14 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE AKO SÚSTAVA OSCILÁTOROV

14.1 ÚVOD

Historicky bol prvým objaveným zákonom kvantovej fyziky Planckov vzťah pre spektrálne rozdelenie intenzity žiarenia čierneho telesa. Planck sám odvodil svoj zákon poloempirickým spôsobom, my sa už budeme opierať o vybudovaný aparát kvantovej teórie. Základná myšlienka, ktorú budeme prezentovať, pochádza od Debyea, ktorý rozpracoval starší Ehrenfestov návrh.

Narazíme pritom na otázku kvantového opisu voľného elektromagnetického poľa. Tematicky táto problematika už spadá pod pojem kvantovej teórie poľa. Ukážeme si však, že konceptuálne nejde o nič nového: vystačíme s bežnými postulátmi kvantovej mechaniky, hoci aplikovanými na sústavu s nekonečným počtom stupňov voľnosti. Pretože opis elektromagnetického poľa je technicky pomerne komplikovaný, objasníme najprv základnú myšlienku na „cvičnom príklade", na kvantovomechanickom opise kmitov pružného kontinua, konkrétne pozdĺžnych kmitov tyče. Ukážeme, že klasicky možno stav kmitajúcej tyče opísať pomocou takých „zovšeobecnených súradníc", pre ktoré platia pohybové rovnice rovnaké ako pre systém nezávislých harmonických oscilátorov. Prechod ku kvantovomechanickému opisu je potom jednoduchý – stačí prejsť ku kvantovomechanickému opisu u tohto ekvivalentného systému oscilátorov – a to je jednoduchá úloha.

Ukážeme si tiež, že rovnaké výsledky možno dosiahnuť i formálnejším (ale menej názorným) spôsobom. Formálne sa postupuje tak, že opíšeme klasicky kmity tyče pomocou hamiltonovského formalizmu a potom použijeme silný aparát kanonického kvantovania[225], pravda, s nevyhnutnými formálnymi modifikáciami zohľadňujúcimi fakt, že ide o systém s nekonečným počtom stupňov voľnosti.

V ďalšom článku uvidíme, že rovnaký postup možno použiť i v prípade elektromagnetického poľa, ktoré možno opísať ako systém nezávislých oscilátorov. Na základe takéhoto formalizmu prídeme až k Planckovmu vzťahu pre žiarenie čierneho telesa.

Na viacerých miestach sa v tejto kapitole stretneme s kreačnými a anihilačnými operátormi, ktoré už poznáme z opisu harmonického oscilátora. Všetky aspekty použitia takéhoto formalizmu, najmä však interpretačné otázky, sa vyjasnia až

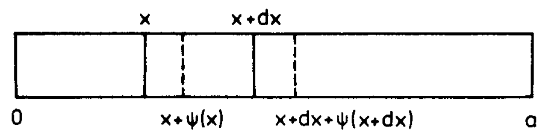
[225] Kanonické kvantovanie sme opísali v článku 8.5.

v nasledujúcej kapitole, kde zavedieme Fokov priestor a spomenieme sekundárne kvantovanie.

14.2 POZDĹŽNE KMITY TYČE. KLASICKÝ OPIS

V tomto článku si pripomenieme základné princípy lagrangeovského prístupu k opisu kmitov kontinua.

Budeme sa zaoberať iba konkrétnym prípadom pozdĺžnych kmitov pružnej tyče dĺžky a. Označme ρ dĺžkovú hustotu tyče, S jej prierez a E modul pružnosti. Vyberme si určitý úsek tyče dĺžky dx, medzi bodmi x, x + dx (*obr. 14.1*). Výchylku z rovnovážnej polohy v mieste x a čase t označme $\psi(x, t)$. Kinetická energia sledovaného úseku tyče pri pohybe je potom zrejme $\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$. Pri výchylke z rovnovážnej polohy sa úsek tyče deformuje, jeho dĺžka sa zmení z hodnoty dx na $\mathrm{d}x' = ((x + dx) + \psi(x + dx)) - (x + \psi(x))$.



Obr. 14.1

Relatívne predĺženie teda bude

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi(x+\mathrm{d}x) - \psi(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Potenciálna energia úseku dlhého dx pri relatívnom predĺžení ε je

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}SE\varepsilon^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}SE\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x$$

Lagrangeova funkcia bude vyjadrená ako obvykle rozdielom kinetickej a potenciálnej energie.

$$L = \int_0^a \left\{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}SE\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\}\mathrm{d}x \tag{1}$$

Podintegrálny výraz sa nazýva hustotou lagrangiánu $\mathscr{L}$:

$$L = \int_0^a \mathscr{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)\mathrm{d}x \tag{2}$$

Ďalší postup je opäť štandardný: použije sa variačná metóda a požaduje sa stacionárnosť účinku

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L \,\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

Sústava má nekonečný počet stupňov voľnosti: funkcia $\psi(x, t)$ pri fixnom t reprezentuje „nekonečný počet súradníc“ (hodnoty funkcie pre všetky x). Pri variácii si treba uvedomiť, že hľadáme závislosti od času ; v tomto kontexte je x vo funkcii $\psi(x, t)$ parametrom označujúcim bod kontinua, ktorého časový opis sledujeme. Názornejšie by možno bolo označenie $\psi_x(t)$. Variácia $\delta\psi(x, t)$ potom bude značiť zmenu funkčného predpisu závislosti od času pri zvolenom x. Variácie robíme za obvyklých podmienok, t. j. stavy v čase t_1 a t_2 sa predpokladajú dané preto

$$\delta\psi(x, t_1) = \delta\psi(x, t_2) = 0 \tag{4}$$

Pre zjednodušenie diskusie okrajových podmienok budeme tiež predpokladať, že daný je i celý pohyb okrajových bodov tyče, t. j.

$$\delta\psi(0, t) = 0 \tag{5}$$

$$\delta\psi(a, t) = 0 \tag{6}$$

Pri variácii hustoty lagrangiánu dostaneme (symbolom $\dot{\psi}$ označujeme $\partial\psi/\partial t$:

$$\delta\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \tag{7}$$

Ďalej využijeme vzťahy

$$\delta\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial t}\delta\psi \qquad \delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\delta\psi \tag{8}$$

ktoré sú vlastne definíciou $\delta\dot{\psi}$ a $\delta(\partial\psi/\partial t)$ pri zámene $\psi \to \psi + \delta\psi$. Výraz, ktorý získame dosadením (8) do (7) upravíme ešte s využitím vzťahov

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\frac{\partial}{\partial t}\delta\psi = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\delta\psi\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}}\right)\cdot\delta\psi \tag{9a}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial\psi/\partial x)}\delta\psi\right] - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)}\cdot\delta\psi \tag{9b}$$

Po dosadení do výrazu pre variáciu účinku prvé členy na pravých stranách vzťahov (9a) a (9b) vypadnú vzhľadom na (5), (4), (6). Z rovnice (3) takto máme

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)} \right] \delta\psi = 0$$

Vzhľadom na to, že pri extréme účinku musí platiť (10) pri ľubovoľnom $\delta\psi$, dostávame odtiaľ Eulerovu-Lagrangeovu pohybovú rovnicu

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi} = 0 \tag{11}$$

Po dosadení dostaneme pre náš konkrétny lagrangián (1) pohybovú rovnicu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{ES}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \tag{12}$$

čo je vlnová rovnica, opisujúca vlnenie šíriace sa s fázovou rýchlosťou v:

$$v^2 = \frac{ES}{\rho} \tag{13}$$

V klasickej mechanike sústav s konečným počtom stupňov voľnosti je lagrangián funkciou súradníc $q_1, \ldots, q_n$ a ich časových derivácií $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

Hybnosť kanonicky združenú k súradnici q_i definujeme vzťahom

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{14}$$

a hamiltonián sústavy zavádzame ako

$$H = \Sigma p_i \dot{q}_i - L \tag{15}$$

V prípade kontinua máme spojito nekonečnú množinu „súradníc" $\psi(x)$ pre všetky x z intervalu $(0, a)$. Podobne spojito nekonečná bude aj množina hybností kanonicky združená k týmto súradniciam. Hybnosť $\pi(x)$ potom nazývame hustotou hybnosti a definujeme ju vzťahom[226]

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}(x)} \tag{16}$$

[226] Na prvý pohľad snáď nevidno, že (16) je prirodzeným zovšeobecnením (14). Pekný a presvedčivý spôsob ako sa o tom presvedčiť spočíva v rozbití celého priestoru na malé objemové elementy ΔV, čím prídeme k diskrétnym „súradniciam". Postup je použitý napr. v známej Schiffovej učebnici [8].

V našom prípade

$$\pi(x) = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Hustotu hamiltoniánu potom definujeme vzťahom, ktorý je zovšeobecnením (15)

$$\mathscr{H} = \pi(x) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathscr{L} \tag{17}$$

Pre hamiltonián sústavy máme

$$H = \int_0^a \mathscr{H}\, \mathrm{d}x = \int_0^a \left[\pi(x) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathscr{L} \right] \mathrm{d}x \tag{18}$$

14.3 KMITY TYČE AKO SÚSTAVA OSCILÁTOROV

Od klasického lagrangeovského formalizmu predchádzajúceho článku by sme teraz mohli prejsť ku kvantovému opisu pozdĺžnych kmitov tyče pomocou kanonického kvantovania. Zatiaľ to neurobíme, ku kvantovému opisu sa dostaneme názornejšou a z hľadiska interpretácie užitočnou cestou tak, že najprv vyjadríme kmity tyče pomocou iných súradníc, v ktorých je problém ekvivalentný sústave nezávislých oscilátorov.

V predchádzajúcom článku sme (klasický) stav tyče reprezentovali pomocou výchylky $\psi(x, t)$ každého *dĺžkového elementu* tyče. Nevýhodou tohto zavedenia súradníc je to, že susedné elementy tyče sa vzájomne ovplyvňujú, čo je vyjadrené tým, že v rovniciach vystupuje $d\psi/dx$. Keby sme prešli k diskrétnym premenným tak, že by sme uvažovali úseky tyče malej, ale konečnej dĺžky, dostali by sme pre tieto úseky systém pohybových rovníc rovnaký ako pre sústavu viazaných oscilátorov. Pre každý takýto systém sa dá prejsť k novým zovšeobecneným súradniciam, vzhľadom na ktoré už dostaneme pohybové rovnice nezávislých oscilátorov.[227] Voľba vhodných súradníc je v našom prípade intuitívne zrejmá: treba rozložiť výchylku $\psi(x, t)$ do úplného systému funkcií opisujúcich stacionárne vlastné kmity tyče. Z teórie Fourierových radov je známe, že „ľubovoľnú“ funkciu možno vyjadriť v tvare

$$\psi(x) = A_0 \frac{1}{\sqrt{a}} + \sum_k A_k \sqrt{\frac{2}{a}} \cos kx + \sum_k B_k \sqrt{\frac{2}{a}} \sin kx \tag{1}$$

[227] Pozri napr. L. D. Landau – E. M. Lifšic: Mechanika. Nauka, Moskva 1973, § 23.

kde k môže nadobúdať iba hodnoty dané periodickými okrajovými podmienkami

$$k = \frac{2\pi}{a} n \qquad n = 1, 2, 3, \dots \tag{1a}$$

Pri každom k by sme mali písať aj index n, ale budeme ho vynechávať a sumovanie v (1) bude označovať sumu cez hodnoty k povolené podmienkou (1a). Koeficienty A_0, A_k, B_k potom jednoznačne určujú funkciu $\psi(x)$ a môžeme ich chápať ako nové „súradnice“ pre opis klasického stavu tyče. Časová závislosť funkcie $\psi(x, t)$ potom bude reprezentovaná ako časová závislosť týchto koeficientov. Všimnime si ešte fyzikálny význam prvého člena v rozvoji (1). Je to člen nezávislý od x, reprezentuje homogénne posunutie tyče, teda posunutie tyče ako celku. Tento pohyb nás teraz nezaujíma, preto člen pre A_0 budeme v ďalšom vynechávať. Budeme teda pracovať iba s funkciami, pre ktoré platí

$$\int_0^a \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2}$$

t. j. reprezentujúcimi také výchylky, ktoré nemenia polohu ťažiska tyče.

Pohybové rovnice pre $A_k(t)$, $B_k(t)$ nájdeme ľahko, ak vyjadríme hamiltonián (2.18) pomocou týchto premenných. Po dosadení z (1) do (2.18) dostaneme[228] (už pre prípad $A_0 = 0$)

$$H = \sum_k \left\{ \frac{1}{2}\rho \dot{A}_k^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 k^2 A_k^2 \right\} + \sum_k \left\{ \frac{1}{2}\rho \dot{B}_k^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 k^2 B_k^2 \right\} \tag{3}$$

kde bodka značí deriváciu podľa času.

Na pravej strane je skutočne súčet výrazov, ktoré sú presne rovnaké ako vyjadrenia pre energiu lineárneho harmonického oscilátora. Ako je dobre známe, energia takéhoto oscilátora kmitajúceho s kruhovou frekvenciou ω je

$$H_{\text{osc}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \tag{4a}$$

Výrazy na pravej strane (3) majú presne túto štruktúru. Ak vyberieme jeden z členov, napríklad

$$H(A_k, \dot{A}_k) = \frac{1}{2}\rho \dot{A}_k^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 k^2 A_k^2 \tag{4b}$$

vidíme, že (4b) odpovedá oscilátoru kmitajúceho s kruhovou frekvenciou

$$\omega_k = vk \tag{4c}$$

[228] Technicky je úprava vzťahov jednoduchá a využíva ortonormálnosť systému harmonických funkcií.

Zo vzťahu (3) je tiež zrejmé, že oscilátory sú navzájom nezávislé. Znamená to, že jednotlivé harmonické kmity tyče sa navzájom neovplyvňujú a môžeme ich vybudiť nezávisle na sebe. Prechod do k-priestoru teda podstatne zjednodušil úlohu. Jedinej hodnote k zodpovedá v x-priestore kolektívny pohyb elementov tyče, vytvárajúci stojatú vlnu.

Vyjadrenie (3) nám aj naznačuje ako máme kvantovať sústavu. Ako súradnicu oscilátora (4b) vyberieme A_k a príslušná hybnosť podľa analógie s oscilátorom (4a) bude

$$\mathscr{A}_k = \rho \dot{A}_k \tag{5}$$

Pomocou súradnice A_k a hybnosti $\mathscr{A}_k$ prepíšeme hamiltonián (4b) do tvaru

$$H(A_k, \mathscr{A}_k) = \frac{1}{2}\rho \mathscr{A}_k^2 + \frac{1}{2}\rho\omega_k^2 A_k^2 \tag{6}$$

Pri prechode do kvantovej mechaniky sa A_k, $\mathscr{A}_k$ stanú operátormi a budú spĺňať komutačný vzťah

$$[\mathsf{A}_k,\ \mathscr{A}_k] = \mathrm{i}\hbar \tag{7}$$

ktorý je presným analógom komutačného vzťahu

$$[\mathsf{x}, \mathsf{p}] = \mathrm{i}\hbar \tag{7'}$$

pre súradnicu a hybnosť lineárneho harmonického oscilátora (4a).

Podobne ako v (5) môžeme zaviesť aj hybnosť kanonicky združenú so súradnicou B_k:

$$\mathscr{B}_k = \rho \dot{B}_k$$

Príslušný hamiltonián bude analógom (6) a pri prechode do kvantovej mechaniky sa B_k, $\mathscr{B}_k$ stanú operátormi a budú spĺňať vzťah analogický k (7). Vzhľadom na to, že jednotlivé oscilátory vystupujúce v (3) sú nezávislé, budú operátory súvisiace s rôznymi oscilátormi navzájom komutovať. Preto dostávame systém komutačných vzťahov

$$\begin{gathered}
[A_k, A_{k'}] = [B_k, B_{k'}] = [\mathscr{A}_k, \mathscr{A}_{k'}] = [\mathscr{B}_k, \mathscr{B}_{k'}] = 0 \\
[A_k, \mathscr{A}_{k'}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{kk'}, \quad [B_k, \mathscr{B}_{k'}] = \mathrm{i}\hbar\delta_{kk'} \\
[A_k, B_{k'}] = [A_k, \mathscr{B}_{k'}] = [B_k, \mathscr{A}_{k'}] = [\mathscr{A}_k, \mathscr{B}_{k'}] = 0
\end{gathered} \tag{8}$$

Možné hodnoty energie sústavy danej v rámci kvantovej mechaniky vzťahmi (3) a (8) poznáme aj bez výpočtu. Je to totiž sústava nezávislých oscilátorov kmitajúcich s kruhovými frekvenciami (4c) a celková energia preto bude

$$E(n_{A1}, n_{B1}, \ldots, n_{Ak}, n_{Bk}, \ldots) = \sum_k \left\{\hbar\omega_k\left(n_{Ak} + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_k\left(n_{Bk} + \frac{1}{2}\right)\right\} \tag{9}$$

Energia pritom závisí od „obsadzovacích čísel“ n_{Ak}, n_{Bk} jednotlivých oscilátorov. Tieto čísla určujú, v ktorom kvantovom stave sa oscilátor nachádza.

Vzťah (9) ukazuje hneď jednu typickú črtu kvantovania sústav s nekonečným počtom stupňov voľnosti. Ak totiž položíme všetky $n_{Ak} = n_{Bk} = 0$, dostaneme z (9)

$$E(0, \dots, 0, \dots) = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k = \frac{1}{2}\sum_k \hbar vk\ \Sigma$$

čo je divergentný (nekonečný) výraz.

Dôvod je jednoduchý. Každý oscilátor má svoju energiu základného stavu, nazývanú – poeticky, ale nie celkom presne – aj energiou nulových kmitov. Táto energia je práve $\hbar\omega/2$. Ak máme v sústave nekonečný počet oscilátorov, je táto energia daná divergentným výrazom. Fyzikálne to ale nie je tragédia, lebo energia sústavy je vždy určená až na aditívnu konštantu. Preto môžeme túto energiu nulových kmitov od celkovej energie odčítať a zbaviť sa tak členov s 1/2 v (9).

Pozrime sa teraz na otázku kanonického kvantovania v prípade kontinua. Výsledok – kvantovú formuláciu už poznáme. Pokúsime sa nájsť ako sa k nemu dopracovať priamo z klasického lagrangeovského formalizmu, bez „medzikroku“ cez systém oscilátorov.

V kvantovej formulácii sú výchylke $\psi(x)$ i hustote hybnosti $\pi(x)$ (pozri (2.16)) priradené operátory. Podľa (1), (2.16) a (5) dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(x) &= \sum_k \mathsf{A}_k \sqrt{\frac{2}{a}}\cos kx + \sum_k \mathsf{B}_k \sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx \\ \boldsymbol{\pi}(x') &= \sum_k \hat{\mathscr{A}}_k \sqrt{\frac{2}{a}}\cos kx' + \sum_k \hat{\mathscr{B}}_k \sqrt{\frac{2}{a}}\sin kx' \end{aligned} \tag{10}$$

Pomocou (8) sa možno presvedčiť, že je splnený komutačný vzťah

$$[\boldsymbol{\pi}(x), \boldsymbol{\psi}(x')] = \mathrm{i}\hbar\sum_k \left(\frac{2}{a}\cos kx \cdot \cos kx' + \frac{2}{a}\sin kx \cdot \sin kx'\right)$$

Výraz na pravej strane je špeciálnym prípadom súčtu typu

$$\sum_n \Phi_n(x)\Phi_n(x')$$

kde $\{\Phi_n\}$ tvorí úplný ortonormovaný systém.[229] Podľa kap. 7 je tento výraz rovný

[229] Ide, pravdaže o úplný systém na priestore funkcií spĺňajúcich podmienku (2). Vzťah (11) striktne vzaté, platí iba vtedy, ak dôsledne kvantujeme aj translačný pohyb tyče ako celku, potom sa v (10) objavia aj členy $A_0/\sqrt{a}$, $\mathscr{A}_0/\sqrt{a}$. Touto otázkou sa podrobnejšie nebudeme zaoberať.

$\delta(x-x')$. Takto máme

$$[\boldsymbol{\psi}\ (x), \boldsymbol{\pi}(x')] = \mathrm{i}\hbar\delta(x-x') \tag{11}$$

Vzťah (11) je analógom kanonického komutačného pravidla typu[230]

$$[\mathsf{x}_i, \mathsf{p}_i] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$$

pre prípad kontinua.

Pri kanonickom kvantovaní kontinua sa teda dá postupovať tak, že vychádzajúc z klasického hamiltoniánu nahradíme v ňom pole[231] $\psi(x)$ i k nemu kanonicky združenú hustotu hybnosti operátormi a definitoricky požadujeme splnenie podmienky (11). Potom prípadne môžeme urobiť rozvoj typu (10) a na základe (11) odvodiť komutačné vzťahy (8).

Postup cez kanonický formalizmus má všeobecnejší charakter, môžeme ho aplikovať na ľubovoľnú teóriu poľa, kým nahradenie dynamiky pomocou systému nezávislých oscilátorov sa podarí len pre systém s lagrangiánom kvadratickým v poliach.

Napokon ešte prepíšeme operátor poľa (v našom prípade vlastne operátor posunutia) $\psi(x)$ na iné, častejšie používané, vyjadrenie. Toto nové vyjadrenie bude mať dve vlastnosti : namiesto rozkladu do „stojatých“ vĺn typu $\sin kx$, resp. $\cos kx$ bude teraz $\psi(x)$ rozložené do „bežiacich vĺn“ $\exp(\mathrm{i}kx)$, $\exp(-\mathrm{i}kx)$ a vo vzťahu k jednotlivým oscilátorom bude používať nie súradnicu a hybnosť, ale príslušné kreačné a anihilačné operátory.

Ako je známe z teórie lineárneho harmonického oscilátora s hamiltoniánom (4a), je užitočné zaviesť kreačné a anihilačné operátory a, a^+ vzťahmi (pozri článok 10.7)

$$\mathsf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\mathsf{x} + \mathrm{i}\frac{\mathsf{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}}, \qquad \mathsf{a}^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\mathsf{x} - \mathrm{i}\frac{\mathsf{p}}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \tag{12}$$

Tieto vzťahy možno jednoducho obrátiť

$$\mathsf{x} = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}(\mathsf{a}+\mathsf{a}^+), \qquad \mathsf{p} = \mathrm{i}\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right)^{1/2}(\mathsf{a}^+ - \mathsf{a}) \tag{13}$$

Pripomeňme si tiež, že operátory a, a^+ spĺňajú komutačný vzťah

$$[\mathsf{a}, \mathsf{a}^+] = \mathbf{1} \tag{14}$$

[230] Pozri poznámku pod čiarou pred rovnicou (15) predchádzajúceho článku.
[231] Veličinám typu $\psi(x)$ sa zvykne hovoriť polia.

a hamiltonián (4a) možno pomocou nich prepísať na tvar

$$H_{\mathrm{osc}} = \hbar\omega\left(\mathsf{a}^{+}\mathsf{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

Vďaka komutačnému pravidlu (14) má operátor $\mathsf{N} = \mathsf{a}^{+}\mathsf{a}$ vlastné hodnoty 0, 1, 2, …

V analógii k (13) zaveďme anihilačné a kreačné operátory pre jednotlivé oscilátory opísané súradnicami A_k, resp. B_k.

Z porovnania rovníc (3), (4a) a (6) vidno, že analógom operátorov a, a^{+} budú $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\alpha}_k^{+}$, $\boldsymbol{\beta}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k^{+}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_k &= \left(\frac{\hbar}{2\rho v k}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\alpha}_k + \boldsymbol{\alpha}_k^{+}), \qquad & \mathsf{B}_k &= \left(\frac{\hbar}{2\rho v k}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\beta}_k^{+}) \\ \mathscr{A}_k &= \left(\frac{\hbar\rho v k}{2}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\alpha}_k - \boldsymbol{\alpha}_k^{+}), \qquad & \mathscr{B}_k &= \mathrm{i}\left(\frac{\hbar\rho v k}{2}\right)^{1/2}(\boldsymbol{\beta}_k - \boldsymbol{\beta}_k^{+}) \end{aligned} \tag{16}$$

Pričom komutačné vzťahy (8) vedú k tomu, že platí

$$[\boldsymbol{\alpha}_k, \boldsymbol{\alpha}_k^{+}] = \delta_{kk}, \quad [\boldsymbol{\beta}_k, \boldsymbol{\beta}_k^{+}] = \delta_{kk} \tag{17}$$

a ostatné komutátory sú nulové.

Teraz ideme postupne prepísať vyjadrenie $\psi(x)$ pomocou kreačných a anihi– lačných operátorov.

V prvom kroku vyjadríme funkcie $\cos(kx)$ a $\sin(kx)$ a (10) pomocou $\exp(ikx)$ a $\exp(-ikx)$. Po tejto jednoduchej úprave dostaneme

$$\psi(x) = \sum_{k>0} \frac{1}{\sqrt{2a}}\{[\mathsf{A}_k - \mathrm{i}\mathsf{B}_k]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + [\mathsf{A}_k + \mathrm{i}\mathsf{B}_k]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\} \tag{18}$$

pričom sme zase vynechali nulový mód a obmedzili sme sa tým iba na kmity odpovedajúce neposunutému hmotnému stredu. Vyznačili sme tiež explicitne to, že sčitujeme iba cez kladné hodnoty k. Podľa vzťahov (16) teraz vyjadríme A_k, B_k pomocou operátorov $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\alpha}_k^{+}$, $\boldsymbol{\beta}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k^{+}$. Dostaneme tak

$$\psi(x) = \sum_{k>0}\left(\frac{\hbar}{2\rho 2\rho v k}\right)^{1/2}\{[\boldsymbol{\alpha}_k + \boldsymbol{\alpha}_k^{+} - \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k - \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k^{+}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + [\boldsymbol{\alpha}_k + \boldsymbol{\alpha}_k^{+} + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k^{+}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\}$$

Definujme nové operátory

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_k - \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k) = \mathsf{a}_k \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_k^+ + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k^+) = \mathsf{a}_k^+$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_k + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k) = \mathsf{a}_{-k} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_k^+ - \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k^+) = \mathsf{a}_{-k}^+ \tag{19}$$

a prepíšme $\psi(x)$ do tvaru

$$\psi(x) = \sum_{k>0}\left(\frac{\hbar}{2\rho 2\rho v k}\right)^{1/2}\{(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_{-k}^+)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + (\mathbf{a}_{-k} + \mathbf{a}_k^+)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\}$$

V tomto výraze celý súčet rozdelíme na dva členy

$$\psi(x) = \sum_{k>0}\left(\frac{\hbar}{2\rho 2\rho v k}\right)^{1/2}[\mathbf{a}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathbf{a}_k^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] +$$
$$+ \sum_{k>0}\left(\frac{\hbar}{2\rho 2\rho v k}\right)^{1/2}[\mathbf{a}_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \mathbf{a}_{-k}^+\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}]$$

a v druhom člene urobíme zámenu $k \to -k$. Takto máme

$$\psi(x) = \sum_{k}\left(\frac{\hbar}{2\rho 2\rho v\,|k|}\right)^{1/2}[\mathbf{a}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \mathbf{a}_k^+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}] \tag{20}$$

pričom sčitujeme už cez všetky, t. j. kladné i záporné hodnoty k. Vzťah je užitočný preto, že nové operátory a_k, a_k^+ sú tiež kreačnými a anihilačnými operátormi. Vyplýva to z vyjadrenia (19) a z komutačných vzťahov (17). Ľahko sa totiž presvedčíme o tom, že platí

$$[\mathsf{a}_k, \mathsf{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'} \qquad [\mathsf{a}_k, \mathsf{a}_{k'}] = 0 \qquad [\mathsf{a}_k^+, \mathsf{a}_{k'}^+] = 0 \tag{21}$$

pre všetky k, teda pre kladné i záporné. Odporúčame čitateľovi, aby tieto vzťahy explicitne preveril.

Ľahko sa presvedčíme tiež o dvoch nasledujúcich dôležitých veciach:

Po prvé, v pôvodných kreačných a anihilačných operátoroch mal hamiltonián celej sústavy tvar

$$\mathsf{H} = \sum_{k>0}\hbar\rho k\left(\boldsymbol{\alpha}_k^+\boldsymbol{\alpha}_k + \frac{1}{2}\right) + \sum_{k>0}\hbar\rho k\left(\boldsymbol{\beta}_k^+\boldsymbol{\beta}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{22}$$

pričom sa sčitovalo len cez kladné hodnoty k. Ak tu vyjadríme $\boldsymbol{\alpha}_k^+$, $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k^+$, $\boldsymbol{\beta}_k$ pomocou operátorov a_k, a_k^+ použitím vzťahu (19) dostaneme

$$\mathsf{H} = \sum_{k}\hbar\rho\,|k|\left(\mathbf{a}_k^+\mathbf{a}_k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k}\hbar\omega_k\left(\mathbf{a}_k^+\mathbf{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{23}$$

pričom už sčitujeme cez všetky hodnoty k.

Po druhé, fyzikálny význam operátorov $\boldsymbol{\alpha}_k$, $\boldsymbol{\alpha}_k^+$, $\boldsymbol{\beta}_k$, $\boldsymbol{\beta}_k^+$ je jasný z ich zavedenia. Operátor $\boldsymbol{\alpha}_k^+$ je kreačným operátorom pre jedno kvantum s energiou $\hbar\omega_k = \hbar vk$ a v súradnicovej reprezentácii mu odpovedá vlnová funkcia úmerná $\cos(kx)$ lebo táto súvisí s daným typom kmitu.

Pýtame sa teraz na to, aký je fyzikálny význam operátora a_k^+. Intuitívne očakávame, že vďaka vzťahu

$$\mathsf{a}_k^+ = \boldsymbol{\alpha}_k^+ + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_k^+$$

bude tento operátor kreovať superpozíciu kmitov odpovedajúcich superpozícii vlnovej funkcie typu $\cos(kx)$ kreovanej operátormi $\boldsymbol{\alpha}_k^+$ a vlnovej funkcie $\sin(kx)$ kreovanej operátorom $\boldsymbol{\beta}_k^+$. Pretože $\cos(kx) + \mathrm{i}\sin(kx) = \exp(ikx)$, bude operátor a_k^+ kreačným operátorom pre kvantum energie s vlnovou funkciou $\sim\exp(ikx)$.

Hovoríme aj, že ide o kvázičasticu – fonón. „Časticový“ charakter stavu $\mathsf{a}_k^+|0\rangle$, kde $|0\rangle$ je základný stav kontinua bude zrejmejší až v nasledujúcej kapitole, kde ukážeme, že na opis mnohočasticových stavov môžeme použiť po formálnej stránke rovnaký aparát.

Doteraz sme sa pri kvantovom opise kontinua zaujímali o jediný časový okamih. Ak chceme opísať časový vývoj, musíme vybrať niektorý z tzv. obrazov.

V Schrödingerovom obraze operátory nezávisia od času a časová závislosť je len vo vlnových funkciách. V Heisenbergovom obraze operátory závisia od času a ich časová závislosť je daná vzťahom

$$\dot{\mathsf{C}} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathsf{H}, \mathsf{C}] \tag{24}$$

kde C je ľubovoľný operátor. Pozrime sa teraz na časovú závislosť operátorov a_k, a_k^+. Vyberme napríklad operátor a_q. Ak do (24) za C dosadíme a_q, za H dosadíme (23) a využijeme to, že a_q komutuje s $\mathsf{a}_k^+\mathsf{a}_k$ pre $k \neq q$ dostaneme

$$\dot{\mathsf{a}}_q = \frac{\mathrm{i}\omega_q}{\hbar}[\mathsf{a}_q^+\mathsf{a}_q, \mathsf{a}_q] = -\mathrm{i}\omega_q\mathsf{a}_q \tag{25}$$

Odtiaľ máme

$$\mathsf{a}_q(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_q t}\mathsf{a}_q(0) \equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_q t}\mathsf{a}_q \tag{26a}$$

Podobne by sme pre $\mathsf{a}_q^+(t)$ dostali

$$\mathsf{a}_q^+(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_q t}\,\mathsf{a}_q^+ \tag{26b}$$

Zhrňme teda na záver: kvantový opis kontinua vychádza z tých istých princípov ako kvantovanie sústav s konečným počtom stupňov voľnosti. Ak lagrangián sústavy je kvadratický výraz z polí a ich derivácií, dá sa úloha upraviť na jednoduchý problém kvantovania sústavy nezávislých oscilátorov.

14.4 ELEKTROMAGNETICKÉ POLE AKO SÚSTAVA OSCILÁTOROV

V tomto článku si ukážeme, že na voľné elektromagnetické pole sa môžeme tiež pozerať ako na sústavu nezávislých oscilátorov. Veci budú z technickej stránky trocha komplikovanejšie ako v predchádzajúcom článku, ale základná myšlienka bude rovnaká: potenciály poľa rozložíme do úplnej sústavy „nezávislých kmitov" a ukážeme, že do výrazu pre celkovú energiu elektromagnetického (ďalej často len EM) poľa vstúpia tieto koeficienty ako súradnice nezávislých lineárnych harmonických oscilátorov.

Kvôli zjednodušeniu odvolávok zhrňme tu najprv základné vzťahy pre EM pole.

V bežnom označení je pole budené prúdom $\boldsymbol{j}$ a hustotou náboja ρ dané Maxwellovými rovnicami

$$\nabla.\boldsymbol{B}=0 \qquad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \tag{1}$$

$$\nabla.\boldsymbol{D}=\rho \qquad \nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{j} \tag{2}$$

Vo vákuu platí

$$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H} \qquad \boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{3}$$

kde $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$ a $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{kg\,m\,C^{-2}} = 1{,}257.10^{-6}\ \mathrm{kg\,m\,C^{-2}}$. Rýchlosť svetla vo vákuu je

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\doteq 3.10^8\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{4}$$

Prvé dve Maxwellove rovnice (1) sú automaticky splnené ak $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ vyjadríme pomocou potenciálov $\boldsymbol{A}$, φ nasledovne

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{5}$$

Ak (5) dosadíme do Maxwellových rovníc (2) dostaneme rovnice

$$-\Box\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla.\boldsymbol{A}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{6}$$

$$-\Box\boldsymbol{A}+\nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla.\boldsymbol{A}\right)=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{7}$$

kde $\Box$ je D'Alambertov operátor $\Box = (1/c^2)\partial^2/\partial t^2 - \Delta$. Potenciály $\boldsymbol{A}$, φ nie sú dané jednoznačne intenzitami $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$. Transformácia

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda \qquad \varphi \to \varphi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \tag{8}$$

kde $\Lambda = \Lambda(\boldsymbol{r}, t)$ je ľubovoľná skalárna funkcia, nemení $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$. V učebniciach teórie EM poľa sa ukazuje, že funkciu $\Lambda(\boldsymbol{r}, t)$ možno vždy vybrať tak, aby platila *Lorentzova podmienka*

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla.\boldsymbol{A} = 0 \tag{9}$$

ktorá podstatne zjednodušuje rovnice (6) a (7). Pre voľné EM pole, t. j. pole pri nulovom ρ i $\boldsymbol{j}$ možno vybrať funkciu $\Lambda(\boldsymbol{r}, t)$ dokonca tak, aby platilo (9) a navyše aby $\varphi(\boldsymbol{r}, t) = 0$.

Pre voľné EM pole teda máme

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{10}$$

kde pole $\boldsymbol{A}$ spĺňa pohybovú rovnicu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial_2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \Delta\, \boldsymbol{A} = 0 \tag{11}$$

a dodatočnú podmienku

$$\nabla.\boldsymbol{A} = 0 \tag{12}$$

Celková energia EM poľa v objeme V je daná výrazom

$$H = \int_V \mathrm{d}V \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \mu_0 \boldsymbol{H}^2) \tag{13}$$

kde podintegrálna funkcia reprezentuje hustotu energie.

Ukážeme si teraz, že voľné EM pole je po formálnej stránke ekvivalentné systému nezávislých oscilátorov. Pomocou vzťahov (10) prepíšeme H do tvaru

$$H = \int_V \mathrm{d}V \left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \boldsymbol{A})^2\right] \tag{14}$$

Potenciál $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ rozložíme do radu

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha(t) \boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

kde index α zahrňuje trojicu indexov $\alpha = (\boldsymbol{k}, i, j)$ a funkcie $\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r})$ majú tvar

$$A_{(\boldsymbol{k}, i, 1)} = \sqrt{\frac{2}{V\varepsilon_0}}\, \boldsymbol{e}_i \sin(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}) \tag{16}$$

$$A_{(\boldsymbol{k},\, i,\, 2)} = \sqrt{\frac{2}{V\varepsilon_0}}\, \boldsymbol{e}_i \cos(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{r})$$

Index i môže nadobúdať dve hodnoty $i = 1, 2$ a každej z nich prislúcha jednotkový polarizačný vektor $\boldsymbol{e}_i$. Vektory polarizácie môžu byť iba dva, pretože v dôsledku podmienky (12) a lineárnej nezávislosti funkcií v (16) musí $\boldsymbol{e}_i$ spĺňať požiadavku $\boldsymbol{e}_i\,.\,\boldsymbol{k} = 0$. Pre dané $\boldsymbol{k}$ vyberieme $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ako dva jednotkové vektory kolmé na $\boldsymbol{k}$ i na seba navzájom.

Podobne ako v predchádzajúcom článku budú vlnové vektory $\boldsymbol{k}$ také, aby bola splnená podmienka periodickosti, t. j. pre $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{A}(x + L, y, z) = \boldsymbol{A}(x, y, z)$ a podobne pre ostatné zložky polohového vektora $\boldsymbol{r}$. Pri tomto výbere môžu zložky $\boldsymbol{k}$ nadobúdať iba hodnoty

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{2\pi}{L}\, n_i \qquad n_i = \text{celé číslo} \tag{17}$$

a funkcie

$$\sqrt{\frac{2}{V}}\, \sin(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{r}), \qquad \sqrt{\frac{2}{V}}\, \cos(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{r})$$

tvoria úplný ortonormovaný systém funkcií v objeme V, pod ktorým si predstavíme kocku s hranou L. Faktor $1/\varepsilon_0$ sme do funkcií (16) pridali kvôli zjednodušeniu niektorých výrazov v ďalšom.

Pred tým, ako by sme dosadzovali (15) do (14) je užitočné presvedčiť sa o tom, že platí

$$\int_V \boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r})\,.\,\boldsymbol{A}_\beta(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{18}$$

kde pre $\alpha \equiv (\boldsymbol{k}, i, j)$, $\beta = (\boldsymbol{k}', i', j')$ je symbol $\delta_{\alpha\beta}$ definovaný vzťahom

$$\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'}\,\delta_{i,\,i'}\,\delta_{j,\,j'}$$

Pomocou vzťahu (18) vypočítame rýchlo integrál z prvého člena v hranatej zátvorke v (14). Na výpočet integrálu z druhého člena budeme potrebovať integrály

$$I_{\alpha\beta} = \int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r}))\,.\,(\nabla \times \boldsymbol{A}_\beta(\boldsymbol{r}))\,\mathrm{d}V \tag{19}$$

Výraz pod integrálom najprv upravíme pomocou vzťahov známych z vektorovej analýzy[232]

[232] O správnosti takýchto a podobných vzťahov sa najjednoduchšie presvedčíme tak, že všetky vektorové súčiny (vrátane rotácií) rozpíšeme pomocou úplne antisymetrického tenzora ε_{ijk} a využijeme potom známe vzťahy pre $\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}$ a pod.

$$(\nabla\times\boldsymbol{A}_\alpha).(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)=\nabla.[\boldsymbol{A}_\alpha\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)]+\boldsymbol{A}_\alpha.[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)]$$
$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)=\nabla(\nabla.\boldsymbol{A}_\beta)-\nabla^2\boldsymbol{A}_\beta$$

na tvar

$$(\nabla\times\boldsymbol{A}_\alpha).(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)=$$
$$=\nabla.[\boldsymbol{A}_\alpha\times(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)]+\boldsymbol{A}_\alpha.(\nabla.\boldsymbol{A}_\beta)-\boldsymbol{A}_\alpha.\nabla^2\boldsymbol{A}_\beta \tag{20}$$

Pri integrovaní cez objem V bude sa integrál z prvého člena na pravej strane (20) rovnať nule, možno ho totiž Gaussovou vetou previesť na integrál po povrchu objemu V a tento integrál bude nulový v dôsledku periodičnosti funkcií $\boldsymbol{A}_\alpha$, $\boldsymbol{A}_\beta$. Druhý člen na pravej strane (20) dá tiež nulu, lebo pre funkcie $\boldsymbol{A}_\alpha$, $\boldsymbol{A}_\beta$ platí podmienka (12) a $\nabla.\boldsymbol{A}_\beta=0$. Pri integráli z ostatného člena na pravej strane si najprv treba všimnúť, že podľa(16) pre každú z funkcií $\boldsymbol{A}$ platí

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_\alpha=-k^2\,\boldsymbol{A}_\alpha$$

Takto dostaneme

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A}_\alpha).(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)\,\mathrm{d}V=k^2\int_V\boldsymbol{A}_\alpha.\boldsymbol{A}_\beta\,\mathrm{d}V$$

Tým sme problém upravili na prípad (18) a máme

$$I_{\alpha\beta}=\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A}_\alpha).(\nabla\times\boldsymbol{A}_\beta)\,\mathrm{d}V=\frac{k^2}{\varepsilon_0}\delta_{\alpha\beta} \tag{21}$$

Teraz už máme všetko pripravené pre to, čo sa chystáme urobiť. Dosadíme rozklad (15) do (14), využijeme (18) a (21) a dostaneme

$$H=\sum_\alpha\left(\frac{1}{2}\dot{q}_\alpha^2+\omega_\alpha^2q_\alpha^2\right),\qquad \omega_\alpha=kc \tag{22}$$

čím sme naozaj vyjadrili energiu EM poľa v objeme V ako súčet energií klasických oscilátorov. Pretože vieme, aký je vzťah medzi lagrangiánom a hamiltoniánom oscilátora, môžeme napísať rovno lagrangián celej sústavy:

$$L=\sum_\alpha\left(\frac{1}{2}\dot{q}_\alpha^2-\omega_\alpha^2q_\alpha^2\right) \tag{23}$$

Vidíme tiež, že lagrangián dostaneme zmenou znamienka pri druhom člene, čo odpovedá zmene znamienka pri druhom člene v kvantovej zátvorke v (14) a to zas odpovedá zmene znamienka pri druhom člene v (13). Teda lagrangián EM poľa v objeme V je

$$H=\int_V\frac{1}{2}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2-\mu_0\boldsymbol{H}^2)\,\mathrm{d}V=\int_V\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]\mathrm{d}V \tag{24}$$

pričom ostatná rovnosť platí prirodzene iba v kalibrácii s $\varphi = 0$, $\nabla . \boldsymbol{A} = 0$, ktorú tu používame. Pri formálnom budovaní teórie EM poľa sa často vychádza z (24) a Maxwellove rovnice dostávame ako Eulerove-Lagrangeove rovnice tohto systému, podobne ako sme to podrobnejšie prediskutovali v predchádzajúcom článku pre pozdĺžne kmity tyče. Tu sa tým ale zaoberať nebudeme a vrátime sa k nezávislým oscilátorom v (22) a (23).

Klasická pohybová rovnica pre súradnicu oscilátora sa rýchlo dostane z (23). Všeobecne platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = +\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

a v našom prípade máme odtiaľ

$$\ddot{q}_\alpha = -\omega_\alpha^2 q_\alpha \tag{25}$$

čo je dobre známa pohybová rovnica pre harmonický oscilátor. Mohli by sme ju dostať aj priamo dosadením rozkladu (15) do (11) a využitím lineárnej nezávislosti funkcií $\boldsymbol{A}_\alpha(\boldsymbol{r})$.

Doteraz sme hovorili iba o klasickej teórii. Ak však máme klasický systém vyjadrený ako systém skladajúci sa z nezávislých lineárnych harmonických oscilátorov môžeme ho rýchlo opísať pomocou kvantovej mechaniky. Stačí zaviesť hybnosti p_α kanonicky združené so súradnicami q_α, zmeniť q_α, p_α z čísel na operátory a žiadať splnenie komutačných vzťahov

$$[\mathrm{p}_\alpha, \mathrm{q}_\beta] = -\mathrm{i}\hbar\,\delta_{\alpha\beta} \tag{26}$$

Pre jednotlivé oscilátory takto dostaneme ako prípustné hodnoty energie $\hbar\omega(n_\alpha + 1/2)$.

Ďalej by sme zas mohli zaviesť kreačné a anihilačné operátory pre jednotlivé oscilátory, tak ako sme to robili v predchádzajúcom článku, vyjadriť pomocou nich koeficienty q_α v rozklade (15) a napokon prísť ku kreačným a anihilačným operátorom pre postupné vlny exp ($\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}$). Všetko by bolo úplne rovnaké, iba by sme mali komplikovanejšie indexy.[233] Výsledok by bol

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \sum_\alpha \left(\frac{\hbar}{2V\varepsilon_0\omega_k}\right)^{1/2} [\mathrm{a}_\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}} + \mathrm{a}_\alpha^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}]\boldsymbol{e}_i$$

kde operátory a_α, a_β^+ spĺňajú komutačný vzťah

$$[\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{a}_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta} \tag{28}$$

[233] Trocha opatrnosti treba pri počítaní stavov. V báze kde za základné kmity vyberáme stojaté vlny cos ($\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}$) sin ($\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}$) musíme z dvojice $\boldsymbol{k}$, $-\boldsymbol{k}$ vybrať iba jeden člen. Preto máme ku každému k priradený iba jeden kmit, rovnako ako v báze exp($\mathrm{i}\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}$).

Pri prechode do Heisenbergovho obrazu by sme dostali, tiež ako v predchádzajúcom článku

$$\begin{aligned} \mathsf{a}_\alpha(t) &= \mathsf{a}_\alpha \mathrm{e}^{-\omega_\alpha t} \\ \mathsf{a}_\alpha^+(t) &= \mathsf{a}_\alpha^+ \mathrm{e}^{\omega_\alpha t} \end{aligned} \tag{29}$$

Bez podrobnejšej analýzy uveďme, že stav $\mathsf{a}^+_\alpha|0\rangle$, kde $|0\rangle$ je základný stav poľa (t. j. „vákuum“) zodpovedá jednofotónovému stavu. Ide o fotón s energiou $E_\alpha = \hbar\omega_\alpha = \hbar kc$, hybnosťou $\boldsymbol{p}_\alpha = \hbar\boldsymbol{k}$ a polarizáciou danou vektorom $\boldsymbol{e}$.

14.5 PLANCKOV ZÁKON PRE ŽIARENIE ČIERNEHO TELESA

Planckov zákon opisuje spektrálne rozdelenie hustoty energie EM žiarenia v dutine telesa zahriatom na teplotu T. Inými slovami: tento zákon ukazuje aká energia pripadá na objemovú jednotku a jednotkový interval kruhovej frekvencie ω. Z predchádzajúceho článku už vieme, že energiu EM žiarenia v istom objeme V môžeme vyjadriť ako súčet energií lineárnych harmonických oscilátorov. Pritom vieme, koľko je týchto oscilátorov a aké sú ich kruhové frekvencie. Ak na interval $\Delta\omega$ pripadá $n(\omega)\Delta\omega$ oscilátorov, potom ich celková energia bude rovná súčinu $n(\omega)\varepsilon_\omega(T)\Delta\omega$, kde $\varepsilon_\omega(T)$ je stredná hodnota energie oscilátora s kruhovou frekvenciou ω pri teplote T.

Pre spektrálnu hustotu energie $\rho(\omega)$ potom budeme mať

$$\rho(\omega) = \frac{n(\omega)\varepsilon_\omega(T)\Delta\omega}{V\Delta\omega} = \frac{n(\omega)\varepsilon_\omega(T)}{V} \tag{1}$$

Začneme z toho, že nájdeme $n(\omega)$. Jednotlivé oscilátory boli v predchádzajúcom článku číslované tromi kvantovými číslami: vlnovým vektorom $\boldsymbol{k}$, ktorého zložky nadobúdali hodnoty

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad i = 1, 2, 3,\ n_i \text{ celé} \tag{2}$$

polarizačným vektorom, ktorý mal pri danom $\boldsymbol{k}$ dve možnosti $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ a napokon indexom, ktorý hovoril či je príslušný kmit sínusového alebo kosínusového typu. Kruhová frekvencia oscilátora bola daná vzťahom $\omega = kc$, kde $k = |\boldsymbol{k}|$. Podľa (2) je hustota oscilátorov v $\boldsymbol{k}$-priestore

$$\rho(\boldsymbol{k}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

Počet oscilátorov v intervale $(k, k + \mathrm{d}k)$ je rovný povrchu gule s polomerom k násobenému hrúbkou vrstvy $\mathrm{d}k$ a hustotou $\rho(\boldsymbol{k})$. Ku každému $\boldsymbol{k}$ ale patria dva kmity s rôznymi polarizáciami. Ako výsledok dostávame pre počet stavov v intervale $(k, k + \mathrm{d}k)$

$$n(k)\,\mathrm{d}k = 8\pi k^2 \rho(k)\,\mathrm{d}k = \frac{8\pi k^2 V \mathrm{d}k}{(2\pi)^3}$$

Počet oscilátorov na interval $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$ vzhľadom na vzťah $k = \omega/c$ potom bude

$$n(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{8\pi\omega^2 V \mathrm{d}\omega}{(2\pi c)^3}$$

Vidíme hneď, že počet stavov je úmerný objemu V a po dosadení do (1) máme pre spektrálnu hustotu energie žiarenia

$$\rho(\omega) = \frac{8\pi\omega^2}{(2\pi c)^3}\varepsilon_\omega(T) \tag{3}$$

Ostáva nám teda už len nájsť strednú energiu oscilátora s kruhovou frekvenciou ω pri teplote T. Tento oscilátor môže byť v stavoch s energiou 0, $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, …, $n\hbar\omega$, …, pričom energiu počítame od energie základného stavu. Podľa štatistickej fyziky sústava, ktorá je v termodynamickej rovnováhe s okolím, sa s pravdepodobnosťou

$$P(E) = C\exp(-E/kT) \tag{4}$$

nachádza v nedegenerovanom stave s energiou E. Vzťah (4) nazývame tiež Boltzmannovým rozdelením. Vo vzorci (4) k je Boltzmannova konštanta a C je normovací faktor, ktorý musíme zvoliť tak, aby $\Sigma P(E) = 1$. Preto bude $C = [\Sigma\exp(-E/kT)]^{-1}$ Pre strednú hodnotu energie sústavy pri danom T potom máme

$$\varepsilon_\omega(T) = \Sigma E_i P(E_i) = \frac{\Sigma E_i \exp(-E_i/kT)}{\Sigma\exp(-E_i/kT)}$$

Pre lineárny harmonický oscilátor máme $E_n = n\varepsilon_0 = n\hbar\omega$ a z predchádzajúceho vzťahu dostávame

$$\varepsilon_\omega(T) = \frac{\sum_0^\infty n\varepsilon_0 \exp(-n\varepsilon_0\tau)}{\sum_0^\infty \exp(-n\varepsilon_0\tau)} \tag{5}$$

kde $\tau = 1/kT$. Pravú stranu (5) môžeme prepísať ako

$$\varepsilon_\omega(T) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\sum_0^\infty \exp(-n\varepsilon_0\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ln\sum_0^\infty (\mathrm{e}^{-\varepsilon_0\tau})^n$$

Súčet nekonečného radu v ostatnom člene ľahko nájdeme, lebo je to súčet geometrického radu $\sum_0^\infty a^n = 1/(1-a)$, kde $a = \exp(-\varepsilon_0 \tau) < 1$.

Takto dostaneme

$$\varepsilon_\omega(T) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \ln[1 - \exp(-\varepsilon_0 \tau)]$$

a po derivovaní

$$\varepsilon_\omega(T) = \frac{\varepsilon_0}{\mathrm{e}^{-\varepsilon_0/kT} - 1} = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{-\hbar\omega/kT} - 1} \tag{6}$$

Ak tento výsledok teraz dáme do rovnice (3), dostaneme Planckov zákon v tvare

$$\rho(\omega) = \frac{8\pi\hbar\omega^3}{(2\pi c)^3[\exp(\hbar\omega/kT) - 1]} \tag{7}$$

Poznamenajme ešte na záver, že naše počítanie stavov fakticky odpovedá Boseho-Einsteinovej štatistike. Keď sme EM pole opísali ako sústavu oscilátorov, potom stav s energiou $n\hbar\omega$ (energiu základného stavu berieme ako nulovú) považujeme prirodzene za jediný stav. Kvantá energie EM poľa môžeme ale považovať aj za „častice" – fotóny a na stav s energiou $n\hbar\omega$) sa potom pozeráme ako na stav s n-fotónmi. Vidno teda, že fotóny chápeme ako nerozlišiteľné častice, lebo inakšie by tomuto odpovedalo ($n!$) stavov líšiacich sa navzájom permutáciami (neidentických) častíc. Podrobnejšie o tom ešte budeme hovoriť v nasledujúcej kapitole.

14.6 PLANCKOV ZÁKON A EINSTEINOVE VZŤAHY PRE ABSORPCIU A EMISIU ŽIARENIA

Ešte pred vznikom kvantovej mechaniky odvodil A. Einstein v klasickej práci z Planckovho zákona a základných predpokladov štatistickej fyziky vzťah medzi koeficientmi absorpcie, stimulovanej emisie a pravdepodobnosťou spontánnej emisie. Einsteinov argument sa zakladá na nasledujúcej úvahe.

Predstavme si sústavu skladajúcu sa z atómov v stave 2, atómov v stave 1 a z elektromagnetického poľa. Nech je celá sústava v termodynamickej rovnováhe pri teplote T. Energie atómov v stavoch 1 a 2 označíme E_1, E_2 a pre určitosť nech $E_2 > E_1$, Počet atómov v stavoch 1 a 2 označíme N_1 a N_2 a hustota energie žiarenia $\rho(\omega)$ je daná Planckovým zákonom.

Počet atómov v stave 2 sa bude meniť v dôsledku troch procesov:

1. Atómy zo stavu 2 prechádzajú spontánnou emisiou žiarenia do stavu 1. Z celkového počtu N_2 sa takto za jednotku času rozpadne $N_2 w$ atómov, kde w je pravdepodobnosť spontánneho prechodu (za jednotku času) atómu zo stavu 2 do stavu 1.

2. Stimulovanou emisiou prejde zo stavu 2 do stavu l za jednotku času $N_2\rho(\omega)b_{12}$ atómov. Koeficient b_{12} sa líši iba konštantou úmernosti od koeficientu stimulovanej emisie pre prípad, keď na atóm dopadá rovinná monochromatická vlna. S týmto prípadom sme sa zaoberali podrobnejšie v kapitole 9. Pravdepodobnosť prechodu za jednotku času tam bola úmerná hustote prúdu energie dopadajúcej EM vlny a koeficientu stimulovanej emisie. Hustota prúdu energie na relevantnej kruhovej frekvencii $\omega = \omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$ je ale zrejme úmerná $\rho(\omega)$ pri tomto ω.

3. Atómy v stave 1 môžu absorbovať žiarenie a prejsť do stavu 2. Počet takýchto prechodov za jednotku času je

$$N_1\rho(\omega)b_{21}$$

Pre časovú zmenu počtu atómov v stave 2 započítaním všetkých troch uvedených mechanizmov dostaneme :

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \rho(\omega)b_{21}N_1 - \rho(\omega)b_{12}N_2 - N_2 w \tag{1}$$

V rovnovážnom stave nesmie N_2 závisieť od času, preto $\mathrm{d}N_2/\mathrm{d}t = 0$. Rovnicu, ktorú takto dostaneme, vydelíme N_2 a využijeme to, že podľa Boltzmannovho rozdelenia použitého pre atómy platí

$$\frac{N_1}{N_2} = \mathrm{e}^{(E_2 - E_1)/kT} = \mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} \tag{2}$$

kde symbolom ω označujeme $(E_2 - E_1)/\hbar$.

Po naznačených úpravách z rovnice (1) máme

$$\rho(\omega)b_{21}\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - \rho(\omega)b_{12} - w = 0 \tag{3}$$

Pre vysoké teploty, teda v limite $T \to \infty$ sa hustota žiarenia zväčšuje. Na jednej strane to vidno priamo z Planckovho zákona a na druhej strane to vidíme aj intuitívne. Ak si totiž predstavíme EM pole ako sústavu oscilátorov, potom s rastúcou teplotou budú stále viac a viac obsadené vyššie excitované stavy týchto oscilátorov a stredná hodnota energie oscilátorov porastie. V limite $T \to \infty$ sú teda prvé dva členy v (3) obrovské a tretí je od nich oveľa menší. Zdôrazníme, že w nezávisí od teploty T. Pri $T \to \infty$ sa teda prvé dva členy musia skompenzovať navzájom. Vtedy tiež $\exp(\hbar\omega/kT) \to 1$ a máme odtiaľ

$$b_{12} = b_{21} \tag{4}$$

čo nám hovorí, že koeficient stimulovanej emisie je rovnako veľký ako koeficient stimulovanej absorpcie.[234] Ak (4) dosadíme do (3), máme

$$b_{21}\rho(\omega)[\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1] = w \tag{5}$$

Pravá strana v tejto rovnici nezávisí od T, na ľavej strane b_{21} od T tiež nezávisí. Hustota energie žiarenia od T závisí a jej závislosť musí byť taká, že práve skompenzuje závislosť faktoru v hranatej zátvorke od T. Takto dostávame

$$\rho(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT} - 1} \tag{6}$$

kde $\varphi(\omega)$ závisí iba od ω, ale nie od T. V čase, keď Einstein túto prácu písal (1917), sa funkcia $\varphi(\omega)$ už dala určiť z dobre známeho limitného tvaru $\rho(\omega)$ pre veľké teploty (zákon Rayleigha a Jeansa). Einstein takto vlastne znova odvodil i Planckovu formulku. Ak ale do (5) dosadíme priamo Planckov zákon (5.7), dostaneme

$$w = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} b_{21} \tag{7}$$

čo je Einsteinov vzťah pre koeficient spontánnej emisie. Keby sme b_{21} vyjadrili pomocou koeficientu absorpcie určeného v kapitole 9, dostali by sme z rovnice (7) po niekoľkých úpravách vzťah

$$w = \frac{4}{3}\frac{\omega^3}{c^2}\alpha\left|\int \psi_2^* \boldsymbol{r} \psi_1 \,\mathrm{d}V\right| \tag{8}$$

kde ψ_2, ψ_1 sú vlnové funkcie atómu v stavoch 2 a 1 (koeficient b_{21} bol vyjadrený v dipólovom priblížení). Konštanta a v (8) je konštantou jemnej štruktúry.

Ako historickú odbočku ešte uveďme, že Dirac priamym spôsobom vypočítal koeficient w v práci, ktorá bola napísaná o 10 rokov po Einsteinovej a považuje sa za začiatok kvantovej teórie poľa. Dirac zapísal potenciál EM poľa v tvare ekvivalentnom (4.27) a interpretoval operátory a_α, a_α^+ ako kreačné a anihilačné operátory fotónu. Potom napísal výraz pre interakciu atómu a EM poľa a dosadil doň takýto zápis pre $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$. Ako výsledok dostal interakčný hamiltonián obsahujúci výrazy odpovedajúce kreácii a anihilácii fotónu pri atomárnych prechodoch a mohol spočítať aj koeficient spontánnej emisie. Podrobnejšie o tom ale v tejto učebnici hovoriť nebudeme.

[234] Pre tento argument o veľkosti koeficientu stimulovanej emisie sa niekedy citovaný Einsteinov článok považuje za teoreticky základ laserov. Einstein má v úvode článku ale ešte jednoduchší argument. Predstavme si oscilátor (nabitú časticu), ktorá kmitá s kruhovou frekvenciou *ta*. Na oscilátor dopadá EM vlna s tou istou frekvenciou. Ak elektrické pole vlny a kmit oscilátora sú vo fáze, oscilátor absorbuje energiu (absorpcia), ak majú opačné fázy oscilátor stráca energiu a odovzdáva ju poľu (stimulovaná emisia).

Na záver je ťažko odpustiť si jednu nie celkom striktne fyzikálnu poznámku. Keď sa hovorí o majstroch beletrie, rozoberajú sa ich diela a uvažuje sa nad tým, v čom spočíva genialita majstra. Vo fyzike sa to robí len zriedkavo a je to škoda.

Citovaná Einsteinova práca je nesporne geniálna a genialita je okrem iného v tom, že závažný a komplikovaný problém bol maximálne zjednodušený do klasicky čistej schémy myšlienkového experimentu, v ktorom bol Einstein majstrom a virtuózom. Myšlienkový (Gedanken-) experiment ťažko definovať, ale je to zhruba analýza fyzikálnej situácie, v ktorej ostanú podstatné črty problému a myšlienkový experiment skúma potom logickú konzistentnosť niekoľkých základných tvrdení. V tomto prípade to boli: Planckovo rozdelenie, Boltzmannov zákon a vzťahy pre absorpciu a emisiu žiarenia atómami. Einsteinova práca ukázala konzistentnosť vecí a navyše priviedla ku vzťahu (8).

V istom zmysle je Gedankenexperiment podobný skúmaniu logickej konzistentnosti axiómov v matematike, ale rozdiel je podstatný – fyzika nemá axiomatickú štruktúru, jej zákony platia len v istých situáciách[235] a preto treba mať istú konkrétnu predstavu o fyzikálnej situácii, v ktorej konzistentnosť daných tvrdení skúmame.

Keby niekto myslel, že vo fyzike niet krásy, poézie, či umenia, nech si prečíta túto Einsteinovu prácu. Diela majstrov sú už raz také, že originál je vždy viac ako jeho výklad.

14.7 KVALITATÍVNA DISKUSIA VZŤAHU PRE SPONTÁNNU EMISIU

V predošlom článku sme uviedli vzťah (6.8) pre spontánnu emisiu fotónu a súčasný prechod atómu zo stavu 2 do stavu 1. Odvodenie bolo fakticky urobené v dvoch krokoch. V prvom (kap. 9) sme uviedli vzťahy pre absorpciu a stimulovanú emisiu svetla a v druhom sme na základe Einsteinovho myšlienkového experimentu našli vzťah medzi pravdepodobnosťami týchto procesov a spontánnou emisiou. Takéto odvodenie „okľukou“ trocha zakrýva samotný mechanizmus spontánnej emisie. Aby sme to trocha skompenzovali, uvedieme tu niekoľko kvalitatívnych a rozmerových argumentov, ktoré v istom zmysle vysvetľujú vzťah (6.8).

Aj tu bude diskusia rozdelená do dvoch častí. V prvej si pripomenieme vzťah pre energiu vyžarovanú klasickým oscilátorom, v druhej prídeme ku vzťahu (6.8).

Časová závislosť oscilujúceho dipólu je $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_0 \cos \omega t$. Intenzita vyžarovania je úmerná druhej mocnine zrýchlenia, teda do vzťahu pre intenzitu vstúpi faktor $|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2 = \omega^4 d_0^2 \cos^2(\omega t)$. Dipólový moment d_0 je úmerný súčinu náboja a dĺžky:

[235] Napr. Newtonove zákony sú presné, ale neplatia vnútri atómov, nerelativistickú kvantovú mechaniku nemôžeme použiť bez jej ďalšieho rozvinutia na zrážky elementárnych častíc pri energiách tak vysokých, že pri zrážke vznikajú nové častice a pod.

$d_0 = el_0$, takže intenzita I bude úmerná $\omega^4 e^2 l_0^2 \cos^2(\omega t)$. Spolu s faktorom e^2 sa v SI sústave objaví aj faktor $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$. Pretože sa zaujímame o intenzitu ustrednenú cez dobu oveľa väčšiu ako je doba kmitu, ustredníme výraz $\cos^2(\omega t)$ v čase a pre energiu vyžiarenú dipólom za jednotku času máme

$$W \sim \frac{\omega^4 e^2 l_0^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{1}$$

Rozmery jednotlivých veličín na pravej strane sú takéto

$$[\omega^4] = \mathrm{s}^{-4}, \quad \left[\frac{\omega^4 e^2 l_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\right] = \text{energia}\,.\,L, \quad [l_0] = L \tag{2}$$

kde L označuje rozmer dĺžky a druhý z výrazov (2) sme našli podľa tvaru potenciálnej energie v elektrostatike. Celý rozmer pravej strany v (1) teda je

$$\left[\frac{\omega^4 e^2 l_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\right] \quad \left[\frac{L}{\text{čas}}\right]^3$$

Správny rozmer ale je energia/čas, preto pravú stranu v (1) treba ešte deliť treťou mocninou rýchlosti. V Maxwellových rovniciach vystupuje iba rýchlosť svetla a preto očakávame, že správny vzorec pre energiu vyžarovanú dipólom za jednotku času bude

$$W \approx \frac{\omega^4}{c^3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} l_0^2 = \frac{\hbar\omega}{c^2}\omega^3 \alpha l_0^2 \tag{3}$$

kde $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c)$ je konštanta jemnej štruktúry.

Teraz prejdeme k druhej časti argumentu. Začneme tým, že odhadneme čas, za ktorý kmitajúci dipól vyžiari jeden fotón. Takýto fotón má energiu $\hbar\omega$, lebo oscilátor kmitajúci s kruhovou frekvenciou čo vysiela žiarenie, ktoré má tiež túto frekvenciu. Výraz W udáva vyžiarenú energiu za jednotku času, teda

$$W = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\hbar\omega}{\Delta t} \tag{4}$$

kde Δt je čas, za ktorý sa vyžiari jeden fotón. Zo vzťahov (3) a (4) máme

$$\frac{1}{\Delta t} \approx \frac{\omega^3}{c^2}\alpha l_0^2 \tag{5}$$

Potiaľ sme stále argumentovali v rámci klasickej fyziky, teraz však musíme nájsť kvantový analóg výrazu l_0^2. Pre prechod atómu zo stavu 2 do stavu 1 hrá túto úlohu maticový element prechodu

$$\boldsymbol{l}_0 \rightarrow \ = \int \psi_2^* \boldsymbol{r} \psi_1 \mathrm{d}V \tag{6}$$

Výraz l/(Δ*t*) je zrejme pravdepodobnosť spontánnej emisie za jednotku času Pomocou (5) a (6) takto prídeme k výsledku

$$w = \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{\omega^3}{c^2} \alpha \left| \int \psi_2^* \boldsymbol{r} \psi_1 \, \mathrm{d}V \right|^2 \tag{7}$$

ktorý po násobení faktorom 4/3 dá presný výsledok (6.8) z predchádzajúceho článku.

Kvalitatívny argument, ktorý sme tu použili, má prirodzene ďaleko ku korektnosti. Vo fyzike sa kvalitatívne argumenty používajú v dvoch kontextoch buď na „uhádnutie“ výsledku zatiaľ nevyriešeného problému, alebo na objasnenie výsledku získaného menej prehľadným spôsobom (a to bol aj náš prípad) Viacero pekných kvalitatívnych príkladov z kvantovej mechaniky možno nájsť v Migdalovej knižke.[236]

14.8 PRÍKLADY A PROBLÉMY

1. Nájdite vlnovú dĺžku elektromagnetického žiarenia, na ktorú pripadá maximum hustoty energie žiarenia čierneho telesa s teplotou T = 2,7 K. Toto je zhruba teplota reliktového kozmického žiarenia, ktoré je vážnym experimentálnym argumentom pre vznik nám známej časti vesmíru z tzv. „veľkého výbuchu“ (big bang).

2. Odhadnite povrchovú teplotu slnka ak viete, že maximum vyžarovanej energie pripadá približne na vlnovú dĺžku $\lambda = 450$ nm v zelenej časti spektra. Predpokladajte, že intenzita v žiarení slnka je rozložená podľa vlnových dĺžok rovnako ako v spektre žiarenia čierneho telesa.

3. Vychádzajúc z Planckovho zákona nájdite hustotu energie žiarenia v dutine v telese zahriatom na teplotu *T*. Pri výpočte je užitočný integrál

$$\int_0^\infty x^3 [\mathrm{e}^x - 1]^{-1} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}$$

4. Odhadnite z rozmerových a kvalitatívnych argumentov hustotu energie žiarenia v dutine v telese zahriatom na teplotu *T*.
Návod: Hustota energie ma rozmer energia (dĺžka)$^{-3}$. Typickou energiou je vyraz kT, typickou dĺžkou je $\hbar c$/(energia), t. j. $\hbar c/kT$ Výsledok porovnajte s riešením predchádzajúceho príkladu

5. Vypočítajte strednú hustotu fotónov v žiarení v dutine telesa zahriateho na teplotu *T*.
Návod: Spektrálna hustota žiarenia je daná Planckovym zákonom, jeden fotón ma energiu $\hbar\omega$.

6. Odhadnite z rozmerových či kvalitatívnych argumentov strednú hustotu fotónov v žiarení čierneho telesa zahriateho na teplotu *T*.
Návod: Použite výsledok príkladu 4 a strednú hodnotu energie fotónu položte približne rovnú kT. Kedy je tento hrubý odhad aspoň radové správny?

[236] Migdal, A. B. Kačestvennyje metody v kvantovoj teorii. Moskva, Nauka, 1975

7. Aká je entropia objemovej jednotky žiarenia čierneho telesa pri teplote T?
Návod: Predpokladajte, že pri $T = 0$ je entropia nulová a predstavte si, že dutinu o jednotkovom (stálom) objeme pomaly zahrievanie z teploty $T_0 = 0$ na teplotu T.

8. Nájdite energiu vyžiarenú z plošnej jednotky povrchu zahriateho (čierneho) telesa s teplotou T (Štefanov zákon). Určte energiu vyžiarenú z 1 m^2 povrchu Slnka ak jeho žiarenie považujete za žiarenie čierneho telesa a viete, že povrchová teplota slnka je okolo 6000 K.

9. Určte špecifickú tepelnú kapacitu kryštálu v Einsteinovom modeli. V tomto modeli chápeme kryštál ako sústavu oscilátorov, pričom všetky oscilátory kmitajú s rovnakou kruhovou frekvenciou ω. Každému atómu pripisujeme tri takéto oscilátory — po jednom za kmitanie v smere každej z osí x, y, z.
Návod: Pre N atómov máme 3 N oscilátorov s kruhovými frekvenciami ω. Na výpočet energie sústavy potrebujeme už len poznať strednú hodnotu energie oscilátora pri danej teplote T.

10. Odhadnite alebo spočítajte dobu života atómu vodíka v stave $2p$.

11. Atóm vodíka sa nachádza v stave $3p$. Aké prechody do stavov s nižšími energiami sú povolené v dipólovom priblížení?

12. Atóm vodíka sa nachádza v stave $3p$. Ako by ste počítali relatívnu pravdepodobnosť prechodu do stavov $2s$ a $1s$.