se má lidstvo dále rozvíjet ve směru humanismu a kultury, musíme se my, vědci, podílet na řešení otázek, které souvisí s racionální a progresivní výchovou příštích generací.

P. L. Kapica

Technizace všech oblastí společenského života vyžaduje humanizaci technických znalostí. Pro technické vědy je nutné připravovat takové specialisty, kteří budou schopni myslet nejen technicky, ale také ekonomicky, sociálně, esteticky atd.

I. G. Vasiljev

Kapitola 4

Šíření vln v disperzním prostředí

4.1 Úvod

Jak už bylo uvedeno, vztah mezi \vec{D} a \vec{E} , \vec{B} a \vec{H} a \vec{j} a \vec{E} závisí na charakteru interakce elektromagnetického pole s prostředím (látkou) a obecně vzato může mít velmi složitou formu. Rovněž jsme poznali, že uvedená závislost může být nelineární, nelokální, respektovat anizotropii a předcházející vlastnosti („paměť“) prostředí, což znamená, že hodnota vektoru \vec{D} , \vec{B} a \vec{j} může záviset v libovolném bodě \vec{r} a v libovolném okamžiku t na hodnotě vektorů \vec{E} a \vec{H} v jiných bodech prostoru \vec{r}' a v jiných (předcházejících) časech t' .

Taková závislost mezi vektory pole a prostředí svědčí o existenci *frekvenční* a *prostorové disperze*, jež mohou velmi podstatně ovlivnit šíření *nemonochromatických* elektromagnetických vln.

Různé spektrální složky se budou šířit v disperzním prostředí s odlišnými fázovými rychlostmi, což znamená, že v důsledku disperze fázové rychlosti bude docházet ke změně fázových vztahů mezi jednotlivými spektrálními složkami — tedy ke zkreslení tvaru impulsu.

Jestliže v uvažovaném prostředí budou existovat charakteristické vnitřní procesy, jejichž doba trvání je srovnatelná s periodou změny vnějšího pole (kmitočtu ω), budeme tuto disperzi nazývat *frekvenční disperze*, která se nejsilněji projevuje v okolí rezonancí, čili když

$$\omega \approx \omega_{m,n}, \quad (4.1)$$

kde $\omega_{m,n}$ jsou rezonanční kmitočty vnitřních procesů odpovídající přechodům mezi kvantovými úrovněmi.

Tak například závislost indexu lomu nebo dielektrické permitivity na kmitočtu v oblasti světelných vln se nejsilněji projevuje právě v okolí těchto rezonančních kmitočtů $\omega_{m,n}$, kdy dochází i k absorpci vln. V oblasti těchto kmitočtů se projevuje časové zpoždění odezvy na změny velikosti vnějšího pole. To znamená, že pole v uvedeném typu disperzního prostředí závisí na hodnotě přiloženého pole i ve všech předcházejících časech, a proto lze mluvit o prostředí s „pamětí“.

Obdobná situace existuje i v případě šíření vln v prostředích, jež se vyznačují charakteristickým prostorovým parametrem, např. plazma (zde je charakteristickým parametrem *Debyeova* délka), nehomogenní prostředí (měřítkem jsou nehomogenity), tekuté a pevné látky při vysokých kmitočtech, dokonce i vlnovody, kde je charakteristickým parametrem příčný rozměr průřezu. Jestliže tedy pole v daném bodě prostředí závisí na hodnotě pole v sousedních bodech, tj. když vazba vnitřního a přiloženého vnějšího pole je nelokální, mluvíme o *prostorové disperzi*.

To znamená, že se při šíření elektromagnetických vln může disperze projevat dvojím způsobem — jako frekvenční (závislost ε, μ, σ na kmitočtu) a jako prostorová (závislost ε, μ, σ na vlnovém vektoru \vec{k}).

V dalším výkladu se omezíme na disperzní jevy (při šíření harmonických rovinných vln) související pouze s fyzikálními vlastnostmi prostředí.

4.2 Elektromagnetické pole v disperzním prostředí

Doposud jsme se zabývali šířením elektromagnetických vln bez respektování disperzních vlastností prostředí. Výchozí *Maxwellovy* rovnice zachovávají svůj tvar, pokud jde o popis pole bez vnějších zdrojů v libovolném materiálovém prostředí. Víme, že vlastnosti prostředí jsou dány materiálovými relacemi

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E}), \quad (4.2)$$

kde ε, μ, σ jsou konstantní parametry.

U nestacionárních polí (při vysokých kmitočtech) dochází k ovlivňování veličin v bodě pozorování působením polí v jiných bodech prostoru a v jiných časech v důsledku inerce vnitřních procesů a vlivem charakteristické prostorové struktury prostředí. To znamená, že veličiny v bodě pozorování budou závislé na polích, která existovala v jiných místech v dřívějších časech. Odpovídající materiálové relace lze v tom případě zapsat v obecné integrální formě při respektování nelokálnosti, zpoždění a anizotropie pro lineární prostředí ve tvaru

$$D_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \varepsilon_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_j(t', \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.3)$$

$$B_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \mu_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') H_j(t', \vec{r}') d\vec{r}' \quad (4.4)$$

$$j_i(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^t dt' \int \sigma_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') E_j(t', \vec{r}') d\vec{r}', \quad (4.5)$$

kde t' je čas předcházející času pozorování t a \vec{r}' je bod prostoru (obecně jeden z mnoha), ze kterého se pole (v tomto bodě existující v čase t') nějakým způsobem projeví v čase t v místě pozorování \vec{r} .

Uvažujme nyní takové prostředí, jehož vlastnosti jsou v čase konstantní a nemění se ani v prostoru (homogenní prostředí). To znamená, že materiálové charakteristiky ε, μ, σ mohou být vyjádřeny jako funkce rozdílu časových resp. prostorových souřadnic.

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}', & \tau &= t - t' \\ d\vec{R} &= -d\vec{r}', & d\tau &= -dt' \end{aligned} \quad (4.6)$$

Odpovídající vztahy pro D_i, B_i, j_i lze potom zapsat ve tvaru

$$D_i(t, \vec{r}) = \int_0^\infty d\tau \int \varepsilon_{ij}(\tau, \vec{R}) E_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} \quad (4.7)$$

$$B_i(t, \vec{r}) = \int_0^\infty d\tau \int \mu_{ij}(\tau, \vec{R}) H_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} \quad (4.8)$$

$$j_i(t, \vec{r}) = \int_0^\infty d\tau \int \sigma_{ij}(\tau, \vec{R}) E_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} \quad (4.9)$$

Obdobným způsobem lze vyjádřit i polarizaci prostředí

$$P_i(t, \vec{r}) = \varepsilon_0 \int_0^\infty d\tau \int \chi_{ij}(\tau, \vec{R}) E_j(t - \tau, \vec{r} - \vec{R}) d\vec{R} \quad (4.10)$$

vycházejí ze vztahu, že

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \bar{\chi} \vec{E}, \quad (P_i = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_j), \quad (4.11)$$

kde χ_{ij} jsou složky tenzoru elektrické susceptibility χ .

Vyjádríme-li $\vec{E}(\vec{r}, t)$ jako superpozici rovinných vln

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\omega \quad (4.12)$$

a použijeme-li Fourierovu transformaci, dostaneme následující vztahy pro \vec{D} a \vec{B}

$$D_i(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j(\omega, \vec{k}) \quad (4.13)$$

$$B_i(\omega, \vec{k}) = \mu_{ij}(\omega, \vec{k}) H_j(\omega, \vec{k}) \quad (4.14)$$

přičemž

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon_0 \left[\delta_{ij} + \int_0^\infty d\tau \int \chi_{ij}(\tau, \vec{R}) e^{i(\omega\tau - \vec{k} \cdot \vec{R})} d\vec{R} \right], \quad (4.15)$$

kde δ_{ij} je *Kroneckerův* symbol.

V obecném případě závisí složky tenzoru permitivity na vlnovém vektoru \vec{k} a na kmitočtu vlny ω . Obdobné vztahy lze získat i pro permeabilitu a vodivost, tedy

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}(\omega, \vec{k}), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\omega, \vec{k}) \quad (4.16)$$

Z toho plyne, že se při šíření vln bude disperzní závislost projevovat dvojným způsobem: jako frekvenční disperze a prostorová disperze.

Při šíření vln v oblasti optického pásma v prostředí s charakteristickým parametrem $a \ll \lambda$ ($\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$) můžeme zanedbat prostorovou disperzi. Při úplném zanedbání veličiny, jež obsahuje malý parametr $\frac{a}{\lambda}$, bychom nezachytili některé jevy, jež vznikají při šíření elektromagnetických vln.

4.2.1 Frekvenční disperze permitivity $\varepsilon(\omega)$

V případě frekvenční disperze budou složky tenzoru permitivity $\varepsilon_{ij}(\omega)$ záviset na kmitočtu.

V izotropním prostředí je $\varepsilon(\omega)$ skalárem, jehož velikost je dána vztahem

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right], \quad (4.17)$$

kde $\chi(\tau)$ je veličina *reálná*. Funkce $\varepsilon(\omega)$ zde bude *komplexní* funkcí tvaru

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (4.18)$$

přičemž

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega) \implies \varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega) \quad (4.19)$$

To znamená, že $\varepsilon'(\omega)$ bude funkcí *sudou* a $\varepsilon''(\omega)$ funkcí *lichou*. Tytéž úvahy platí i pro vodivost $\sigma(\omega)$, tedy

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega) \quad (4.20)$$

Bude-li se kmitočet elektromagnetického vlnění blížit vlastním kmitočtům prostředí, bude postupně mizet rozdíl mezi vlastnostmi dielektrik a vodičů. To znamená, že existence imaginární části permitivity v prostředí je z makroskopického hlediska totéž, co existence vodivosti, neboť v obou případech se jedná o ztráty vyvolané tepelným vyzařováním. Proto je možno elektrické vlastnosti látky charakterizovat pouze jedinou veličinou — komplexní dielektrickou permitivitou

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \right) = \\ &= \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) + i\left(\frac{\sigma'}{\omega} + i\frac{\sigma''}{\omega} \right) = \\ &= \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega} + i\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma'}{\omega} \right) = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

kde jsme formálně zavedli

$$\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\sigma''}{\omega}, \quad \sigma = \sigma' + \omega\varepsilon'' \quad (4.22)$$

Budou-li kmitočty narůstat až k $\omega \rightarrow \infty$, bude komplexní permitivita stejná pro libovolné látkové prostředí. Z výrazu (4.17) pro $\omega \rightarrow \infty$ dostáváme

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\chi(0)}{i\omega} = 0 \quad (4.23)$$

tedy

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) \longrightarrow \varepsilon_0,$$

což znamená, že se komplexní permitivita $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ pro $\omega \rightarrow \infty$ blíží ε_0 , jak plyne ze vztahu (4.17). Toto chování permitivity při velmi vysokých kmitočtech lze

vysvětlit pomocí jednoduché fyzikální úvahy. Při $\omega \rightarrow \infty$ je kmitočet vlny velký ve srovnání s vlastními kmity elektronů v atomech látky, takže je možno elektrony považovat za volné.

Hledejme výraz pro permitivitu prostředí, v němž jsou tyto volné elektrony pod vlivem časově harmonicky proměnného pole

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (4.24)$$

Pohybová rovnice elektronu, na nějž působí jen intenzita elektrického pole \vec{E} (při $v \ll c$ lze zanedbat vliv magnetického pole), má tvar

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (4.25)$$

Řešením této rovnice dostaneme

$$\vec{r} = -\frac{e \vec{E}}{m \omega^2}, \quad (4.26)$$

kde m je hmotnost elektronu a e jeho náboj.

Indukovaný elektrický dipólový moment v jednotce objemu obsahující N elektronů je dán vztahem

$$\vec{P} = N e \vec{r} \quad (4.27)$$

Po dosazení za \vec{r} pomocí (4.26) dostaneme

$$\vec{P} = -\frac{e^2 N}{m \omega^2} \vec{E} \quad (4.28)$$

Jelikož v uvažovaném prostředí pro vektor elektrické indukce platí vztah

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

dostaneme po dosazení za \vec{P}

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{N e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} \right) \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \quad (4.29)$$

odkud vyplývá, že

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{N e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2} \right) \quad (4.30)$$

Pro $\omega \rightarrow \infty$ bude $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$, a tedy

$$\vec{D} \rightarrow \varepsilon_0 \vec{E}$$

V prostředí s komplexní permitivitou budou mít *Maxwellovy* rovnice tvar

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= -i\omega \varepsilon \vec{E}, & \nabla \times \vec{E} &= i\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) &= 0, & \nabla \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Pomocí rovnice kontinuity

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho = \rho_0 e^{-i\omega t}$$

lze získat vztah pro hustotu elektrického náboje (σ je zde skalár):

$$\nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = i\omega \rho, \quad \rho = -i\frac{\sigma}{\omega} \nabla \cdot \vec{E} \quad (4.32)$$

Po dosazení za ρ z (4.32) do rovnice $\text{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho$ dostáváme

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon \vec{E} + i\frac{\sigma}{\omega} \vec{E} \right) = 0 \quad (4.33)$$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = 0 \quad (4.34)$$

Z odvozeného vztahu plyne, že v případě *monochromatických* polí lze psát

$$\nabla \cdot (\tilde{\varepsilon} \vec{E}) = 0 \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} \quad (4.35)$$

Můžeme tak místo permitivity a vodivosti uvažovaného prostředí zavést *komplexní permitivitu* $\tilde{\varepsilon}$ takového prostředí. To by nám umožnilo formálně zavést komplexní vektor elektrické indukce \vec{D}^k vztahem

$$\vec{D}^k = \tilde{\varepsilon} \vec{E}, \quad (4.36)$$

pomocí něhož by se dala upravit soustava (makroskopických) *Maxwellových* rovnic

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (4.37)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (4.38)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.39)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.40)$$

do tvaru, kdy budou mít všechny rovnice pravou stranu rovnou *nule*:

$$\text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}^k}{\partial t} = 0 \quad (4.41)$$

$$\text{div } \vec{D}^k = 0 \quad (4.42)$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.43)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (4.44)$$

Je také možné dokázat, že *disperze* a *absorpce* nejsou veličiny vzájemně *nezávislé*. Vzájemné vztahy mezi těmito veličinami lze získat analýzou výrazu pro komplexní permitivitu při respektování frekvenční disperze

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^\infty \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau + i\frac{1}{\omega} \int_0^\infty \sigma(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \end{aligned} \quad (4.45)$$

4.3. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN V DIELEKTRIKÁCH PŘI RESPEKTOVÁNÍ DISPERZE

kde $\chi(\tau)$ a $\sigma(\tau)$ jsou reálné funkce τ , konečné pro všechna τ a konvergující k nule pro $\tau \rightarrow \infty$. Tvar těchto funkcí je závislý na konkrétních fyzikálních mechanismech, jež souvisejí s polarizací prostředí. Veličina τ (řádově rovná relaxační době) představuje časový interval, ve kterém jsou funkce $\chi(\tau)$ a $\sigma(\tau)$ nenulové. Vztahy mezi reálnou a imaginární částí komplexní permitivity $\tilde{\epsilon}$ jsou určeny tzv. *Kramers-Kronigovými relacemi*. Experimentálně lze změřit *absorpci* (tj. imaginární složku $\tilde{\epsilon}$). Reálnou složku $\tilde{\epsilon}$ (a tedy informaci o *disperzi*) pak lze získat právě použitím příslušné *Kramers-Kronigovy* relace.

4.3 Šíření elektromagnetických vln v dielektrikách při respektování disperze

Abychom získali vztah, který udává závislost *permitivity* prostředí na *kmitočtu* ($\epsilon = \epsilon(\omega)$), je třeba vyřešit úlohu o *interakci* elektromagnetické vlny s *náboji* daného prostředí.

Uvažujme jednoduchý případ *homogenního dielektrika*, ve kterém elektrické pole vlny vyvolá *polarizaci* molekul prostředí. Pod vlivem pole vlny dochází k posunu elektronů, molekula se polarizuje a získává *dipólový moment*

$$\vec{p} = e\vec{r} \quad (4.46)$$

V případě *homogenního* dielektrika obsahuje jednotka objemu N molekul, takže pro vektor *objemové hustoty* polarizace platí

$$\vec{P} = N\vec{p} \quad (4.47)$$

Je tedy zapotřebí vyřešit úlohu o *pohybu elektronů v molekule* pod vlivem *pole vlny* a vyjádřit *posun elektronů* jako *funkci pole*.

V případě *nepolárních* molekul a atomů naruší přiložené pole rozložení elektronových obalů, posune je vzhledem k jádrům a vytvoří *dipólové momenty*. Působením elektromagnetické vlny bude *vnitřní nábojová struktura* dielektrika pod vlivem *časově proměnných sil* nebo momentů sil. Tyto síly budou úměrné elektrické složce pole

$$\vec{F} = q_e\vec{E} = e\vec{E}, \quad (4.48)$$

kde q_e je náboj elektronu.

Analytický výraz pro $n(\omega)$ nebo $\epsilon(\omega)$ lze nyní odvodit na základě *klasického* popisu, jež dává *dostatečně přesné*, i když *jednoduché* výsledky.

Valenční elektrony poutá k atomům (nebo molekulám) *elastická vratná síla* ($-m_e\omega_0^2r$), jež je úměrná velikosti *výchylky* r elektronu z *rovnovážné* polohy. Atom považujeme za *klasický* oscilátor *nucených* kmitů, jež jsou udržovány střídavým polem \vec{E} určujícím *směr* vektoru \vec{r} . V takovém případě musí být síla pole *větší* než *elastická vratná síla*.

Síla \vec{F} , která působí na elektron o náboji q_e , je vyvolána polem $\vec{E}(t)$

$$\vec{F}_e = q_e\vec{E}(t) = q_e\vec{E}_0 \cos \omega t \quad (4.49)$$

Podle druhého *Newtonova* zákona platí

$$m_e \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + m_e\omega_0^2\vec{r} = q_e\vec{E}_0 \cos \omega t \quad (4.50)$$

Za předpokladu, že kmity elektronu jsou *totožné* s kmity pole $\vec{E}(t)$, můžeme tedy hledat řešení diferenciální rovnice (4.50) ve tvaru

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos \omega t \quad (4.51)$$

Po dosazení za $\vec{r}(t)$ a provedení časové derivace dostáváme

$$\vec{r}(t) = \frac{q_e}{m_e} \frac{\vec{E}_0 \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.52)$$

Jelikož dipólový moment se rovná *součinu náboje a výchylky*, pak pro N elektronů v jednotce objemu můžeme vyjádřit *hustotu dipólových momentů* (elektrickou polarizaci) vztahem

$$\vec{P} = q_e \vec{r} N = \frac{q_e^2 N}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} \quad (4.53)$$

S využitím vztahu $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}$ dostáváme

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{P(t)}{E(t)} = \varepsilon_0 + \frac{q_e^2 N}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.54)$$

V případě, že $\mu_r = 1$, platí

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = n^2, \quad (4.55)$$

takže výraz pro $n^2(\omega)$ bude možno psát ve tvaru

$$n^2(\omega) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{N q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.56)$$

což je hledaná *disperzní relace*, jež udává závislost *indexu lomu* na *kmitočtu*.

Předpokládali jsme, že existuje v daném prostředí *jediný* vlastní kmitočet ω_0 . Látka o N molekulách v jednotce objemu však může mít f_j oscilátorů o vlastních kmitočtech ω_{0j} ($j = 1, 2, 3, \dots$), tedy

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{N f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (4.57)$$

Při *kvantově mechanickém* popisu těchto dějů dospějeme k *obdobnému* vztahu, v němž ω_{0j} představuje charakteristické kmitočty, při kterých atom může *vyzařovat* nebo *pohlcovat* energii a f_j jsou *váhové faktory*, pro něž platí podmínka

$$\sum_j f_j = 1$$

Z výrazu pro $n^2(\omega)$ zároveň vyplývá, že pro $\omega \rightarrow \omega_{0j}$ by $n^2(\omega)$ rostlo *nade všechny meze*, což je v *rozporu* se skutečností. Avšak v odvozeném výrazu (4.57) byla *zanedbána* skutečnost, že mezi atomy a molekulami v důsledku jejich těsné blízkosti nastává silná *interakce*, jež se projevuje ve formě výsledné síly „tření“, která způsobuje *tlumení* oscilátorů a *disipaci* jejich energie v látce ve formě

4.3. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN V DIELEKTRIKÁCH PŘI RESPEKTOVÁNÍ DISPERZE

tepla (molekulární pohyb), a tím i omezení růstu $n^2(\omega)$ na konečnou hodnotu i pro $\omega = \omega_j$.

V klasické teorii disperze je pohyb elektronu v molekule popsán modelem Drude-Lorentze, podle kterého je možno si představit molekulu ve formě jednoho nebo více lineárních oscilátorů, jež odpovídají vlastním kmitům elektronů v molekule. V případě jediného oscilátoru (při respektování útlumu vyzařováním a výsledné síly „tření“ vznikající v důsledku vzájemné interakce) lze pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = e\vec{E}_d(t), \quad (4.58)$$

kde m je efektivní hmotnost, $m\nu$ součinitel, jež respektuje útlum, ω_0 je rezonanční kmitočet vlastních kmitů (odpovídající kmitům elektronů v molekule) a \vec{E}_d je celková lokální intenzita elektrického pole působícího na dipól.

Před vlastním řešením (4.58) provedme nejprve odvození několika elementárních vztahů. Intenzita vnějšího elektrického pole \vec{E} (tj. pole před vložením dipólů) se bude lišit od střední makroskopické hodnoty intenzity elektrického pole \vec{E}_d o polarizační pole \vec{E}_p vytvářené orientovanými dipólovými momenty. Sám vektor polarizace \vec{P} bude mířit ve směru elektrického pole. Ovšem polarizační elektrické pole \vec{E}_p takto vzniklé bude působit proti směru původního elektrického pole. V případě dielektrika ve tvaru koule lze např. ukázat, že

$$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (4.59)$$

V takovém případě pak pro lokální pole bude platit

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_p = \vec{E} - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (4.60)$$

S uvážením $\epsilon \vec{E}_d = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P}$ (nezapomeňme, že zde musíme používat skutečné lokální pole působící na dipóly, tj. \vec{E}_d) můžeme vektor polarizace vyjádřit jakožto funkci lokálního pole vztahem

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \vec{E}_d. \quad (4.61)$$

Kombinací (4.61) a (4.60) lze pak získat výraz spojující vnější pole \vec{E} s lokálním polem \vec{E}_d následujícím postupem:

$$\vec{E} = \vec{E}_d + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}_d + \frac{1}{3\epsilon_0}(\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}_d = \frac{1}{3}(\epsilon_r + 2) \vec{E}_d \quad (4.62)$$

Závislost vektoru polarizace \vec{P} na vnějším poli \vec{E} dostaneme kombinací (4.61) a (4.62) ve tvaru

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \vec{E}_d = 3\epsilon_0 \frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} \vec{E} \quad (4.63)$$

Vraťme se nyní k naší rovnici (4.58). Bude-li časová závislost všech veličin harmonická, po provedení časových derivací, dosazení za \vec{E}_d pomocí (4.60),

vy násobení obou stran rovnice součinitelem $\frac{Ne}{m}$ a s uvážením $\vec{P} = Ne\vec{r}$ přejde (4.58) do tvaru

$$\left(-\omega^2 - i\omega\nu + \omega_0^2\right) \vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \vec{E} - \frac{1}{3} \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \vec{P}, \quad (4.64)$$

odkud

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\nu + \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m}\right)} \quad (4.65)$$

Dosazením za \vec{P} ze vztahu (4.63) a po vykrácení \vec{E} dostaneme

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{Ne^2}{3m\varepsilon_0} \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\nu + \frac{1}{3} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\right)^{-1} \quad (4.66)$$

Za předpokladu, že jde o látku o N molekulách v jednotce objemu, z nichž každá má f_j oscilátorů o vlastních kmitočtech ω_{0j} , s uvážením $\varepsilon_r = n^2$ a zanedbáním členu $\frac{1}{3} \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ ve jmenovateli dostaneme výraz ($q_e = e$)

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{q_e^2}{3\varepsilon_0 m_e} \sum_j \frac{Nf_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 - i\omega\nu} \quad (4.67)$$

(v klasickém přiblížení $Nf_j \rightarrow N_j$).

Při odvození výrazu pro *iontovou* polarizaci je nutno nahradit hmotnost *elektronů* m_e hmotností *iontů* m_i . Zatímco *elektronová* polarizace ovlivňuje *celé* optické spektrum, podíl *iontové* polarizace na n má značný vliv pouze v oblasti *rezonance* ($\omega_{0j} = \omega$).

Jestliže $\omega \rightarrow \omega_{0j}$, pak rozdíl ($\omega_{0j}^2 - \omega^2$) bude tak *malý*, že n *poroste* s kmitočtem. Takováto závislost $n(\omega)$ patří do oblasti *normální* disperze.

Jestliže $\omega = \omega_{0j}$, stává se *útlumový* člen *rozhodující* a v okolí kmitočtu ω_{0j} vzniknou oblasti, které nazýváme *absorpčními pásy*, jež představují oblasti *anomální* disperze, kde index lomu *klesá s rostoucím* kmitočtem (schématicky viz obr. 4.1).

Zvláštní případ nastává, jestliže kmitočet dopadající vlny je *větší než* ω_{0j} . V tom případě

$$n^2 < 1, \quad n < 1$$

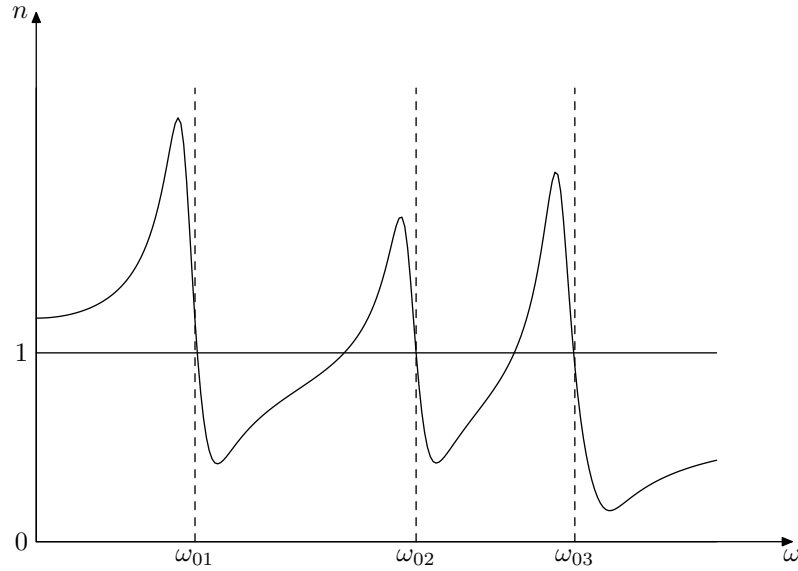
Této situaci odpovídají například *RTG* paprsky dopadající na *skleněnou desičku*. V důsledku toho, že $n < 1$, bude $v_f > c$, což se jeví v *rozporu se speciální teorií relativity*. Ve skutečnosti je to rozpor jen *zdánlivý*. Pokud by *monochromatická* vlna měla rychlost *větší než* c , *nemohla by přenášet informaci*. Signál ve formě *modulované* vlny se šíří rychlostí *skupinovou*

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (4.68)$$

která je v *normálních* disperzních prostředích vždy *menší než* c . Pro $\omega = kv_f$ dostáváme

$$\frac{d}{dk} (kv_f) = v_f + k \frac{dv_f}{dk} \quad (4.69)$$

4.3. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN V DIELEKTRIKÁCH PŘI RESPEKTOVÁNÍ DISPERZE



Obrázek 4.1: Schématické znázornění oblastí *anomální* disperze

V případě *nedisperzního* prostředí (kde v není funkcí λ) bude

$$\frac{dv_f}{dk} = 0,$$

a tedy $v_g = v_f$. V *disperzním* prostředí, kde $n = n(k)$, dosazením za $\omega = \frac{kc}{n}$, dostáváme

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} + k \frac{d}{dk} \left(\frac{c}{n} \right) = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk}$$

tedy

$$v_g = v_f \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (4.70)$$

V oblasti *normální* disperze je *derivace* indexu lomu podle k *kladná* ($\frac{dn}{dk} > 0$), a tudíž $v_g < v_f$. Jiná situace nastane v případě *anomální* disperze, kdy $\frac{dn}{dk} < 0$. Bude-li derivace $\frac{dn}{dk}$ *záporná*, znamená to, že

$$v_g = v_f \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) = v_f \left(1 + \frac{k}{n} \left| \frac{dn}{dk} \right| \right) \quad (4.71)$$

Z toho vyplývá, že v oblasti *anomální* disperze (jako příklad mohou posloužit *vodivá* prostředí) může být *skupinová* rychlost v_g *větší* než *fázová* rychlost v_f .

Vraťme se znovu k výrazu (4.66) pro $\varepsilon_r(\omega)$. Využitím definice

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$$

můžeme výraz pro ε_r napsat ve tvaru

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\nu} = 1 + \frac{\omega_p^2 [(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\nu]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2} \quad (4.72)$$

nebo rozdělený na *reálnou* a *imaginární* část

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + i \frac{\omega_p^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \quad (4.73)$$

V oblasti *nízkých* kmitočtů je splněna podmínka $\omega^2 \ll \omega_0^2$, takže je možno *zanedbat* ω^2 ve výrazu pro ε_r , včetně celé *imaginární* části. Za uvedených předpokladů dostaneme vztah pro „statickou“ permitivitu (*nedisperzní* prostředí)

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (4.74)$$

(v případě *tvrdých* dielektrik může relativní permitivita dosahovat *velkých* hodnot).

V *plynném* prostředí, kde je hustota polarizovaných molekul *malá*, lze rovněž použít odvozený vztah pro ε_r k získání závislosti *indexu lomu* a *koeficientu absorpce* na *kmitočtu*. Budeme předpokládat, že platí

$$\omega_p^2 \ll \omega_0^2, \quad \omega_0^2 \doteq \omega^2$$

To znamená, že výraz pro ε_r se bude jen málo lišit od *jedné*, tedy

$$\sqrt{\varepsilon_r} = n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} + i \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2 \omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \quad (4.75)$$

Vraťme se ke dřívější definici *komplexního* vlnového čísla (nyní již psáno bez vlnovky)

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

a jeho vyjádření pomocí *indexu lomu* a *koeficientu absorpce*

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa) = k' + ik'', \quad (4.76)$$

kde $n = \frac{ck'}{\omega}$ je *index lomu* a $\kappa = \frac{ck''}{\omega}$ *koeficient absorpce*.

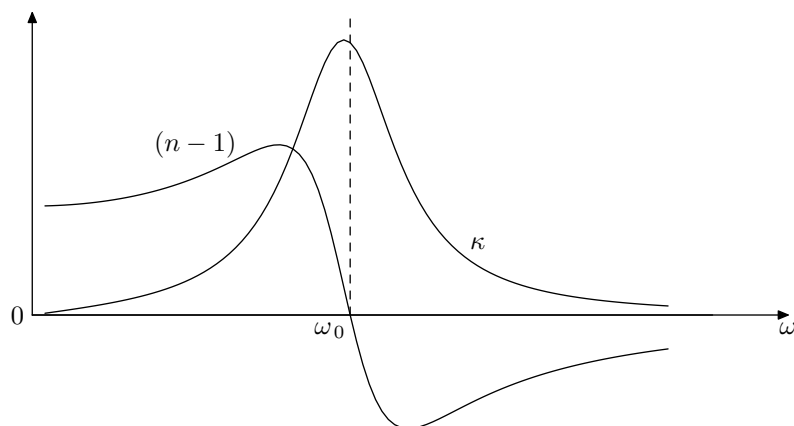
Srovnáním *reálné* a *imaginární* části ve výrazu (4.75) a (4.76), při respektování výše uvedených předpokladů pro ω_p^2 a ω_0^2 , dostaneme závislost *indexu lomu* a *koeficientu absorpce* na *kmitočtu* ve tvaru

$$(n - 1) \doteq \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \quad (4.77)$$

$$\kappa \doteq \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega \nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \quad (4.78)$$

Průběhy obou veličin jsou znázorněny na obr. 4.2. Z tohoto obrázku je zřejmé, že pro $\omega^2 < \omega_0^2$ bude $(n - 1) > 0$ a pro $\omega^2 > \omega_0^2$ bude $(n - 1) < 0$. Při přibližování se k ω_0 zleva *index lomu* nejprve postupně *vzrůstá* (oblast *normální* disperze) od svojí hodnoty ve vakuu $n = 1$, ale od jistého přiblížení začíná prudce *klesat*. Vstupujeme do oblasti *anomální* disperze. Tento strmý *pokles* pokračuje přes celou oblast *rezonance* ($\omega_0^2 - \omega^2 \approx \omega \nu$). Po jejím opuštění opět

4.3. ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN V DIELEKTRIKÁCH PŘI RESPEKTOVÁNÍ DISPERZ



Obrázek 4.2: Průběh závislostí $n = n(\omega)$ a $\kappa = \kappa(\omega)$

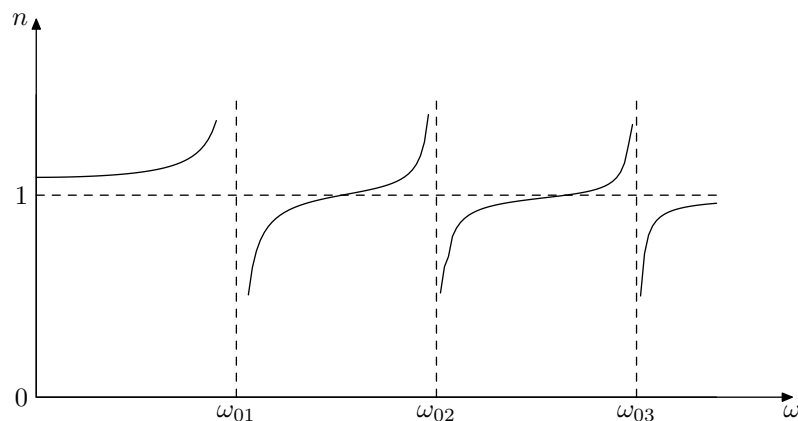
začíná jeho postupný *nárůst* zpět k hodnotě $n = 1$. V případě, že $\omega = \omega_0$, bude $n = 1$ (viz vztah (4.77)) a *koefficient absorpce* zde dosáhne *maximální* hodnoty $\kappa \doteq \omega_p^2/2\omega_0\nu$. V případě, že kmitočet vlny bude dostatečně vzdálen od *rezonance* ($\omega \ll \omega_0$ nebo $\omega \gg \omega_0$), bude splněna podmínka

$$|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega\nu,$$

odkud lze po úpravě získat *přibližné* výrazy pro n a κ (průběhy viz obr. 4.3)

$$(n - 1) \doteq \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (4.79)$$

$$\kappa \doteq \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega\nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (4.80)$$



Obrázek 4.3: Průběh *přibližného* disperzního vztahu $n = n(\omega)$

4.4 Elektromagnetické pole v polarizovaném prostředí

Disperzní relace získané v předchozí části platí pro dielektrika, jejichž molekuly se *polarizují* pod vlivem vnějšího pole (*nepolární dielektrika*). Mají-li však molekuly dielektrika *dipólové momenty* i bez působení vnějšího pole (*polární dielektrika*), potom mechanismus polarizace spočívá ve *změně orientace* těchto molekul pod vlivem pole.

Molekuly jsou však relativně *těžké* a mají *velké setrvačné momenty*, takže při *vysokých* kmitočtech elektrického pole *nejsou schopné* sledovat *rychlé změny* tohoto pole, a proto jejich příspěvek k polarizaci bude s *rostoucím* kmitočtem *klesat*. Jiná situace nastane v případě *elektronů*, jejichž setrvačná hmotnost je *malá*, takže mohou sledovat *rychlé* změny pole i v oblasti *optických kmitočtů*. To znamená, že závislost mezi *permitivitou* (nebo indexem lomu) a *kmitočtem* ω bude záviset na souhře různých *mechanismů polarizace*, jež se budou projevovat podle *velikosti kmitočtu*.

Nechť je *velikost* dipólového momentu každé jednotlivé molekuly rovná p_0 . Bez přítomnosti vnějšího elektrického pole jsou *vektory* dipólových momentů orientovány *chaoticky* v důsledku *tepelného* pohybu. Dopadá-li na prostředí elektromagnetická vlna, vykazuje každý dipólový moment složku, jež je *rovnoběžná* s vektorem elektrického pole \vec{E} . Vzhledem ke statistické *symetrii* rozložení *orientace* dipólů vůči *směru* elektrického pole se složky *kolmé* budou (statisticky) *vzájemně rušit* a není je tedy třeba brát v úvahu. Z výše uvedeného vyplývá, že dipólový moment jednotky objemu o N molekulách bude za přítomnosti elektrického pole *nenulový* (jednotlivé dipólové momenty jsou nyní *reorientovány* působením \vec{E}), tedy

$$P = |\vec{P}| = N \langle p_0 \cos \theta \rangle,$$

kde θ je úhel (statisticky nahodilý parametr) mezi vektory \vec{p}_0 jednotlivých dipólů a \vec{E} a závorky $\langle \rangle$ mají význam *středování* podle souboru molekul.

Abychom vypočítali rozložení *os* (orientace) molekul v přítomnosti *vnějšího* elektrického pole \vec{E} , které vyvolá *reorientaci* jednotlivých dipólových momentů, je třeba použít *Boltzmannův* teorém ze statistické fyziky, který praví, že v podmínkách termodynamické rovnováhy zákon rozložení molekul v *přítomnosti* konzervativního pole sil (v našem případě pole elektrického) se *liší* od zákona jejich rozložení *bez* přítomnosti pole o součinitel

$$e^{-\frac{U}{k_B T}},$$

kde U je *potenciální energie* molekuly, T *absolutní teplota* a k_B je *Boltzmannova konstanta*.

V daném případě je *potenciální energie* molekuly s dipólovým momentem v elektrickém poli rovna výrazu

$$U = -p_0 E \cos \theta, \quad (4.81)$$

kde θ je *polární* (a φ *meridiální* - na němž zde nezáleží) úhel (viz obr. 4.4).

4.4. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V POLARIZOVANÉM PROSTŘEDÍ⁸⁷

Počet molekul dN v elementárním objemu dV *jednotkové* koule, který je uzavřen mezi dvěma *kužel*y, jejichž poloviční *vrcholový* úhel θ leží v intervalu $\langle \theta, \theta + d\theta \rangle$, se rovná

$$dN = C \sin \theta d\theta \quad (4.82)$$

Koeficient úměrnosti C určíme z předpokladu, že *celkový počet* všech molekul v jednotce objemu se rovná N

$$N = \int dN = \int_0^\pi C \sin \theta d\theta = 2C \implies C = \frac{N}{2} \quad (4.83)$$

Za přítomnosti elektrického pole se rozložení orientace molekul bude lišit od statisticky *rovnoměrného* (izotropního) rozdělení *bez přítomnosti* pole o součinitel vycházející z *Boltzmannova* teorému, podle nějž

$$e^{-\frac{U}{k_B T}} = e^{\frac{p_0 E}{k_B T} \cos \theta} \quad (4.84)$$

a bude tím *výraznější*, čím *větší* bude *potenciál* pole a čím *menší* bude *teplota* T , neboť se zvyšováním teploty roste i energie tepelného pohybu, kterým se narušuje uspořádanost rozložení, tedy

$$\begin{aligned} dN &= \frac{N}{2} e^{-\frac{U}{k_B T}} \sin \theta d\theta = \frac{N}{2} e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{N}{2} e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (4.85) \\ U &= -p_0 E \cos \theta, \quad a = \frac{p_0 E}{k_B T}, \end{aligned}$$

kde dN je počet molekul, jejichž osové úhly vůči směru pole \vec{E} leží v intervalu $\langle \theta, \theta + d\theta \rangle$. Při normálních teplotách je veličina a ve všech obvykle uvažovaných polích mnohem menší než jedna ($a \ll 1$), takže stačí provést rozvoj funkce e^a (podle a) a použít prvních dvou členů rozvoje, tedy ¹

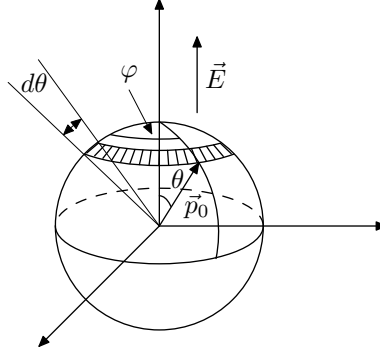
$$dN \doteq \frac{N}{2} (1 + a \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (4.86)$$

Známe-li rozložení molekul podle *směru*, můžeme vypočítat jejich výsledný dipólový moment, tj. *polarizaci* dielektrika \vec{P} , jejíž *velikost* se bude rovnat *součtu* projekcí momentů N molekul do směru \vec{E} . Obecný dipólový moment dN molekul, jejichž osy budou ležet v intervalu $\langle \theta, \theta + d\theta \rangle$, se bude rovnat

$$dP = p_0 \cos \theta dN \quad (4.87)$$

¹Na tomto místě je vhodné poznamenat, že původně vypočtená (a následně používaná) hodnota konstanty $C = \frac{N}{2}$ (bez přítomnosti elektrického pole) platí i v přítomnosti elektrického pole za předpokladu uvažovaného přiblížení $a \ll 1$. Pokud by toto přiblížení nebylo splněno, bylo by třeba pro konstantu C použít přesný vztah

$$C = N \frac{a}{e^a - e^{-a}} = \frac{N}{2} \frac{a}{\sinh a}$$



Obrázek 4.4: Jednotková polární koule opsaná kolem libovolného bodu dielektrika s polární osou zvolenou ve směru vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} , jež svírá s dipólovým momentem \vec{p}_0 polární úhel θ

Dosazením za dN pomocí (4.86) a následnou integrací dostaneme *velikost* vektoru polarizace dielektrika

$$P = \int p_0 \cos \theta dN = \frac{p_0 N}{2} \int_0^\pi (1 + a \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{N p_0 a}{3} \quad (4.88)$$

Po dosazení za a máme

$$P = \frac{N p_0 p_0 E}{3 k_B T} = \frac{N p_0^2}{3 k_B T} E = \alpha E, \quad (4.89)$$

kde $\alpha = \frac{N p_0^2}{3 k_B T}$ je *polarizovatelnost* prostředí (*orientační polarizace*).

Polarizovatelnost prostředí vzniká v důsledku různých mechanismů polarizace. Dva z nich, jež způsobují elektronovou polarizaci, souvisejí s dipólovými momenty vzniklými v důsledku posunu elektronů a jader (posuvná polarizace). Třetí mechanismus, orientační polarizace, je vyvolán natáčením stálých dipólových momentů ve směru vnějšího pole a poslední (uspořádací) objemová nebo povrchová polarizace vzniká v důsledku nahromadění migračních nosičů náboje.

Polarizovatelnost je *skalární* veličinou pouze v *izotropním* prostředí; v *aniotropních* prostředích je *tenzorem*.

Působením elektrického pole o lokální intenzitě \vec{E} v místě molekuly dochází k dalšímu posunu nábojů. Pole vně polární molekuly lze s dostatečnou přesností pokládat za pole dipólu umístěného ve středu molekuly. Celkový dipólový moment polární molekuly bude tedy

$$\vec{p}_c = \vec{p}_0 + \vec{p}_l = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_l,$$

kde \vec{p}_l je dipólový moment vznikající v důsledku působení lokálního pole \vec{E}_l , \vec{p}_0 je dipólový moment polární molekuly a α její polarizovatelnost.

Bude-li v jednotce objemu N molekul a dipólový moment a polarizovatelnost i -té molekuly označíme \vec{p}_i a α_i , potom vektor elektrické polarizace (dipólový moment jednotky objemu) lze vyjádřit následovně

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i + \alpha_i \vec{E}_l)$$

4.4. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V POLARIZOVANÉM PROSTŘEDÍ 89

Tím je určen vztah mezi strukturními parametry (\vec{p}_i, α_i) , intenzitou lokálního pole v dielektriku \vec{E}_l a makroskopickou veličinou \vec{P} .

Teorie *dielektrik* se zabývá vztahy mezi *strukturními* parametry (polarizovatelností α a dipólovým momentem \vec{p}_0) a *materiálovými* parametry (susceptibilitou χ a permitivitou ε) a vztahy mezi *lokálním* polem a *makroskopickou* intenzitou pole.

Jako příklad závislosti $\varepsilon(\omega)$ na kmitočtu vypočítáme ε_r *vzduchu*, jež představuje *směs* molekul plynů (dusíku, kyslíku, atd.) a vodních par. Zanedbáme-li *srážkové* procesy, je možno určit dipólový moment jednotky objemu za předpokladu, že pole v prostředí se rovná poli vlny. Vyjdeme z rovnice o pohybu elektronů (v molekule), které jsou ovlivňovány vnějším polem, přičemž molekula představuje *lineární harmonický oscilátor*, jehož kmitočet se rovná kmitočtu elektronů ω_0 . Zanedbáme-li *srážkové* procesy ($\nu = 0$), budeme mít výchozí rovnici

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \omega_0^2 \vec{r} = e \vec{E}_d(\vec{r}, t) \quad (4.90)$$

Po integraci dostaneme

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left(\frac{N_1 e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 p_0^2}{3 k_B T \varepsilon_0} \right) \vec{E}, \quad (4.91)$$

kde první člen ve vztahu (4.91) představuje příspěvek molekul *vzduchu* a druhý příspěvek *vodní páry*.

Jelikož

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon \vec{E},$$

bude

$$\chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{N_1 e^2}{m \varepsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} + \frac{N_2 p_0^2}{3 k_B T \varepsilon_0} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{N_2 p_0^2}{3 k_B T \varepsilon_0} \quad (4.92)$$

V odvozeném výrazu pro dipólový moment připadající na jednotku objemu při $\omega_0^2 \gg \omega^2$ můžeme zanedbat závislost \vec{P} na kmitočtu dopadající elektromagnetické vlny. Vlastní kmitočet molekul plynů (z nichž se skládá vzduch) leží v oblasti $\omega_0 > 15$ GHz ($\lambda = 2$ cm), což znamená, že se disperze nebude podstatněji projevovat ani tehdy, dopadá-li elektromagnetická vlna o vlnové délce $\lambda = 3$ cm. Jiná situace je v oblasti velmi krátkých vln. V milimetrovém, infračerveném a optickém pásmu existují *oblasti rezonanční absorpce*. Proto je nutno při návrhu kmitočtů pro *spojovací* (komunikační) účely dbát, aby v troposféře byly nalezeny „průzračné“ oblasti, tj. oblasti, u nichž se vlastní kmitočty *liší* od kmitočtů dopadajících elektromagnetických vln.

V řídkém plazmatu (případ *ionosféry*) bývá *efektivní* srážkový kmitočet

$$\nu \sim 10^3 \div 10^4,$$

takže vlny o kmitočtu $f > 10^6$ Hz splňují podmínku $\omega \gg \nu$. V tomto případě lze *zanedbat* imaginární část dielektrické permitivity, odkud dostáváme výraz

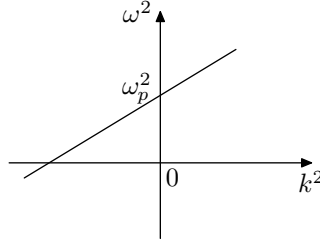
$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = n^2 \quad (4.93)$$

Disperzní vztah pro uvažované prostředí s použitím vztahu (4.93) získá tvar

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \omega^2 \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad \text{pro } \mu_r = 1 \quad (4.94)$$

nebo

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (4.95)$$



Obrázek 4.5: Grafické znázornění disperzního vztahu pro řídké plazma (případ ionosféry)

Ze vztahu (4.93) vyplývá, že pro $\omega > \omega_p$ bude index lomu *reálný*, takže se vlny budou v uvažovaném prostředí šířit *volně*. Kritický případ nastává pro $\omega = \omega_p$ a tedy $n = 0$. Pro $\omega < \omega_p$ bude index lomu *ryze imaginární*, což znamená, že při $\omega \leq \omega_p$ bude docházet k *odrazu* elektromagnetických vln od plazmatického prostředí. Kmitočet, jenž se rovná plazmovému kmitočtu při maximální koncentraci, se nazývá *kritickým kmitočtem* ω_{kr}

$$\omega_{kr}^2 = \frac{e^2 N_{\max}}{m_e \varepsilon_0},$$

kde N_{\max} představuje maximální koncentraci elektronů. Index lomu $n(\omega)$ může však nabývat *ryze imaginárních* hodnot pouze tam, kde je *absorpce* energie *malá*. V případě *ionosférického* plazmatu jsou tyto podmínky splněny pro široké spektrum kmitočtů.

Uvažujme zvláštní případ prostředí, kde index lomu $n^2(\omega)$ bude *nulový*, čili

$$n^2(\omega) = \varepsilon_r = 0$$

Potom

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} = 0, & \vec{H} &= 0, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

a odpovídající pole je popsáno jedinou rovnicí

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \implies \quad \vec{E} = \pm \operatorname{grad} \psi,$$

což odpovídá případu existence *podélných* či *plazmatických* vln.

Jestliže nebude respektována *prostorová disperze*, proces bude mít *kmitavý*, ale *nikoli vlnový* charakter ($k = 0$). Při respektování prostorové disperze bude však kmitočet funkcí *vlnového čísla*, takže skupinová rychlost $\frac{d\omega}{dk}$ bude *nulová*.

4.4. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V POLARIZOVANÉM PROSTŘEDÍ 91

Jestliže se elektron pohybuje v plazmatu *střední tepelnou rychlostí*

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{k_B T}{M}}, \quad (4.97)$$

urazí během doby τ vzdálenost

$$l = \tau \tilde{v} = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{k_B T}{M}}, \quad (4.98)$$

kde k_B je *Boltzmannova* konstanta.

Prostorovou disperzi můžeme zanedbat, jestliže charakteristický rozměr prostředí bude *menší než vlnová délka* dopadajícího záření. Tato podmínka bude splněna pro

$$l \ll \lambda,$$

odkud dostáváme vztah pro ω

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{k_B T}{M}} &\ll \lambda \\ \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{k_B T}{M}} &\ll \omega \quad \text{nebo} \quad \omega \gg k\tilde{v} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Jestliže v daném prostředí definujeme *fázovou rychlost* jako

$$v_f = \frac{\omega}{k},$$

(což je přiblížení pro $k = k_p$, k_p — vlnové číslo v plazmatickém prostředí) dostáváme ze vztahu (4.99)

$$\frac{\omega}{k} = v_f \gg \tilde{v} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{M}} \quad (4.100)$$

Z toho plyne, že *zanedbání* prostorové disperze v plazmatu je ekvivalentní *ne-respektování tepelného pohybu* částic (proto se uvedené přiblížení nazývá přiblížení „studeného“ plazmatu).

V *případě absorpce* vln v plazmatu v důsledku *srážek* elektronů s molekulami a ionty lze rozlišovat dvě možnosti

1. absorpce vln při *průchodu* plazmatickou vrstvou, $\omega > \omega_p$
2. absorpce vln při *odrazu* od plazmatické vrstvy, $\omega = \omega_p$

V prvním případě dostaneme ze vztahu (4.73)

$$\tilde{\epsilon}_k = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} + i \frac{\omega_p^2 (\frac{\nu}{\omega})}{\omega^2 + \nu^2} = \epsilon' + i\epsilon'' \quad (4.101)$$

Srovnáním reálné části ϵ' a imaginární části ϵ'' ve výrazu pro $\nu^2 \ll \omega^2, \omega > \omega_p$ dostáváme

$$\epsilon' = 1, \quad \epsilon'' = \frac{\omega_p^2 \nu}{\omega^2 \omega}, \quad \text{tg } \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1 \quad (4.102)$$

Index absorpce vypočteme ze vztahu ($\mu_r = 1$)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu_r \varepsilon_r (1 + i \operatorname{tg} \delta) = \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\kappa_a)^2, \quad (4.103)$$

odkud

$$n^2 - \kappa_a^2 = \varepsilon_r, \quad 2n\kappa_a = \varepsilon_r \operatorname{tg} \delta \quad (4.104)$$

Řešením této soustavy rovnic dostáváme

$$n = \left[\frac{\varepsilon_r}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right) \right]^{1/2}, \quad \kappa_a = \left[\frac{\varepsilon_r}{2} \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right) \right]^{1/2} \quad (4.105)$$

Pro malé $\operatorname{tg} \delta$ ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$) lze dále tyto výrazy zjednodušit

$$\kappa_a = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{2} \operatorname{tg} \delta \doteq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^3} \nu \quad (4.106)$$

Protože

$$k = \frac{\omega}{c} (n + i\kappa_a) = k' + ik'', \quad (4.107)$$

bude

$$k'' = \frac{\omega}{c} \kappa_a = \frac{\omega_p^2 \nu}{2c\omega^2} = \kappa, \quad (4.108)$$

kde k'' je *koefficient absorpce*, který určuje *ubývání* amplitudy dopadající elektromagnetické vlny. Z toho plyne, že v ionosféře budou *delší* vlny více absorbovány než *kratší*. Proto je i kmitočtové pásmo pro rádiové spojení omezeno jak shora (kmitočet musí být menší než *kritický*, jinak se vlna od ionosféry *neodrazí*), tak i zdola (důsledek *zvětšení absorpce* s růstem vlnové délky).

Ve *druhém* případě, předpokládáme-li *odraz* vlny od ionosférické vrstvy, tedy předpoklad $\omega = \omega_p$ (přičemž nadále platí $\nu^2 \ll \omega^2$), dostáváme

$$\varepsilon' \doteq 0, \quad \operatorname{tg} \delta \gg 1, \quad \varepsilon'' \doteq \frac{\nu}{\omega} \quad (4.109)$$

a *koefficient absorpce* tedy bude

$$k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2} \operatorname{tg} \delta} \doteq \frac{\sqrt{\omega\nu}}{c\sqrt{2}} \quad (4.110)$$

Ze získaného výsledku plyne, že v oblasti kmitočtů, které se mohou *odrážet* od ionosféry, se *absorpce zvětšuje* s rostoucím kmitočtem, i když závislost na kmitočtu je mnohem *slabší*.

Délka, kterou urazí vlna na úseku, kde dochází k *odrazu*, je mnohem *menší* než délky ostatních úseků dráhy. Proto má absorpce určující roli při průchodu vln ionizovanou vrstvou v takových výškách od zemského povrchu, kde *nedochází* k odrazům.

4.4. ELEKTROMAGNETICKÉ POLE V POLARIZOVANÉM PROSTŘEDÍ⁹³

Zvláštností matematických pravd je, že jsou závazné pro všechny, kteří souhlasí s oprávněností některých počátečních předpokladů. To připomíná pravidla hry v šachy. Ten, kdo vysloví souhlas s těmito pravidly, je povinen souhlasit i se všemi výsledky hry, ať již budou jakékoli — příjemné nebo nepříjemné. Takto to bohužel není v jiných vědách, především mimo oblast přírodních věd.

N. I. Kovancov

Historie lidského myšlení, v níž se ignoruje role matematiky, je totéž, co inscenace „Hamleta“ provedená bez účasti *Hamleta* nebo přinejmenším bez *Ofélie*.

A. N. Whitehead

Kapitola 5

Elektromagnetické vlny v anizotropních prostředích

Zvláštnosti šíření elektromagnetických vln v *anizotropních* prostředích jsou určeny odpovídajícími *materiálovými relacemi*, charakterizovaných strukturami tenzorů $\mu_{ij}, \varepsilon_{ij}$. V případě časově *harmonicky* proměnných polí platí, že

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}), \quad B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}), \quad (5.1)$$

kde

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + \int_0^\infty \chi_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) \quad (5.2)$$

$$\mu_{ij} = \mu_0 \left(\delta_{ij} + \int_0^\infty \kappa_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) \quad (5.3)$$

Anizotropie může být dána *strukturou* vlastního prostředí (případ *krystalů*) nebo může vzniknout pod vlivem *vnějších polí* — *elektrického* nebo *magnetického* (plazma nebo ferit v magnetickém poli) nebo působením *pružných deformací*. Vlastnosti anizotropního prostředí závisí na *směru*. Anizotropní prostředí bude *homogenní*, jestliže má stejné vlastnosti ve všech bodech svého objemu. Může být také izotropní vzhledem k jednomu fyzikálnímu vlastnostem a anizotropní vzhledem k jiným. Nejčastějším případem jsou *elektricky anizotropní* prostředí (krystaly), kde elektrické vlastnosti látek jsou určeny *symetrickým reálným tenzorem* permitivity a *skalární permeabilitou*, potom

$$D_i(\omega, \vec{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \vec{r}), \quad \vec{B}(\omega, \vec{r}) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega, \vec{r}) \quad (5.4)$$

V případě *magnetických anizotropních* prostředí je to obráceně, tenzorem je permeabilita $\vec{\mu}$ a skalárem je permitivita ε , tedy

$$\vec{D}(\omega, \vec{r}) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega, \vec{r}), \quad B_i(\omega, \vec{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \vec{r}), \quad (5.5)$$

5.1 Obecné vlastnosti šíření elektromagnetických vln v anizotropních prostředích

Uvažujme nejdříve elektricky anizotropní prostředí, pro něž platí materiálové relace

$$\vec{D} = \bar{\varepsilon} \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5.6)$$

V případě šíření monochromatických vln lze *Maxwellovy* rovnice napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= -i\omega \vec{D} & \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= i\omega \mu \vec{H} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

odkud po vyloučení \vec{H} z první rovnice dostáváme vlnovou rovnici pro anizotropní prostředí

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \mu \bar{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.8)$$

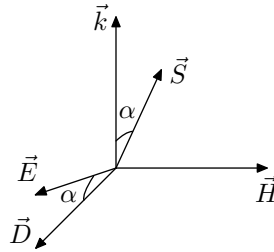
Uvažujme pro jednoduchost šíření elektromagnetických vln v tzv. *průzračných anizotropních prostředích*¹, což znamená, že všechny veličiny pole budou úměrné $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$. V tom případě je možno operátor ∇ nahradit odpovídajícím vlnovým vektorem \vec{k} ; tedy *Maxwellovy* rovnice budou mít tvar

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} & \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \mu \vec{H} & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Po vyloučení \vec{H} dostaneme vlnovou rovnici

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \bar{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5.10)$$

pomocí které můžeme určit fázovou rychlost šíření elektromagnetických vln v anizotropním prostředí v závislosti na \vec{k} .



Obrázek 5.1: Vzájemná poloha vektorů \vec{k} , \vec{D} , \vec{H} a \vec{E} v případě anizotropního prostředí, kde je tenzorem permitivita $\bar{\varepsilon}$

Ze soustavy rovnic (5.9) vyplývá, že vektory \vec{k} , \vec{D} a \vec{H} jsou vzájemně kolmé a zároveň $\vec{E} \perp \vec{H}$. To znamená, že vektory \vec{k} , \vec{D} a \vec{E} leží v téže rovině, přičemž vektory \vec{D} a \vec{E} nejsou kolineární, neboť

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

¹Průzračnost prostředí je určena poměrem toku světelného záření prostředím (ve formě paralelního svazku beze změny směru jeho šíření) k toku záření dopadajícího do téhož prostředí. Prostředí je průzračné, je-li tento poměr rovný jedné. Závisí na délce vlny dopadajícího záření a liší se od propustnosti.

5.1. OBECNÉ VLASTNOSTI ŠÍŘENÍ ELEKTROMAGNETICKÝCH VLN V ANIZOTROPNÍCH PROSTŘEDÍCH

Jelikož \vec{D} a \vec{H} jsou kolmé na vlnový vektor \vec{k} , leží tyto dva vektory v rovině čela vlny

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{konst.},$$

kdežto vektor \vec{E} neleží v této rovině. Ze vztahu pro hustotu toku energie definovanou *Poyntingovým* vektorem $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$ dostáváme tedy, že se v anizotropním prostředí tok energie nešíří ve směru vektoru \vec{k} , což znamená, že se budou lišit i *směry šíření fázové a skupinové rychlosti*.

Nechť je nyní permeabilita $\bar{\mu}$ tenzorem a permitivita ε skalárem (magneticky anizotropní prostředí), tedy

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H} \quad (5.11)$$

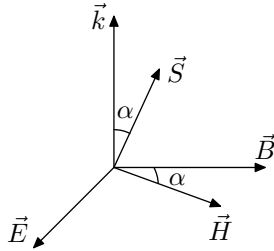
Při šíření monochromatických vln budou mít *Maxwellovy* rovnice obdobný tvar jako rovnice (5.9)

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \varepsilon \vec{E} & \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

V daném případě to znamená, že

$$\vec{k} \perp \vec{E}, \quad \vec{k} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}, \quad \vec{E} \perp \vec{H},$$

čili vektory \vec{E} a \vec{B} budou ležet v rovině čela vlny, kdežto vektor \vec{H} nebude ležet v této rovině. Jinými slovy, vektory \vec{k} , \vec{S} , \vec{B} a \vec{H} jsou koplanární a ortogonální vzhledem k vektoru \vec{E} , přičemž směry vektorů \vec{k} a \vec{S} jsou *odlišné* (tvorí dvě soustavy — $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ a $\vec{S}, \vec{H}, \vec{E}$).



Obrázek 5.2: Vzájemná poloha vektorů $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ a \vec{H} v případě anizotropního prostředí pro $\vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H}, \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Energie se bude šířit ve směru vektoru \vec{S} a *fázová rychlost* má směr \vec{k} . V důsledku *odlišnosti* směrů fázové a skupinové rychlosti se v anizotropních prostředích zavádí další vektor ve směru *Poyntingova* vektoru \vec{S} , tzv. *paprskový vektor* \vec{s} . Velikost nově zavedeného vektoru se definuje vztahem

$$\vec{s} \cdot \vec{k} = 1 \quad \text{nebo} \quad \vec{s} \cdot \vec{n} = 1, \quad (5.13)$$

kde $\vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega}$, $n = |\vec{n}|$ je index lomu. Je zřejmé, že vektory \vec{E} a \vec{H} budou kolmé na vektor \vec{s} , neboť $\vec{S} \parallel \vec{s}$, čili

$$\vec{s} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{s} \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.14)$$

Abychom dostali obdobný tvar rovnic jako v případě (5.9) při zavedení vektoru \vec{k} stačí, když vynásobíme *Maxwellovy* rotorové rovnice zleva vektorem \vec{s} a jelikož

$$\vec{s} \cdot \vec{k} = 1$$

dostáváme po vynásobení

$$\vec{s} \times (\vec{k} \times \vec{H}) = -\omega (\vec{s} \times \vec{D}) \quad (5.15)$$

$$\vec{s} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega (\vec{s} \times \vec{B}) \quad (5.16)$$

Po provedení dvojnásobných vektorových součinů v (5.15) a (5.16) a s ohledem na platnost (5.13) budeme mít

$$\begin{aligned} \vec{s} \times \vec{D} &= \frac{\vec{H}}{\omega} & \vec{s} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{s} \times \vec{B} &= -\frac{\vec{E}}{\omega} & \vec{s} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pro srovnání

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} & \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ze srovnání obou soustav (5.18) a (5.17) plyne dualita uvedených rovnic. Soustava s vektorem \vec{k} přejde na soustavu s vektorem \vec{s} , jestliže provedeme záměny $\vec{H} \leftrightarrow \omega \vec{B}$ a $\vec{E} \leftrightarrow \omega \vec{D}$.

Místo vektorové vlnové rovnice vyjádřené pomocí \vec{k} lze získat obdobnou rovnici vyjádřenou pomocí \vec{n} . Po dosazení za $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ do rovnice (5.10)

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} = 0$$

dostaneme další rovnici, která určuje fázovou rychlost šíření v anizotropním prostředí, tentokrát v závislosti na \vec{n}

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \bar{\epsilon}_r \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.19)$$

Vektorovou vlnovou rovnici (5.19) lze přepsat ve složkovém tvaru pro kartézskou soustavu

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0 \quad (5.20)$$

Položením determinantu této soustavy rovným nule

$$\det |n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}| = 0 \quad (5.21)$$

dostaneme disperzní relaci, ze které určíme závislost

$$\vec{n} = \vec{n}(\omega) \quad (5.22)$$

Obdobnou relaci pro $s(\omega)$ lze získat z předcházející soustavy (5.17), jestliže vektor \vec{H} vyloučíme a pro \vec{E} dosadíme vztah

$$E_i = \epsilon_{ij}^{-1} D_j \quad (5.23)$$

tedy

$$\begin{aligned}\vec{s} \times \vec{D} &= \frac{\vec{H}}{\omega} & \vec{s} \times \vec{H} &= -\frac{\vec{E}}{\omega\mu} \\ \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{D}) &= (\vec{s} \times \vec{H}) \frac{1}{\omega} = -\frac{\vec{E}}{\omega^2\mu} \\ \vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{D}) + \frac{\vec{\varepsilon}^{-1}}{\omega^2\mu} \vec{D} &= 0\end{aligned}\quad (5.24)$$

Analogicky s (5.19) dostaneme odpovídající soustavu rovnic pro složky

$$\left(s^2 \delta_{ij} - s_i s_j - \frac{1}{\omega^2 \mu} \varepsilon_{ij}^{-1} \right) d_j = 0 \quad (5.25)$$

Položíme-li determinant soustavy (5.25) rovným nule, lze napsat hledanou disperzní relaci ve tvaru

$$\det \left| s^2 \delta_{ij} - s_i s_j - \frac{1}{\omega^2 \mu} \varepsilon_{ij}^{-1} \right| = 0 \quad (5.26)$$

Ze vztahu (5.25) lze určit závislost složek vektoru \vec{s} na kmitočtu ω

$$\vec{s} = \vec{s}(\omega) \quad (5.27)$$

přičemž

$$\varepsilon_{ij}^{-1} = \varepsilon_{ij}^{-1}(\omega) \quad (5.28)$$

K tomu je však třeba ještě znát odpovídající fyzikální vlastnosti uvažovaného prostředí.

5.2 Šíření rovinných vln v krystalických prostředích

Uvažujme případ anizotropního negyrotropního krystalického prostředí se symetrickým tenzorem permitivity

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega) \quad (5.29)$$

Zanedbáme-li ztráty (prostředí necht' je průzračné), budou všechny složky tenzoru $\vec{\varepsilon}$ reálné. Symetrický tenzor bude mít pouze šest nezávislých složek. V tom případě elektrickou energii nahromaděnou v uvažovaném prostředí lze vyjádřit ve formě

$$W_c = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{1}{2} E_j \varepsilon_{jk} E_k \quad (5.30)$$

nebo po rozepsání

$$W_c = \frac{1}{2} (\varepsilon_{11} E_1^2 + \varepsilon_{22} E_2^2 + \varepsilon_{33} E_3^2 + 2 \varepsilon_{23} E_2 E_3 + 2 \varepsilon_{13} E_1 E_3 + 2 \varepsilon_{12} E_1 E_2) \quad (5.31)$$

Vhodným pootočením souřadných os lze vyloučit poslední tři členy, takže pro kartézskou soustavu lze dostat

$$W_c = \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} E_x^2 + \varepsilon_{yy} E_y^2 + \varepsilon_{zz} E_z^2), \quad (5.32)$$

kde x, y, z jsou nyní nové souřadné osy, jež se nazývají *hlavními dielektrickými osami*², které jsou shodné s hlavními osami tenzoru ε_{ij} , tedy

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x, \quad D_y = \varepsilon_{yy}E_y, \quad D_z = \varepsilon_{zz}E_z \quad (5.33)$$

Bude-li tedy souřadná soustava shodná s hlavními osami tenzoru ε_{ij} , dostaneme po vyčíslení determinantu

$$\det \left| n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \varepsilon_{ij} \right| = 0 \quad (5.34)$$

a po úpravě následující disperzní relaci (známou jako *Fresnelova rovnice*) používanou v krystalooptice

$$\begin{aligned} n^2 (\varepsilon_{xx} n_x^2 + \varepsilon_{yy} n_y^2 + \varepsilon_{zz} n_z^2) - \left[n_x^2 \varepsilon_{xx} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + \right. \\ \left. + n_y^2 \varepsilon_{yy} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) + n_z^2 \varepsilon_{zz} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} = 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

zde složky diagonálního tenzoru jsou funkcemi kmitočtu.

Nechť se nyní v uvažovaném prostředí šíří monochromatická vlna o kmitočtu ω . V tom případě *Fresnelova* rovnice bude kvadratickou rovnicí pro čtverec indexu lomu n^2 . To znamená, že každému danému směru $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ budou odpovídat dvě rozdílné hodnoty vlnového čísla, které charakterizují dvě vlny, jež se budou šířit rozdílnými fázovými rychlostmi.

Uvažujme zjednodušený případ — šíření ve směru osy z . V tom případě $\vec{k} \parallel \vec{z}_0$, tedy

$$\begin{aligned} k_x = k_y = 0 & \quad k_z = k \\ n_x = n_y = 0 & \quad n_z = n \end{aligned} \quad (5.36)$$

a *Fresnelova* rovnice přejde na tvar

$$n^4 - n^2 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} = 0 \quad (5.37)$$

odkud

$$n_1^2 = \varepsilon_{xx}, \quad n_2^2 = \varepsilon_{yy} \quad (5.38)$$

Z toho plyne, že každé normální vlně budou odpovídat dvě hodnoty indexu lomu, čili že vlny se v těchto krystalických prostředích budou šířit různými fázovými rychlostmi. Budou-li složky tenzoru ε_{ij}^{-1} reálné, bude i činitel polarizace reálný, a tudíž v anizotropním reaktivním prostředí budou normální vlny polarizovány lineárně. Každá vlna odlišné polarizace (než je lineární) se bude v anizotropním prostředí štěpit na dvě lineárně polarizované vlny, jejichž fázové rychlosti budou v obecném případě různé. (V krystalech, na rozdíl od izotropního prostředí, neexistují vlny s kruhovou nebo eliptickou polarizací.)

Nyní ukážeme, že u každé vlny je *směr* paprskového vektoru \vec{s} shodný se směrem *skupinové rychlosti*.

²V každém anizotropním prostředí existují tři směry, ve kterých je vektor elektrické indukce \vec{D} rovnoběžný s vektorem intenzity elektrického pole \vec{E} . Tyto směry se nazývají hlavními osami tenzoru $\vec{\varepsilon}$.

5.2. ŠÍŘENÍ ROVINNÝCH VLN V KRYSTALICKÝCH PROSTŘEDÍCH 101

Nechť je směr jedné z normálních vln určen jednotkovým vektorem \vec{m} , který zároveň nechť udává polarizaci vlny

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{m} E(\vec{r}) \quad (5.39)$$

Dosadíme-li tento vztah do vlnové rovnice (5.10)

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0,$$

budeme mít po provedení dvojitého vektorového součinu

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{m}) + \omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} = \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{m}) - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{m} + \omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} = 0 \quad (5.40)$$

Vynásobíme-li tuto rovnici skalárně zleva vektorem $-\vec{m}$, dostaneme rovnici

$$(\vec{k} \cdot \vec{k}) - (\vec{k} \cdot \vec{m})^2 - \omega^2 \mu \vec{m} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} = 0, \quad (5.41)$$

kde

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(\omega), \quad \omega = \omega(\vec{k})$$

Provedením derivace podle \vec{k} dostaneme

$$2\vec{k} - 2(\vec{k} \cdot \vec{m}) \vec{m} - \left(2\omega \mu \vec{m} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} + \omega^2 \mu \vec{m} \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\omega} \cdot \vec{m} \right) \frac{d\omega}{d\vec{k}} = 0, \quad (5.42)$$

odkud po vydělení dvojkou získáme rovnici ve tvaru

$$\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{m}) \vec{m} - \left(\omega \mu \vec{m} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} + \frac{1}{2} \omega^2 \mu \vec{m} \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\omega} \cdot \vec{m} \right) \frac{d\omega}{d\vec{k}} = 0 \quad (5.43)$$

Jelikož platí, že

$$\vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{m}) \vec{m} = [\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m})],$$

dostáváme ze vztahu (5.43) následující výraz pro skupinovou rychlost:

$$\vec{v}_{sk} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m})}{\left(\omega \mu \vec{m} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} + \frac{1}{2} \omega^2 \mu \vec{m} \cdot \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\omega} \cdot \vec{m} \right)} \quad (5.44)$$

Protože jsme zvolili jednotkový vektor \vec{m} ve směru \vec{E} , musí potom vektor $(\vec{k} \times \vec{m})$ být rovnoběžný s vektorem \vec{H} ; jinak řečeno, směry vektorů $\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m})$ a \vec{s} jsou shodné, tedy

$$\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m}) \parallel \vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}, \quad \vec{S} \parallel \vec{s} \quad (5.45)$$

To znamená, že je v krystalu skupinová rychlost každé vlny orientována podél paprskového vektoru \vec{s} . Ve skutečnosti se nejedná o šíření rovinných vln, ale omezených vlnových svazků (nebo poruch omezených v prostoru).

Ukažme ještě, že omezený vlnový svazek se bude rovněž šířit ve směru paprskového vektoru, přičemž budeme předpokládat, že jeho příčné rozměry jsou

mnohem větší než délka vlny. V podobných případech je možno omezený svazek pokládat za „téměř rovinnou vlnu“, nechť tedy

$$\vec{E} = \vec{A}(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (5.46)$$

kde $\vec{A}(\vec{r})$ je pomalu proměnná vektorová amplituda, pro níž platí

$$\left| \frac{d\vec{A}}{d\vec{r}} \right| \ll k |\vec{A}| \quad (5.47)$$

Nechť je dále polarizace svazku shodná s polarizací jedné z normálních vln prostředí, tedy

$$\vec{A}(\vec{r}) \doteq \vec{m} A(\vec{r}) \quad (5.48)$$

Vyjdeme znovu z vlnové rovnice ve vektorovém tvaru

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.49)$$

Dosazením za $\vec{E} = \vec{A}(\vec{r}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})}$ do prvního členu rovnice (5.49) dostáváme

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla \times \left(\vec{A} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) = \nabla \times \left[\nabla \times \vec{m} \left(A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \right] \quad (5.50)$$

Nyní nejdříve vypočítáme hranatou závorku na pravé straně (5.50). Potom

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{m} \left(A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla \times \vec{m} A + A \nabla \times \vec{m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \\ &= e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\nabla \times \vec{m}) A + i A (\vec{k} \times \vec{m}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

neboť

$$\nabla \times \vec{m} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i (\vec{k} \times \vec{m}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

Aplikací operátoru rotor na takto upravenou hranatou závorku na pravé straně (5.50) postupně získáváme:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \vec{m}) \left(A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) &= \left\{ \nabla \times \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\nabla \times \vec{m}) A \right] \right\} + \\ &+ i \left\{ \nabla \times \left[(\vec{k} \times \vec{m}) A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \right\} = \\ &= i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \left[\vec{k} \times (\nabla \times \vec{m}) A \right] - \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{m}) A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \\ &+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\nabla \times \nabla \times \vec{m}) A + i e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \nabla \times (\vec{k} \times \vec{m}) A \end{aligned} \quad (5.52)$$

Po dosazení této úpravy do původní vlnové rovnice (5.49) a po zanedbání druhých derivací pomalu proměnné amplitudy (zanedbání členu $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [\nabla \times (\nabla \times \vec{m}) A]$) dostaneme (ještě po dodatečném zkrácení $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$) vlnovou rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} i \left[\vec{k} \times (\nabla \times \vec{m}) \right] A + i \left[\nabla \times (\vec{k} \times \vec{m}) \right] A - \\ - \left\{ \left[\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{m}) + \omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{m} \right] \right\} A = 0 \end{aligned} \quad (5.53)$$

5.2. ŠÍŘENÍ ROVINNÝCH VLN V KRYSTALICKÝCH PROSTŘEDÍCH 103

Poslední člen (5.53) se rovná nule, neboť je vlastně vlnovou rovnicí pro A

$$\left[\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{m}) + \omega^2 \mu \bar{\epsilon} \cdot \vec{m} \right] A = 0 \quad (5.54)$$

Zbývající dva členy v (5.53) lze tedy upravit následovně: nejdříve vynásobíme skalárně oba členy jednotkovým vektorem \vec{m}

$$\vec{m} \cdot \left[\vec{k} \times (\nabla \times \vec{m}) \right] A + \vec{m} \cdot \left[\nabla \times (\vec{k} \times \vec{m}) \right] A = 0 \quad (5.55)$$

potom provedeme další zjednodušení tím, že levou stranu (5.55) přepíšeme na tvar

$$\vec{m} \cdot \left[\vec{k} \times (\nabla \times \vec{m}) \right] A + \vec{m} \cdot \left[\nabla \times (\vec{k} \times \vec{m}) \right] A = -2 \left[\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m}) \right] \cdot \nabla A = 0$$

tedy

$$\left[\vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m}) \right] \cdot \nabla A = 0 \quad (5.56)$$

Jako výsledek jsme dostali upravenou „zkrácenou“ vlnovou rovnici, která popisuje šíření vlnového svazku v anizotropním prostředí, avšak bez uvažování difrakce (zanedbali jsme druhé derivace) a disipace energie (vektorová amplituda \vec{A} je konstantní). S ohledem na odvození provedené před rovnicí (5.45) platí, že

$$\vec{s} \parallel \vec{m} \times (\vec{k} \times \vec{m})$$

Aplikací tohoto faktu na diskusi (5.56) okamžitě zjišťujeme, že se vlnový svazek v anizotropním prostředí šíří v prvním přiblížení beze změny amplitudy ve směru paprskového vektoru \vec{s} .

5.2.1 Tenzor permitivity jednoosého prostředí

Uvažujme jako příklad jednoosé anizotropní prostředí, pro něž platí

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \bar{\epsilon} \cdot \vec{E} & \mathbf{L} &= \mathbf{M} = 0 \\ \mathbf{Q} &= \frac{1}{c\mu} \mathbf{I} & \mathbf{P} &= c\bar{\epsilon} \end{aligned}$$

Označme složky tenzoru permitivity v jednoosém prostředí (jedna z hlavních os tenzoru ϵ_{ij} je shodná s optickou osou a dvě zbývající jsou stejné), $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}$ a zapišme je v maticové formě

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Prostředí bude *kladně* jednoosé, jestliže

$$\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$$

a *záporně* jednoosé pro

$$\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$$

Disperzní relaci pro *jednoosé* anizotropní prostředí dostaneme z vlnové rovnice vektorového tvaru

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu \vec{D} \quad (5.57)$$

Po provedení dvojitého vektorového součinu dostaneme

$$\vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \vec{D} \quad (5.58)$$

Jelikož

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z \quad (5.59)$$

potom

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} = \varepsilon_{\perp} k_x E_x + \varepsilon_{\perp} k_y E_y + \varepsilon_{\parallel} k_z E_z \quad (5.60)$$

Protože v jednoosém prostředí, jak bylo uvedeno, je vektor \vec{k} kolmý na vektor \vec{D} ($\vec{k} \perp \vec{D}$), bude

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad (5.61)$$

ze vztahu (5.60) vyplývá, že

$$k_x E_x + k_y E_y = -\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_z E_z \quad (5.62)$$

Skalární součin ($\vec{k} \cdot \vec{E}$) (5.59) lze potom psát ve tvaru

$$(\vec{k} \cdot \vec{E}) = k_z E_z - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_z E_z = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z \quad (5.63)$$

Po dosazení do (5.58) dostaneme

$$-k^2 \vec{E} + \vec{k} \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z = -\omega^2 \mu \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}, \quad (5.64)$$

což po úpravě lze rozepsat na jednotlivé složky následovně:

$$-k^2 E_x + k_x \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z = -\omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} E_x \quad (5.65)$$

$$-k^2 E_y + k_y \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z = -\omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} E_y \quad (5.66)$$

$$-k^2 E_z + k_z \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_z E_z = -\omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel} E_z \quad (5.67)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} -k^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & 0 & \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_x k_z \\ 0 & -k^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} & \left(1 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}\right) k_y k_z \\ 0 & 0 & -k_x^2 - k_y^2 - \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_z^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

5.2. ŠÍŘENÍ ROVINNÝCH VLN V KRYSTALICKÝCH PROSTŘEDÍCH 105

Položením determinantu soustavy rovny nule dostaneme disperzní relaci pro jednoosé anizotropní prostředí

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} \quad (5.69)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel} \quad (5.70)$$

Ze získaných výsledků plyne, že v jednoosém anizotropním prostředí se budou šířit dvě vlny

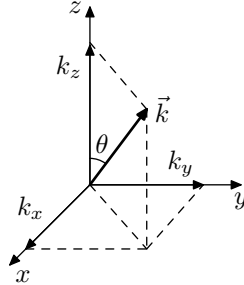
1. *řádná vlna*, jež má obdobnou relaci jako vlna v izotropním prostředí, $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp}$, kde \vec{k} není funkcí směru šíření podél optické osy,
2. *mimořádná vlna* s disperzní relací

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel},$$

u níž velikost vektoru \vec{k} bude závislá na směru šíření.

Výskyt dvou charakteristických vln šířících se různými směry odlišnými rychlostmi (v_o, v_e) se nazývá *dvojlomem*.

Uvažujme vlnový vektor \vec{k} , jež svírá s optickou osou (zde osou z) úhel θ dle obr. 5.3.



Obrázek 5.3: Orientace vlnového vektoru v souřadné soustavě

Ve zvolené kartézské soustavě budou platit následující vztahy mezi složkami vektoru \vec{k} a úhlem θ

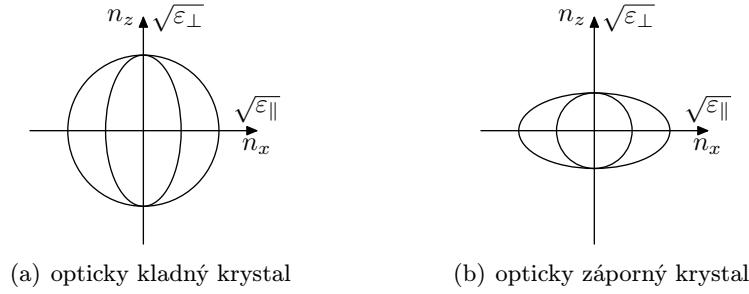
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{|\vec{k}|} &= \sin \theta & k_x^2 + k_y^2 &= k^2 \sin^2 \theta \\ \frac{k_z}{|\vec{k}|} &= \cos \theta & k_z^2 &= k^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (5.71)$$

Po dosazení do disperzní relace pro mimořádnou vlnu dostaneme

$$k^2 \left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \right) = \omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel} \quad (5.72)$$

tedy

$$k = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon_{\parallel}}}{\sqrt{\sin^2 \theta + \frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} \cos^2 \theta}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\perp}}}} \quad (5.73)$$



Obrázek 5.4: Vlnoplochy v jednoosém krystalu

Odtud snadno dostaneme vztah pro fázovou rychlost mimořádné a řádné vlny

$$v_{\text{fe}} = \frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\mu \varepsilon_{\perp}}} \quad (5.74)$$

$$v_{\text{o}} = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon_{\perp}}} \quad (5.75)$$

Pouze ve směru optické osy se mohou obě vlny šířit stejnou fázovou rychlostí. V případě, kdy

$$\varepsilon_{\parallel} \rightarrow \varepsilon_{\perp}$$

degenerují obě vlny ve vlnu jedinou, jež se šíří stejnou rychlostí jako ve směru optické osy.

5.3 Magnetoaktivní prostředí

Prostředí, jež získává anizotropní vlastnosti vlivem stejnosměrného magnetického pole, se nazývá *magnetoaktivní prostředí*. Tenzory permitivity nebo permeability popisující vlastnosti těchto prostředí jsou nesymetrické. V případě magnetoaktivního bezeztrátového prostředí budou tenzory ε_{ij} nebo μ_{ij} hermitovské, tedy

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}^* \quad (5.76)$$

přičemž

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ji}, \quad \varepsilon''_{ij} = -\varepsilon''_{ji}; \quad \mu'_{ij} = \mu'_{ji}, \quad \mu''_{ij} = -\mu''_{ji}$$

(reálné složky $\varepsilon'_{ij}, \mu'_{ij}$ jsou symetrické, imaginární složky $\varepsilon''_{ij}, \mu''_{ij}$ jsou antisymetrické).

Zde rozlišujeme dva případy

1. permitivita ε je tenzor a permeabilita μ skalár — případ *gyroelektrických* prostředí (plazma ve stejnosměrném magnetickém poli, atd.),
2. permeabilita μ je tenzor a permitivita ε je skalár — případ *gyromagnetických* prostředí (ferit ve stálém magnetickém poli a podobně).

Odvoďme nyní vztah pro permitivitu elektronového plazmatu v přítomnosti magnetického pole (gyroelektrické prostředí). Nejdříve bude nutno určit pohyb elektronů, iontů a neutrálních molekul pod vlivem magnetického pole a proměnných vysokofrekvenčních polí pomocí kinetické rovnice pro jednotlivé druhy částic a rovnic elektromagnetického pole. Tato výchozí soustava rovnic je značně složitá. Vystačíme-li s přibližným řešením uvedené elektrodynamické úlohy, můžeme se vyhnout nutnosti řešit zmíněnou složitou soustavu rovnic.

Uvažujme nejdříve případ, kdy je kmitočet vysokofrekvenčního pole mnohem větší než vlastní kmitočet iontů v magnetickém poli (cyklotronový iontový kmitočet)

$$\omega \gg \omega_{ci} = \frac{q_i B_0}{m_i} = q_i \frac{\mu H_0}{m_i}, \quad (5.77)$$

kde ω_{ci} je cyklotronový iontový kmitočet, jenž odpovídá vlastnímu kmitočtu otáčení iontů v magnetickém poli, q_i náboj iontů a m_i je jejich hmotnost.

Při určování polarizace prostředí lze v daném případě pohyb iontů zanedbat a uvažovat pouze pohyb elektronů. Bude-li ještě zároveň

$$\omega \gg \nu,$$

kde ν je srážkový kmitočet elektronů s ionty a molekulami, budou potom převládat posuvné proudy nad proudy vodivými. Pod vlivem elektromagnetického pole vlny bude docházet k prostorovému rozdělení nábojů a ke vzniku silných elektrických polí, které vyvolávají kmitu hustoty náboje o kmitočtu

$$\omega_p^2 = \frac{Nq^2}{m\varepsilon_0}, \quad (5.78)$$

kde ω_p^2 je plazmový kmitočet.

Při řešení uvedené dynamické úlohy budeme ještě rozlišovat případ nízkofrekvenčního přiblížení, pro nějž platí podmínka

$$\omega \ll \omega_{ci} \quad (5.79)$$

a případ vysokofrekvenčního přiblížení pro

$$\omega \gg \omega_{ci} \quad (5.80)$$

a) V případě nízkofrekvenčního přiblížení ($\omega \ll \omega_{ci}$) je možno považovat plazma za elektricky neutrální vodivý plyn, umístěný v magnetickém poli. Mechanický pohyb plazmatu lze pak popsat jako pohyb vodivého kontinua (tekutiny nebo plynu).

b) Bude-li $\omega \gg \omega_{ci}$ (vysokofrekvenční přiblížení) a je-li zároveň splněna podmínka

$$\omega \gg \nu, \quad (5.81)$$

je možno posuvný proud pokládat za celkový proud v prostředí (vodivý proud zanedbáváme); potom platí

$$\vec{j} = \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i\omega \vec{P} = -qN\vec{v} \quad (5.82)$$

Všechny časově proměnné veličiny budeme pokládat za *harmonicky* proměnné; vyjdeme-li ze vztahu pro vektor elektrické indukce

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

a dosadíme-li za \vec{P} ze vztahu (5.82)

$$\vec{P} = -i \frac{Nq}{\omega} \vec{v}$$

dostaneme, že

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} - i \frac{Nq}{\omega} \vec{v} \quad (5.83)$$

Zavedeme-li veličiny p a \vec{u}

$$p = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \vec{u} = i \frac{m\omega}{q} \vec{v} \quad (5.84)$$

a vyjádříme-li $(i \frac{Nq}{\omega} \vec{v})$ následovně

$$i \frac{Nq}{\omega} \vec{v} = i \frac{Nq^2}{\omega^2 \varepsilon_0} \varepsilon_0 \frac{m}{mq} \omega \vec{v} = i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{m\omega}{q} \varepsilon_0 \vec{v} = \varepsilon_0 p \vec{u} \quad (5.85)$$

lze vztah (5.83) napsat ve tvaru

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (\vec{E} - p \vec{u}) \quad (5.86)$$

Vektor \vec{u} můžeme určit pomocí pohybové rovnice částice, která je pod vlivem elektrického a magnetického pole

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \dot{\vec{v}} = -q [\vec{E} + \mu_0 (\vec{v} \times \vec{H}_v)], \quad (5.87)$$

kde \vec{H}_v je vnější, časově stálé magnetické pole, jež vytváří anizotropii plazmatu.

Definujme další vektor, pomocí indukce magnetického pole, tedy

$$\vec{\omega}_H = \frac{\omega_{ce}}{\omega} \frac{\vec{B}_0}{|\vec{B}_0|}, \quad |\vec{\omega}_H| = \frac{\omega_{ce}}{\omega}, \quad (5.88)$$

kde ω_{ce} je cyklotronový kmitočet elektronů

$$\omega_{ce} = \frac{qB_0}{m_e} \quad (5.89)$$

Pomocí vektoru \vec{u} a parametru p je možno přepsat levou stranu pohybové rovnice na tvar

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -i\omega \vec{v} m \quad (5.90)$$

Na pravé straně (5.87) dosadíme za \vec{v} ze vztahu (5.84) a vyjádříme \vec{B}_0 pomocí (5.88), tedy

$$\frac{i\omega m}{q} \vec{v} = \vec{E} - i (\vec{u} \times \vec{\omega}_H) \quad (5.91)$$

S využitím druhého vztahu v (5.84) pak dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru vektorové rovnice pro \vec{u}

$$\vec{u} = \vec{E} - i(\vec{u} \times \vec{\omega}_H) \quad (5.92)$$

Uvažujme nyní případ magnetického pole orientovaného ve směru osy z

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$$

V tom případě bude

$$\vec{\omega}_H = \left(0, 0, \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right) \quad (5.93)$$

Vektorovou rovnici pro \vec{u} lze rozepsat v kartézské souřadné soustavě a určit velikost jednotlivých složek

$$u_x = E_x - i\omega_H u_y \quad (5.94)$$

$$u_y = E_y + i\omega_H u_x \quad (5.95)$$

$$u_z = E_z \quad (5.96)$$

Po úpravě lze dostat

$$u_x = \frac{E_x}{1 - \omega_H^2} - i \frac{E_y}{1 - \omega_H^2} \omega_H \quad (5.97)$$

$$u_y = i \frac{E_x}{1 - \omega_H^2} \omega_H - \frac{E_y}{1 - \omega_H^2} \quad (5.98)$$

$$u_z = E_z \quad (5.99)$$

Po dosazení do vztahu pro \vec{D} (5.100)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (\vec{E} - p\vec{u}) \quad (5.100)$$

a srovnáním podle jeho složek v kartézské soustavě, dostáváme

$$\begin{aligned} D_x = \varepsilon_0 (E_x - pu_x) &= \varepsilon_0 \left[\left(1 - \frac{p}{1 - \omega_H^2}\right) E_x + i \frac{p\omega_H}{1 - \omega_H^2} E_y \right] = \\ &= \varepsilon_0 (\varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y) \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\begin{aligned} D_y = \varepsilon_0 (E_y - pu_y) &= \varepsilon_0 \left[-i \frac{p\omega_H}{1 - \omega_H^2} E_x + \left(1 - \frac{p}{1 - \omega_H^2}\right) E_y \right] = \\ &= \varepsilon_0 (-\varepsilon_{xy} E_x + \varepsilon_{yy} E_y) \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$D_z = \varepsilon_0 (1 - p) E_z = \varepsilon_0 \varepsilon_{zz} E_z \quad (5.103)$$

Pomocí těchto vztahů lze přepsat tenzor permitivity v maticové formě

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 - \frac{p}{1 - \omega_H^2} & i \frac{p\omega_H}{1 - \omega_H^2} & 0 \\ -i \frac{p\omega_H}{1 - \omega_H^2} & 1 - \frac{p}{1 - \omega_H^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - p) \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

Jak je vidět, bude ε_{ij} hermitovským tenzorem, neboť mezi jeho složkami platí vztah

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}^*(\omega)$$

Je zajímavé, že tenzor ε_{ij} není reálný, přestože jsme neuvažovali absorpci prostředí.

Nyní se podíváme na některé charakteristické vlastnosti uvažovaného magnetoaktivního prostředí gyroelektrického typu.

Použitím získaných výsledků lze zjistit typ polarizace šířící se elektromagnetické vlny. Sečtením $D_x \pm iD_y$ a použitím [2x2] submatice z (5.104), tj.

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (5.105)$$

kde

$$\varepsilon_{yx} = -\varepsilon_{xy}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$$

dostáváme

$$D_x \pm iD_y = (\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy})(E_x \pm iE_y) \quad (5.106)$$

Jelikož kombinace $\varepsilon_{xx} \mp i\varepsilon_{xy}$ je vždy reálnou veličinou, plyne z toho, že vektory \vec{D} a \vec{E} budou v příčné rovině rovnoběžné a že šířící se vlny budou mít kruhovou (v obecném případě eliptickou) polarizaci.

Další charakteristickou vlastností magnetoaktivního prostředí je existence rezonančních jevů v případě, že $\omega \rightarrow \omega_{ce}$, kde ω je kmitočet vysokofrekvenčního (VF) elektromagnetického pole. Podíváme-li se na odvozené vztahy pro jednotlivé složky permitivity, zjistíme, že by pro $\omega \rightarrow \omega_{ce}$ některé z nich rostly nade všechny meze, protože jsme při výpočtu tenzoru ε_{ij} nebrali v úvahu disipativní procesy, což fyzikálně není možné.

Jak to bude vypadat při respektování disipativních procesů (definovaných pomocí srážek elektronů s ionty a neutrálními molekulami)? Jelikož je elektron polem zároveň i urychlován, bude se jeho poloměr oběhu kolem siločáry magnetického pole zvětšovat, a tím i prodlužovat jeho cesta plazmatickým prostředím, v důsledku čehož vykoná i větší počet srážek. Výchozím vztahem bude pohybová rovnice, v níž jsou respektovány srážkové procesy, tedy

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\nu \frac{d\vec{r}}{dt} = -q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.107)$$

Řešením (5.107) dostaneme (obdobně jako dříve), že

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega + i\nu)}{\omega[(\omega + i\nu)^2 - \omega_{ce}^2]} \quad (5.108)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i \frac{\omega_p^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega + \omega_{ce} + i\nu)(\omega - \omega_{ce} + i\nu)} \quad (5.109)$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(1 + i\nu)} \quad (5.110)$$

Je vidět, že tenzor permitivity je nyní komplexní, takže můžeme použít stejné označení jako v předcházejících případech, tedy

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij} = \varepsilon_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega} \quad (5.111)$$

Při respektování pohybu iontů v poli vlny při zanedbání ztrát (v důsledku srážek) budou mít složky tenzoru permitivity další členy, které dostaneme z odpovídající rovnice

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} + m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -q \left(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}_0 + \vec{v}_i \times \vec{B}_0 \right) \quad (5.112)$$

tedy

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \quad (5.113)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} + i \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ci}^2)}, \quad (5.114)$$

zde ω_{ci} a ω_{ce} jsou iontový a elektronový *cyklotronový* kmitočty.

Bude-li $\omega^2 \gg \omega_{ci}^2$ (VF přiblížení), dostaneme znovu předcházející vztah pro příčné složky tenzoru permitivity ($\omega_p^2 \equiv \omega_{pe}^2$)

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \quad (5.115)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i \frac{\omega_p^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \quad (5.116)$$

V případě nízkofrekvenčního přiblížení, tedy pro

$$\omega^2 \ll \omega_{ci}^2$$

přejde vztah (5.113) na tvar

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \quad (5.117)$$

Dosazením za

$$\begin{aligned} \omega_{pe}^2 &= \frac{Nq_e^2}{m_e \varepsilon_0} & \omega_{pi}^2 &= \frac{Nq_i^2}{m_i \varepsilon_0} \\ \omega_{ce}^2 &= \frac{q_e^2 B_0^2}{m_e^2} & \omega_{ci}^2 &= \frac{q_i^2 B_0^2}{m_i^2} \end{aligned} \quad (5.118)$$

dostaneme, že

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{1}{\varepsilon_0 B_0^2} N (m_e + m_i) = 1 + \frac{\varrho}{\varepsilon_0 B_0^2}, \quad (5.119)$$

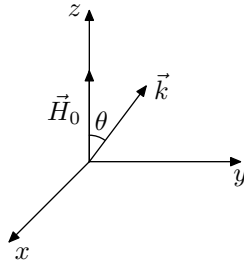
kde $\varrho_m = N(m_e + m_i)$ je hustota prostředí (případ jedenkrát ionizovaných atomů).

5.4 Rovinné vlny v magnetoaktivním prostředí plazmatického typu

Uvažujme případ šíření rovinné elektromagnetické vlny v anizotropním prostředí, jež vznikne vložením plazmatu do magnetického pole orientovaného ve směru osy z kartézské souřadné soustavy. Nechť vlnový vektor \vec{k} leží v rovině (y, z) , kde svírá s osou z úhel θ . To znamená, že

$$\begin{aligned} k_x &= 0, & n_x &= 0 \\ k_y &= k \sin \theta, & n_y &= n \sin \theta \\ k_z &= k \cos \theta, & n_z &= n \cos \theta \end{aligned} \quad (5.120)$$

Rovnice, jež popisuje šíření rovinné monochromatické vlny v anizotropním



Obrázek 5.5: Vzájemná orientace vlnového vektoru a magnetického pole

prostředí při respektování disperze má tvar

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \omega^2 \mu \bar{\epsilon}(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.121)$$

Zavedením indexu lomu $\vec{n} = \frac{c}{\omega} \vec{k}$ a za předpokladu $\mu = \mu_0$ lze použít rovnici ve tvaru

$$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + \bar{\epsilon}_r(\omega, \vec{k}) \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.122)$$

nebo ve složkovém tvaru (po provedení vektorového součinu) pro složky vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} (index r zde byl pro jednoduchost zápisu vynechán)

$$(n^2 \delta_{ij} - n_i n_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0, \quad (5.123)$$

kde

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$$

Předpokládejme nyní znalost složek tenzoru permitivity zadaného následujícím způsobem (případ vysokofrekvenčního přiblížení pro bezesrážkové plazma):

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \quad (5.124)$$

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = i\kappa = i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{\omega(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \quad (5.125)$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = 0 \quad (5.126)$$

Potom je možno soustavu rovnic (5.123) vyjádřit v explicitním tvaru

$$(n^2 - \varepsilon_{xx}) E_x - i\kappa E_y + (\varepsilon_{xz} + n_x n_z) E_z = 0 \quad (5.127)$$

$$i\kappa E_x + (n_x^2 + n_z^2 - \varepsilon_{\perp}) E_y - n_y n_z E_z = 0 \quad (5.128)$$

$$(\varepsilon_{xz} + n_x n_z) E_x - n_y n_z E_y + (n_y^2 - \varepsilon_{\parallel}) E_z = 0 \quad (5.129)$$

Po úpravě budeme mít (viz (5.120) a (5.126))

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp}) E_x - i\kappa E_y = 0 \quad (5.130)$$

$$i\kappa E_x + (n^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_{\perp}) E_y - n^2 \sin \theta \cos \theta E_z = 0 \quad (5.131)$$

$$-n^2 \sin \theta \cos \theta E_y + (n^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_{\parallel}) E_z = 0 \quad (5.132)$$

Položením determinantu soustavy (5.130)–(5.132) rovným nule dostaneme pro čtverec indexu lomu n^2 kvadratickou rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$an^4 - bn^2 + c = 0 \quad (5.133)$$

zde

$$a = \varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta \quad (5.134)$$

$$b = (\varepsilon_{\perp}^2 - \kappa^2) \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} (1 + \cos^2 \theta) \quad (5.135)$$

$$c = \varepsilon_{\parallel} (\varepsilon_{\perp}^2 - \kappa^2) \quad (5.136)$$

Řešení pro čtverec indexu lomu n^2

$$n^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.137)$$

lze upravit na tvar (abychom zjistili, jak se vypočtená velikost indexu lomu liší od případu $n^2 = 1$)

$$n^2 = \frac{2a - 2a + b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{(2a - b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{(2a - b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

odkud dostaneme

$$n^2 = 1 - \frac{2(a - b + c)}{2a - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (5.138)$$

Po dosazení za $a, b, c, \varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}, \kappa$ a použitím zavedených bezrozměrných veličin

$$p = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_H = \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

získáme výraz pro index lomu řádné a mimořádné vlny

$$n_{o,e}^2 = 1 - \frac{2p(1-p)}{2(1-p) - \omega_H^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{\omega_H^4 \sin^4 \theta + 4\omega_H^2 (1-p)^2 \cos^2 \theta}}, \quad (5.139)$$

kde n_o a n_e jsou indexy lomu řádné a mimořádné vlny. Ze získaného výrazu plyne, že oba indexy lomu jak pro řádnou vlnu n_o^2 , tak pro mimořádnou vlnu n_e^2 jsou funkcemi úhlu a že jedné hodnotě kmitočtů odpovídají dvě hodnoty indexu lomu. Jelikož $p = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ a ω_H jsou funkcemi kmitočtu, bude magnetoaktivní prostředí prostředím disperzním, kde rychlosti šíření řádné a mimořádné vlny jsou určeny indexy lomu n_o a n_e . Ze znalosti součinitele polarizace

$$P = \frac{E_x}{E_y}$$

je možno určit charakter polarizace elektromagnetické vlny i v případě magnetoaktivního prostředí. Lze ukázat, že polarizace jak řádné, tak i mimořádné vlny je eliptická (příčemž směry otáčení vektoru \vec{E} řádné a mimořádné vlny jsou opačné).

Uvažujme případ

$$p \ll 1, \quad \omega_{ce} \ll \omega \quad (\omega_H \ll 1),$$

což znamená, že je malý vliv magnetického pole. V tom případě ze vztahu (5.139) dostaneme

$$n_{o,e}^2 \doteq 1 - \frac{p}{1 \mp \omega_H \cos \theta} \doteq 1 - p(1 \pm \omega_H \cos \theta) = 1 - p \mp p\omega_H \cos \theta \quad (5.140)$$

Ukážeme, že i když je malá hodnota členů ($\pm p\omega_H \cos \theta$), přesto mohou mít značný vliv při otáčení polarizační roviny, urazí-li vlna ve zmagnetovaném plazmatu dostatečně velkou vzdálenost (*Faradayův jev*³).

Nechť lineárně polarizovaná vlna dopadá na magnetoaktivní prostředí s vektorem intenzity elektrického pole \vec{E} rovnoběžným s osou x a o kmitočtu $\omega \gg \omega_p$, takže $n_{o,e}^2 > 0$. V dostatečně vzdálenosti l od zdroje je možno vyjádřit v elektrické pole jako součet polí dvou kruhově polarizovaných vln

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \frac{1}{2}E_0 e^{ik_0 n_o l} & E_{1y} &= \frac{i}{2}E_0 e^{ik_0 n_o l} \\ E_{2x} &= \frac{1}{2}E_0 e^{ik_0 n_e l} & E_{2y} &= -\frac{i}{2}E_0 e^{ik_0 n_e l} \end{aligned} \quad (5.141)$$

Zvolíme-li n_o a n_e následovně

$$n_o = \frac{n_o + n_e}{2} + \frac{n_o - n_e}{2}, \quad n_e = \frac{n_o + n_e}{2} - \frac{n_o - n_e}{2} \quad (5.142)$$

lze potom vyjádřit E_x a E_y vztahy

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_0 \cos\left(k_0 \frac{n_o - n_e}{2} l\right) e^{ik_0 \frac{n_o + n_e}{2} l} \quad (5.143)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = -E_0 \sin\left(k_0 \frac{n_o - n_e}{2} l\right) e^{ik_0 \frac{n_o + n_e}{2} l}, \quad (5.144)$$

³ *Faradayův jev* byl jeden z prvních důkazů přímé souvislosti mezi optickými a elektromagnetickými jevy. V magnetooptice patří mezi základní jevy.

kde $\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$ je výsledná vlna v magnetoaktivním prostředí. Součinitel polarizace bude

$$P = \frac{E_x}{E_y} = -\cotg \left(k_0 \frac{n_o - n_e l}{2} \right) \quad (5.145)$$

Jelikož

$$n_o - n_e = 1 - p - \frac{1}{2} p \omega_H \cos \theta - \left(1 - p + \frac{1}{2} p \omega_H \cos \theta \right) = -p \omega_H \cos \theta \quad (5.146)$$

bude tedy

$$P = -\cotg \left[k_0 \frac{l}{2} (-p \omega_H \cos \theta) \right] = \cotg \alpha, \quad (5.147)$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{2} k_0 l p \omega_H \cos \theta \quad (5.148)$$

Ze vztahu (5.148) vyplývá, že *stáčení* polarizační roviny závisí na *délce cesty*, kterou vlna urazí, na *velikosti magnetického pole*, na *kmitočtu* a na parametrech plazmatu (*hustotě*).

5.5 Šíření elektromagnetických vln v gyromagnetických prostředích

Dalším anizotropním prostředím je gyromagnetické prostředí feromagnetických polovodičů typu feritů. Při analýze budeme předpokládat, stejně jako u gyroelektrických prostředí typu plazmatu, že je anizotropie vyvolána působením stálého (nebo pomalu proměnného) magnetického pole. Při nulovém magnetickém poli bude permeabilita feritů skalární veličinou. Ferit se chová jako izotropní prostředí a tento předpoklad platí pouze přibližně, neboť ferity mají krystalickou strukturu a je jim vlastní krystalografická anizotropie. V důsledku toho nedochází ke změně tvaru tenzoru permeability, ale pouze ke změně jeho složek.

V důsledku účinné interakce feritů s vysokofrekvenčními poli lze získat zajímavé, technicky užitečné vlastnosti feritů, a proto mají ferity velký význam v oblasti velmi krátkých vln.

Nyní odvodíme složky tenzoru permeability kvaziklasickou metodou. U volných elektronů plazmatu lze vybudit cyklotronovou rezonanci, jestliže v pole má kmitočet odpovídající elektronovému cyklotronovému kmitočtu. Vázané, rychle se otáčející elektrony (jejich magnetické momenty) lze rovněž dostat do rezonančního stavu, bude-li použité v pole magnetické pole kolmé k přiloženému konstantnímu magnetickému poli. (Rychle rotující elektron v přítomnosti konstantního magnetického pole je možno v mnoha směrech srovnávat s gyroskopem a magnetické pole s gravitačním polem.)

Nechť tedy molekuly feritu mají magnetické momenty (spinové povahy), které se vzájemně nekompenzují. Potom bude mít každá jednotka objemu prostředí nenulový magnetický moment. Působí-li na feromagnetickou látku dostatečně silné konstantní magnetické pole, bude precese těchto momentů kolem silokřivek přiloženého magnetického pole vést ke vzniku anizotropie. Tomuto

precesnímu pohybu říkáme *vlastní precese magnetického momentu* a jemu odpovídající kruhový kmitočet se nazývá *Larmorovým* precesním kmitočtem. U reálných feromagnetik vykonává vektor magnetického momentu tlumený precesní pohyb. Působením dodatečného pole — vysokofrekvenční složky magnetického pole s kmitočtem blízkým vlastnímu *Larmorovu* kmitočtu — je možno udržet precesní pohyb jako netlumený a přídavná magnetizace, která tím vzniká, se projeví ve složkách výsledného makroskopického tenzoru permeability.

Rotující elektron lze charakterizovat magnetickým dipólovým momentem \vec{m} a momentem hybnosti \vec{J} , mezi nimiž platí vztah

$$\vec{m} = \gamma \vec{J}, \quad (5.149)$$

kde $\gamma = -\left|\frac{e}{m}\right|$ je gyromagnetický poměr, jež je shodný s magnetomechanickým poměrem (obecně vzato je to poměr mezi magnetickým momentem elementárních částic a momentem hybnosti); velikost γ určená klasickým způsobem se liší od velikosti γ určené způsobem kvantově mechanickým o součinitel 2.

Pohybová rovnice momentu hybnosti je dána vztahem

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{T}, \quad (5.150)$$

kde \vec{T} je torzní moment rotujícího elektronu ve vnějším magnetickém poli, mezi nimiž platí vztah

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.151)$$

Bude-li N elektronů v jednotce objemu, bude magnetický moment \vec{M} určen vztahem

$$\vec{M} = N\vec{m} \quad (5.152)$$

Odtud dostaneme, že

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{J}}{dt} \quad (5.153)$$

tedy

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \times \vec{B} \quad (5.154)$$

nebo

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \mu_0 \vec{M} \times \vec{H}, \quad (5.155)$$

což je tzv. *Landau-Lifšicova* nebo *Blochova* rovnice, kterou můžeme pomocí \vec{M}_{ef} a \vec{H}_{ef} napsat ve tvaru

$$\frac{d\vec{M}_{\text{ef}}}{dt} = \gamma \mu_0 \left(\vec{M}_{\text{ef}} \times \vec{H}_{\text{ef}} \right), \quad (5.156)$$

kde

$$\vec{M}_{\text{ef}} = \vec{M}_0 + \vec{M} \quad (5.157)$$

$$\vec{H}_{\text{ef}} = \vec{H}_0 + \vec{H} \quad (5.158)$$

Zde \vec{M}_0, \vec{H}_0 jsou konstantní složky magnetizace a intenzity magnetického pole a \vec{M}, \vec{H} jsou střídavé složky magnetizace a intenzity magnetického pole, jež existují v přítomnosti VF elektromagnetického pole.

Budeme-li předpokládat, že

$$\vec{H} \ll \vec{H}_0, \quad \vec{M} \ll \vec{M}_0, \quad \vec{H}_0 = H_0 \vec{z}, \quad (5.159)$$

potom výchozí *Landau-Lifšicovu* rovnici lze psát následovně:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\mu_0 \left[(\vec{M}_0 + \vec{M}) \times (\vec{H}_0 + \vec{H}) \right] \quad (5.160)$$

Jelikož $\vec{H} \ll \vec{H}_0, \vec{M} \ll \vec{M}_0$ bude s dostatečnou přesností platit, že

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma\mu_0 \left[(\vec{M} \times \vec{H}_0) + (\vec{H} \times \vec{M}_0) \right], \quad (5.161)$$

což lze psát ve tvaru

$$\frac{d\vec{M}}{dt} + \gamma\mu_0 (\vec{M} \times \vec{H}_0) = \gamma\mu_0 (\vec{M}_0 \times \vec{H}) \quad (5.162)$$

(zde jsme zanedbali veličiny druhého řádu). Získaná rovnice (5.162) popisuje vztah mezi střídavou složkou magnetizace (magnetické polarizace) a intenzitou vysokofrekvenčního pole \vec{H} .

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že všechny veličiny, časově proměnné, se mění harmonicky; po rozepsání rovnice (5.162) (v kartézské souřadné soustavě) budeme mít

$$-i\omega M_x + \mu_0\gamma H_0 M_y = \mu_0\gamma M_0 H_y$$

nebo

$$-i\omega M_x + \omega_L M_y = \mu_0\gamma M_0 H_y, \quad (5.163)$$

zde $\omega_L = \mu_0\gamma|\vec{H}_0|$ *Larmorův* precesní kmitočet.

Pro další složky dostaneme obdobně

$$-i\omega M_y - \omega_L M_x = -\mu_0\gamma M_0 H_x \quad (5.164)$$

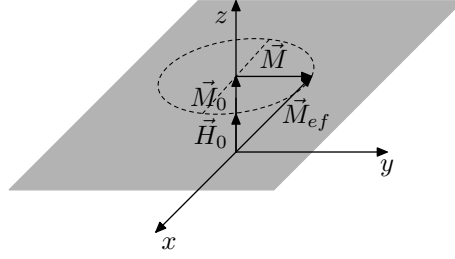
$$-i\omega M_z = 0 \quad (5.165)$$

Vzájemnou polohu vektorů $\vec{M}_0, \vec{M}, \vec{M}_{\text{ef}}, \vec{H}_0$ lze znázornit v kartézské soustavě dle obr. 5.6. Z rozepsaných složkových rovnic lze po úpravě dostat velikost jednotlivých složek vektoru magnetizace \vec{M}

$$M_x = \frac{M_0}{H_0} \frac{\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2} H_x + i \frac{M_0}{H_0} \frac{\frac{\omega_L}{\omega}}{1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2} H_y \quad (5.166)$$

$$M_y = -i \frac{M_0}{H_0} \frac{\frac{\omega_L}{\omega}}{1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2} H_x + \frac{M_0}{H_0} \frac{\left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega_L}{\omega}\right)^2} H_y \quad (5.167)$$

$$M_z = 0 \quad (5.168)$$



Obrázek 5.6: Precese vektoru magnetizace \vec{M} kolem intenzity magnetického pole \vec{H}

Jelikož

$$\vec{M} = \bar{\kappa} \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \bar{\mu} \cdot \vec{H}, \quad \bar{\mu} = \mu_0 (\mathbf{I} + \bar{\kappa}),$$

lze velikost jednotlivých složek vektoru \vec{M} pro kartézskou soustavu vyjádřit následovně:

$$M_x = \kappa_{xx} H_x + \kappa_{xy} H_y + \kappa_{xz} H_z \quad (5.169)$$

$$M_y = \kappa_{yx} H_x + \kappa_{yy} H_y + \kappa_{yz} H_z \quad (5.170)$$

$$M_z = \kappa_{zx} H_x + \kappa_{zy} H_y + \kappa_{zz} H_z \quad (5.171)$$

nebo v maticovém tvaru

$$\vec{M} = \bar{\kappa} \cdot \vec{H} = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (5.172)$$

Srovnáním součinitelů u jednotlivých složek H_x, H_y, H_z se vztahem pro $\bar{\mu}$ a \vec{B} dostáváme

$$\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{\perp} = \mu_0 \left[1 + \frac{M_0}{H_0} \frac{(\frac{\omega_L}{\omega})^2}{1 - (\frac{\omega_L}{\omega})^2} \right] \quad (5.173)$$

$$\mu_{xy} = -\mu_{yx} = i\kappa = i\mu_0 \frac{M_0}{H_0} \frac{\frac{\omega_L}{\omega}}{1 - (\frac{\omega_L}{\omega})^2} \quad (5.174)$$

$$\mu_{zz} = \mu_{\parallel} = \mu_0, \quad \mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_{zy} = 0 \quad (5.175)$$

a lze tedy psát

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & i\kappa & 0 \\ -i\kappa & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.176)$$

Dospíváme tedy k závěru, že tenzor permeability má analogický tvar jako tenzor permitivity plazmatu v magnetickém poli a že působením střídavé složky intenzity VF magnetického pole se vybudí střídavá složka magnetické polarizace. Bude-li kmitočet vnějšího VF magnetického pole velmi blízký nebo totožný s *Larmorovým* kmitočtem, vznikne netlumený precesní pohyb jako v případě

oscilátoru netlumených kmitů. Dojde k rezonanci a vybudí se maximální magnetická polarizace. Tento jev je znám jako *feromagnetická rezonance*.

Ze získaných výsledků (5.173) až (5.175) vyplývá, že tenzor permeability gyromagnetického prostředí typu polovodivých feromagnetik je hermitovský

$$\mu_{xy} = \mu_{yx}^* \quad (5.177)$$

Ferit se tedy chová jako magnetoaktivní prostředí. Vlny ve feritu budou mít kruhovou nebo eliptickou polarizaci a složky tenzoru jsou funkcemi jak kmitočtu, tak i magnetického pole \vec{H} .

Zvláště široké použití mají ferity v pásmu cm a mm vln, kde se používají jako stavebnicové prvky feritových izolátorů, rotátorů a cirkulátorů nebo jako ladící prvky pro dutinové rezonátory.

Budeme sledovat šíření elektromagnetických vln v anizotropním prostředí feritového typu. Řešením příslušné vlnové rovnice dostaneme charakteristiky zkoumaného pole. Zavedme reciprokový tenzor permeability $\bar{\mu}^{-1}$ následovně:

$$\text{rot } \vec{E} = i\omega\bar{\mu} \cdot \vec{H}$$

Odtud

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega\bar{\mu}} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\frac{i}{\omega}\bar{\mu}^{-1} \cdot \text{rot } \vec{E} \quad (5.178)$$

Složky reciprokého tenzoru $\bar{\mu}^{-1}$ dostaneme pomocí předcházejících vztahů mezi \vec{B} a \vec{H}

$$\vec{B} = \bar{\mu} \cdot \vec{H} \quad (5.179)$$

Pomocí vztahů (5.173) až (5.175) můžeme (5.179) rozepsat po složkách (v kartézské souřadné soustavě)

$$B_x = \mu_{\perp} H_x + i\kappa H_y \quad (5.180)$$

$$B_y = -i\kappa H_x + \mu_{\perp} H_y \quad (5.181)$$

$$B_z = \mu_{\parallel} H_z \quad (5.182)$$

Vyjádříme-li H_x, H_y, H_z z těchto rovnic, dostáváme

$$H_x = \frac{1}{\mu_{\perp}} (B_x - i\kappa H_y) \quad (5.183)$$

$$H_y = \frac{1}{\mu_{\perp}} (B_y + i\kappa H_x) = \frac{1}{\mu_{\perp}} \left[B_y + i\kappa \frac{1}{\mu_{\perp}} (B_x - i\kappa H_y) \right] \quad (5.184)$$

$$H_z = \frac{1}{\mu_{\parallel}} B_z \quad (5.185)$$

Po přeskupení členů v rovnicích (5.183), (5.184), (5.185) podle H_x, H_y a H_z dostáváme

$$H_x = \frac{i\kappa}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2} B_x + \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2} B_y = -i\kappa^r B_x + \kappa_{\perp}^r B_y \quad (5.186)$$

$$H_y = \kappa_{\perp}^r B_x + i\kappa^r B_y \quad (5.187)$$

$$H_z = \kappa_{\parallel}^r B_z, \quad (5.188)$$

kde

$$\kappa^r = -\frac{\kappa}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2} = \mu_{xy}^{-1} = -\mu_{yx}^{-1} \quad (5.189)$$

$$\kappa_{\perp}^r = \frac{\mu_{\perp}}{\mu_{\perp}^2 - \kappa^2} = \mu_{xx}^{-1} = \mu_{yy}^{-1} \quad (5.190)$$

$$\kappa_{\parallel}^r = \frac{1}{\mu_{\parallel}} = \mu_{\parallel}^{-1} = \mu_{zz}^{-1} \quad (5.191)$$

Ostatní složky reciprokého tenzoru $(\mu_{xz}^{-1}, \mu_{zx}^{-1}, \mu_{yz}^{-1}, \mu_{zy}^{-1})$ se stejně jako v předcházejícím případě rovnají nule.

Nyní odvodíme výchozí vlnovou rovnici. Budeme postupovat tak, že vztah (5.178), tj.

$$\vec{H} = -\frac{i}{\omega} \vec{\mu}^{-1} \cdot \text{rot } \vec{E}$$

využijeme k dosažení za \vec{H} do *Maxwellovy* rovnice

$$\text{rot } \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

Tak dostaneme

$$\text{rot} \left(\frac{1}{i\omega} \vec{\mu}^{-1} \cdot \text{rot } \vec{E} \right) = -i\omega\varepsilon\vec{E}$$

nebo po úpravě

$$\text{rot} \left(\vec{\mu}^{-1} \cdot \text{rot } \vec{E} \right) = \omega^2\varepsilon\vec{E}, \quad (5.192)$$

což je hledaná vlnová rovnice pro výpočet elektromagnetického pole v gyromagnetickém prostředí.

Vektorovou vlnovou rovnici (5.192) rozepíšeme na složkové rovnice ve zvolené souřadné soustavě. V případě kartézské souřadné soustavy dostaneme po úpravách složkovou rovnici pro E_x

$$\varepsilon\omega^2 E_x = \text{rot}_x \left(\vec{\mu}^{-1} \cdot \text{rot } \vec{E} \right) \quad (5.193)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega^2 E_x &= \kappa_{\parallel}^r \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + i\kappa^r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \\ &- \kappa_{\perp}^r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.194)$$

Všechny členy, jež obsahují složku E_x , převedeme na levou stranu a přidáme na obě strany člen $\kappa_{\parallel}^r \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}$; pro prostředí bez nábojů platí

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

Odtud dostaneme, že

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (5.195)$$

Pro smíšenou parciální derivaci můžeme potom dostat vyjádření

$$\kappa_{\parallel}^r \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) = -\kappa_{\parallel}^r \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} \quad (5.196)$$

Obdobné výrazy lze získat i pro ostatní smíšené parciální derivace složek vektoru \vec{E} . Po dalších úpravách dosazováním do (5.194) pomocí analogických výrazů (5.196) i pro ostatní smíšené derivace dostaneme hledanou vlnovou rovnici pro složku E_x

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon\omega^2 + \kappa_{\parallel}^r \Delta + (\kappa_{\perp}^r - \kappa_{\parallel}^r) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_x = \\ & = -i\kappa^r \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[i\kappa^r \frac{\partial}{\partial y} + (\kappa_{\perp}^r - \kappa_{\parallel}^r) \frac{\partial}{\partial x} \right] E_z \end{aligned} \quad (5.197)$$

Zcela analogickým postupem lze odvodit ostatní složkové rovnice pro E_y a E_z (stále ponecháváme odpovídající složky na levé straně vyjádřené jako funkce ostatních dvou složek na straně pravé), tedy

$$\begin{aligned} & \left[\varepsilon\omega^2 + \kappa_{\parallel}^r \Delta + (\kappa_{\perp}^r - \kappa_{\parallel}^r) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_y = \\ & = i\kappa^r \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[-i\kappa^r \frac{\partial}{\partial z} + (\kappa_{\perp}^r - \kappa_{\parallel}^r) \frac{\partial}{\partial y} \right] E_z \end{aligned} \quad (5.198)$$

$$(\varepsilon\omega^2 + \kappa_{\parallel}^r \Delta) E_z = i\kappa^r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (5.199)$$

Jako výsledek získáme tři složkové rovnice pro výpočet intenzity elektrického pole v anizotropním prostředí gyromagnetického typu. Kdybychom dále postupně vyloučili příčné složky, a tím dostali rovnice pro složky podélné, ukázalo by se, že obecně nemůže existovat taková vlna, u které by jedna ze složek E_z nebo H_z byla rovna nule, neboť obě by musely být zároveň nulové, což není možné. Z toho plyne, že v gyrotropním prostředí nemůže samostatně existovat elektrická nebo magnetická příčná vlna.

Zavedením nových proměnných ($T_{1,2} = E_x \pm iE_y$), pomocí nichž lze vyjádřit příčné složky intenzity pole \vec{E} (nebo \vec{H}), bychom po vyloučení buď E_z nebo $T_{1,2}$ dostali stejný typ rovnic pro $T_{1,2}$ a E_z . Byly by to v obecném případě složkové parciální diferenciální rovnice čtvrtého řádu (zatímco u izotropního prostředí jsme měli parciální diferenciální rovnice pouze druhého řádu). Pouze v některých zvláštních případech, když pole \vec{E} (nebo \vec{H}) bude záviset harmonicky na souřadnici z (válcová nebo kartézská souřadná soustava), se výchozí diferenciální rovnice 4. řádu rozpadne na dvě diferenciální rovnice druhého řádu. V tom případě bude výsledné pole dáno superpozicí polí dvou vln, jež se však budou šířit různými fázovými rychlostmi. Výsledné pole bude tedy

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

kde \vec{E}_1, \vec{E}_2 jsou pole odpovídajících dvou vln.

Uvažujme zvláštní případ příčně elektrických vln (TE), jejichž elektrický vektor \vec{E} bude dán vztahem

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{ik_z z}, \quad (5.200)$$

přičemž $E_z = 0$.

Po dosazení do rovnic pro složky E_x a E_y dostáváme

$$\varepsilon\omega^2 E_x + \kappa_{\parallel}^r \Delta_{\perp} E_x + \kappa_{\parallel}^r \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - k_z^2 \kappa_{\perp}^r E_x - \kappa^r \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -i\kappa^r \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \quad (5.201)$$

$$\varepsilon\omega^2 E_y + \kappa_{\parallel}^r \Delta_{\perp} E_y + \kappa_{\parallel}^r \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - k_z^2 \kappa_{\perp}^r E_y - \kappa^r \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = i\kappa^r \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \quad (5.202)$$

Předpokládejme dále, že platí

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (5.203)$$

Jelikož pro pole TE je $E_z = 0$, platí vztah

$$\Delta_{\perp} E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}$$

Pomocí (5.203), tj.

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} \quad (5.204)$$

tak získáme rovnici

$$\Delta_{\perp} E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (5.205)$$

Nyní dokážeme, že v případě příčné elektrické vlny bude tato hodnota nulová. Vzhledem k tomu, že u těchto vln je $E_z = 0$, bude levá strana (5.199) rovna nule, tj.

$$\left(\varepsilon\omega^2 + \kappa_{\parallel}^r \Delta \right) E_z = 0 \quad (5.206)$$

Rovnice (5.199) tak přejde na tvar

$$i\kappa^r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0,$$

což s ohledem na definici (5.200) může být splněno pouze pro

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$$

Dosazením do pravé strany (5.205) (analogická rovnice platí i pro $\Delta_{\perp} E_y$) dostáváme, že

$$\Delta_{\perp} E_x = \Delta_{\perp} E_y = 0$$

Z toho plyne, že v rovnicích (5.201), (5.202) odpadnou členy $\Delta_{\perp} E_x, \Delta_{\perp} E_y$. Pro příčné elektrickou vlnu šířící se ve feritu tak obdržíme výchozí vztahy ve tvaru

$$\left(\varepsilon\omega^2 - \kappa_{\perp}^r k_z^2 \right) E_x - i\kappa^r k_z^2 E_y = 0 \quad (5.207)$$

$$i\kappa^r k_z^2 E_x + \left(\varepsilon\omega^2 - \kappa_{\perp}^r k_z^2 \right) E_y = 0 \quad (5.208)$$

Položením determinantu soustavy rovnic (5.207) a (5.208) rovným nule dostáváme bikvadratickou rovnici pro konstantu šíření k_z , tedy

$$\left[(\kappa_{\perp}^r)^2 - (\kappa^r)^2 \right] k_z^4 - 2\varepsilon\omega^2 \kappa_{\perp}^r k_z^2 + \varepsilon^2 \omega^4 = 0, \quad (5.209)$$

odkud plyne, že

$$k_{z_1}^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{\kappa_{\perp}^r - \kappa^r}, \quad k_{z_2}^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{\kappa_{\perp}^r + \kappa^r}, \quad (5.210)$$

neboť

$$\begin{aligned} k_{z_{1,2}}^2 &= \frac{2\varepsilon\omega^2\kappa_{\perp}^r \pm \sqrt{4\varepsilon^2\omega^4(\kappa_{\perp}^r)^2 - 4\varepsilon^2\omega^4[(\kappa_{\perp}^r)^2 - (\kappa^r)^2]}}{2[(\kappa_{\perp}^r)^2 - (\kappa^r)^2]} = \\ &= \frac{2\varepsilon\omega^2(\kappa_{\perp}^r \pm \kappa^r)}{2[(\kappa_{\perp}^r)^2 - (\kappa^r)^2]} \end{aligned} \quad (5.211)$$

Po dosazení za κ_{\perp}^r a κ^r lze upravit vztahy pro $k_{z_{1,2}}^2$ na tvar

$$k_{z_{1,2}} = \omega\sqrt{\varepsilon(\mu_{\perp} \pm \kappa)} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r(\mu_r \pm \kappa_r)} \quad (5.212)$$

Ze získaných výsledků plyne, že se ve směru osy z budou šířit dvě příčné elektrické vlny s rozdílnými fázovými rychlostmi

$$\begin{aligned} v_{f_1} &= \frac{\omega}{k_{z_1}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\mu_r + \kappa_r)}}, \quad \kappa_r = \frac{M_0}{H_0} \frac{\frac{\omega_L}{\omega}}{1 - (\frac{\omega_L}{\omega})^2} \\ v_{f_2} &= \frac{\omega}{k_{z_2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\mu_r - \kappa_r)}}, \quad \mu_r = 1 + \frac{M_0}{H_0} \frac{(\frac{\omega_L}{\omega})^2}{1 - (\frac{\omega_L}{\omega})^2} \end{aligned} \quad (5.213)$$

Dosazením za $k_{z_1}^2$ a $k_{z_2}^2$ do rovnice (5.207) s využitím (5.210) můžeme snadno určit součinitel polarizace

$$P_{1,2} = \frac{E_x}{E_y} = \pm i \quad (5.214)$$

To znamená, že elektromagnetická vlna v gyromagnetickém prostředí bude kruhově polarizovaná s levotočivou a pravotočivou polarizací.

Lineárně polarizovaná vlna se tedy bude v podélně zmagnetovaném feritu štěpit na dvě kruhově polarizované vlny. Rychlosti šíření těchto vln budou různé, a proto se po proběhnutí určité vzdálenosti polarizační rovina stočí o úhel úměrný proběhlé dráze (*Faradayův* jev). Bez feritu je index lomu pro obě tyto vlny stejný, a proto je možno v libovolném bodě dráhy znovu obě vlny složit a získat vlnu s nezměněnou polarizací. V látkovém prostředí se silně se projevujícím *Faradayovým* jevem je u každé vlny index lomu a útlum zcela odlišný (jedna z vln je značně tlumená), jelikož oba členy matice tenzoru permeability κ a μ_{\perp} závisí na velikosti pole \vec{H} .

Stáčení polarizační roviny v pole (v oblasti mikrovln) je tedy určeno směrem přiloženého magnetického pole a je nezávislé na směru šíření, je-li paralelní nebo antiparalelní s tímto polem (tzv. nereciproký jev). Velikost stočení je funkcí přiloženého magnetického pole.

Z uvedených výsledků vyplývá, že se anizotropní vlastnosti prostředí feritového typu mohou velmi efektivně využít při konstrukci různých zařízení a prvků, jež se používají v soustavách, kde je třeba ovlivnit šíření elektromagnetických vln.

Kapitola 6

Elektromagnetické vlny v nehomogenních prostředích

Popis šíření časově *harmonicky* proměnných elektromagnetických vln v *nehomogenních* prostředích, kde *rychlost* a *směr* šíření jsou *lokálními* charakteristikami vlny (a jsou proto *funkcemi souřadnic*), spočívá z matematického hlediska ve vyřešení *Helmholtzovy* diferenciální rovnice tvaru

$$\Delta u + k^2(x, y, z)u = 0, \quad (6.1)$$

kde k je vlnové číslo a u hledaná skalární funkce.

V případě *obecné* závislosti $k^2(x, y, z)$ na souřadnicích neexistuje *analytické* řešení této diferenciální rovnice. Celý problém se podstatně zjednoduší, jestliže máme vyřešit *Helmholtzovu* diferenciální rovnici pro *vrstevnatě* nehomogenní prostředí, v němž se k^2 mění pouze v *jednom* směru, tedy pro

$$k^2 = k^2(z) \quad (6.2)$$

Příkladem obdobných prostředí jsou: zemská atmosféra, zemský povrch, mořská voda, optická vlákna, atd. I v takovýchto prostředích však známe analytická řešení *Helmholtzovy* rovnice pouze tehdy, jestliže se jedná o *speciální* průběh funkce $k^2(z)$.

V úlohách, kde se setkáváme s *pomalou* proměnnými (i když obecně *libovolnými*) změnami $k^2(x, y, z)$, můžeme získat *přibližná* řešení, která jsou známa jako *přiblížení geometrické optiky*.

S použitím metod geometrické optiky se setkáváme při studiu šíření elektromagnetického vlnění takovým prostředím, jehož *signifikantní* změny (typicky *indexu lomu*) se odehrávají na vzdálenostech, které jsou *mnohem větší*, než je použitá *délka vlny* (například *optického záření*).

Předmětem geometrické optiky je zkoumání *zákonů šíření* velmi krátkých vln, především *světelných*, na něž pohlížíme jako na šíření *paprsků*. Je to vlastně *limitní* případ *vlnové optiky*, kdy předpokládáme, že

$$\lambda \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty,$$

a proto *neuvažujeme* vlnový charakter zkoumaných procesů, tedy ani procesy jako jsou *difrakce* a *interference*.

K popisu pole budeme tedy používat pojem *světelného paprsku*. Jestliže se *amplituda* a *směr šíření* vlny *téměř nezmění* ve vzdálenostech, jež jsou řádově srovnatelné s vlnovou délkou λ , můžeme i v případě takovýchto *nehomogenních* prostředí použít opět pojem *vlnoploch*, u nichž je *fáze* vlny po celé ploše *shodná*. V každém libovolně malém prostoru takovýchto prostředí lze mluvit o *směru šíření kolmém* k vlnoploše, čímž vlastně zavádíme pojem *paprsku* jakožto *křivky*, jejíž *tečna* je v každém bodě shodná se *směrem šíření* vlny. To znamená, že znalost vlnoploch (konstantní fáze) umožňuje bezprostředně získat paprsky jako trajektorie *kolmé* k vlnoplochám. Budou-li v důsledku *změny indexu lomu* měnit vlnoplochy svoji *orientaci* v prostoru, budou se adekvátním způsobem *zakřivovat* i paprsky.

Následně ukážeme, že rovnice geometrické optiky lze odvodit buď z vlnové rovnice nebo přímo z *Maxwellových* rovnic (s využitím limitního přechodu).

6.1 Odvození rovnice eikonálu a rovnice přenosu

Z dosavadního výkladu víme, že libovolná složka vektoru elektrického nebo magnetického pole v homogenním prostředí splňuje *Helmholtzovu* rovnici. Dokonce i v *nehomogenních* prostředích je možno použít *vlnovou* rovnici, bude-li změna indexu lomu prostředí *malá* ve vzdálenosti srovnatelné s *vlnovou délkou* dopadajícího záření.

Vlastní úloha spočívá v nalezení *jistého přibližného řešení skalární* vlnové rovnice popisující šíření *harmonických* vln v *nehomogenních* prostředích, kde permitivita ε bude funkcí polohy. Jestliže $\lambda \rightarrow 0$ (a tudíž $k \rightarrow \infty$), bude docházet k *degeneraci* diferenciální rovnice.

Na základě platných vztahů mezi elektromagnetickou teorií a geometrickou optikou (které říkají, že funkce u může reprezentovat *kteroukoliv* složku intenzit pole \vec{E} nebo \vec{H}) funkce u splňuje skalární *Helmholtzovu* rovnici ve tvaru

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (6.3)$$

kde $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ a λ je proměnná vlnová délka v daném konkrétním místě nehomogenním prostředí.

Při řešení *Helmholtzovy* rovnice ve tvaru (6.3) vycházeli *Sommerfeld* a *Runge* z předpokladu, že funkci u lze formálně vyjádřit ve tvaru

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) e^{ik_0 S(x, y, z)}, \quad (6.4)$$

kde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo ve *vakuu*, $A = A(\vec{r})$ je *reálná skalární* funkce (*amplitudový* faktor) a $S = S(\vec{r})$ je rovněž *reálná skalární* funkce (*fázový* faktor), kterou *H. Bruns* nazval *eikonálem*.

Takto definovaná funkce u je určena amplitudovou funkcí A a fázovou funkcí S . Zatímco se funkce u může podél trajektorie měnit rychle (jelikož $k \rightarrow \infty$ pro $\lambda \rightarrow 0$), lze předpokládat, že v určitých typech prostředí mohou být jak A , tak i S pomalu proměnnými funkcemi souřadnic.

Vztah (6.4) popisuje vlnu, jež bude uniformní pro konstantní $A(\vec{r})$ v rovině čela vlny určeného vztahem¹

$$S(\vec{r}) = \text{konst.} \quad (6.5)$$

U rovinné vlny je S lineární funkcí souřadnic; v kartézské soustavě je možno vyjádřit $S(\vec{r})$ ve formě

$$S(\vec{r}) = \vec{m}_0 \cdot \vec{r} = m_x x + m_y y + m_z z, \quad (6.6)$$

kde \vec{m}_0 je jednotkový vektor kolmý na vlnoplochu (určuje směr šíření), tedy

$$\text{grad } S = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \text{konst.}$$

Budou-li se tedy amplituda a směr šíření měnit dostatečně pomalu (k podstatnějším změnám amplitudy a směru šíření bude docházet na vzdálenostech $L \gg \lambda$), znamená to, že celý prostor lze rozdělit na oblasti (o rozměrech $l < L$), ve kterých je možno vlnu považovat za rovinnou.

V tom případě bude možno směr šíření vlny v oblasti o rozměru l charakterizovat pomocí směru normály k vlnoploše, a proto bude postačující sestrojít místo vlnoploch svazek čar kolmých k vlnoplochám.

V *izotropních* prostředích se podél těchto čar, které nazýváme *paprsky*, bude šířit *energie*, kdežto v *anizotropních* prostředích tomu tak *není*, neboť v obecném případě není normála k vlnoploše shodná se směrem šíření (paprsku).

Pro jednoduchost uvažujme takové prostředí, jehož vlastností (charakterizované vlnovým číslem k) se budou *málo měnit ve vzdálenostech řádově úměrných délce vlny*. V takovém případě bude splněna nerovnost

$$|\text{grad } k| \ll k_0 k, \quad (6.7)$$

¹Optická dráha je dána součinem indexu lomu prostředí a geometrické (skutečné) dráhy. Optická dráha tedy reprezentuje dráhu optického záření, kterou by toto záření urazilo ve *vakuu* během stejné doby potřebné k uběhnutí dané geometrické dráhy. *Optickou* dráhu l v homogenním prostředí o absolutním indexu lomu n lze vyjádřit vztahem

$$l = ns,$$

kde s je *geometrická* dráha vlnění v uvažovaném prostředí. V případě nehomogenního prostředí, jehož index lomu se mění nespojitě, potom

$$l = n_1 s_1 + n_2 s_2 + \dots = c \left(\frac{s_1}{v_{f1}} + \frac{s_2}{v_{f2}} + \dots \right) = c \sum_{j=1}^N \frac{s_j}{v_{fj}},$$

kde n_1, n_2, \dots jsou indexy lomu v jednotlivých malých oblastech prostředí, s_1, s_2, \dots jsou geometrické dráhy optického záření v těchto oblastech a v_{f1}, v_{f2}, \dots jsou fázové rychlosti vlnění odpovídající indexům n_1, n_2, \dots .

Zakřivení paprsků optického záření v *nehomogenním* prostředí vede k některým zajímavým jevům v zemské atmosféře, když se optické záření nešíří zemskou atmosférou přímočaře v důsledku změny indexu lomu vzduchu s výškou.

Je-li $l(x, y, z) = ns$ optická dráha záření v uvažovaném prostředí o indexu lomu $n = n(x, y, z)$ a $s = s(x, y, z)$ je geometrická dráha tohoto záření, je možno funkci u psát ve tvaru

$$u = e^{i \frac{k}{n} l} = e^{ik_0 S}$$

kde k_0 je vlnové číslo ve *vakuu* (odpovídající dané frekvenci ω). Funkce $A(\vec{r})$ a $S(\vec{r})$ se pak budou měnit podstatněji až ve vzdálenosti L , přičemž

$$L \gg \lambda$$

Toto lze vyjádřit pomocí nerovností

$$|\text{grad } A| \ll k_0 A \quad (6.8)$$

$$|\text{grad } S| \ll k_0 S \quad (6.9)$$

Použijeme-li zobecněný výraz pro rovinné vlny v přiblížení geometrické optiky ve tvaru (6.4), tj.

$$u(x, y, z) = A(x, y, z) e^{ik_0 S(x, y, z)},$$

potom po provedení příslušných derivací podle proměnné x budeme mít

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S} + ik_0 A \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} = \\ &= ik_0 u \frac{\partial S}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} (\ln A) \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{ik_0 S} + 2ik_0 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{ik_0 S} - k_0 u \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + ik_0 u \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \\ &= -k_0^2 u \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + 2ik_0 u \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} (\ln A) \frac{\partial S}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{ik_0 S} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Obdobné vztahy lze dostat po provedení derivací podle proměnných y a z . Po dosazení těchto výrazů do vlnové rovnice dostaneme tuto rovnici ve tvaru

$$\begin{aligned} -k_0^2 u \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + \\ + 2ik_0 u \left[\frac{1}{2} \Delta S + \text{grad} (\ln A) \cdot \text{grad } S \right] + e^{ik_0 S} \Delta A = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Vydělme nyní celou rovnici členem $-k_0^2 u$ a rozdělme ji na *reálnou* a *imaginární* část. S uvážením $k^2/k_0^2 = n^2$ můžeme tyto rovnice zapsat následujícím způsobem

$$(\text{grad } S)^2 - n^2 - \frac{\Delta A}{k_0^2 A} = 0 \quad (6.13)$$

$$\frac{1}{2} \Delta S + \text{grad} (\ln A) \cdot \text{grad } S = 0 \quad (6.14)$$

První z těchto rovnic ještě dále zjednodušíme. Dvojnásobnou aplikací nerovnosti $|\text{grad } A| \ll k_0 A$ lze dostat nerovnost $|\Delta A| \ll k_0^2 A$, odkud $|\Delta A|/k_0^2 A \ll 1$. S ohledem na to, že hodnotu indexu lomu n můžeme očekávat na úrovni *jednotek*, musí být na této úrovni velikosti také zbývající člen v této rovnici $(\text{grad } S)^2$.

Z provedené analýzy vyplývá, že člen $\Delta A/k_0^2 A$ je možné vůči těmto dvěma řádově jednotkovým členům *zanedbat* a rovnice přepsat do tvaru

$$(\text{grad } S)^2 = n^2 \quad (6.15)$$

$$\text{grad}(\ln A) \cdot \text{grad } S + \frac{1}{2} \Delta S = 0 \quad (6.16)$$

Rovnice (6.15) je *eikonálová diferenciální rovnice*. Jejím řešením jsou eikonálové funkce S . Položením $S = \text{konst.}$ získáme *vlnoplochy* (vlnová čela) v přiblížení *geometrické optiky*.

Druhá rovnice představuje *směrovou* derivaci $\ln A$ ve směru $\text{grad } S$, kterou můžeme (s uvážením $|\text{grad } S| = n$) formálně přepsat do tvaru

$$n \frac{\text{grad } S}{n} \cdot \text{grad}(\ln A) + \frac{1}{2} \Delta S = 0 \quad (6.17)$$

Směr $\text{grad } S$ je *kolmý* k ploše $S = \text{konst.}$ a získaná rovnice popisuje chování $\ln A$ *podél* libovolné normály (ortogonální trajektorie) souboru ploch $S = \text{konst.}$

Označme *parametrický* zápis *trajektorie* paprsku jako $\vec{r}(s)$, kde s je parametr. V takovémto případě můžeme vyjádřit směrovou derivaci jako $\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \text{grad} = (\text{grad } S/n) \cdot \text{grad}$. Upravovaná rovnice pak přejde na tvar

$$n \frac{d}{ds}(\ln A) + \frac{1}{2} \Delta S = 0 \quad (6.18)$$

Skutečnost, že rovnice (6.15) je odvozena ze *skalární vlnové rovnice*, z níž lze odvodit *celou geometrickou optiku* položením $\lambda \rightarrow 0$, vede k závěru, že geometrická optika může být odvozena z *Maxwellových* rovnic. Že amplituda A postupuje podél paprsků, je ve shodě s geometrickou optikou, i když se A může v jiných směrech měnit způsobem, jenž není tímto odvozením vysvětlen.

Předcházející odvození lze provést i *jinou metodou*. Seskupením podle mocniny k_0 a ponecháním

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik_0 u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} e^{ik_0 S}, \quad \text{atd.}$$

lze výchozí rovnici (6.3) upravit rovněž na tvar

$$k_0^2 \left(\frac{k^2}{k_0^2} - \nabla S \cdot \nabla S \right) A + ik_0 S \left(2\nabla S \cdot \nabla A + A \nabla^2 S \right) + \nabla^2 A = 0 \quad / \quad \frac{1}{k_0^2 A} \quad (6.19)$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta A}{k_0^2 A} + 2i \frac{\nabla S \cdot \nabla A}{k_0 A} + i \frac{\Delta S}{k_0} - \left[(\nabla S)^2 - \frac{k^2}{k_0^2} \right] = 0 \quad (6.20)$$

První člen rovnice (6.20) má velikost úměrnou $\frac{\lambda}{4\pi^2 L^2}$, druhý a třetí člen je úměrný $\frac{\lambda}{2\pi L}$, kdežto poslední člen (v závorce) nezávisí na $\frac{\lambda}{2\pi L}$. Zanedbáme-li

v rovnici (6.20) člen $\frac{\Delta A}{k_0^2 A}$ a položíme-li rovnou nule jak reálnou, tak imaginární část rovnice (6.20), dostaneme pro reálnou část stejnou podmínku

$$(\nabla S)^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = n^2(\vec{r}) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad (6.21)$$

kdežto pro imaginární část lze nyní psát

$$A\Delta S + 2\nabla S \cdot \nabla A = 0, \quad (6.22)$$

kde $n(x, y, z)$ je index lomu nehomogenního prostředí.

O první rovnici (6.21) jsme se již zmínili — určuje fázi či eikonál a nazývá se *rovnicí eikonálu*. Druhá rovnice (6.22) určuje amplitudu a nazývá se *rovnicí přenosu*. Zde odvozené vztahy budou popisovat proces šíření, jestliže

$$|\Delta A| \ll k_0 (\nabla S \cdot \nabla A) \quad (6.23)$$

$$|\Delta A| \ll k_0 (A\Delta S) \quad (6.24)$$

Rovnice eikonálu nám umožňuje určit fázovou funkci $S(\vec{r})$ ze znalosti prostorového průběhu indexu lomu $n(\vec{r})$. Jelikož roviny konstantní fáze určují průběh vyzářovaného pole, bude rovnice eikonálu popisovat šíření vlny v přiblížení geometrické optiky.

Při praktických aplikacích je žádoucí určit průběh paprsků bezprostředně — bez sestavení fázových ploch využitím rovnice eikonálu², jež je nehomogenní diferenciální rovnicí prvního řádu druhého stupně

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 \quad (6.25)$$

Rovnice přenosu

$$n \frac{\text{grad } S}{n} \cdot \text{grad} (\ln A) + \frac{1}{2} \Delta S = 0 \quad (6.26)$$

nebo

$$A\Delta S + 2\nabla S \cdot \nabla A = 0, \quad (6.27)$$

neříká nic o gradientu A ve směru *kolmém* na gradient S (protože jde o skalární součin), což znamená, že připouští i *diskontinuitu* A v *kolmých* směrech.

Podle zavedené definice

$$u = A e^{ik_0 S}$$

pro $S = \text{konst.}$ jsou to vlnoplochy konstantní fáze funkce u . Normály k těmto vlnoplochám jsou určeny gradientem S a představují tudíž směry paprsků. V obecném případě, kdy se $n(\vec{r})$ mění v prostoru, budou i paprsky zakřiveny.

V optice nehomogenních prostředí je integrace eikonálové rovnice nejjednodušší způsob jak určit vlnoplochy a směry paprsků. V optice homogenním prostředí je

$$n = \text{konst.}$$

²*Eikonál* (od řeckého slova eikon – zobrazení) je funkce, jež určuje *optickou* délku mezi dvěma libovolnými body, z nichž jeden patří předmětovému prostoru a druhý obrazovému prostoru.

6.2. ODVOZENÍ ROVNICE EIKONÁLU Z MAXWELLOVÝCH ROVNIC 131

a v tom případě dostáváme nejjednodušší řešení s jediným singulárním bodem ve tvaru sférické vlny

$$S = nr, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{grad } S = n \frac{\vec{r}}{r} \quad (6.28)$$

Nejjednodušší řešení s jedinou singulární přímkou odpovídá cylindrické vlně

$$S = n\rho, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{grad } S = n \frac{\vec{\rho}}{\rho} \quad (6.29)$$

V obou těchto případech, a platí to zcela obecně pro homogenní prostředí, jsou paprsky přímkami.

6.2 Odvození rovnice eikonálu z Maxwellových rovnic

Rovnici eikonálu lze získat bezprostředně z *Maxwellových* rovnic

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad \nabla \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon\vec{E} \quad (6.30)$$

Budeme hledat řešení ve tvaru

$$\vec{E} = e^{ik_0S} \left(\vec{E}_0 + \frac{1}{k_0} \vec{E}_1 + \dots \right) \quad (6.31)$$

$$\vec{H} = e^{ik_0S} \left(\vec{H}_0 + \frac{1}{k_0} \vec{H}_1 + \dots \right) \quad (6.32)$$

Dosazením předpokládaných řešení do pravých stran *Maxwellových* rovnic, položením koeficientů $1/k_0$ při odpovídajících mocninách rovným nule a použitím vektorových identit (s uvažováním jen nultého členu rozvoje) dostáváme

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\nabla \times \vec{H}_0 + ik_0 \nabla S \times \vec{H}_0 \right) e^{ik_0S} \quad (6.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \left(\nabla \cdot \vec{H}_0 + ik_0 \vec{H}_0 \cdot \nabla S \right) e^{ik_0S} \quad (6.34)$$

Srovnáním reálných a imaginárních částí po dosazení za \vec{E} a \vec{H} do *Maxwellových* rovnic budeme mít

$$\left(\nabla \times \vec{H}_0 + ik_0 \nabla S \times \vec{H}_0 \right) e^{ik_0S} = -i\omega\varepsilon \vec{E}_0 e^{ik_0S} \quad (6.35)$$

odkud

$$k_0 \nabla S \times \vec{H}_0 = -\omega\varepsilon \vec{E}_0 \quad (6.36)$$

$$\vec{H}_0 \times \nabla S = \frac{\omega\varepsilon}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \vec{E}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_r \vec{E}_0 \quad (6.37)$$

nebo

$$\nabla S \times \vec{H}_0 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_r \vec{E}_0 \quad (6.38)$$

Obdobným způsobem

$$\left(\nabla \times \vec{E}_0 + ik_0 \nabla S \times \vec{E}_0\right) e^{ik_0 S} = i\omega\mu \vec{H}_0 e^{ik_0 S} \quad (6.39)$$

$$k_0 \nabla S \times \vec{E}_0 = \omega\mu \vec{H}_0 \quad (6.40)$$

$$\nabla S \times \vec{E}_0 = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mu_r \vec{H}_0 \quad (6.41)$$

Z divergenčních *Maxwellových* rovnic dostaneme

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_0 e^{ik_0 S}\right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(\vec{H}_0 e^{ik_0 S}\right) = 0 \quad (6.42)$$

odsud

$$\left(\vec{E}_0 \cdot \nabla S\right) = 0, \quad \left(\vec{H}_0 \cdot \nabla S\right) = 0, \quad (6.43)$$

což zase potvrzuje, že vektory \vec{E}_0 a \vec{H}_0 jsou navzájem kolmé.

Vyloučením buď \vec{E}_0 nebo \vec{H}_0 z rotorových rovnic získáme

$$\left[\nabla S \times \left(\nabla S \times \vec{E}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{\mu_r}\right)\right] + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_r \vec{E}_0 = 0 \quad (6.44)$$

odkud plyne

$$\nabla S \left(\nabla S \cdot \vec{E}_0\right) - \vec{E}_0 \left(\nabla S\right)^2 + \varepsilon_r \mu_r \vec{E}_0 = 0 \quad (6.45)$$

V důsledku platnosti (6.43) budeme mít

$$\left(\nabla S\right)^2 = \varepsilon_r \mu_r = n^2 \quad (6.46)$$

Zavedením jednotkového vektoru

$$\vec{l} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\nabla S}{n} \implies \nabla S = \vec{l} |\nabla S| = \vec{l} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}, \quad (6.47)$$

neboť

$$|\nabla S| = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = n,$$

a dosazením do rovnic (6.41) a (6.38)

$$\left(\nabla S \times \vec{E}_0\right) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \mu_r \vec{H}_0, \quad \left(\nabla S \times \vec{H}_0\right) = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \varepsilon_r \vec{E}_0 \quad (6.48)$$

s ohledem na (6.47)

$$|\nabla S| = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = n, \quad \nabla S = n \vec{l} \quad (6.49)$$

dostáváme

$$\left(\vec{l} \times \vec{E}_0\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}_0 \quad (6.50)$$

$$\left(\vec{l} \times \vec{H}_0\right) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E}_0 \quad (6.51)$$

Získané rovnice jsou analogické rovnicím pro rovinné vlny, kde roli konstantního vektoru $\vec{k}_0/|\vec{k}_0|$ hraje vektor \vec{l} , jehož směr závisí na souřadnicích bodu. To

znamená, že přiblížení geometrické optiky je oprávněné v těch případech, kdy závislost mezi \vec{E}_0 , \vec{H}_0 a ∇S v každém bodě prostoru je stejná jako u rovinné vlny. Vektory \vec{E}_0 a \vec{H}_0 leží v rovině čela vlny

$$S = \text{konst.}$$

a vektor ∇S určuje směr šíření vlny, přičemž vztah mezi vektory \vec{E}_0 a \vec{H}_0 je určen rovnicemi (6.38) a (6.41).

V přiblížení geometrické optiky dostáváme řešení ve tvaru lokálně rovinných homogenních vln.

6.3 Odvození rovnice paprsku z rovnice eikonálu

Průběh světelných paprsků je možno dostat *bezprostředně* (i bez sestavení fázového čela vlny pomocí rovnice *eikonálu*) následujícím způsobem:

Definujme s jako *vzdálenost měřenou podél světelného paprsku*, jehož *trajektorie* je vyjádřena *parametricky* vektorem $\vec{r}(s)$ a zavedme *jednotkový* vektor

$$\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (6.52)$$

Podle této definice je jednotkový vektor \vec{s}_0 *tečný* ke světelnému paprsku a je tedy *kolmý* k fázovým čelům (vlnoplochám). Vlnoplochy jsou určeny vztahem

$$k_0 S(x, y, z) = \text{konst.} \quad (6.53)$$

S přihlédnutím ke skutečnosti, že k_0 je *konstantní* veličina (vztažená k *vakuu*), lze touto konstantou předchozí rovnici vydělit, čímž dostaneme rovnici definující vlnoplochy přímo pomocí funkce eikonálu S

$$S(x, y, z) = \text{konst}'. \quad (6.54)$$

Z této rovnice pak vyplývá, že rovněž vektor ∇S je *kolmý* k vlnoplochám:

$$\nabla S = \vec{v}, \quad \vec{v} \parallel \vec{s}_0 \quad (6.55)$$

Je tedy zřejmé, že vektory \vec{s}_0 a \vec{v} musí být *rovnoběžné*. *Velikost* vektoru \vec{v} , který *není jednotkový* (ale je *bezrozměrný*), dostaneme z *rovnice eikonálu*

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad |\nabla S| = n = |\vec{v}| \quad (6.56)$$

tedy

$$|\vec{v}| = n \quad (6.57)$$

odkud dostáváme

$$\vec{s}_0 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\vec{v}}{n} \quad (6.58)$$

nebo

$$\nabla S = \vec{v} = n\vec{s}_0 = n \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \vec{v} = n\vec{s}_0 \quad (6.59)$$

Chceme-li zjistit *rychlost změny* libovolné funkce $f(s)$ na změně skalárního parametru s , provedeme derivaci tzv. *složené funkce* $= f(\vec{r}(s))$. Výsledkem této operace je *skalární součin* jednotkového vektoru \vec{s}_0 s gradientem funkce $f(s)$. Jedná se vlastně o *průmět* gradientu funkce $f(s)$ (což je vektor mířící ve směru *nejrychlejší změny* příslušné funkce) do směru, ve kterém míří *tečna* k trajektorii (tzv. *derivace ve směru*). Formálně můžeme tento proces vyjádřit ve tvaru

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla = \sum_i \frac{dx_i}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{s}_0 \cdot \nabla \quad (6.60)$$

Provedeme nyní operaci gradientu (∇) na obou stranách rovnice eikonálu

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad (6.61)$$

$$2\nabla S \cdot \nabla (\nabla S) = 2n\nabla n \quad (6.62)$$

Zde si je třeba uvědomit, že součin $\nabla \nabla$ je *tenzorem*. Po vykrácení dvojkou v (6.62) dostaneme rovnici do tvaru

$$\nabla S \cdot \nabla (\nabla S) = n\nabla n \quad (6.63)$$

Dosazením za první ∇S na levé straně této rovnice s využitím vztahu $\nabla S = n \frac{d\vec{r}}{ds}$ dostaneme následující relaci

$$n \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla (\nabla S) = n\nabla n \quad (6.64)$$

a po zkrácení n

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla (\nabla S) = \nabla n \quad (6.65)$$

S využitím (6.60), odkud

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{d}{ds} \quad (6.66)$$

můžeme levou stranu rovnice upravit do tvaru

$$\frac{d}{ds} (\nabla S) = \nabla n \quad (6.67)$$

Dosadíme-li sem znovu za $\nabla S = n \frac{d\vec{r}}{ds}$, dostáváme výslednou *rovnici paprsku* ve tvaru

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (6.68)$$

Z toho lze usoudit, že rovnice *paprsku* a rovnice *eikonálu* jsou dvěma *alternativními* způsoby popisu *geometrické optiky*.

Rovnice *paprsku* je *vhodnější* při určování *trajektorií* světelných paprsků ve *slabě nehomogenním* prostředí ve srovnání s rovnicí *eikonálu*. Přesto je velmi těžké získat *přesné* řešení. Z tohoto důvodu se v praktických aplikacích používá *přibližná* rovnice paprsku. Jde o případy, kdy se v optických úlohách uvažují pouze světelné paprsky šířící se *rovnoběžně s optickou osou* systému. Pro optickou osu ve směru z lze s dostatečnou přesností položit

$$ds \doteq dz$$

Tím dostáváme *paraxiální přiblížení* — místo rovnice paprsků budeme mít rovnice paraxiálních paprsků, tedy

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{d\vec{r}}{dz} \right) = \nabla n \quad (6.69)$$

Tato rovnice se často používá při řešení různých úloh jako například při šíření paprsků v optických vlnovodech s parabolickým průběhem indexu lomu, jak uvidíme později.

6.4 Jiný způsob odvození rovnice paprsku

Známe-li trajektorii paprsku, potom eikonál lze dostat z rovnice

$$\frac{dS}{ds} = n \quad (6.70)$$

ve formě křivkového integrálu podél trajektorie paprsku, tedy

$$S = \int_{M_0}^M n[\vec{r}(s)] ds \quad (6.71)$$

kde M_0 je bod na ploše $S = S_0$.

Trajektorie $\vec{r}(s)$ budou paprsky ortogonální k plochám $S = \text{konst.}$

Rovnici paprsku, tj.

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (6.72)$$

lze rovněž dostat z variačního Fermatova principu, podle kterého integrál (6.71) podél trajektorie paprsku musí mít minimální hodnotu (princip nejkratší optické dráhy).

Fermatův princip se co do formy podobá *Hamiltonovu* principu s tím rozdílem, že *Hamiltonův* princip je založen na minimalizaci funkce v čase a *Fermatův* na minimalizaci funkce v prostorových souřadnicích. To znamená, že přechod od klasické mechaniky ke geometrické optice lze provést záměnou času prostorovými souřadnicemi

$$\int_{P_1}^{P_2} n(x, y, z) ds = \min \longleftrightarrow \frac{c}{n} = v = \frac{ds}{dt} \implies c \int \frac{dt}{ds} ds = \min, \quad (6.73)$$

kde P_1, P_2 jsou pevné body v prostoru.

Světelný paprsek musí dorazit z bodu P_1 do P_2 za minimální dobu, tj. musí „najít“ trajektorii, po které se dostane z bodu P_1 do P_2 po minimální optické dráze.

Matematická teorie geometrické optiky dostala svou definitivní formulaci v pracích *W. R. Hamiltona*, ve kterých se autor pokusil vybudovat deduktivní matematickou teorii o optice, kam zahrnul i prostředí s dvojlomem a disperzí.

Hamiltonovou základní myšlenkou bylo zavedení charakteristické funkce, která vyjadřuje optickou délku paprsku (jenž spojuje bod předmětového prostoru s bodem obrazového prostoru) jako funkci polohy těchto dvou bodů. Parciální derivace této funkce pak udává směr světelného paprsku.

Vyjdeme z variační úlohy typu

$$\int_{P_1}^{P_2} n(x, y, z) ds = \min \quad (6.74)$$

Zavedeme novou integrační proměnnou a upravíme výraz pro délku oblouku

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}, \quad (6.75)$$

kde

$$x' = \frac{dx}{dz}, \quad y' = \frac{dy}{dz}$$

V předcházejícím integrálu (6.74) lze nyní zavést *Lagrangeovu* funkci L

$$L(x, y, x', y', z) = n(x, y, z) \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad (6.76)$$

a po dosazení za ds ze vztahu (6.74) dostaneme

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{L(x, y, x', y', z)}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} dz = \min, \quad (6.77)$$

tedy

$$\int_{P_1}^{P_2} L(x, y, x', y', z) dz = \min \quad (6.78)$$

Souřadnice z se volí ve směru jedné z os optické soustavy a označujeme ji jako *optickou osu*.

Řešení zmíněné úlohy je známo z variačního počtu. Příslušné *Eulerovy* rovnice jsou

$$\frac{d}{dz} \frac{dL}{dx'} - \frac{dL}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dz} \frac{dL}{dy'} - \frac{dL}{dy} = 0 \quad (6.79)$$

Nejdříve určíme

$$\frac{dL}{dx'} = \frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}}, \quad \frac{dL}{dy'} = \frac{ny'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \quad (6.80)$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad (6.81)$$

$$\frac{dL}{dy} = \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad (6.82)$$

Po provedení derivací dostáváme

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \right) = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{dL}{dx} \quad (6.83)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{ny'}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \right) = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{dL}{dy} \quad (6.84)$$

$$ds = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \quad dz = \frac{ds}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \quad (6.85)$$

Nyní provedeme následující úpravu: nejdříve dosazujeme za $x' = \frac{dx}{dz}$, tedy

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \left(n \frac{dx}{dz} \right) = \sqrt{1+x'^2+y'^2} \frac{\partial n}{\partial x} \quad (6.86)$$

Výraz $\sqrt{1+x'^2+y'^2}$ můžeme vytknout před závorku, protože se derivuje podle dz , a vykrátit na obou stranách rovnice (6.86), dosadíme za

$$dz \sqrt{1+x'^2+y'^2} = ds,$$

potom

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \sqrt{1+x'^2+y'^2} \right) = \sqrt{1+x'^2+y'^2} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (6.87)$$

tedy

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (6.88)$$

a obdobně

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (6.89)$$

Jako výsledek jsme tak dostali dvě složkové rovnice paprsku, tvarem zcela shodné s prvními dvěma složkovými rovnicemi již dříve (a jiným způsobem) odvozené rovnice (6.68).

Z *Fermatova* principu zároveň vyplývá, že k určení trajektorie paprsku postačí pouze dvě rovnice. Třetí složková rovnice (pro složku z -ovou) je závislá a lze ji dostat z rovnic pro x -ovou a y -ovou složku. Předtím, než provedeme důkaz, budeme předpokládat, že rovnice pro z -ovou složku má obdobný tvar jako (6.88) a (6.89), tedy

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} \quad (6.90)$$

Nyní vyjádříme $\sqrt{1+x'^2+y'^2}$ pomocí x^2 a y^2 , tedy

$$\sqrt{1+x'^2+y'^2} = \frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}}, \quad (6.91)$$

kde

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds}, \quad (6.92)$$

potom

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) &= \frac{d}{ds} \left(n \sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2} \right) = \\ &= \frac{dn}{ds} \sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2} - n \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}} \end{aligned} \quad (6.93)$$

Po předvedení na společného jmenovatele budeme mít

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\frac{dn}{ds} (1-\dot{x}^2-\dot{y}^2) - n (\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y})}{\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2}} \quad (6.94)$$

Nejdříve provedeme derivaci levé strany rovnice (6.88) podle $\frac{d}{ds}$ a po derivaci vynásobíme součinitelem x

$$\dot{x}n \frac{d^2x}{ds^2} + \dot{x}^2 \frac{dn}{ds} = \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x}$$

nebo

$$n\dot{x}\ddot{x} = \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} - \dot{x}^2 \frac{dn}{ds} \quad (6.95)$$

obdobně

$$n\dot{y}\ddot{y} = \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y} - \dot{y}^2 \frac{dn}{ds} \quad (6.96)$$

Po dosazení do (6.94) vztahů (6.95) a (6.96) dostaneme

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\frac{dn}{ds} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{dn}{ds} - n(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y})}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}} = \frac{\frac{dn}{ds} - \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}}, \quad (6.97)$$

neboť

$$n(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{dn}{ds} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \frac{dn}{ds} &= \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial n}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \\ &= \dot{z} \frac{\partial n}{\partial z} + \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

po dosazení do (6.97) s využitím (6.91) dostáváme

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\dot{z} \frac{\partial n}{\partial z} + \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y} - \dot{x} \frac{\partial n}{\partial x} - \dot{y} \frac{\partial n}{\partial y}}{\frac{dz}{ds}} = \frac{\partial n}{\partial z} \frac{\dot{z}}{\frac{dz}{ds}} \quad (6.99)$$

a tedy

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} \quad (6.100)$$

Tuto z -ovou složku vektorové rovnice

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \text{grad } n \quad (6.101)$$

jsme získali za předpokladu, že třetí složková rovnice je závislá na ostatních dvou. To znamená, že pro popis trajektorie paprsku stačí pouze dvě složkové rovnice:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \quad (6.102)$$

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad (6.103)$$

6.5 Analogie mezi geometrickou optikou a mechanikou hmotného bodu

Lze ukázat, že z tvaru rovnice eikonálu vyplývá důležitá analogie mezi geometrickou optikou a mechanikou hmotného bodu.

Pohyb hmotné částice je určen *Hamilton-Jacobiho* rovnicí

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + m^2 c^2 = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} + p_i + \frac{e}{c} A_i = P_i \quad (6.104)$$

kde S je účinková funkce, A_i je složka vektorového potenciálu.

Mezi účinkovou funkcí, impulsem a *Hamiltonovou* funkcí platí známé relace

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (6.105)$$

Vyjádríme-li pole znovu pomocí funkce u (představující libovolnou ze složek \vec{E} nebo \vec{H}) můžeme v případě monochromatické vlny psát

$$u = u_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)} = u_0 e^{i(k_i x_i + \alpha)} = u_0 e^{iS_e}, \quad (6.106)$$

kde S_e je eikonálová funkce.

Kdyby vlna nebyla rovinná, a přesto by bylo možno použít přiblížení geometrické optiky, pak amplituda u_0 by byla obecně funkcí souřadnic a času, kdežto fáze, kterou jsme nazvali eikonálem, by měla složitější tvar, než je uvedený ve vztahu (6.106).

V případě, že uvažujeme malé časové a prostorové intervaly, je možno eikonál S_e rozložit v řadu a uvažovat pouze členy prvního řádu, tedy

$$S_e = S_{0e} + \vec{r} \frac{\partial S_e}{\partial \vec{r}} + t \frac{\partial S_e}{\partial t} \quad (6.107)$$

Porovnejme tento rozvoj s výrazem pro funkci u

$$u = u_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha)}$$

Ze srovnání dostaneme, že

$$\vec{k} = \frac{\partial S_e}{\partial \vec{r}} \equiv \text{grad } S_e, \quad \omega = -\frac{\partial S_e}{\partial t} \quad (6.108)$$

nebo

$$\vec{k} = \nabla S_e, \quad k_i = \frac{\partial S_e}{\partial x_i}, \quad (6.109)$$

přičemž v libovolně malém prostorovém úseku a v malých časových intervalech bude možno považovat vlnu za rovinnou.

Vraťme se k *Hamilton-Jacobiho* rovnici (6.104) a porovnejme ji s rovnicí eikonálu; ze srovnání vyplývají následující analogie:

geometrická optika

$$\vec{k} = \frac{\partial S_e}{\partial \vec{r}}, \quad \omega = -\frac{\partial S_e}{\partial t} \quad (6.110)$$

mechanika hmotného bodu

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (6.111)$$

To znamená, že vlnový vektor v geometrické optice hraje roli impulsu částice v mechanice hmotného bodu a kmitočet ω hraje roli *Hamiltonovy* funkce \mathcal{H} , tj. energie částice. Vztahu

$$k = \frac{\omega}{c}$$

odpovídá analogicky

$$p = \frac{W}{c} \quad (6.112)$$

V geometrické optice platí princip obdobný principu nejmenšího účinku v mechanice, i když ho nelze zapsat v *Hamiltonovské* formě

$$\delta \int L dt = 0, \quad (6.113)$$

neboť pro paprsky není možno zavést funkci analogickou s *Lagrangeovou* funkcí pro částice.

Mezi *Lagrangeovou* funkcí L pro částici a *Hamiltonovou* funkcí \mathcal{H} platí vztah

$$L = \vec{p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} - \mathcal{H} \quad (6.114)$$

Použijeme-li uvedenou analogii mezi \mathcal{H} a ω , \vec{p} a \vec{k} , potom by měl platit vztah

$$L = \vec{k} \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} - \omega \quad (6.115)$$

Jelikož $\omega = ck$, musí být $L = 0$. Toto však není žádným překvapením, neboť jak bylo řečeno, šíření paprsku je šířením částice s nulovou klidovou hmotností.

Jestliže předpokládáme, že energie částice je konstantní, lze princip nejmenšího účinku pro částici zapsat ve formě *Maupertiusova* principu, tedy

$$\delta S = \delta \int \vec{p} d\vec{l} = 0 \quad (6.116)$$

Zde se integrace provádí podél trajektorie částice mezi dvěma určitými polohami (předpokládá se, že impuls je vyjádřen jako funkce energie a diferenciálu souřadnice částice).

Analogií *Maupertiusova* principu v geometrické optice je *Fermatův* princip. Na základě korespondence

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} & \vec{k} &= \frac{\partial S_e}{\partial \vec{r}} \\ \vec{p} \partial \vec{r} &= \partial S & \vec{k} \partial \vec{r} &= \partial S_e \\ \mathcal{H} &= -\frac{\partial S}{\partial t} & \omega &= -\frac{\partial S_e}{\partial t} \end{aligned} \quad (6.117)$$

lze psát

$$\delta S_e = \delta \int \vec{k} d\vec{l} = 0 \quad (6.118)$$

A jelikož

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}, \quad \frac{d\vec{l}}{|d\vec{l}|} = \vec{n} \quad (6.119)$$

$$\vec{k} d\vec{l} = \frac{\omega}{c} \vec{n} \cdot \vec{n} dl = \frac{\omega}{c} n^2 dl, \quad (6.120)$$

bude

$$\delta \int dl = 0, \quad (6.121)$$

což je vztah pro přímočaré šíření paprsku.

6.6 Použití rovnice přenosu

Ukážeme zde, že z rovnice přenosu lze určit změnu intenzity čtverce amplitudy paprsků. Vyjdeme ze vztahu (6.22), který vynásobíme veličinou A (má význam amplitudy)

$$A\Delta S + 2\nabla S \nabla A = 0 \quad / \cdot A,$$

takže budeme mít

$$A^2 \Delta S + 2A \nabla S \nabla A = 0$$

Jelikož

$$\begin{aligned} 2A \nabla A &= \nabla A^2 \\ \Delta S &= \nabla \cdot \nabla S, \end{aligned} \quad (6.122)$$

potom

$$A^2 \nabla \cdot \nabla S + \nabla A^2 \cdot \nabla S = 0 \quad (6.123)$$

nebo

$$\nabla \cdot (A^2 \nabla S) = 0 \quad (6.124)$$

Protože ∇S lze vyjádřit jako

$$\nabla S = n \vec{l},$$

neboť

$$\vec{l} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{\nabla S}{n}, \quad (6.125)$$

dostáváme po dosazení do (6.124)

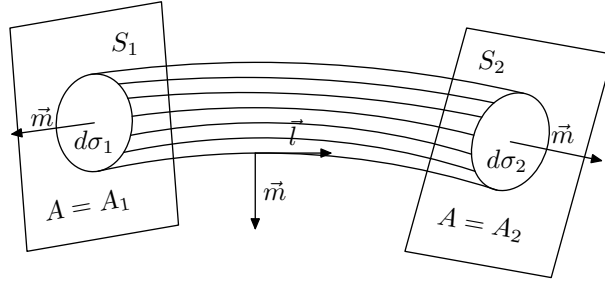
$$\nabla \cdot (A^2 n \vec{l}) = 0 \quad (6.126)$$

Po provedení integraci (6.126) přes objem V

$$\int_V \nabla \cdot (A^2 n \vec{l}) dV = 0 \quad (6.127)$$

Nejdříve uvažujme rovinu konstantní fáze $S_1 = \text{konst.}$ a zvolme na ní malou plochu $d\sigma_1$ vymezenou svazkem paprsků, na níž platí

$$A = A_1$$



Obrázek 6.1: K aplikaci rovnice přenosu

Nechť zvolené paprsky vymezí v průřezu s další plochou konstantní fáze $S_2 = \text{konst.}$ jistou plošku $d\sigma_2$. Vztah

$$\int_V \text{div} (A^2 n \vec{l}) dV = 0 \quad (6.128)$$

lze podle *Gaussovy* věty přepsat na tvar

$$\int_V \text{div} (A^2 n \vec{l}) dV = \oint_{S_p} n A^2 \vec{l} \cdot \vec{m} dS_p = 0, \quad (6.129)$$

kde S_p je plocha pláště válce a \vec{m} jednotkový vektor normály k povrchu uzavřené trubice (plášť včetně základů).

Nyní provedeme divergenci

$$\text{div} (A^2 n \vec{l}) = 0$$

v objemu uzavřeném uvnitř paprskové trubice. Na boční stěně platí

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = 0,$$

kdežto na základnách válce $d\sigma_1, d\sigma_2$ je

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = -1 \quad \text{levá základna} \quad (6.130)$$

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = 1 \quad \text{pravá základna} \quad (6.131)$$

Uvnitř paprskové trubice bude

$$n_1 A_1^2 d\sigma_1 = n_2 A_2^2 d\sigma_2 = n A^2 d\sigma = A_k^2, \quad (6.132)$$

kde A_k je konstanta, $d\sigma$ běžný řez paprskovou trubicí, $n A^2$ veličina úměrná hustotě toku energie a $n A^2 d\sigma$ veličina úměrná energii přenášené podél trubice.

Změna $d\sigma$ podél paprsku se určí pomocí paprskové rovnice a intenzita pomocí odvozeného vztahu (6.132), tedy

$$A^2 = \frac{A_k^2}{n d\sigma} = A_1^2 \frac{n_1 d\sigma_1}{n d\sigma} \quad (6.133)$$

Řešení rovnic

$$\frac{d}{ds} (n \vec{l}) = \nabla n, \quad A^2 = A_1^2 \frac{n_1 d\sigma_1}{n d\sigma} \quad (6.134)$$

při libovolné závislosti n na všech třech souřadnicích lze dostat jen numerickými metodami. Pouze v některých jednoduchých případech je možno získat analytické řešení těchto rovnic.

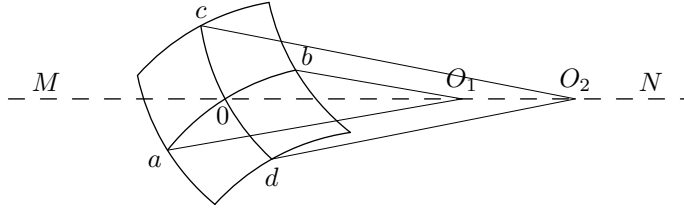
Uvažujme jako příklad homogenní prostředí. Z paprskové rovnice

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad \vec{l} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

pro $n = \text{konst.}$, tedy pro $\nabla n = 0$, lze dostat

$$\vec{r} = \vec{a}s + \vec{b}, \quad (6.135)$$

kde \vec{a}, \vec{b} jsou konstantní vektory. Vztah (6.135) je rovnicí přímky, jež směřuje podél vektoru \vec{a} a prochází koncovým bodem vektoru \vec{b} . Z toho plyne, že v homogenním prostředí jsou paprsky přímkami.



Obrázek 6.2: K výpočtu intenzity záření

Ze vztahu (6.133) lze vypočítat intenzitu dopadajícího záření. Zvolme na ploše uvažovaného svazku paprsků element $d\sigma$, který má dva poloměry křivosti na přímce MN v bodech O_1 a O_2 (viz obr. 6.2). Nechť jsou oblouky \hat{ab} a \hat{cd} elementy dvou hlavních kružnic, jež procházejí bodem O. Délka oblouků \hat{ab} a \hat{cd} je úměrná poloměrům

$$R_1 = \overline{O_1O} \quad R_2 = \overline{O_2O}$$

a plocha části vlnoplochy je úměrná součinu R_1R_2 , tedy

$$d\sigma \sim R_1R_2$$

potom

$$A^2 \approx \frac{C}{R_1R_2}, \quad (6.136)$$

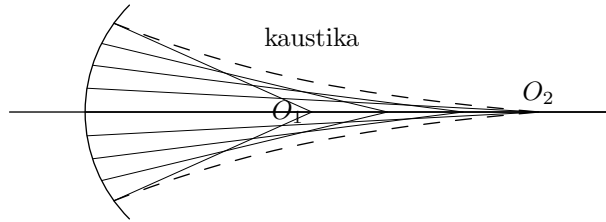
kde C je konstanta.

Vztah (6.136) určuje intenzitu podél paprsku jako funkci vzdálenosti od určitých bodů (středu křivosti vlnoploch) na přímce. V případě stejných poloměrů křivosti bude

$$A^2 = \frac{C}{R^2}, \quad (6.137)$$

což odpovídá průběhu poklesu intenzity u kulové vlny. Pole vlny s uvedeným typem intenzity lze vyjádřit pomocí funkce u ve tvaru

$$u = \frac{C}{R} e^{ikR} \quad (6.138)$$



Obrázek 6.3: K pojmu kaustiky

V takovémto případě je svazek paprsků buď vyzařován bodovým zdrojem, nebo konverguje do bodu. V daném uspořádání jsou vlnoplochy koncentrickými kulovými plochami.

Ze vztahu (6.136) plyne, že při $R_1 = 0$ a $R_2 = 0$, což jsou středy křivosti vlnových povrchů, roste intenzita nade všechny meze ($A^2 \rightarrow \infty$). Rozšířením této úvahy na všechny paprsky svazku lze zjistit, že intenzita vlny roste k ∞ na dvou površích, jež jsou geometrickými místy všech středů křivosti vlnoploch. Tyto povrchy nazýváme *kaustikami*³.

Podle diferenciální geometrie a ve shodě s vlastnostmi geometrického místa středu křivosti svazku ploch se paprsky, jež jsou kolmé k vlnoplochám, dotýkají kaustik. Proto je možno určit kaustiky rovněž jako geometrické obálky svazku paprsků (viz obr. 6.3).

Pokud je plocha kaustiky obálkou svazku paprsků, potom paprsky nepronikají za kaustiku a podle přiblížení geometrické optiky je pole za kaustikou rovno nule.

Abychom určili pole na kaustice a v oblasti stínu, je nutno použít přesné řešení vlnové rovnice pro nehomogenní prostředí.

6.7 Použití geometrické optiky ve vrstevnatém nehomogenním prostředí

Při rozboru použití zákonů geometrické optiky na šíření elektromagnetických vln v nehomogenních vrstevnatých prostředích dostaneme rovnice trajektorie paprsků ve sféricko-vrstevnatém nebo plošně vrstevnatém prostředí.

Šíření v zemské atmosféře

Ve sféricky vrstevnatém prostředí závisí index lomu pouze na vzdálenosti R

$$n = n(R)$$

³Obálka paprsků svazku, jež se láme, se nazývá kaustikou nebo fokálním povrchem a jeho průsečíkem s libovolnou plochou, procházející tímto svazkem, je kaustická křivka. V případě sférické aberace je kaustika symetrická vzhledem k optické ose soustavy a u homocentrických svazků přechází kaustika v bod.

Uvažujme změnu vektoru $[\vec{R}n(R) \times \vec{l}]$ podél paprsku, tedy

$$\frac{d[\vec{R}n(R) \times \vec{l}]}{ds} = \left(\frac{d\vec{R}}{ds} \times n\vec{l} \right) + \left[\vec{R} \times \frac{d}{ds}(n\vec{l}) \right] \quad (6.139)$$

Jestliže

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{l},$$

potom první člen na pravé straně (6.139) je nulový. Jelikož

$$\frac{d}{ds}(n\vec{l}) = \nabla n,$$

druhý člen (6.139) je možno přepsat na tvar

$$\vec{R} \times \frac{d}{ds}(n\vec{l}) = \vec{R} \times \nabla n \quad (6.140)$$

Pro $n = n(R)$ dostaneme

$$\nabla n = \frac{dn}{dR} \vec{R}, \quad (6.141)$$

a proto bude i druhý člen na pravé straně (6.139) nulový. Jako výsledek dostáváme

$$\frac{d}{ds} [\vec{R}n(R) \times \vec{l}] = 0, \quad \vec{R}n \times \vec{l} = \text{konst.}, \quad nR \sin \theta = \text{konst.} \quad (6.142)$$

To znamená, že paprsky jsou v tomto případě rovinnými křivkami, jež leží v rovinách procházejících počátkem souřadné soustavy a zároveň je pro každý paprsek splněna podmínka

$$nR \sin \theta = \text{konst.}, \quad (6.143)$$

kde θ je úhel, který svírá tečna paprsku v daném bodě a polohový vektor \vec{R} (obr. 6.4). Vztah (6.143) představuje vlastně Snellův zákon pro sféricky vrstevnatá prostředí.

Konstantu na pravé straně (6.143) je možno určit z okrajových podmínek. Nechť pro $R = R_0$ bude

$$\sin \theta = \sin \theta_0 \quad (6.144)$$

$$n = n_0 = 1, \quad (6.145)$$

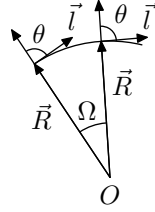
potom

$$nR \sin \theta = R_0 \sin \theta_0 \quad (6.146)$$

$$\sin \theta = \frac{R_0}{nR} \sin \theta_0 \quad (6.147)$$

Rovnici trajektorie lze získat ze vztahu

$$\text{tg } \theta = \frac{R d\Omega}{dR} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{\frac{n^2 R^2}{R_0^2} - \sin^2 \theta_0}}, \quad (6.148)$$



Obrázek 6.4: Sféricky vrstevnaté prostředí

kde Ω je středový úhel.

U plošně vrstevnatého prostředí závisí index lomu jen na jedné souřadnici (např. z), tedy

$$n = n(z)$$

V tom případě rovnici trajektorie paprsku

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{R}}{ds} \right) = \nabla n$$

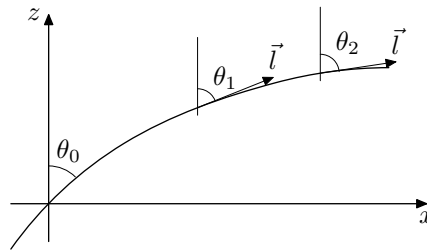
je možno zapsat ve tvaru

$$\frac{d}{ds} (n \sin \theta) = \frac{\partial n}{\partial x} = 0,$$

tedy

$$n(z) \sin \theta(z) = \text{konst.} = \sin \theta_0, \quad (6.149)$$

kde θ je úhel, který svírá paprsek s osou z v libovolném bodě trajektorie a \vec{l} je jednotkový vektor. Pro $z = 0$ nechť je $n = 1$ a úhel θ_0 . Rovnici trajektorie



Obrázek 6.5: Plošně vrstevnaté prostředí

paprsku dostaneme potom ze vztahu (6.148) pro $R = R_0$

$$\text{tg } \theta = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}} \quad (6.150)$$

Z rovnic (6.148) a (6.150) je vidět, že úhel sklonu paprsků k ose z se mění při šíření vln ve vrstevnatém prostředí a že dochází k zakřivení paprsku.

Rovnice (6.148) a (6.150) použijeme pro popis šíření radiovln (v přiblížení geometrické optiky) v nehomogenním prostředí, jehož index lomu se mění se změnou výšky nad zemským povrchem.

6.7. POUŽITÍ GEOMETRICKÉ OPTIKY VE VRSTEVNATÉM NEHOMOGENNÍM PROSTŘEDÍ 147

Označme poloměr Země R_0 a necht' z bude výška nad povrchem Země

$$R = R_0 + z, \quad \theta = \theta_0 \quad \text{pro } z = 0$$

Jelikož $nR \sin \theta = R_0 \sin \theta_0$, dostáváme

$$n(z) (R_0 + z) \sin \theta = R_0 \sin \theta_0 \quad (6.151)$$

nebo

$$n(z) \left(1 + \frac{z}{R_0}\right) \sin \theta = \sin \theta_0 \quad (6.152)$$

Zavedeme-li index lomu podle vztahu

$$n_r = n(z) \left(1 + \frac{z}{R_0}\right), \quad (6.153)$$

kde n_r je index refrakce, potom Snellův zákon dostává obdobný tvar jako pro plošně vrstevnaté prostředí

$$n_r \sin \theta = \sin \theta_0 \quad (6.154)$$

Označme vzdálenost podél povrchu Země souřadnicí x , takže

$$x = R_0 \Omega$$

Potom je rovnice trajektorie paprsku (s přesností až do členů řádu $\frac{z}{R_0}$) shodná s rovnicí trajektorie

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}, \quad (6.155)$$

kde však místo původního indexu lomu dosazujeme nyní n_r , a tedy

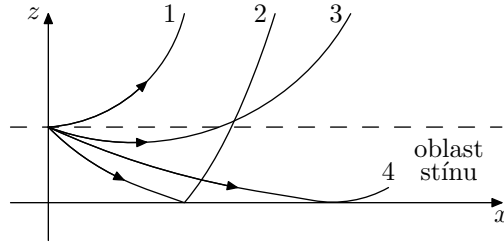
$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n_r^2 - \sin^2 \theta_0}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{R_0}} \quad (6.156)$$

Z toho plyne, že při $\frac{z}{R_0} \ll 1$ lze úlohu o šíření paprsků ve sféricky vrstevnatém prostředí redukovat na jednodušší úlohu o šíření paprsků v plošně vrstevnatém prostředí s indexem lomu n_r .

Uvažujme prostředí (například troposféra), v němž index lomu s výškou monotónně stoupá (z hodnot $n < 1$ k hodnotě $n = 1$) a platí tedy nerovnost $\nabla n > 0$. Ve výšce z_p nad dokonale odrazivou rovinnou vrstvou paralelní se zemským povrchem⁴ je umístěn zdroj, jenž vysílá svazek paprsků pod úhlem θ_0 ve směru stoupajícího indexu lomu (viz obr. 6.6).

Pro $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ paprsek stoupá ve směru zvětšujícího se indexu lomu. Jmenovatel ve vztahu (6.155) se zvětšuje s výškou, takže $\operatorname{tg} \theta$ klesá, paprsek se ohýbá a blíží k ose z . Pro $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ paprsek směřuje k odrazivé ploše a šíření se děje ve směru klesajícího indexu lomu. Proto jmenovatel ve (6.155) klesá, $\operatorname{tg} \theta$ roste a paprsek

⁴Zemský povrch je zde uvažován jako rovinná plocha, ale roli samotné odrazivé plochy v našem příkladu hrát nemůže, neboť od jistého absolutního minima index lomu roste nejen směrem vzhůru, ale i směrem k zemskému povrchu, kde (podobně jako ve vesmírném vakuu) dosáhne hodnoty $n = 1$. Pokuste se to vysvětlit.



Obrázek 6.6: Trajektorie paprsku v plošně vrstevnatém prostředí

se vzdaluje od osy z . V závislosti na velikosti θ_0 mohou nastat různé případy. Od paprsků, jež se odrazí k odrazivému povrchu a vrací se, až k meznímu případu, kdy na ploše $z = 0$ je inflexní bod.

Žádný z paprsků vyslaných pod úhlem $\theta < \theta_m$ nedosáhne zemského povrchu, přičemž se všechny paprsky budou ohýbat ve směru stoupajícího indexu lomu. Paprsek vyslaný pod úhlem θ_m je význačný tím, že tvoří hranici mezi oblastí, kam mohou dopadat paprsky, a oblastí stínu, za níž další paprsky vyslané z bodu P pronikat nemohou.

Abychom určili pole v přiblížení geometrické optiky v plošně vrstevnatém prostředí, je nutno znát amplitudu a fázi v daném bodě prostoru, kam dopadá paprsek. To znamená, že je třeba najít funkce $S(\vec{R})$ a $A(\vec{R})$, kde \vec{R} je polohový vektor bodu, v němž máme určit velikost pole.

V případě plošně vrstevnatého prostředí, kdy uvažujeme změnu indexu lomu pouze ve směru osy z a šíření paprsku pouze v rovině (x, z) , přejde rovnice eikonálu na nejjednodušší možný tvar

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(z) \quad (6.157)$$

Budeme-li znát průběh indexu lomu a počáteční směr paprsku, můžeme po integraci získat průběh funkce $S(x, z)$.

Změnu amplitudy podél trajektorie paprsku vypočteme z rovnice přenosu

$$A\Delta S + 2\Delta A\Delta S = 0 \quad (6.158)$$

Máme-li zadány okrajové podmínky, dostaneme z rovnice eikonálu funkci $S(\vec{R})$ a po integraci (6.158) dostaneme velikost amplitudy A . Známe-li amplitudu a fázi, můžeme vztah pro pole vlny šířící se v plošně vrstevnatém prostředí snadno najít.

Akademické pole nutí mladého člověka nepřetržitě dodávat vědeckou produkci a jen silné povahy mohou při tom čelit pokušení povrchní analýzy.

A. Einstein

Není větší překážky pokroku ve vědách než touha pocítit v nich úspěch příliš brzy. To je obzvlášť příznačné pro živé povahy. Proto také nejčastěji málo vykonají. Povolí totiž a ztrácí odvahu, jakmile zpozorují, že nedělají pokroky. Ale dělali by pokroky, kdyby vynakládali málo síly a mnoho času.

G. Ch. Lichtengerg

Skutečná cena člověka spočívá v tom, do jaké míry a v jakém smyslu se dokázal osvobodit od svého „já“.

A. Einstein

Kapitola 7

Vlnové svazky

Rovinná vlna je spíše matematickou abstrakcí než fyzikální realitou, neboť si těžko můžeme představit existenci neomezeného vlnového čela v prostoru. Proto budeme nadále analyzovat pouze ty procesy a jevy, které lze fyzikálně realizovat. Budeme se tedy zabývat rozbořením vlnového procesu prostorově omezeného. Jako příklad uveďme situaci, kdy při průchodu rovinné vlny úzkým otvorem v neprůzračném stínítku vznikne omezený vlnový svazek, který lze za jistých podmínek považovat za paprsek a jeho chování popsat pomocí zákonů geometrické optiky.

V praxi se ale setkáváme s případy, že i při šíření těchto reálných vlnových svazků nelze popsat vznikající jevy pomocí zákonů geometrické optiky, neboť jejich šíření se liší od šíření paprsků. Takováto situace nastane v případě difrakce, kterou *Sommerfeld* definoval jako „libovolnou odchylku světelných paprsků od přímky, kterou nelze vysvětlit ani odrazem ani lomem“.

Teorie difrakce popisuje chování šířící se vlny, která na své cestě narazí na překážky (otvory v nepropustných nebo polopropustných stínítkách, ostré hrany, různé nehomogenity prostředí, apod.). Úkolem teorie difrakce je určit vlnový proces, amplitudu a fázi vlny a v případě vektorových polí i polarizaci v celém prostoru za překážkou.

Bohužel zatím neumíme získat matematicky přesná řešení různých difrakčních úloh, a proto jsme i zde nuceni používat přibližných metod.

7.1 Skalární teorie difrakce

Podle *Huygensovy* vlnové teorie světla je možno každý bod čela světelné vlny považovat za nový zdroj „sekundárního sférického rozruchu a v libovolném, následujícím časovém okamžiku lze nalézt nové čelo vlny sestavením obálky sekundárních vlnoploch“. Tuto teorii podstatně rozšířil A. Fresnel, který obálku sekundárních vlnoploch vysvětlil pomocí interference, a tím dosáhl poměrně velké přesnosti při popisu difrakčních jevů.

Matematický základ ideím *Huygense* a *Fresnela* položil v roce 1882 G. Kirchhoff, který ukázal, že zvláštnosti amplitud a fází sekundárních vln, které Fresnel přisoudil sekundárním zdrojům, vyplývají logicky ze samotné vlnové povahy světla. I když zavedený princip *Huygense-Fresnela* lze pokládat za první

přiblížení, ve většině případů vede k výsledkům, které jsou ve velmi dobré shodě s experimentem. *Kirchhoffovu* teorii později zpřesnil *Sommerfeld* přeformulováním okrajových podmínek za použití tzv. alternativních *Greenových* funkcí a vytvořil teorii difrakce *Rayleigho-Sommerfelda*.

V teorii difrakce *Kirchhoffa* a *Rayleigh-Sommerfelda* se vychází z jistých zjednodušení a přiblížení, z nichž nejpodstatnější je ta skutečnost, že se jedná o teorii *skalární*. To znamená, že stačí uvažovat amplitudu jedné složky intenzity elektrického a magnetického pole a že libovolné další složky lze analyzovat obdobným způsobem zcela nezávisle. Avšak toto tvrzení je v rozporu s platností *Maxwellových* rovnic, které určují vzájemné relace mezi složkami vektorů elektrického a magnetického pole, a proto je nelze uvažovat nezávisle na sobě. Přesto však experimenty v oblasti mikrovlnného spektra potvrzují správnost výsledků skalární teorie, jestliže jsou splněny následující podmínky:

- a) rozměr apertury stínítka je velký ve srovnání s délkou vlny dopadajícího záření
- b) difraktované vlny se pozorují v dostatečné vzdálenosti od stínítka

V případě, že je zapotřebí dosáhnout velké přesnosti, je nutno vycházet z *vektorové* povahy elektromagnetického pole. Na základě této úvahy vytvořil *Kotler* *vektorovou* zobecněnou teorii difrakce.

Kirchhoffova formulace difrakčních úloh je založena na integrálním teorému, který udává řešení homogenní vlnové rovnice v libovolném bodě prostoru, je-li známa hodnota funkce a její první derivace na libovolném povrchu uzavírajícím objem s uvažovaným bodem.

Zvolme nyní *Greenovu* funkci G popisující sférickou vlnu (o jednotkové amplitudě), jež se šíří ze zvoleného bodu P . Potom pro *Greenovu* funkci G v libovolném bodě P_1 prostoru V platí

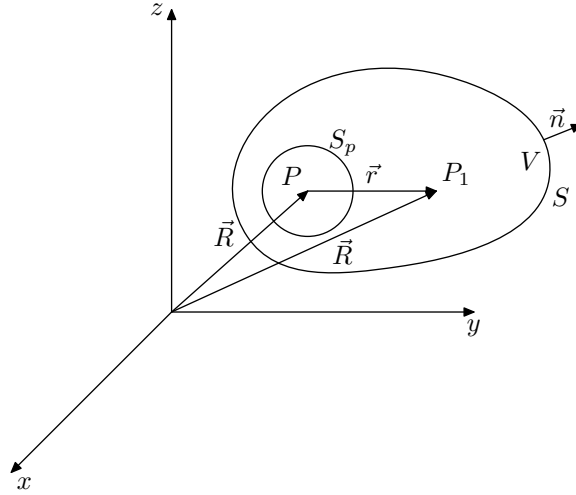
$$G(P_1) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (7.1)$$

kde r je délka vektoru $\vec{r} = (\vec{R}_1 - \vec{R})$, jenž míří z bodu P do bodu P_1 . *Greenova* funkce je řešením dané diferenciální rovnice spolu se specifickými okrajovými podmínkami a zdrojovou funkcí, která popisuje zdroj o jednotkové intenzitě, lokalizovaný v bodě prostoru. Je to tzv. *Greenova* funkce volného prostoru. Zároveň předpokládejme, že *Greenova* funkce a její první a druhá derivace jsou spojitě v objemu V uzavřeném plochou S . Uvnitř objemu V *Greenova* funkce G popisující rozbíhavou sférickou vlnu splňuje *Helmholtzovu* rovnici:

$$\Delta G + k^2 G = 0 \quad (7.2)$$

Abychom vyloučili nespojitost danou existencí bodového zdroje v objemu V , obklopme bod P malou kulovou plochou o poloměru p a při použití *Greenova* teorému provedme integraci přes objem V uzavřený mezi plochy S a S_p tak, že integrační plocha se bude skládat z povrchu

$$S_V = S + S_p \quad (7.3)$$

Obrázek 7.1: K odvození integrálního teoremu *Helmholze-Kirchhoffa*

Vnější normály povrchu S a S_p jsou opačně orientované (na povrchu S směřuje ven a na povrchu S_p dovnitř, viz obr. 7.1).

Použitím *Helmholtzovy* rovnice pro funkce U a G , po dosazení do levé části *Greenova* teoremu dostáváme

$$\int_V (G\Delta U - U\Delta G) dV = - \int_V (GUk^2 - UGk^2) dV \equiv 0 \quad (7.4)$$

Odtud vyplývá, že *Greenův* teorem lze zapsat ve tvaru

$$\oint_{S_V} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (7.5)$$

nebo

$$\oint_{S_p} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS + \oint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = 0. \quad (7.6)$$

Jelikož pro libovolný bod P_1 na ploše S_V platí

$$G(P_1) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (7.7)$$

potom

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r},$$

kde $\cos(\vec{n}, \vec{r})$ představuje kosinus úhlu mezi směrem vnější normály \vec{n} a vektorem \vec{r} , spojujícím body P a P_1 . Ve zvláštním případě, kdy bod P_1 leží na ploše S_p , bude $\cos(\vec{n}, \vec{r}) = -1$, potom

$$G(P_1) = \frac{e^{ikp}}{p}, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{e^{ikp}}{p} \left(\frac{1}{p} - ik \right) \quad (7.8)$$

Po provedení integrace přes plochu S_p a za předpokladu, že $p \rightarrow 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} \oint_{S_p} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS &= 4\pi p^2 \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikp}}{p} - U \frac{e^{ikp}}{p} \left(\frac{1}{p} - ik \right) \right] = \\ &= 4\pi \left[p^2 \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{ikp}}{p} - U p^2 \frac{e^{ikp}}{p^2} + U p^2 \frac{e^{ikp}}{p} ik \right] = \\ &= -4\pi U(P) \end{aligned} \quad (7.9)$$

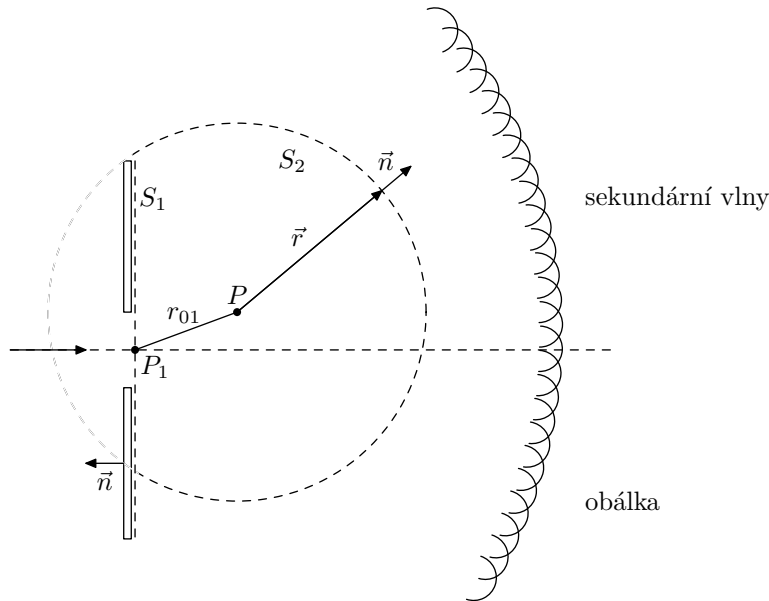
Po dosazení do vztahu (7.6) budeme mít

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{\partial U}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] dS \quad (7.10)$$

Tento vztah je znám jako integrální teorém *Helmholze-Kirchhoffa* a má zásadní význam ve skalární teorii difrakce, protože umožňuje vyjádřit pole v libovolném bodě P pomocí „hraničních hodnot“ vlny na libovolné uzavřené ploše, jež obklopuje uvažovaný bod.

7.2 Difrakce na rovinném stínítku

Uvažujeme vlnu, jež dopadá zleva na nekonečně rozlehlé rovinné stínítko s otvorem o velikosti S_0 a určíme pole v bodě P, jenž leží za otvorem stínítka.



Obrázek 7.2: Zvolená geometrie úlohy difrakce na rovinném stínítku

Provedme rozbor této úlohy. Abychom mohli použít odvozený teorém *Helmholtze-Kirchhoffa*, musíme nejdříve zvolit plochu, podle které se bude provádět integrace. Předpokládejme, že plocha S se skládá z plochy stínítka s otvorem

S_1 a části kulové plochy S_2 (se středem v bodě P), jež doléhá na plochu stínítka a vytváří spolu s ním uzavřenou plochu S , tedy

$$S = S_1 + S_2$$

Použitím vztahu (7.10) budeme mít

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1+S_2} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (7.11)$$

Ukážeme, že příspěvek přes plochu S_2 lze zanedbat. Při harmonicky proměnných polích ($e^{\pm i\omega t}$) dává integrace přes S_2 nulový příspěvek jen tehdy, jestliže funkce bude splňovat podmínku, která určuje její chování pro $R \rightarrow \infty$. Nechť funkce popisuje sférickou vlnu o jednotkové amplitudě

$$G = \frac{e^{ikR}}{R},$$

odkud

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) = \left(ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R} \doteq ikG, \quad (7.12)$$

což platí pro R velké. Integraci přes S_2 lze potom psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left[G \frac{\partial U}{\partial n} - U (ikG) \right] dS = \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R^2 d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} GR \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) R d\Omega, \end{aligned} \quad (7.13)$$

kde Ω je prostorový úhel s vrcholem v bodě P a vztahující se k ploše S_2 . Veličina (RG) je omezena na ploše S_2 . Potom celkový integrál podle S_2 se bude blížit k nule stejně tak, jako R se bude blížit k nekonečnu za předpokladu, že

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0 \quad (7.14)$$

Tento vztah platí v celém prostorovém úhlu Ω . Podmínka (7.14) je známa jako *vyzařovací* nebo *radiační Sommerfeldova podmínka*, která bude splněna tehdy, jestliže rozruch U se blíží k nule rychlostí odpovídající rychlosti šíření sférické vlny. Jelikož rozruch nebo vlna dopadající na aperturu představuje vždy sférickou vlnu nebo lineární kombinaci těchto vln, lze předpokládat, že požadavek (7.14) bude splněn a že integrace podle S_2 nebude dávat žádný příspěvek.

Podmínka (7.14) souvisí vlastně s řešením vlnové rovnice, která má dvě řešení, z nichž jedno odpovídá vlně postupující směrem ke zdroji (sbíhavá vlna) a druhé vlně postupující směrem od zdroje (rozbíhavá vlna). Ze *Sommerfeldovy* radiační podmínky plyne, že vlna směřující z nekonečna nemůže představovat fyzikálně možné řešení.

Z rozboru vyplývá, že pole v bodě P je určeno funkcí U a její derivací na ploše S_1 , jež leží těsně za stínítkem, tedy

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (7.15)$$

Je zřejmé, že základní příspěvek v integrálu (7.15) dávají body na ploše S_1 , jež se nacházejí v místě otvoru S_0 , kde funkce pod integrálem má maximální hodnotu.

Nedokážeme-li vyřešit odpovídající okrajovou úlohu, nebudeme znát hodnoty funkce U a její derivace na ploše S . Existují však i přibližná řešení, založená na určitých předpokladech, které musí splňovat funkce U a její derivace podle normály $\frac{\partial U}{\partial n}$ jak na apertuře, tak i na vnitřní straně stínítka v okolí apertury (v oblasti geometrického stínu).

Kirchhoff definoval tyto předpoklady při zavedení přibližných okrajových podmínek následovně:

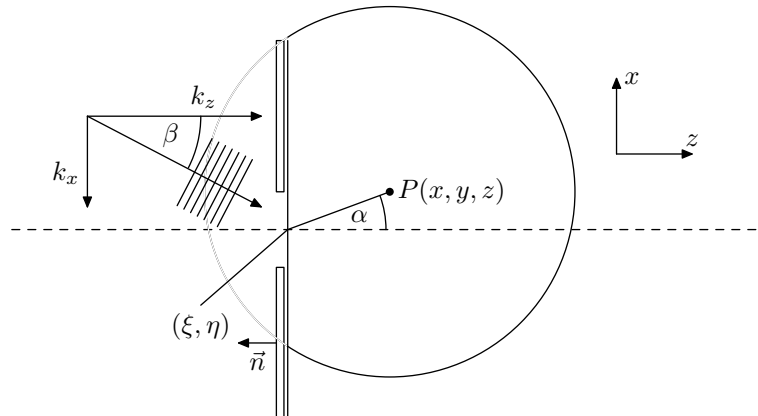
1. na ploše apertury S_0 mají rozložení pole U a jeho derivace podle normály $\frac{\partial U}{\partial n}$ stejnou hodnotu, jakou by měly, kdyby tam nebylo žádné stínítko
2. na straně povrchu S_1 , který leží v oblasti geometrického stínu, jsou rozložení pole U a derivace $\frac{\partial U}{\partial n}$ identicky rovny nule

První podmínka umožňuje určit vlnu dopadající na otvor, zanedbáme-li plochu stínítka, a druhá podmínka umožňuje zanedbat integraci po celé ploše S_1 , s výjimkou té části, která leží bezprostředně u samotné apertury. Při respektování uvedených předpokladů dospějeme nakonec k výchozímu vztahu pro výpočet pole U v bodě P, tedy

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (7.16)$$

Bez ohledu na nepřesnost zavedených předpokladů (přítomnost stínítka vyvolává jisté poruchy pole na apertuře S_0 a kromě toho pole proniká i za aperturu) je možno dostat výsledky, jež jsou v dobré shodě s experimentem, budou-li rozměry apertury velké ve srovnání s vlnovou délkou dopadajícího záření.

Matematická nepřesnost přibližných okrajových podmínek zavedených *Kirchhoffem* souvisí s požadavkem, aby se současně jak samotná funkce U , tak i její derivace podle normály $\frac{\partial U}{\partial n}$ (k povrchu S_1 na straně geometrického stínu) rovnaly nule.



Obrázek 7.3: Difrakce rovinné vlny na netransparentním stínítku

Při takovýchto okrajových podmínkách se musí hodnota funkce U , jež splňuje *Helmholtzovu* rovnici, všude za stínítkem rovnat nule (důsledek platnosti teoremu z teorie potenciálu), a proto přesně vzato nepopisuje pole v blízkosti stínítka a na ploše apertury. Budou-li však hodnota funkce U a její derivace $\frac{\partial U}{\partial n}$ na straně geometrického stínu dostatečně malé a rovněž rozdíl mezi U a $\frac{\partial U}{\partial n}$ v místě se stínítkem i bez stínítka bude malý, pak lze získat dostatečně přesné výsledky pomocí (7.16) s využitím okrajových podmínek (1) a (2).

Další zjednodušení (7.16) lze dostat, jestliže vzdálenost od apertury bude mnohokrát větší než vlnová délka λ , tedy

$$k \gg \frac{1}{r}$$

Nechť na stínítko s aperturou S_0 dopadá kvazirovinná vlna (uvažujeme kartézskou souřadnou soustavu)

$$U(x, y, z) = U^0(x, y, z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (7.17)$$

kde $U^0(x, y, z)$ představuje pomalu proměnnou amplitudu. S ohledem na geometrii zvolené difrakční úlohy (obr. 7.3) budou platit následující relace:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z} \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{z}{r} = -\cos \alpha \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial U}{\partial z} = -ik_z U = -ikU \cos \beta \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}, \quad (7.21)$$

kde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$$

a ξ, η jsou proměnné souřadnice v rovině apertury, tedy

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = - \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial r}{\partial z} \doteq ik \frac{e^{ikr}}{r} \cos \alpha \quad (7.22)$$

Po dosazení za U , $\frac{\partial U}{\partial n}$, G a $\frac{\partial G}{\partial n}$ do (7.16) (za předpokladu, že $kr \gg 1$) dostáváme

$$U(x, y, z) = \frac{k}{4\pi i} \int_{S_0} (\cos \beta - \cos \alpha) U(\xi, \eta, 0) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (7.23)$$

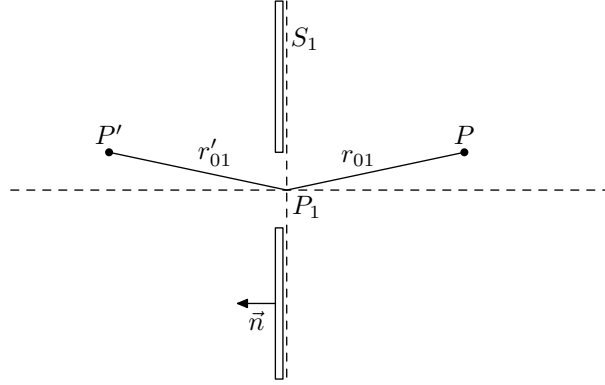
Získaný vztah — *difrakční relace Fresnela-Kirchhoffa* — platí pouze tehdy, jestliže je apertura ozářena jediným bodovým zdrojem.

Matematický důkaz, který provedl Kirchhoff svědčí o tom, že tyto vlastnosti souvisí s vlnovou povahou světla.

Potíže *Kirchhoffovy* teorie vyplývají z faktu, že okrajové podmínky jsou kladeny jak na intenzitu pole, tak i na její derivace podle normály. *Kirchhoffovy* okrajové podmínky uvažované současně znamenají, že by všude za aperturou mělo být pole identicky rovno nule, což je v rozporu s fyzikální skutečností.

Další potíž s relací *Kirchhoffa-Fresnela* je v tom, že neumožňuje splnit zavedené okrajové podmínky, jestliže pozorovaný bod se blíží okraji apertury.

Nedostatky *Kirchhoffovy* teorie odstranil *Sommerfeld* tím, že obešel nutnost současného splnění obou okrajových podmínek zavedením *alternativních Greenových* funkcí.



Obrázek 7.4: K vysvětlení *Sommerfeldova* přístupu

Vraťme se znovu ke vztahu mezi intenzitou pole v pozorovaném bodě a polem dopadající vlny a jeho derivací podle normály po celé ploše S_1 , tedy

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

Předpokládejme, že se v *Kirchhoffově* teorii buď samotná *Greenova* funkce nebo její derivace $\frac{\partial G}{\partial n}$ rovnají nule na celé ploše S_1 . Nechť i přesto odvozený vztah zůstává platný. V tom případě by odpadla nutnost současného splnění obou okrajových podmínek (kladených na U a $\frac{\partial U}{\partial n}$), a tím by zároveň byly odstraněny rozpory *Kirchhoffovy* teorie.

Sommerfeld ukázal, že lze najít takovou — *alternativní* — *Greenovu* funkci, která má požadované vlastnosti. Předpokládejme, že funkce G je vytvořena nejen bodovým zdrojem umístěným v bodě P , ale i dalším bodovým zdrojem v bodě P' , jenž je zrcadlovým obrazem bodu P a leží na druhé straně stínítka.

Nechť zdroj v bodě P' má stejnou vlnovou délku a nechť je vlnění těchto zdrojů fázově posunutě o 180° . V tomto případě bude *Greenova* funkce

$$G_1(\mathbf{P}_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \quad (7.24)$$

Po provedení derivace podle normály dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial n} &= \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \\ &\quad - \cos(\vec{n}, \vec{r}'_{01}) \left(ik - \frac{1}{r'_{01}} \right) \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} = \\ &= \cos \alpha_{01} \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \cos \alpha'_{01} \left(ik - \frac{1}{r'_{01}} \right) \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} \quad (7.25) \end{aligned}$$

V bodě P_1 na ploše S_1 platí

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}'_{01}) \quad (7.26)$$

$$\cos \alpha_{01} = -\cos \alpha'_{01} \quad (7.27)$$

a tudíž na ploše S_1 bude

$$G_1(P_1) = 0 \quad (7.28)$$

To znamená, že *Greenova* funkce se rovná nule na celé ploše S_1 . Po provedení derivace $\frac{\partial G_1}{\partial n}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(P_1)}{\partial n} &= 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} = \\ &= 2 \cos \alpha_{01} \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \end{aligned} \quad (7.29)$$

V případě, že oba zdroje vyzařují ve fázi, bude alternativní funkce G_2

$$G_2(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} + \frac{e^{ikr'_{01}}}{r'_{01}} = 2 \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}, \quad (7.30)$$

a tedy

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \quad \text{pro} \quad r_{01} = r'_{01}, \quad \cos \alpha_{01} = -\cos \alpha'_{01} \quad (7.31)$$

Po dosazení za funkci G_1 do vztahu (7.15) dostáváme (s uvažováním $\frac{\partial G_1}{\partial n} \doteq 2ik \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \frac{z}{r_{01}}$ pro $kr \gg 1$)

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{k}{2\pi i} \int_{S_0} U(\xi, \eta, 0) \frac{z}{r_{01}} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{i\lambda} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos \alpha_{01} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (7.32)$$

kde funkce $U^0(\xi, \eta) = U(\xi, \eta, 0)$ popisuje pole na apertuře. Dosadíme-li do (7.15) za *Greenovu* funkci G_2 vztah (7.30), potom

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} G_2 \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\zeta=0} d\xi d\eta = \\ &= 2 \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \frac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.33)$$

Uvažme nyní, že na aperturu dopadá sférická vlna šířící se z bodového zdroje umístěného v bodě P_2 . V tom případě budeme místo obecné funkce $U^0(\xi, \eta)$ popisující pole na apertuře dosazovat do vztahu (7.32) výraz pro sférickou vlnu šířící se z bodu P_2 . Velikost pole v bodě P_1 na apertuře bude potom

$$U(P_1) = A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}} \quad (7.34)$$

Po dosazení do (7.32) dostáváme

$$U(x, y, z) = \frac{A}{i\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \cos \alpha_{01} dS \quad (7.35)$$

Tento vztah je znám jako *difrakční relace Rayleigh-Sommerfelda*. Obdobný výsledek dostaneme z *Kirchhoffovy* teorie, jestliže ve vztahu pro výpočet pole v bodě P

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (7.36)$$

(za předpokladu, že $kr_{01} \gg 1$) dosazujeme pole v libovolném bodě P_1 na ploše S_0 ve tvaru

$$G_1(P_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \quad (7.37)$$

a za pole sférické vlny z bodu P_2 v bodě P_1

$$U(P_1) = A \frac{e^{ikr_{21}}}{r_{21}}, \quad (7.38)$$

kde r_{21} je vzdálenost mezi body P_2 a P_1 . Po provedení derivace $\frac{\partial U}{\partial n}$ a $\frac{\partial G}{\partial n}$ a po dosazení (7.37) a (7.38) do (7.16) dostaneme

$$U(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} (-ik) A \int_{S_0} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} (\cos \alpha_{01} - \cos \alpha_{21}) dS, \quad (7.39)$$

kde $\cos(\vec{n} \cdot \vec{r}_{01}) = \cos \alpha_{01}$. Po úpravě budeme mít

$$U(\mathbf{P}) = \frac{A}{i\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{21})}}{r_{01}r_{21}} \left(\frac{\cos \alpha_{01} - \cos \alpha_{21}}{2} \right) dS \quad (7.40)$$

Ze srovnání výsledků (7.35) a (7.40) je vidět, že se oba výrazy liší pouze velikostí koeficientů sklonu.

Obdobný výsledek bychom mohli dostat, kdybychom použili vztahu pro druhou alternativní *Greenovu* funkci G_2 .

7.3 Úhlové spektrum rovinných vln

Skalární teorii difrakce je možno zformulovat tak, aby se podobala teorii lineárních filtrů.

Komplexní pole v libovolné rovině rozložené na různé prostorové složky *Fourierova* obrazu je možno ztotožnit s rovinnými vlnami, které se šíří v různých směrech. Složíme-li jejich amplitudy a respektujeme-li fázové posuvy, jež vzniknou během šíření, dostaneme výslednou amplitudu pole v libovolném bodě.

Předpokládejme nyní monochromatickou vlnu vytvořenou soustavou monochromatických zdrojů. Vlna se šíří ve směru osy z a dopadá na aperturu v netransparentním stínítku v rovině $z = 0$. Naším úkolem je vypočítat výsledné pole popsané funkcí $U(x, y, z)$ v bodě $P(x, y, z)$.

Nechť je komplexní amplituda vlny v rovině $z = 0$ popsána funkcí $U_0(x, y, 0)$, jejíž dvourozměrná *Fourierova* transformace je vyjádřena vztahem

$$U^0(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (7.41)$$

kde pro dvourozměrný *Fourierův* obraz A_0 platí

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U^0(x, y, 0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (7.42)$$

Fourierovu transformaci lze považovat za reprezentaci složité funkce pomocí souboru jednodušších komplexních exponenciálních funkcí. Funkce $A_0(k_x, k_y)$ je *úhlovým spektrem vlny* reprezentované funkcí $U^0(x, y, 0)$ v rovině apertury. Funkce $A_0(k_x, k_y)$ závisí na směru šíření, neboť

$$k_x = k \cos \alpha, \quad k_y = k \cos \beta, \quad k_z = k \cos \gamma, \quad (7.43)$$

kde $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ jsou směrové kosiny normály k čelu rovinné vlny. Mezi příčnými složkami a podélnou složkou vlnového vektoru platí vztah

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (7.44)$$

Výraz pod integrálem ve vztahu (7.41) představuje tedy komplexní amplitudu rovinné harmonické vlny v rovině $z = 0$. Zavedme nyní nové proměnné, které nazveme *prostorovými kmitočty (vlnočty)*, následujícím způsobem:

$$f_x = \frac{k_x}{2\pi} = \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \quad f_y = \frac{k_y}{2\pi} = \frac{\cos \beta}{\lambda} \quad (7.45)$$

Po dosazení do (7.41), (7.42) můžeme $U^0(x, y, 0)$ a $A_0(f_x, f_y)$ psát ve tvaru

$$U^0(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(k_x, k_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y \quad (7.46)$$

$$A_0(f_x, f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U^0(x, y, 0) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (7.47)$$

Výraz (7.41) představuje rozložení komplexní amplitudy vlnového pole (v rovině (x, y) pro $z = 0$) v úhlové spektrum rovinných vln.

Nyní určíme úhlové spektrum funkce U v rovině rovnoběžné s rovinou (x, y) ve vzdálenosti z . Předpokládejme, že funkce $A(f_x, f_y, z)$ představuje úhlové spektrum funkce $U(x, y, z)$, tedy

$$A_0(f_x, f_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy \quad (7.48)$$

Kdybychom znali vztah mezi $A_0(f_x, f_y, 0)$ a $A(f_x, f_y, z)$, mohli bychom určit, co se stane s úhlovým spektrem při šíření vlny.

Abychom získali hledanou závislost, vyjdeme ze vztahu

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (7.49)$$

Funkce $U(x, y, z)$ musí splňovat *Helmholtzovu* rovnici všude, kde nejsou zdroje, tedy

$$\Delta U + k^2 U = 0 \quad (7.50)$$

Po dosazení za U vztah (7.49) dostaneme diferenciální rovnici pro A

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) A = 0 \quad (7.51)$$

Pro $A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y)$ dostaneme odpovídající řešení pro vlnu, jež se šíří ve směru osy z , ve tvaru

$$A(k_x, k_y, z) = A_0(k_x, k_y) e^{ik_z z} = A_0(k_x, k_y) e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} z} \quad (7.52)$$

Ze vztahu (7.52) plyne, že úhlové spektrum se bude měnit se vzdáleností z v závislosti na velikosti výrazu $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$; pro

$$k_x^2 + k_y^2 < k^2 \quad (7.53)$$

bude docházet pouze ke změně fáze mezi jednotlivými složkami úhlového spektra (rovinné vlny se šíří pod různými úhly vzhledem k ose z , urazí různé vzdálenosti než dopadnou do zvoleného bodu, a proto dochází ke vzniku fázových posuvů). Bude-li

$$k_x^2 + k_y^2 > k^2, \quad (7.54)$$

v tom případě $\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ a složky úhlového spektra budou silně tlumeny s rostoucí vzdáleností od roviny $z = 0$. Výsledný vztah (7.52) bude popisovat neuniformní rovinné (tlumené) vlny. Obdobný případ nastává ve vlnovodech při šíření mikrovln s kmitočty, jež jsou menší než kritický kmitočet vlnovodu. Mezní případ nastává pro

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \quad (7.55)$$

Rovinné vlny se budou šířit ve směrech kolmých k ose z , a proto nebudou přenášet energii v podélném směru.

Uvažujme neomezené netransparentní stínítko s aperturou o ploše S_0 v rovině $z = 0$. Ukážeme, že zkresení úhlového spektra dopadající vlny bude záviset na šířce úhlového spektra $A_0(k_x, k_y)$ v rovině $z = 0$ a na rozměrech a tvaru apertury.

Zavedme funkci propustnosti t_p a úhlové spektrum dopadající vlny $A_i(k_x, k_y)$. Amplitudový koeficient propustnosti nechť je určen vztahem

$$t_p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{na ploše } S_0 \\ 0 & \text{mimo plochu otvoru} \end{cases} \quad (7.56)$$

Uvažme platnost *Kirchhoffových* okrajových podmínek a aplikujme je na funkci U . Nechť stínítko neperturbuje pole vlny, jež dopadá na aperturu o ploše S_0 , a nechť je pole v geometrickém stínu identicky rovno nule. Funkci U_t , jež popisuje pole v rovině těsně za stínítkem, je možno psát ve tvaru

$$U_t(x, y, 0) = U_i(x, y, 0) t_p(x, y), \quad (7.57)$$

kde $U_i(x, y, 0)$ je pole dopadající vlny a $U_t(x, y, 0)$ pole v rovině těsně za stínítkem. Použitím konvolučního teorému *Fourierovy* transformace dostaneme úhlové spektrum přenášených vln

$$A_t(k_x, k_y) = A_i(k_x, k_y) * T_p(k_x, k_y), \quad (7.58)$$

kde

$$T_p(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t_p(x, y) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (7.59)$$

je *Fourierův* obraz funkce propustnosti. Zápisem konvoluce pomocí integrálů lze tedy vyjádřit úhlové spektrum vztahem

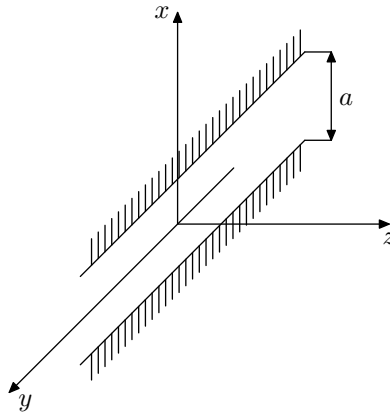
$$A_t(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(k_\xi, k_\eta) T_p(k_x - k_\xi, k_y - k_\eta) dk_\xi dk_\eta, \quad (7.60)$$

kde k_ξ, k_η jsou integrační proměnné. Z toho plyne, že úhlové spektrum postupující vlny je určeno konvolucí spektra dopadající vlny a úhlového spektra, jež charakterizuje samotnou aperturu.

Jako příklad uveďme dopad rovinné vlny na stínítko s aperturou S_0 o jednotkové amplitudě s úhlovým spektrem $A_i(k_x, k_y) = \delta(k_x)\delta(k_y)$, kde $\delta(k_x)$ je *Diracova* delta funkce, tedy

$$A_t(k_x, k_y) = \delta(k_x)\delta(k_y) * T_p(k_x, k_y) = T_p(k_x, k_y) \quad (7.61)$$

To znamená, že při průchodu rovinné vlny stínítkem s aperturou dochází k rozšíření úhlového spektra vlny, jež je určeno (ve zvláštním případě dopadu rovinné vlny s jednotkovou amplitudou) *Fourierovou* transformací funkce propustnosti apertury. Čím menší bude apertura, tím větší bude úhlové spektrum za aperturou. Analogická situace vzniká v případě přenosu elektrických impulsů — zkracování časového trvání impulsu vede k rozšíření jeho kmitočtového spektra.



Obrázek 7.5: Obdélníková apertura

Uvažujme časový průběh impulsu v místě $z = 0$, jenž je popsán funkcí

$$U(0, t) = A(0, t) e^{i\omega_0 t}, \quad (7.62)$$

kde

$$A(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \quad (7.63)$$

a T je perioda.

Kmitočtové spektrum bude popsáno vztahem

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(0, t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt = \frac{\sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}T\right)}{\pi(\omega - \omega_0)} \quad (7.64)$$

Šíře kmitočtového spektra bude

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\tau}{T}, \quad (7.65)$$

kde $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Nyní ukážeme, že šíře úhlového spektra záření z apertury závisí nejen na poměru rozměru apertury k vlnové délce, ale i na směru dopadu vlny na aperturu.

Uvažujme rovinnou vlnu o jednotkové amplitudě dopadající kolmo na aperturu o šířce a (viz. obr. 7.5). *Fourierův* obraz funkce propustnosti apertury se bude, podle předcházejícího příkladu a vztahu (7.59), rovnat

$$T_p(k_x) = A_0(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-ik_x x} dx = \frac{\sin\left(\frac{k_x}{2}a\right)}{\pi k_x} \quad (7.66)$$

Šíři úhlového spektra lze určit z velikosti k_x , při které funkce $T_p(k_x)$ nabývá nulové hodnoty. Z podmínky

$$\sin \frac{k_x}{2}a = 0 \quad \implies \quad k_x = \frac{2\pi}{a} \quad (7.67)$$

tudíž

$$\frac{k_x}{k} = \sin \theta = \frac{\lambda}{a}, \quad (7.68)$$

kde θ je úhel mezi směrem vektoru \vec{k} vlny, šířící se k bodu pozorování, a osou z . Šíře úhlového spektra je tedy určena poměrem délky vlny dopadajícího vlnění k šířce apertury — čím menší podíl λ/a , tím užší bude úhlové spektrum.

Dopadá-li rovinná vlna na stejnou aperturu, ale pod úhlem θ_0 vzhledem k ose z obr. 7.6 (rovina dopadu je rovina (x, z)), potom

$$\sin \theta_0 = \frac{k_{x0}}{k} \quad (7.69)$$

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} e^{-i(k_x - k_{x0})x} dx = \frac{\sin\left(\frac{k_x - k_{x0}}{2}a\right)}{\pi(k_x - k_{x0})} \quad (7.70)$$

Šíře úhlového spektra svazku se určí obdobně jako v předcházejícím případě

$$(\sin \theta - \sin \theta_0) = \frac{\lambda}{a} \quad (7.71)$$

$$\frac{a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0) = 1 \quad (7.72)$$

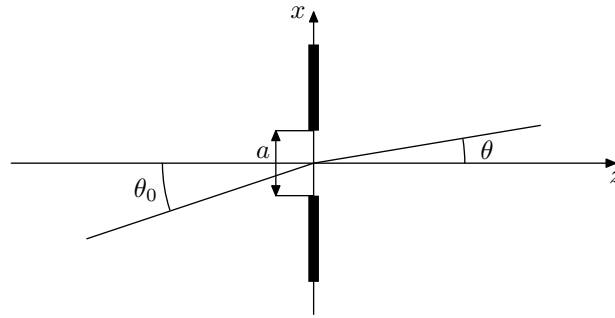
Bude-li štěrba dostatečně široká ($\frac{\lambda}{a} \ll 1$) a rozdíl $(\theta - \theta_0)$ dostatečně malý, dostaneme pomocí vztahu pro rozdíl sinů dvou úhlů

$$\sin \theta - \sin \theta_0 = 2 \sin \frac{\theta - \theta_0}{2} \cos \frac{\theta + \theta_0}{2} \approx (\theta - \theta_0) \cos \theta_0, \quad (7.73)$$

odtud

$$\theta - \theta_0 = \frac{\lambda}{a \cos \theta_0} \quad (7.74)$$

Tím jsme dokázali, že šíře úhlového spektra apertury závisí nejen na poměru λ/a , ale i na směru šíření vlny, jež dopadá na aperturu. Pouze pro malé úhly dopadu je tedy možno použít *Kirchhoffovy* okrajové podmínky.



Obrázek 7.6: Rovinná vlna dopadající šikmo na obdélníkovou aperturu

7.4 Přibližné metody výpočtu difrakčního pole

Z přibližných metod výpočtu difrakčního pole se nejčastěji používají metoda *stacionární fáze* a metoda *difrakčního integrálu*. Zde se budeme zabývat především výpočtem difrakčního pole metodou stacionární fáze v bodě pozorování, dostatečně vzdáleného od apertury.

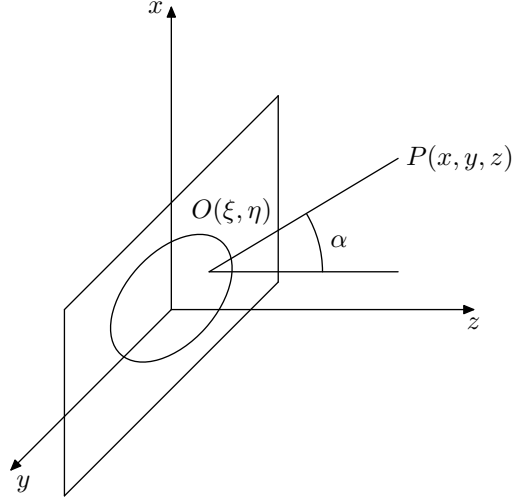
Metoda stacionární fáze je zvláště vhodná k získání přibližných řešení difrakčních úloh ve velkých vzdálenostech od apertury, které mají značný význam v různých aplikacích. Metoda stacionární fáze představuje nejen vhodnou matematickou aproximaci, ale má i určitý fyzikální smysl. Umožňuje nám určit tu část oblast apertury maximálně přispívající k hodnotě integrálu, který představuje superpozici vln, a tím vlastně určuje, které vlny se maximálně podílejí na procesu difrakce. Z výsledků získaných touto metodou vyplývá, že pouze vlny, které se nacházejí bezprostředně blízko osy směřující k bodu pozorování, maximálně přispívají k velikosti pole v tomto místě.

Při výpočtu budeme vycházet z *Kirchhoffova* integrálu ve tvaru (7.32) (místo r_{01} pro jednoduchost zápisu použijeme symbol r , s uvažováním $kr \gg 1$)

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (7.75)$$

Budeme předpokládat, že rovina stínítka je shodná s rovinou $z = 0$ a že vzdálenost bodu pozorování $P(x, y, z)$ je značně větší než délka vlny šířícího se záření, tedy $kr \gg 1$, kde $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$.

Předpokládejme dále, že funkce $U^0(\xi, \eta)$, jež popisuje pole dopadající vlny v rovině stínítka, se mění dostatečně pomalu po celé ploše apertury.



Obrázek 7.7: Zavedení souřadného systému při výpočtu difrakčního pole

V tom případě výraz pod integrálem ve vztahu (7.75) představuje součin dvou funkcí: funkce $\frac{z}{r^2} U^0(\xi, \eta)$, jež se při malém posunu bodu $O(\xi, \eta)$ v rovině apertury mění pomalu, a funkce e^{ikr} , která popisuje rychlé oscilace při posunu téhož bodu.

Podstatu výpočtu integrálu (7.75) uvedenou metodou lze vysvětlit následovně: V důsledku rychlých oscilací exponenciální funkce má odpovídající integrál všude malou hodnotu kromě oblasti, ve které exponent nabývá *stacionární* hodnoty. Existuje-li takový stacionární bod, kde má fáze $\varphi(\xi, \eta)$ oscilační funkce maximum nebo minimum, potom oblast v okolí tohoto bodu nejvíce přispívá k hodnotě integrálu. Nejdříve vyhledáme stacionární body fáze oscilační funkce a potom fázi $\varphi(\xi, \eta)$ rozvineme v řadu v okolí tohoto bodu až do členů druhého nebo třetího řádu (v případě, že člen druhého řádu je nulový).

Pomalou proměnná funkce, kterou určíme ve stacionárním bodě, se nyní může vytknout před integrál. Zbývající integrály lze převést na *Fresnelovy* integrály tvaru

$$\int_0^s e^{-i\frac{\pi}{2}x^2} dx \quad (7.76)$$

Uvedenou metodu použijeme k výpočtu integrálu (7.75)

$$U(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) \frac{z}{r} \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta, \quad (7.77)$$

jehož fáze je dána vztahem

$$\varphi(\xi, \eta) = ik\sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = ikr \quad (7.78)$$

Stacionární bod určíme z požadavku, že první parciální derivace funkce φ podle ξ a η jsou nulové

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -ik \frac{x - \xi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -ik \frac{y - \eta}{r} = 0 \quad (7.79)$$

V okolí stacionárního bodu ($\xi = x, \eta = y$) rozvineme funkci φ v řadu, tedy

$$\varphi(\xi, \eta) \doteq ik \left[z + \frac{1}{2} \frac{(x - \xi)^2}{z} + \frac{1}{2} \frac{(y - \eta)^2}{z} + \dots \right] \quad (7.80)$$

Dosaďme tento rozvoj pro fázi φ do (7.75) a vytkněme před integrál pomalu se měnící funkce určené ve stacionárním bodě ($\xi = x, \eta = y$); potom dostáváme

$$U(x, y, z) = \frac{U^0(x, y)}{i\lambda z} e^{ikz} \int_{S_0} e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z}} d\xi d\eta, \quad (7.81)$$

kde jsme dosadili za

$$U^0(\xi = x, \eta = y) = U^0(x, y), \quad z \doteq r, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7.82)$$

V rovině apertury $z = 0$ určíme hranice oblastí, jež obklopují daný stacionární bod a ve kterých fáze funkce pod integrálem dosahuje hodnot $m\pi$

$$\frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] = m\pi \quad (7.83)$$

Po vykrácení a úpravě

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = m\lambda z \quad (7.84)$$

$$\frac{(x - \xi)^2}{m\lambda z} + \frac{(y - \eta)^2}{m\lambda z} = 1, \quad (7.85)$$

tedy

$$\frac{1}{R_m^2} (x - \xi)^2 + \frac{1}{R_m^2} (y - \eta)^2 = 1 \quad (7.86)$$

Získaný vztah představuje svazek kružnic se středem v bodě $x = \xi, y = \eta$ s poloměry

$$R_m^2 = m\lambda z \quad (7.87)$$

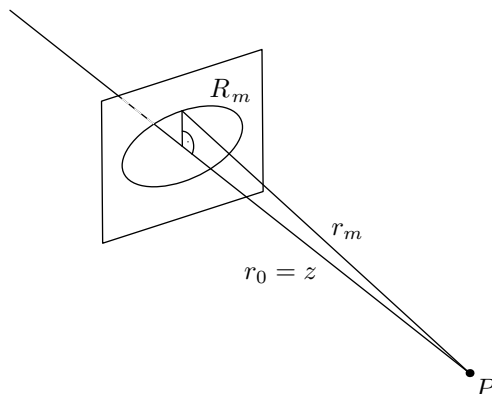
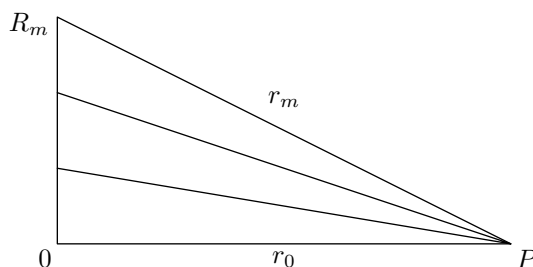
Dle obr. 7.8 lze vztah (7.87) psát ve tvaru

$$R_m^2 = m\lambda r_0 \quad (7.88)$$

Znamená to, že poloměry kružnic a tedy i plochy jednotlivých prstenců nebudou závislé na r_m , a proto všechny prstence budou mít stejně velkou plochu. Získaný vztah (7.88) je dostatečně přesný pro výpočet kružnic, které oddělují n -tý prsteneček od $(n + 1)$ -tého prstenečku (obr. 7.10). Stejný výsledek dostáváme i z geometrické konstrukce podle obr. 7.9; jelikož

$$r_m = r_0 + m \frac{\lambda}{2}$$

$$R_m^2 = \left(r_0 + m \frac{\lambda}{2} \right)^2 - r_0^2 = m r_0 \lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} \doteq m r_0 \lambda \quad (7.89)$$

Obrázek 7.8: K pojmu *Fresnelových* zónObrázek 7.9: K pojmu *Fresnelových* zón

To znamená, že rovinu $z = 0$ lze rozdělit na koncentrické prstence, jež jsou v optice známy jako *Fresnelovy zóny*. Při přechodu od jedné zóny ke druhé mění reálná nebo imaginární část funkce pod integrálem znaménko, a proto příspěvek lichých a sudých zón bude v protifázi. Odpovídající integrál je možno si představit ve formě alternující řady, jejíž m -tý člen určuje příspěvek m -té *Fresnelovy* zóny (v případě, že řada rychle konverguje, nahrazujeme integrál konečným počtem zón).

Je tedy možno najít takovou oblast na ploše apertury, která nejvíce přispívá k procesu formování difraktovaného pole. Tato oblast se přibližně shoduje s rozměry první *Fresnelovy* zóny.

Leží-li stacionární bod uvnitř plochy apertury, což odpovídá případu, kdy se bod P nachází v blízkosti osy z , bude potom v téže rovině i několik prvních *Fresnelových* zón. Maximální velikost či meze integračních proměnných budou

$$\xi_{\max}^2 \sim a^2, \quad \eta_{\max}^2 \sim a^2$$

Pro $a^2 \gg \lambda z$ (stínítko nemá vliv na velikost pole, bod P je v blízkosti optické osy) je možno integraci po ploše apertury nahradit integrací v mezích $\pm\infty$, tedy

$$U(x, y, z) = \frac{U^0(x, y)}{i\lambda z} e^{ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z}} d\xi d\eta \quad (7.90)$$

Zavedením nových proměnných

$$\sqrt{\frac{k}{2z}}(x - \xi)^2 = \alpha, \quad \sqrt{\frac{k}{2z}}(y - \eta)^2 = \beta \quad (7.91)$$

dostáváme

$$U(x, y, z) = \frac{U^0(x, y)}{i\pi} e^{ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha^2 + \beta^2)} d\alpha d\beta = U^0(x, y) e^{ikz} \quad (7.92)$$

Z toho plyne, že v bodě P ležícím blízko osy z , kdy je podstatná oblast pro formování difrakčního pole shodná s prvními *Fresnelovými* zónami, které neprotínají okraje apertury, bude pole prakticky shodné ve srovnání s polem, které by v tomtéž bodě bylo v případě bez stínítka (nekonečně velká apertura).

Vliv stínítka lze charakterizovat pomocí veličiny, která udává poměr parametru λz (úměrný ploše první *Fresnelovy* zóny) a plochy apertury, tedy

$$D = \frac{\lambda z}{\pi a^2} = \frac{\lambda r_0}{\pi a^2}, \quad (7.93)$$

kde λz je plocha první *Fresnelovy* zóny a D je bezrozměrná veličina.

Velichina D se nazývá *vlnový parametr* a hraje důležitou roli v difrakčních úlohách. Podle velikosti parametru D je možno soudit, jaký vliv má stínítko na velikost pole v pozorovaném bodě. Bude-li

$$D \ll 1,$$

potom stínítko prakticky nebude mít vliv na velikost difraktovaného pole.

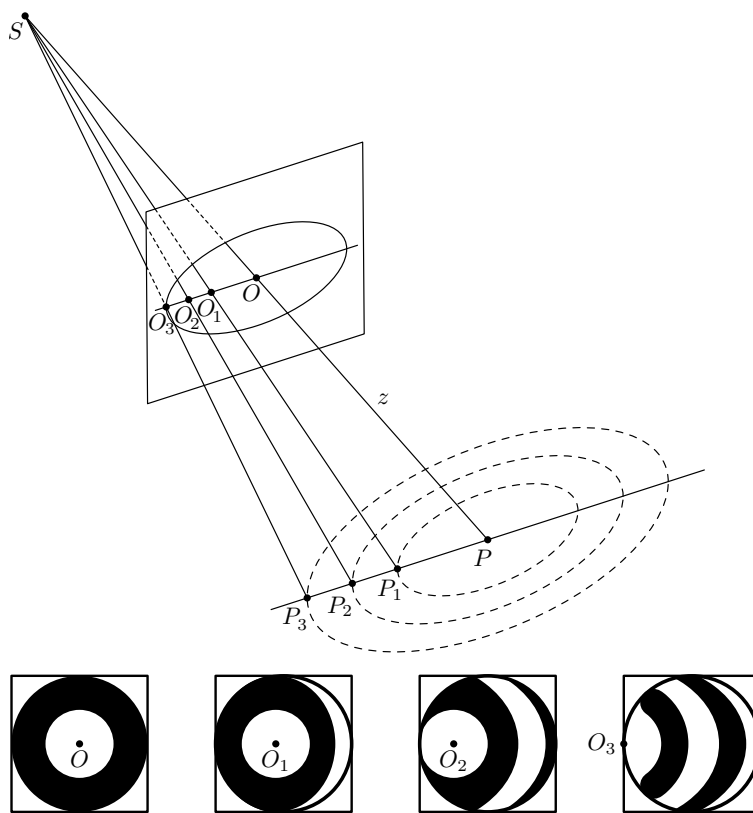
Vzdaluje-li se bod pozorování od osy z , bude se rovněž posouvat stacionární bod ke krajům otvoru tak, že část podstatné oblasti bude protínat okraje otvoru a pole v pozorovaném bodě P_i bude poruchovým polem. V tom případě nelze provést záměnu konečných integračních mezí integrálu (7.81) za meze nekonečné; integrál (7.81) přejde na známý *Fresnelův* integrál, pomocí nějž se vypočítává rozložení intenzit pole u okrajů apertury různého tvaru (difrakce na šterbině, na kruhovém nebo obdélníkovém otvoru, atd.).

Tvrzení, že při $D \ll 1$ nemá stínítko vliv na difraktovanou vlnu, je správné jedině tehdy, jedná-li se o spojitě rozložené pole $U^0(\xi, \eta)$ v rovině apertury. Jinak by nebylo možno vytknout před integrál (7.92) funkci $U^0(\xi, \eta)$ ve stacionárním bodě a metoda stacionární fáze by nedávala správné výsledky. Výchozím vztahem tedy zůstává výraz

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U^0(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z}} d\xi d\eta \quad (7.94)$$

Je-li funkce $U^0(\xi, \eta)$ konstantní v apertuře a nulová mimo aperturu, začnou se silně projevat okrajové jevy. Pole difraktované vlny může mít složitou strukturu, dokonce i na optické ose soustavy.

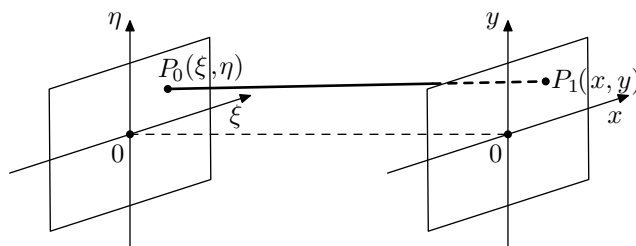
Pojem oblasti, jež se podstatně podílí na formování vlnového procesu, má velký význam nejen u difrakčních úloh, ale i při šíření vln vyzařovaných zdroji o konečných rozměrech.

Obrázek 7.10: *Fresnelovy zóny v různých místech pozorování*

7.4.1 Fresnelova difrakce

Uvažujme nyní oblast v blízkosti objektu, na němž dochází k difrakci ($D \approx 1$) až ke vzdálenosti, za níž platí $D \ll 1$.

Difrakční obraz se obvykle pozoruje v rovině rovnoběžné s otvory ve stínítku. Tato rovina se nazývá *rovinou difrakčního obrazu* a rovina s otvorem *rovinou zdrojů*. Pro jednoduchost zavedme v každé rovině kartézské souřadnice s rovnoběžnými osami x, y a ξ, η se společnou osou z .



Obrázek 7.11: Geometrie úlohy v pojetí úhlového spektra

Ve většině takovýchto případů vystačíme s přiblížením (7.94), které se nazývá *přiblížením Fresnela* a difrakce uvažovaná v tomto přiblížení se nazývá *Fresnelovou difrakcí*.

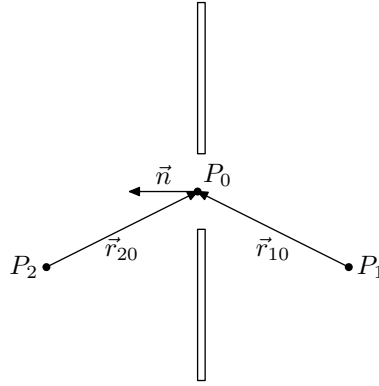
Při rozboru *Fresnelovy* difrakce vycházíme tedy ze vztahu

$$U(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikl}}{l} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2l}} d\xi d\eta, \quad (7.95)$$

kde pomalu proměnná veličina $r \approx l$ ve jmenovateli je vytknuta před integrál, pokud nemá vliv na viditelnost interferenčního obrazu a jen velmi málo ovlivňuje jeho intenzitu.

Pro jednoduchost zápisu je možno vynechat součinitel stojící před integrálem, nemá-li vliv na relativní rozložení intenzity v difrakčním obrazu.

Nechť jednotkový vektor normály má směr šířícího se vlnění.



Obrázek 7.12: Geometrie úlohy

Funkce

$$\frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}$$

popisuje vlnu šířící se k bodu $P_1(x, y)$; integrační proměnné ξ, η jsou souřadnicemi bodu $P_0(\xi, \eta)$ v rovině zdrojů, kde

$$dS = d\xi d\eta \quad (7.96)$$

je element povrchu roviny, v níž jsou zdroje popsány funkcí G .

$$G(P_0) = A \frac{e^{ikr_{02}}}{r_{02}} \quad (7.97)$$

$$\frac{\partial r_{02}}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{20}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_{02}) \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{02}) \frac{e^{ikr_{02}}}{r_{02}} \quad (7.99)$$

Po dosazení do (7.16) (s uvážením, že nyní je bod, ve kterém pole hledáme, označen jako P_1), tj.

$$U(P_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

budeme mít

$$\begin{aligned} U(P_1) &= -ik \frac{A}{4\pi} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{02})}}{r_{01}r_{02}} [\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) + \cos(\vec{n}, \vec{r}_{02})] dS = \\ &= \frac{A}{2i\lambda} \int_{S_0} \frac{e^{ik(r_{01}+r_{02})}}{r_{01}r_{02}} (\cos\alpha + \cos\beta) dS \end{aligned} \quad (7.100)$$

Člen s kosiny ve výrazu pod integrálem představuje pomalu proměnnou funkci ve srovnání s rychle oscilujícím součinitelem e^{ikr} . Prakticky neovlivňuje interferenční obraz a málo přispívá k velikosti pole. Úhly α a β se většinou mění v malých mezích. Za tohoto předpokladu, jež se nazývá *přiblížením malých úhlů*, lze bez podstatného zkreslení výsledků předpokládat, že

$$\cos\alpha \doteq 1, \quad \cos\beta \doteq 1 \quad (7.101)$$

Výchozí vztah bude potom mít tvar

$$U(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi d\eta \quad (7.102)$$

Z podmínky malých úhlů lze dostat další zjednodušení definované nerovnostmi

$$\frac{|x - \xi|}{l} \ll 1, \quad \frac{|y - \eta|}{l} \ll 1 \quad (7.103)$$

V tom případě můžeme výraz pro vzdálenost r rozvinout v řadu a omezit se pouze na první dva členy

$$r = l \left[1 + \frac{(x - \xi)^2}{l^2} + \frac{(y - \eta)^2}{l^2} \right]^{1/2} \doteq l + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2l} \quad (7.104)$$

Po dosazení do (7.102) dostáváme vztah

$$U(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikl}}{l} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2l}} d\xi d\eta \quad (7.105)$$

Za určitých podmínek je možno provést další zjednodušení tohoto vztahu a tím přejít k *Fraunhoferově přiblížení*.

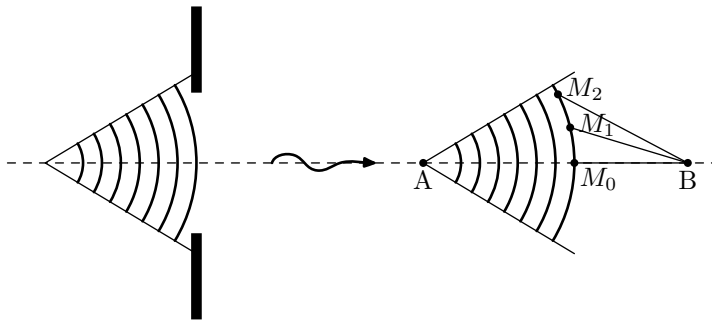
7.4.2 Fresnelovy zóny

Uvažujme typický příklad šíření vlnového svazku konečných rozměrů. Nechť sférická (nebo rovinná) vlna dopadá na netransparentní stínítka s aperturou dle obr. 7.13. Je třeba určit rozložení intenzity záření za stínítkem. Řešení úlohy dostaneme použitím principu *Huygense-Fresnela* za následujících předpokladů:

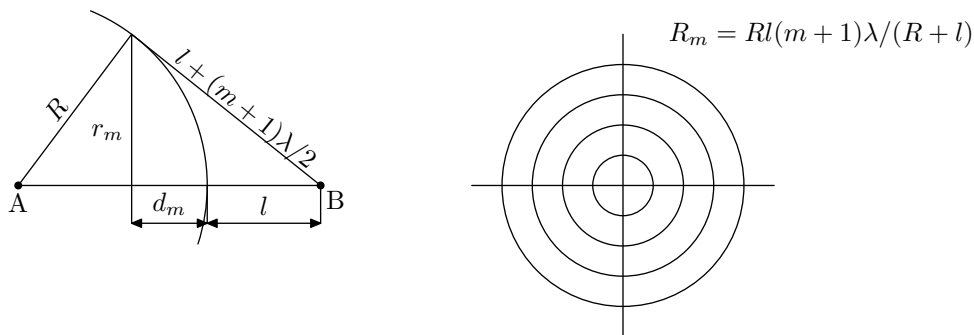
- a) netransparentní část stínítka není zdrojem sekundárních vln
- b) na apertuře je každý bod vlnového čela zdrojem sekundárních vln jako kdyby na tomto místě stínítka s aperturou neexistovalo.

Nechť v bodě A je zdroj sférické vlny a S je vlnové čelo této vlny v jistém časovém okamžiku. Intenzitu záření v bodě B dostaneme pomocí *Huygensova-Fresnelova* principu. Plochu M rozdělíme na zóny takovým způsobem, aby se vzdálenosti okrajů jednotlivých zón od bodu B lišily o $\lambda/2$. Označme M_0, M_1, M_2, \dots okraje zón. Uvedenou podmínku napíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} M_1B - M_0B &= \frac{\lambda}{2} \\ M_2B - M_1B &= \frac{\lambda}{2} \\ &\vdots \\ M_nB - M_{n-1}B &= \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$



Obrázek 7.13: *Fresnelovy zóny* - alternativní odvození



Obrázek 7.14: *Fresnelovy zóny* - alternativní odvození

Poloměry zón určíme podle obr. 7.14, kde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ jsou poloměry zón, R je poloměr křivosti vlnového čela, D průsečík čela vlny s přímkou AB a d_1, d_2, \dots, d_m vzdálenosti od D do projekce hranice odpovídající zóny na přímkou AB . Centrální zóna se nazývá *nultou zónou*. Poloměr r_m dostaneme z rovnice

$$r_m^2 = R^2 - (R - d_m)^2 = \left[l + (m + 1) \frac{\lambda}{2} \right]^2 - (l + d_m)^2 \quad (7.106)$$

Odsud s přesností až na λ^2 budeme mít

$$d_m = \frac{l(m+1)\lambda}{R+l} \frac{1}{2}, \quad r_m^2 = \frac{Rl(m+1)\lambda}{R+l} \quad (7.107)$$

Plocha nulté zóny bude

$$S_0 = \pi r_0^2 = \pi Rl\lambda \frac{1}{R+l} \quad (7.108)$$

Součet ploch nulté zóny a první zóny bude

$$S_{0+1} = \pi Rl2\lambda \frac{1}{R+l} \quad (7.109)$$

Odsud dostaneme, že plocha první zóny se rovná

$$S_1 = S_{0+1} - S_0 = \frac{\pi Rl\lambda}{R+l}, \quad (7.110)$$

což znamená, že se rovná ploše nulté zóny. Stejný výraz platí pro plochy u všech ostatních zón. To je splněno tehdy, pokud se plocha kruhové zóny na sférickém povrchu vlnového čela rovná její projekci na rovinu, jež je kolmá k přímce AB. Vezmeme-li v úvahu, že λ je velmi malé, je uvedená podmínka splněna pro velmi velký počet *Fresnelových* zón.

Známe-li velikost nulté zóny pro dané λ , velikost apertury ϱ a polohu bodu pozorování P (vzdálenost l), je možno vypočítat celkový počet *Fresnelových* zón. Je-li plocha nulté zóny

$$S_0 = \pi Rl\lambda \frac{1}{R+l}, \text{ kde } r_0^2 = \frac{Rl}{R+l} \lambda \quad (7.111)$$

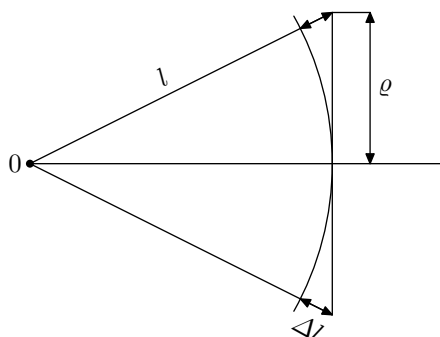
a plocha apertury $S_a = \pi \varrho_0^2$, dostaneme celkový počet zón jako podíl S_a/S_0 a tedy

$$N = \frac{\varrho_0^2 \pi}{S_0} = \frac{\pi \varrho_0^2 (R+l)}{\pi Rl\lambda} = \frac{\varrho_0^2}{Rl\lambda} (R+l) \quad (7.112)$$

Uvažujme například bod P ve vzdálenosti $l = 1$ cm od apertury, zdroj ve vzdálenosti $R = 1$ cm od apertury a délku vlny záření $\lambda = 500$ nm dopadajícího na aperturu o poloměru $\varrho_0 = 1$ mm. Celkový počet zón v tomto případě bude roven

$$N = \frac{\varrho_0^2}{Rl\lambda} (R+l) = 4 \quad (7.113)$$

V případě $\varrho_0 = 1$ cm se počet zón zvýší na $N = 400$. Ze vztahu (7.112) vyplývá, že počet *Fresnelových* zón, které zaplňují aperturu, závisí na vzdálenosti bodu pozorování P. Posouvá-li se bod P podél osy soustavy tak, že se vzdaluje resp. přibližuje, počet odkrytých zón se zvětšuje resp. zmenšuje a osciluje mezi lichým a sudým počtem. Pro $N = 1$ může být odkryta pouze jedna zóna — jsme na hranici *Fraunhoferovy difrakce*.

Obrázek 7.15: K objasnění *Fraunhoferova* přiblížení

7.4.3 Fraunhoferova difrakce

Jsou-li zdroj i bod pozorování tak daleko od apertury difrakčního stínítka, že se rozdíl mezi délkou paprsků vedených od zdroje (nebo z bodu pozorování) k různým bodům apertury liší jen o malou část vlnové délky, potom dochází k *Fraunhoferově difrakci*. Ve většině případů tento rozdíl nepřesahuje $\frac{\lambda}{2a}$.

Uvažujme následující uspořádání: l je vzdálenost mezi zdrojem a aperturou, Δl maximální rozdíl mezi dráhou paprsků a ρ poloměr apertury. Z trojúhelníku OAB (obr. 7.15) plyne

$$(l + \Delta l)^2 = l^2 + \rho^2$$

Pro $(\Delta l)^2 \ll l^2$ můžeme tento člen zanedbat; potom dostáváme

$$l \doteq \frac{\rho^2}{2\Delta l}$$

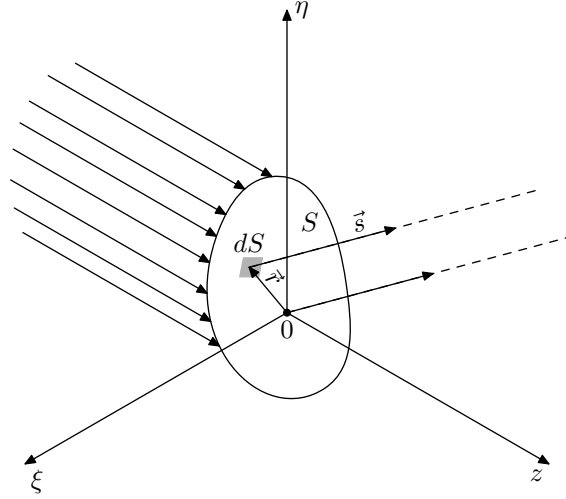
(pro $\rho = 1$ cm, $\lambda = 8 \cdot 10^{-5}$ cm, $\Delta l = \frac{\lambda}{20} = 4 \cdot 10^{-6}$ cm bude $l = 1,25 \cdot 10^3$ m).

Z praktického hlediska mají největší význam difrakční jevy, které pozorujeme při dopadu paralelního svazku na stínítka. V důsledku difrakce ztrácí však svazek svou paralelnost a vzniklé záření se šíří v jiných směrech ve srovnání s původním svazkem. Rozložení jeho intenzity na velkých vzdálenostech odpovídá *Fraunhoferově* difrakci. Vznik difrakčních vln při průchodu svazku otvorem znamená, že vlna, jež má omezenou vlnoplochu v příčném řezu, nemůže být přesně vzata rovinná. Rozklad vlny s omezeným vlnovým čelem na řadu rovinných vln odpovídá rozkladu podle prostorové *Fourierovy* transformace s vlnovými vektory v různých směrech. Právě tyto složky odpovídají difraktovaným vlnám.

Pro kvalitativní posouzení významu *Fraunhoferovy* difrakce uvažujme dopad rovinné vlny na stínítka s aperturou.

Nechť S bude plocha stínítka v rovině (ξ, η) . *Fázový rozdíl* u sekundárních vln postupujících ve směru \vec{s} z elementu dS a ze středu souřadné soustavy O se rovná projekci vektoru \vec{r} , jež určuje polohu dS na ploše (ξ, η) , do směru \vec{s} , tj. $\vec{r} \cdot \vec{s}$.

V případě *Fraunhoferovy* difrakce platí $D \gg 1$. Při výpočtu pole vyjdeme

Obrázek 7.16: Geometrie k vysvětlení *Fraunhoferovy* difrakce

opět z integrálu pro *Fresnelovo* přiblížení

$$U(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikl}}{l} \int_{S_0} U^0(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2l}} d\xi d\eta \quad (7.114)$$

Jsou-li rozměry apertury mnohem větší než vlnová délka λ , pak je možno součinitel před integrálem (7.114) (označovaný jako *koeficient sklonu*) pokládat za konstantu a nebude mít žádný vliv na rozložení intenzity záření v difrakčním obrazu, pokud jeho modul bude rovný jedné.

Exponent funkce pod integrálem (7.114) upravíme následovně:

$$ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2l} = ik \frac{x^2 + y^2}{2l} + ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l} - ik \frac{\xi x + \eta y}{l} \quad (7.115)$$

Po dosazení do (7.114) máme

$$U(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikl}}{l} e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2l}} \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l} - ik \frac{\xi x + \eta y}{l}} d\xi d\eta \quad (7.116)$$

Po zavedení prostorových frekvencí

$$f_x = \frac{x}{\lambda z}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda z}$$

můžeme integrál (7.116) přepsat ve tvaru

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikl}}{l} e^{i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda l}} \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda l} - i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)} d\xi d\eta \quad (7.117)$$

Jelikož $D \gg 1$, budou exponenty u prvního součinitele pod integrálem nabývat pouze malých hodnot

$$\pi \frac{\xi_{\max}}{\lambda l} \sim \frac{1}{D}, \quad \pi \frac{\eta_{\max}}{\lambda l} \sim \frac{1}{D}, \quad e^{i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda l}} \doteq 1 \quad (7.118)$$

Integrál pro výpočet difraktovaného pole lze nyní psát ve tvaru

$$U(x, y) = \frac{1}{i\lambda l} e^{ikl} e^{i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda l}} (2\pi)^2 A_0(2\pi f_x, 2\pi f_y), \quad (7.119)$$

kde $A_0(2\pi f_x, 2\pi f_y)$ je úhlové spektrum funkce $U^0(\xi, \eta)$, tedy

$$A_0(2\pi f_x, 2\pi f_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} U^0(\xi, \eta) e^{-i2\pi(f_x\xi + f_y\eta)} d\xi d\eta, \quad (7.120)$$

přičemž se zde integrace provádí po celé ploše neohrazeného stínítka, což je přípustné, neboť

$$U^0(\xi, \eta) = 0$$

všude mimo plochu apertury. Proto jsme mohli přejít od integrace přes plochu S_0 k integraci v mezích $\pm\infty$. Z toho plyne, že funkce $U(x, y)$ je, s přesností na součinitele zanedbaného při integraci (7.116), tj.

$$e^{ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l}},$$

a součinitele

$$e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2l}},$$

který vystupuje před integrálem (7.116), *Fourierovým* obrazem funkce $U^0(\xi, \eta)$. Z provedeného rozboru tedy vyplývá, že pole ve *Fraunhoferově* difrakčním obrazu představuje vlastně *dvourozměrnou Fourierovu transformaci* funkce $U^0(\xi, \eta)$, jež popisuje pole v rovině apertury (ξ, η) . *Fourierův* obraz vlnového pole deformovaného překážkou (stínítkem) v rovině apertury je tak úměrný komplexní amplitudě rovinné vlny, jež difraktuje ve směrech

$$k_x = 2\pi f_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{z}, \quad k_y = 2\pi f_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{z}$$

Prostorové rozložení difraktovaných vln v různých bodech (x, y) zvolené roviny difrakčního obrazu (ve vzdálenosti $z \approx l$ od roviny apertury) nám tedy umožňuje zjišťovat jednotlivé spektrální složky funkce $U^0(\xi, \eta)$. Proto je možno předpokládat, že *Fraunhoferova* difrakce fyzikálně realizuje dvojrozměrný *Fourierův* integrál. Z matematického hlediska spočívá studium difrakce v použití teorie *Fourierovy* transformace na chování difraktovaných vln.

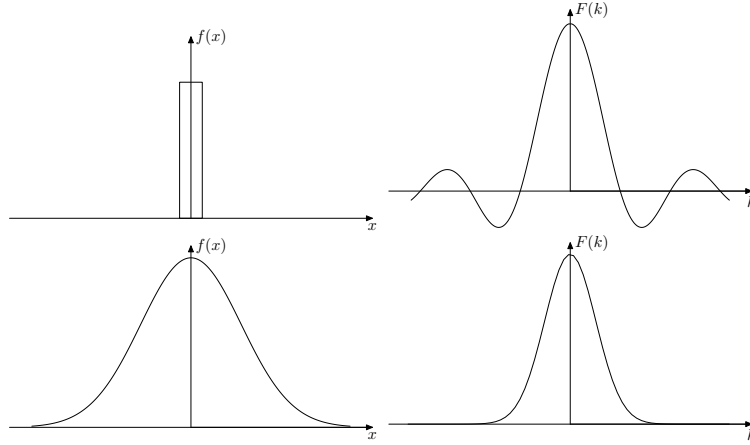
Pro velmi malou aperturu a dostatečně velkou vzdálenost l roviny difrakčního obrazu od apertury (v limitě $l \rightarrow \infty$) lze předpokládat, že

$$e^{ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l}} \rightarrow 1, \quad (7.121)$$

a tím vlastně odstraníme obtíže, které souvisejí s existencí tohoto exponenciálního součinitele při *Fourierově* transformaci.

Bude-li splněna podmínka (7.121), mluvíme o *Fraunhoferově difrakci*. Exponenciální člen (7.121) je možno zanedbat i v případě, že

$$\frac{k(\xi^2 + \eta^2)}{2l} = \frac{k(\varrho')^2}{2l} \leq \frac{\pi}{4}, \quad (7.122)$$

Obrázek 7.17: Funkce $f(x)$ a jejich *Fourierovy* transformace $F(k)$

kde $(\varrho')^2 = \xi^2 + \eta^2$ je čtverec maximální vzdálenosti od středu ke krajům apertury, na němž vzniká difrakce.

Z toho plyne, že na vzdálenostech

$$l > l_{\min} = \frac{2k(\varrho')^2}{\pi} = \frac{4(\varrho')^2}{\lambda} \quad (7.123)$$

je splněna podmínka (7.121) a bude docházet k *Fraunhoferově* difrakci. Oblast *Fraunhoferovy* difrakce se rozprostírá od nekonečna až do jisté minimální vzdálenosti určené vztahem (7.123).

Uvažujme například záření o vlnové délce $\lambda = 500 \text{ nm}$ a $\varrho' = 1 \text{ cm}$. Podle (7.123) dostaneme

$$l_{\min} = \frac{4(\varrho')^2}{\lambda} = 800 \text{ m}$$

Pro $\varrho' = 1 \text{ mm}$ a stejné λ bude $l_{\min} = 8 \text{ m}$ a pro $\varrho' = 100 \mu\text{m}$ je $l_{\min} = 8 \text{ cm}$.

Vzhledem k tomu, že součinitel před integrálem (7.116) nemá význam při výpočtu rozložení *intenzity* v difrakčním obrazu, můžeme vztah (7.116) psát formálně ve tvaru

$$U(x, y) = \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{-ik \frac{x\xi - y\eta}{l}} d\xi d\eta \quad (7.124)$$

Z uvedeného tvaru difrakčního integrálu je zřejmé, že difrakční obraz závisí na poměrech x/l a y/l , což znamená, že zachovává svůj tvar a se vzdáleností se zvětšuje. Přesný vztah pro určení *Fraunhoferovy* difrakce je však dán pro $l \rightarrow \infty$, a proto se *Fraunhoferova* difrakce také nazývá *difrací paralelních svazků*.

Rozložení intenzity v oblasti *Fraunhoferovy* difrakce dostaneme ze čtverce modulu úhlového spektra vlnění v rovině stínítka (7.120)

$$|U(x, y, z)|^2 = I = \frac{(2\pi)^4}{(\lambda z)^2} \left| A_0 \left(2\pi \frac{x}{\lambda z}, 2\pi \frac{y}{\lambda z} \right) \right|^2 \quad (7.125)$$

Na obdélníkovou aperturu o rozměrech a, b nechť dopadá rovinná vlna o jednotkové amplitudě. Modul úhlového spektra bude

$$\begin{aligned} A_0 \left(2\pi \frac{x}{\lambda z}, 2\pi \frac{y}{\lambda z} \right) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{-ik \frac{x}{z} \xi} e^{-ik \frac{y}{z} \eta} d\xi d\eta = \\ &= \frac{ab}{(2\pi)^2} \cdot \frac{\sin \left(\pi \frac{x}{\lambda z} \right) a}{\pi \frac{x}{\lambda z} a} \cdot \frac{\sin \left(\pi \frac{y}{\lambda z} \right) b}{\pi \frac{y}{\lambda z} b} \end{aligned} \quad (7.126)$$

Po dosazení do (7.125) dostaneme velikost intenzity pole v oblasti *Fraunhoferovy* difrakce při dopadu rovinné vlny na obdélníkovou aperturu, tedy

$$\begin{aligned} I &= |U(x, y, z)|^2 = \frac{(2\pi)^4 a^2 b^2}{(\lambda z)^2 (2\pi)^4} \left[\frac{\sin \left(\pi \frac{x}{\lambda z} \right) a}{\pi \frac{x}{\lambda z} a} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\pi \frac{y}{\lambda z} \right) b}{\pi \frac{y}{\lambda z} b} \right]^2 = \\ &= |I_0|^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \end{aligned} \quad (7.127)$$

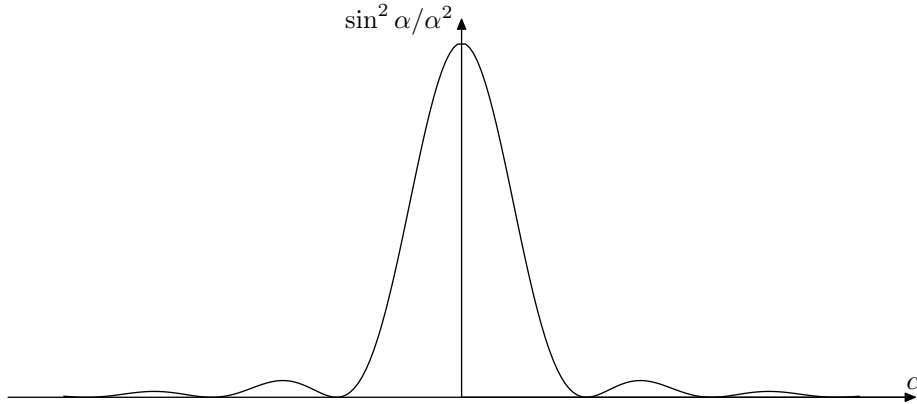
Pásma nulové intenzity se určí z podmínky

$$\sin \alpha = 0, \quad \sin \beta = 0 \quad (7.128)$$

a představují vlastně přímky rovnoběžné s osami x, y tvořící soustavu obdélníků, uvnitř kterých je nenulová intenzita záření. Závislost součinitelů

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$$

na α resp. β lze znázornit dle obr. 7.18. Maxima budou pro $\alpha = 0, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, atd.



Obrázek 7.18: Průběh funkce $\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$

Z průběhu funkce $\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$ je vidět, že intenzita klesá velmi rychle. Proto hlavní část energie, která projde obdélníkovou aperturou, je soustředěná v centrální části obdélníkové stopy. Ze vztahu pro α a β

$$\alpha = \frac{ka}{2z} x, \quad \beta = \frac{kb}{2z} y$$

budou pro $z = l$ úhly α, β záviset pouze na poměru $\frac{x}{l}$ a $\frac{y}{l}$. To znamená, že rozměry difrakčního obrazu rostou úměrně vzdálenosti od apertury, a proto zorný úhel s vrcholem ve středu apertury je pro difrakční úhel konstantní. Ve shodě s přiblížením *Fraunhoferovým* je možno tyto úhly pokládat za malé.

Fraunhoferova difrakce na *kruhové* apertuře má zvláště velký význam pro praktické aplikace, neboť objímky čoček a objektivů u optických přístrojů mají obvykle kruhový tvar.

Při výpočtu rozložení intenzity pole na kruhové apertuře o poloměru a , na níž dopadá rovinná vlna o jednotkové amplitudě, budeme vycházet rovněž ze vztahu pro A_0 , tedy

$$A_0(k_x, k_y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{-i(k_x \xi + k_y \eta)} d\xi d\eta, \quad (7.129)$$

kde $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{z}$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{y}{z}$. V obou rovinách přejdeme na polární souřadnice, tedy

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \varphi & k_x &= p \cos \theta & p^2 &= k_x^2 + k_y^2 \\ \eta &= \varrho \sin \varphi & k_y &= p \sin \theta & p &= \frac{2\pi}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\pi}{\lambda z} \varrho \\ dS &= \varrho d\varrho d\varphi \end{aligned}$$

Po dosazení do vztahu pro úhlové spektrum dostaneme hledaný výraz v polárních souřadnicích

$$A_0(p, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \varrho d\varrho e^{-ip\varrho \cos(\theta-\varphi)} d\varphi \quad (7.130)$$

Jelikož vnitřní integrál lze vyjádřit pomocí *Besselovy* funkce

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ip\varrho \cos(\theta-\varphi)} d\varphi = J_0(p\varrho), \quad (7.131)$$

bude potom

$$A_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varrho J_0(p\varrho) d\varrho = \frac{a}{2\pi p} J_1(pa) \quad (7.132)$$

Po dosazení za $p = \frac{2\pi}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2\pi}{\lambda z} \varrho$ budeme mít

$$A_0 = \frac{a^2}{2\pi} \frac{J_1\left(2\pi \frac{\varrho a}{\lambda z}\right)}{2\pi \frac{\varrho a}{\lambda z}} \quad (7.133)$$

Velikost pole $U(x, y, z)$ v místě pozorování v případě dopadu vlny na aperturu kruhového průřezu dostáváme ze vztahu (7.114)

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{ik \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2z}} d\xi d\eta = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}} \int_{S_0} U(\xi, \eta) e^{i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{\lambda z}} e^{-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.134)$$

Po provedení integrace dostaneme

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} 2\pi e^{i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}} \left(\frac{4a^2}{8} \right) \left[2 \frac{J_1\left(\frac{ka}{z} \varrho\right)}{\frac{ka}{z} \varrho} \right] = \\ &= \frac{e^{ikz}}{i8z} 4ka^2 e^{i\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{ka}{z} \varrho\right)}{\frac{ka}{z} \varrho} \right] \end{aligned} \quad (7.135)$$

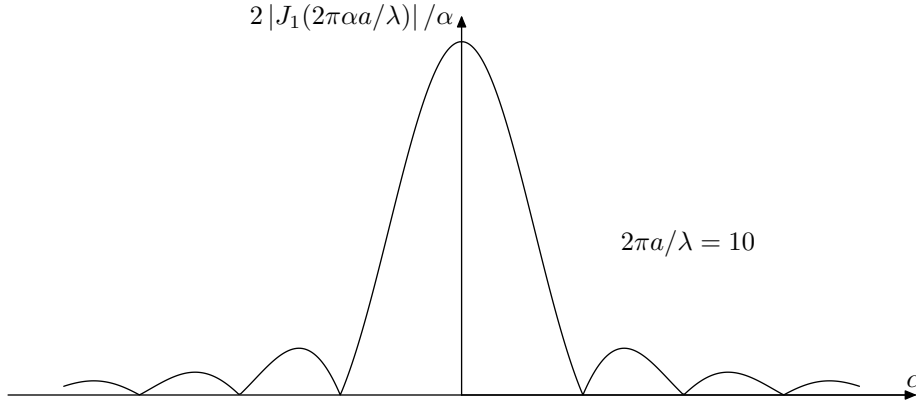
Člen $e^{i\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda z}}$ popisuje fázovou disperzi, jež na na kmitočtu závisí kvadraticky.

Rozložení intenzity v oblasti *Fraunhoferovy* difrakce je určeno čtvercem modulu úhlového spektra záření v rovině stínítka

$$|U(x, y, z)|^2 = I = \left| \frac{ka^2}{iz} \right|^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{ka}{z}\rho\right)}{\frac{ka}{z}\rho} \right]^2 = \left| \frac{ka^2}{iz} \right|^2 \left[2 \frac{J_1(ka\alpha)}{ka\alpha} \right]^2, \quad (7.136)$$

kde $\sin \alpha = \frac{\rho}{z}$, $\alpha \doteq \frac{\rho}{z}$ pro malé úhly.

Graf funkce $\left| \frac{2J_1(ax)}{x} \right|$ pro $a = 10$ je na obrázku 7.19. Tato funkce nabývá hlavního maxima pro $x = 0$. Z průběhu funkce je vidět, že ve středu difrakčního obrazu bude světlý kruhový disk, který bude obklopen řadou tmavých a světlých prstenců. Intenzita ve světlých prstencích bude rychle ubývat. Hlavní maximum soustřeďuje 81% intenzity záření prošlého kruhovou aperturou.



Obrázek 7.19: Průběh modulu *Besselovy* funkce

Poloha sekundárních maxim je určena hodnotami x , jež splňují rovnici

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_1(x)}{x} \right] = 0, \quad (7.137)$$

a jelikož

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x), \quad (7.138)$$

budou to kořeny rovnice $J_2(x) = 0$. Při zvětšování x se vzdálenosti mezi po sobě jdoucími minimy nebo maximy blíží hodnotě π . V důsledku osové symetrie odpovídá hlavní (centrální) maximum nejintenzivněji svítící kruhové skvrně, známé jako *Airyho disk*. Je obklopen tmavým prstencem, který odpovídá prvnímu kořenu *Besselovy* funkce $J_1(x)$ určenému vztahem

$$J_1(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x = 3.832, \quad (7.139)$$

tudíž

$$ka\alpha = 3.832 \quad (7.140)$$

$$\alpha = \frac{3.832}{ka} = 0.61 \frac{\lambda}{a} \quad (7.141)$$

Úhel α odpovídá zornému úhlu s vrcholem ve středu kruhové apertury. Úhlový rozměr světelného disku je dán vztahem

$$\alpha = 1.22 \frac{\lambda}{2a} \quad (7.142)$$

a poloměr

$$\varrho_1 = 1.22 \frac{\lambda}{2a} z \quad (7.143)$$

Tento vztah má velký význam při určování rozlišovací schopnosti optických přístrojů. Kdybychom zobrazili bodový zdroj, např. hvězdu, v ohniskové rovině objektivu (čočka nebo parabolické zrcadlo, za předpokladu, že jsou bez aberace), pak nedostaneme obraz *bodu*, který by měl vzniknout podle zákonů geometrické optiky, ale *difrakční skvrnu – Airyho disk*.

Hodnotu matematické disciplíny je třeba oceňovat podle její použitelnosti v empirických vědách.

B. Runge

Akademik *A. Alexandrov* vyprávěl o jednom z největších světových geometrů *A. Pogorelovi*, že jeho nejlepší práce jsou nerozlučně spojeny s cestou z domova do ústavu a zpět. Každodenně pěšky 15 kilometrů. . . Rovněž *I. Hadamard* prohlásil, že s výjimkou noci, kdy nemohl usnout, vše co objevil, objevil při přecházení po pokoji. Někdy náhodou asi vzniklo rčení: „Nohy – kola myšlení“.

A. K. Suchotin

Mé ideály, které vždy přede mnou zářily a znovu a znovu mě naplňovaly radostnou životní odvahou, byly dobro, krása a pravda. Kdybych necítil, že se shodují se stejně smýšlejícími, kdybych se nezabýval objektivním, na poli umění a vědeckého bádání věčně nedostižným, jevil by se mi život prázdný. Všední cíle lidského snažení, majetek, zevní úspěch a přepych, se mně od mých mladých let zdály hodny opovržení.

A. Einstein