15
Tekutiny

Síla, kterou voda působí na tělo potápěče, dosáhne značné hodnoty již při potopení do poměrně malé hloubky na dno bazénu. Přesto William Rhodes po opuštění ponorky, která byla v Mexickém zálivu spuštěna do hloubky 1 000 stop (305 m), doplaval v roce 1975 do rekordní hloubky 1 148 stop (350 m), když užil vybavení sportovního potápěče a speciální směs plynů pro dýchání. Nováček sportovního potápění, který trénuje v bazénu, může však paradoxně být ve větším nebezpečí než Rhodes. Při potápění občas přijdou lidé i o život. Jaké nebezpečí jim vlastně hrozí?

15.1 TEKUTINY A SVĚT KOLEM NÁS

Tekutiny — pod tento společný název zahrnujeme **kapaliny** a **plyny**, případně i **plazma** (žhavý ionizovaný plyn) — mají základní význam pro náš život. Dýcháme je a pijeme, základní životní tekutina — krev — obíhá v našich tepnách a žilách. Moře i ovzduší je tekuté.

V autě se tekutiny vyskytují v pneumatikách, v palivové nádrži, v chladiči, ve válcích motoru, ve výfukovém potrubí, v elektrické baterii, v topném a případně chladicím systému, v nádržce ostřikovače, v mazacích systémech, v hydraulickém rozvodu (hydraulický znamená pracující prostřednictvím kapaliny). Až tedy uvidíte obrovské zemní stroje, vzpomeňte si, kolik je v nich hydraulických válců, které umožňují jejich činnost. Velmi mnoho hydraulických zařízení je ve velkých tryskových letadlech.

Energii proudící tekutiny využíváme ve větrných mlýnech a potenciální energii jiné tekutiny ve vodních elektrárnách. V průběhu věků tekutiny vytvarovaly krajinu. Často podnikáme daleké cesty, jen abychom viděli pohybující se tekutiny. Myslím, že nastal čas, abychom si řekli, co o tekutinách vypovídá fyzika.

15.2 CO JE TEKUTINA?

Jak již název napovídá, **tekutina** — na rozdíl od pevných těles — může téci. Přizpůsobí se tvaru nádob, do kterých ji umístíme. Je to proto, že tekutiny neudrží dlouhodobě síly rovnoběžné se svým povrchem. (V přesnějším vyjádření čl. 13.6 je ideální tekutina látka, která teče, protože není schopna přenášet smyková napětí. Působí jen silou kolmou ke svému povrchu.) Některým látkám, např. asfaltu, trvá dlouhou dobu, než se jejich tvar přizpůsobí rozměrům nádoby. Nakonec však k přizpůsobení dojde, a proto i takové látky se chovají (z dlouhodobého pohledu) jako tekutiny*.

Možná se divíte, proč dáváme dohromady kapaliny a plyny a společně je nazýváme tekutinami. Konec konců můžete říci, že voda a pára se liší stejně jako voda a led. Je tu ale principiální rozdíl. Molekuly ledu (stejně jako ostatních krystalických látek) jsou uspořádány do pevných trojrozměrných útvarů — krystalových mřížek — a v nich je „pořádek“ i na vzdálenosti dosti dlouhé oproti vzdálenostem mezimolekulárním. Ve vodě ani v páře žádné takové pravidelné uspořádání na dlouhou vzdálenost neexistuje.

* Chování takové tekutiny je však velmi vzdálené od chování ideální tekutiny, viskózní síly jsou velké. Podrobněji se takovými tekutinami, které jsou na pomezí tekutin a pevných látek, zabývá obecná nauka o deformačním chování látek zvaná **reologie**.

15.3 HUSTOTA A TLAK

Když popisujeme chování tuhých těles, zabýváme se různými předměty, jakými jsou např. dřevěné kvádry, míče nebo kovové tyče. Fyzikální veličiny vhodné pro popis takových útvarů jsou především *hmotnost* a *síla*, které se vyskytují v Newtonových zákonech. Můžeme např. mluvit o dřevěném kvádru, který má hmotnost 3 kg a působí na něj síla 25 N.

Na tekutinách nás více zajímají ty vlastnosti, které se mohou měnit bod od bodu, než vlastnosti nějakých v ní pevně vymezených kousků. Je užitečnější hovořit o **hustotě** a **tlaku** (rozumí se všestranném tlaku — srovnej s čl. 13.6) než o hmotnosti a síle.

Hustota

Abychom určili hustotu ϱ tekutiny v daném místě, vymezíme kolem tohoto místa malý objem ΔV, ve kterém se nachází hmotnost tekutiny Δm. **Hustota** elementu je pak

$$\varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{15.1}$$

Hustota v libovolném bodě tekutiny se zavádí jako limita tohoto poměru, když objem elementu obklopujícího zvolený bod se stále zmenšuje. V mechanice tekutin (a i obecněji při popisu spojitých neboli kontinuálních prostředí) ovšem předpokládáme, že zmenšování zastavíme, když se objem elementu přiblíží molekulovým rozměrům. Hustota se tak mezi jednotlivými body tekutiny mění pozvolna a prostředí se popisuje jako spojité a ne jako „rozkouskované“ na molekuly. Máme-li vzorek větších rozměrů, zavádíme jeho průměrnou hustotu jako $\varrho = m/V$, kde m je celková hmotnost vzorku a V jeho objem.

Hustota je skalární veličina. Její jednotkou v SI je kilogram na metr krychlový. V tab. 15.1 jsou uvedeny hustoty některých látek a průměrné hodnoty hustot některých objektů. Všimněte si, že hustoty plynů (v tabulce je uveden vzduch) se výrazně mění s tlakem, ale hustoty kapalin (v tabulce je údaj pro vodu) nikoliv. Plyny jsou snadno *stlačitelné*, kapaliny ne.

Tlak

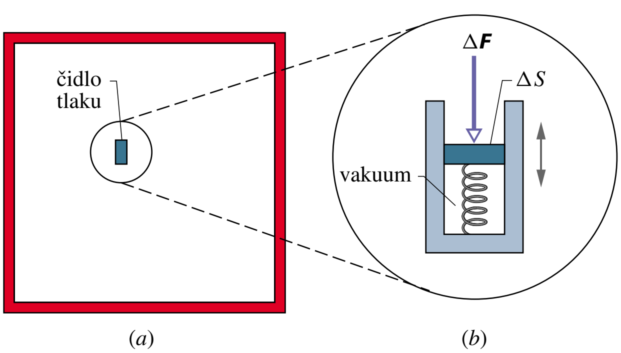
V nádobě naplněné tekutinou je umístěn malý přístroj měřící **tlak**, jak je naznačeno na obr. 15.1a. Přístroj (obr. 15.1b) se skládá z pístu plochy ΔS, který je na jedné straně vystaven působení tekutiny a na druhé, kde je vakuum, je opřen o pružinu. Odečteme-li stlačení okalibrované pružiny, zjistíme, jakou silou ΔF působí okolní tekutina na píst. Tlak, jakým tekutina působí na píst, vypočteme jako poměr

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{15.2}$$

Tabulka 15.1 **Hustoty ϱ některých látek a objektů**

LÁTKA NEBO OBJEKT	$\dfrac{\varrho}{\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}}$
mezihvězdný prostor	10^{-20}
nejlepší vakuum dosažené v laboratoři	10^{-17}
vzduch: 20 °C, 1 atm[a]	1,21
20 °C, 50 atm[a]	60,5
pěněný polystyren	$1{\cdot}10^{2}$
voda: 20 °C, 1 atm[a]	$0{,}998{\cdot}10^{3}$
20 °C, 50 atm[a]	$1{,}000{\cdot}10^{3}$
mořská voda 20 °C, 1 atm[a]	$1{,}024{\cdot}10^{3}$
krev	$1{,}060{\cdot}10^{3}$
led	$0{,}917{\cdot}10^{3}$
železo	$7{,}9{\cdot}10^{3}$
rtuť	$13{,}6{\cdot}10^{3}$
Země: průměrná hodnota	$5{,}5{\cdot}10^{3}$
jádro	$9{,}5{\cdot}10^{3}$
kůra	$2{,}8{\cdot}10^{3}$
Slunce: průměr	$1{,}4{\cdot}10^{3}$
jádro	$1{,}6{\cdot}10^{5}$
bílý trpaslík — hvězda (jádro)	10^{10}
jádro uranu	$3{,}0{\cdot}10^{17}$
neutronová hvězda (jádro)	10^{18}
černá díra (s hmotností našeho Slunce)	10^{19}

[a] atm je fyzikální atmosféra (normální atmosféra), dříve často užívaná jednotka tlaku 1 atm = 101 325 Pa je rovna normálnímu atmosférickému tlaku.



Obr. 15.1 (a) Nádoba s tekutinou, ve které se nachází malý měřič tlaku — tlakové čidlo, podrobněji ukázané v části (b) obrázku. Čidlo měří tlak podle zasunutí dobře utěsněného pístu opřeného ve vzduchoprázdném prostoru o pružinu.

Tlak v bodě tekutiny zavádíme jako limitu tohoto poměru, když plochu ΔS (o obsahu ΔS) kolem bodu zmenšujeme způsobem stejným, jaký byl popsán v minulém odstavci pro hustotu. Když je tlak ve všech bodech určité oblasti stejný, říkáme, že je v této oblasti homogenní, a zjistíme jej dělením síly F obsahem S rovinné plošky, na kterou tato síla působí. Rov. (15.2) tak přejde na často užívaný jednoduchý tvar $p = F/S$.

Pokusy zjistíme, že v daném bodě tekutiny, která je v klidu, má tlak p definovaný rov. (15.2) stejnou hodnotu pro všechny orientace měřiče tlaku. Tlak je skalár, jeho hodnota nezávisí na směru. Síla působící na naše měřicí zařízení je sice vektor, ale v rov. (15.2) se uvažuje pouze její *velikost*, která je skalární veličinou.

V SI je jednotkou tlaku newton na čtverečný metr, $\mathrm{N{\cdot}m^{-2}}$, jednotka se nazývá **pascal** (Pa). U nás i v jiných zemích důsledně užívajících metrickou soustavu jsou i měřiče tlaku v pneumatikách kalibrovány v kilopascalech. (Jedině krevní tlak se tradičně uvádí v milimetrech rtuťového sloupce neboli v torrech.) Vztah mezi pascalem a jinými dříve běžně užívanými jednotkami nepatřícími do SI je dán vztahy:

$$1\ \mathrm{atm} = 1{,}013\,25{\cdot}10^{5}\ \mathrm{Pa} = 760\ \mathrm{torr} = 14{,}7\ \mathrm{lb{\cdot}in^{-2}},$$
$$1\ \mathrm{at} = 1\ \mathrm{kp{\cdot}cm^{-2}} = 9{,}806\,65{\cdot}10^{4}\ \mathrm{Pa}.$$

Atmosféra, jak jméno naznačuje, byla jednotka tlaku přibližně rovná atmosférickému (barometrickému) tlaku. Jednotka značená atm a nazývaná *fyzikální* nebo též *normální atmosféra* je rovna *normálnímu atmosférickému tlaku*, který odpovídá průměrnému atmosférickému tlaku při hladině moře při teplotě 0 °C. Je mu definitoricky přisouzena hodnota 101 325 Pa. Jednotka značená at a nazývaná *technická atmosféra* je rovna tlaku, kterým působí síla jednoho kilopondu (kp) na čtverečný centimetr. (Kilopond je starší jednotka síly nespadající do soustavy SI; je roven velikosti tíhové síly působící na těleso hmotnosti 1 kg (resp. váze tohoto tělesa) při standardním tíhovém zrychlení g). Fyzikální atmosféra je tedy přibližně o tři procenta větší než technická atmosféra. Jednotka *torr* (pojmenovaná po Evangelistovi Torricelliovi, který v roce 1674 objevil rtuťový barometr) odpovídá tlaku, kterým na podložku působí *milimetr rtuťového sloupce*. Proto bývá *torr* označován též jako mm Hg. Typicky britská jednotka tlaku, libra na čtverečný palec ($\mathrm{lb{\cdot}in^{-2}}$), bývá zkráceně označována jako psi (pound per square inch). Hodnoty některých typických tlaků jsou uvedeny v tab. 15.2.

PŘÍKLAD 15.1

Pokoj má plochu podlahy 3,5 m × 4,2 m a výšku 2,4 m.

(a) Kolik váží vzduch v místnosti — jakou tíhou působí na podlahu?

ŘEŠENÍ: Je-li V je objem místnosti a ϱ je hustota vzduchu při tlaku 1 atm (tab. 15.1), potom hmotnost m vzduchu je

$$\begin{aligned} m &= \varrho V = \\ &= (1{,}21\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})(3{,}5\ \mathrm{m}\cdot 4{,}2\ \mathrm{m}\cdot 2{,}4\ \mathrm{m}) = \\ &= 42{,}7\ \mathrm{kg} \doteq 43\ \mathrm{kg}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Tabulka 15.2 **Tlaky ve vybraných systémech**

Systém	$\frac{p}{\text{Pa}}$
střed Slunce	$2\cdot10^{16}$
střed Země	$4\cdot10^{11}$
nejvyšší tlak dosažený v laboratoři	$1{,}5\cdot10^{10}$
tlak v největší hloubce oceánu	$1{,}1\cdot10^{8}$
tlak jehlového podpatku na taneční parket	$1\cdot10^{6}$
tlak v pneumatice[a]	$2\cdot10^{5}$
atmosférický tlak u hladiny moře	$1{,}0\cdot10^{5}$
normální krevní tlak[a,b]	$1{,}6\cdot10^{4}$
nejvyšší vakuum dosažené v laboratoři	10^{-12}

[a] Jedná se o přetlak, tj. zvýšení tlaku proti tlaku atmosférickému.
[b] Systolický tlak 120 torr, tj. 120 mm rtuťového sloupce, změřený na lékařském manometru.

Jeho tíha G je

$$G = mg = (42{,}7\,\text{kg})(9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = \\ = 419\,\text{N} \doteq 420\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jakou silou působí atmosféra na podlahu místnosti?

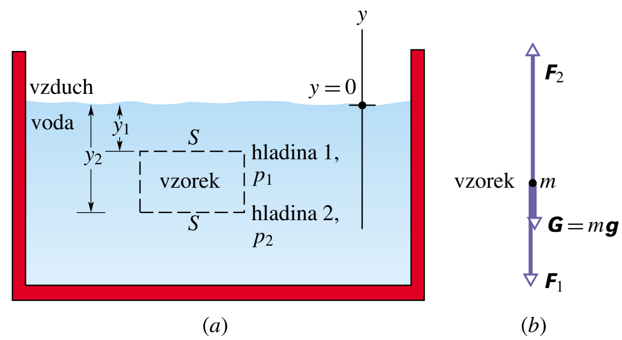
ŘEŠENÍ: Síla je rovna

$$F = pS = (1{,}0\,\text{atm})\left(\frac{1{,}01\cdot10^5\,\text{N}\cdot\text{m}^{-2}}{1\,\text{atm}}\right)(3{,}5\,\text{m})(4{,}2\,\text{m}) = \\ = 1{,}5\cdot10^6\,\text{N}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla, která je přibližně rovna síle, kterou je k Zemi přitahováno 150 tun, je tíhou sloupce vzduchu o základně rovné ploše podlahy a výšce rovné výšce atmosféry. Je rovna síle, kterou by na podlahu působila rtuť nalitá do místnosti do výšky přibližně $\frac{3}{4}$ m. Proč tato obrovská síla nerozboří podlahu?

15.4 TEKUTINY V KLIDU — STATIKA

Na obr. 15.2 je otevřená nádoba s vodou (nebo jinou kapalinou). Jak ví každý, kdo se někdy potápěl pod vodu, tlak *stoupá*, když se potápíme hlouběji pod hladinu, tj. pod rozhraní vzduch – voda. Potápěčův měřič hloubky je tlakoměr podobný tomu, který je znázorněn na obr. 15.1b. Obdobně každý horolezec ví, že tlak *klesá*, když stoupáme do výšin. Tlak, se kterým se setkává potápěč i horolezec, se nazývá **hydrostatický tlak**, protože je to tlak, kterým působí tekutiny, jsou-li v klidu, tj. při statických podmínkách. Tlak *plynu* někdy nazýváme **aerostatický tlak**. (Řec. hydór = voda; řec. i lat. aér = vzduch.)



Obr. 15.2 (a) Nádoba s vodou, ve které si představíme vzorek vody ve válci (na obrázku vyčárkován) se základnou o obsahu S. (b) Silový diagram pro vzorek vody. Vzorek je ve statické rovnováze, tíhová síla je vyvážena vztlakovou.

Nejprve probereme vzrůst tlaku s hloubkou v kapalině. Zvolíme svislou osu y s počátkem na hladině kapaliny a s kladnou orientací mířící vzhůru. Uvažujme vzorek vody, který vyplňuje myšlený válec s vodorovnou základnou o obsahu S, ležící v hloubce y_2, a vrchní plochou v hloubce y_1. Vzhledem k naší volbě osy y jsou obě souřadnice y_1 i y_2 *záporné*.

Na obr. 15.2b je znázorněn silový diagram pro zvolený válcový vzorek vody. Vzorek je v rovnováze, protože tíhová síla G na něj působící je přesně vyvážena rozdílem síly mířící vzhůru o velikosti $F_2 = p_2S$ působící na základnu a síly o velikosti $F_1 = p_1S$ mířící dolů, která působí na vrchní plochu válce. Tedy

$$F_2 = F_1 + G. \qquad (15.3)$$

Objem V válce je $S(y_1 - y_2)$. Hmotnost vody m v něm obsažené je tedy $\varrho S(y_1 - y_2)$, kde ϱ je stálá hustota vody. Tíha G vzorku vody je potom $mg = \varrho g S(y_1 - y_2)$. Po dosazení za G, F_1 a F_2 dostane rov. (15.3) tvar

$$p_2S = p_1S + \varrho Sg(y_1 - y_2)$$

neboli

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2). \qquad (15.4)$$

Tuto rovnici můžeme použít k určení tlaku jak v kapalině, tak i v atmosféře, pokud můžeme mezi výškami y_1 až y_2 předpokládat neproměnnou hustotu ϱ vzduchu.

V kapalině obvykle vyjadřujeme tlak v závislosti na hloubce h (obr. 15.3). Rov. (15.4) pro toto vyjádření upravíme tak, že hladinu 1 položíme do povrchu kapaliny a tlak v ní označíme p_0. Potom bude

$$y_1 = 0, \quad p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h.$$

Označíme-li ještě p_2 jako p, můžeme přepsat rov. (15.4) na tvar, který se pro kapaliny běžně užívá:

$$p = p_0 + \varrho g h \quad \text{(tlak v hloubce } h\text{)}. \qquad (15.5)$$

Všimněte si, že tlak v dané hloubce závisí pouze na této hloubce a nezávisí na libovolném vodorovném posunutí. Rov. (15.5) platí v nádobě libovolného tvaru. Když dno nádoby je v hloubce h, pak rov. (15.5) pro něj udá tlak p.

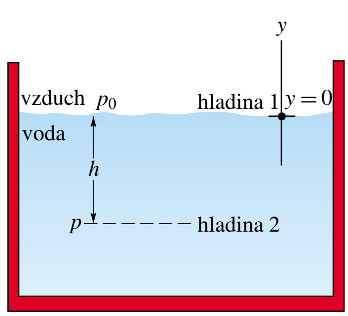
Tlak p v rov. (15.5) se označuje jako **absolutní tlak** v hladině 2. Abychom pochopili proč, všimněme si na obr. 15.3, že tlak p se skládá ze dvou příspěvků: (1) z atmosférického tlaku p_0, který působí již na vrchní hladinu 1, a (2) z tlaku $\varrho g h$, který vzniká působením kapaliny mezi hladinami 1 a 2. Obecně se rozdíl mezi absolutním a atmosférickým tlakem označuje jako **přetlak**. V našem případě, znázorněném na obr. 15.3, je tedy přetlakem výraz $\varrho g h$. Rov. (15.4) lze užít též pro vyjádření tlaku v plynu nad hladinou kapaliny pro vzdálenosti, ve kterých můžeme předpokládat, že se hustota plynu podstatně nezmění. Např. pro vyjádření tlaku plynu ve vzdálenosti d nad vrchní hladinou 1 (obr. 15.3) můžeme po dosazení

$$y_1 = 0,\ \ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = d,\ \ p_2 = p$$

psát

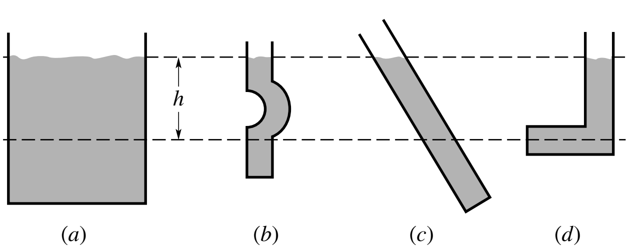
$$p = p_0 - \varrho_{\text{vzd}}\, g d,$$

když hustotu vzduchu označíme ϱ_{vzd}.



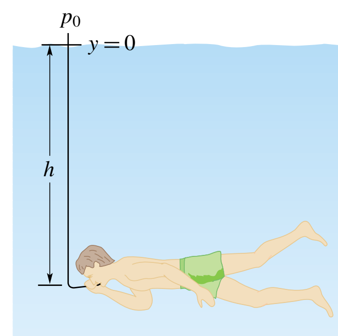
Obr. 15.3 Tlak p roste s hloubkou h, jak odpovídá rov. (15.5).

KONTROLA 1: Na obrázku jsou čtyři nádoby s olivovým olejem. Seřaďte je podle velikosti tlaku v hloubce h.



PŘÍKLAD 15.2

(a) Podnikavý potápěč-kutil předpokládá, že když sací trubice dlouhá 20 cm dobře funguje, bude dobře fungovat i trubice dlouhá 6 m. Jaký je rozdíl Δp mezi tlakem, kterým na něj působí okolní voda (obr. 15.4), a tlakem v jeho plících, když trubici nerozvážně užije pro potápění do hloubky $h = 6$ m? Co mu hrozí?



Obr. 15.4 Příklad 15.2. **TOTO NEZKOUŠEJTE** s delší trubicí, než je standardní krátká sací trubice užívaná při sportovním potápění. Takový pokus by vás mohl stát život. Ve větší hloubce může být tlak vody působící na hrudník tak velký, že jej nedokážete rozevřít, abyste skrz sací trubici nadýchli vzduch, jehož tlak je podstatně menší.

ŘEŠENÍ: Nejprve si představte potápěče v hloubce $h = 6$ m bez sací trubice. Tlak vody, který na něj působí, je podle rov. (15.5) roven

$$p = p_0 + \varrho g h.$$

Tělo potápěče se pod působením tohoto vnějšího tlaku mírně smrští tak, aby vnitřní tlaky v těle vyrovnávaly vnější tlak. Jmenovitě jeho krevní tlak a průměrný tlak v plicích se zvýší tak, aby vyrovnaly zvýšený vnější tlak p.

Jestliže však potápěč nerozvážně použije sací trubici k dýchání v hloubce 6 m, stlačený vzduch bude z jeho plic vytlačen a tlak v nich rychle klesne na hodnotu atmosférického tlaku p_0. Předpokládáme-li, že se potápí ve sladké vodě hustoty $1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, rozdíl tlaku Δp mezi vyšším tlakem působícím na jeho hrudník a nižším tlakem v jeho plících bude

$$\begin{aligned}\Delta p &= p - p_0 = \varrho g h = \\ &= (1\,000\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3})(9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})(6{,}0\ \text{m}) = \\ &= 5{,}9\cdot 10^4\ \text{Pa}. \qquad \text{(Odpověď)}\end{aligned}$$

Tento tlakový rozdíl, přibližně 0,6 atm, stačí vyvolat selhání plic způsobené tím, že do nich vnikne krev, jejíž tlak má stále ještě hodnotu okolního vyššího tlaku. Jev se nazývá **stlačení plic** (lung squeeze).

(b) Nováček ve sportovním potápění se plně nadýchl ze svého zásobníku, než zásobník odpojil v hloubce h a plaval k povrchu. Nedbal pokynů, že při výstupu z hloubky se má vydechovat. Při vynoření na povrchu rozdíl tlaku mezi tlakem v jeho plicích a okolím činil 70 torrů. V jaké hloubce h začal výstup? Jakému smrtelnému nebezpečí se vystavoval?

ŘEŠENÍ: Když plnil plíce v hloubce h, působil na něj dle rov. (15.5) opět vnější tlak

$$p = p_0 + \varrho g h,$$

který se ustavil i v jeho plících. Jak stoupal, vnější tlak na něj slábl, až na povrchu dosáhl hodnoty atmosférického tlaku p_0. Jeho krevní tlak také poklesl až na normální hodnotu. Ale protože nevydechoval, tlak v jeho plících zůstal na hodnotě, kterou měl v hloubce h. Rozdíl tlaků mezi vyšší hodnotou v jeho plících a nižší hodnotou působící na jeho hrudník dosáhl po jeho vynoření hodnoty

$$\Delta p = p - p_0 = \varrho g h,$$

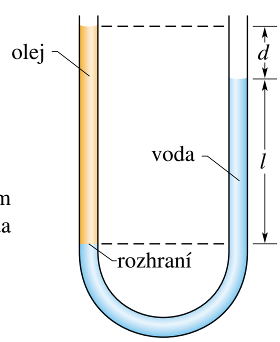
odkud dostaneme

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Delta p}{\varrho g} = \\ &= \frac{(70\,\mathrm{torr})}{(1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})(9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}})}\left(\frac{1{,}01{\cdot}10^5\,\mathrm{Pa}}{760\,\mathrm{torr}}\right) = \\ &= 0{,}95\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Tlakový rozdíl 70 torr (přibližně 9 % atmosférického tlaku) může stačit k poškození potápěčových plic. Těmi se vzduch dostane do krve, a krví do srdce, kde může způsobit smrt potápěče. Když potápěč poslechne pokyn, že má při výstupu z hloubky postupně vydechovat, umožní tlaku v plicích vyrovnávat se s okolním tlakem a zdravotní nebezpečí pomine.

PŘÍKLAD 15.3

V U-trubici znázorněné na obr. 15.5 se nacházejí dvě kapaliny ve statické rovnováze: voda s hustotou ϱ_v se nachází v pravém rameni, olej s neznámou hustotou ϱ_x v levém rameni. Měřením zjistíme, že $l = 135$ mm a $d = 12{,}3$ mm. Jaká je hustota oleje?



Obr. 15.5 Příklad 15.3. Olej v levém rameni U-trubice stojí výše než voda v pravém rameni, protože olej má menší hustotu než voda. Obě kapaliny vytváří stejný tlak p_r na svém rozhraní.

ŘEŠENÍ: Jestliže v levé trubici je na rozhraní olej – voda tlak p_r, pak tlak v pravé trubici ve stejné výšce musí být také p_r, protože obě místa jsou spojena pouze vodou. Uvažované rozhraní v pravém rameni leží ve vzdálenosti l pod povrchem (volnou hladinou) *vody* a dle rov. (15.5) máme

$$p_r = p_0 + \varrho_v g l \quad \text{(pravé rameno).}$$

V levém rameni je rozhraní v hloubce $l + d$ pod volnou hladinou *oleje* a dle rov. (15.5) máme nyní

$$p_r = p_0 + \varrho_x g (l + d) \quad \text{(levé rameno).}$$

Porovnáním těchto dvou rovnic a řešením pro neznámou ϱ_x dostaneme

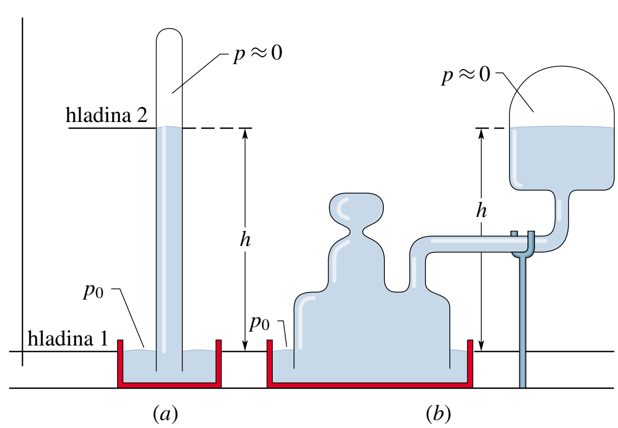
$$\begin{aligned} \varrho_x &= \varrho_v \frac{l}{l + d} = \\ &= (1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}) \frac{(135\,\mathrm{mm})}{(135\,\mathrm{mm}) + (12{,}3\,\mathrm{mm})} = \\ &= 916\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na atmosférickém tlaku p_0, ani na tíhovém zrychlení g.

15.5 MĚŘENÍ TLAKU

Rtuťový barometr

Na obr. 15.6a je obyčejný *rtuťový barometr*, přístroj k měření atmosférického (barometrického) tlaku. Je to dlouhá skleněná z jedné strany uzavřená trubice, kterou po naplnění rtutí obrátíme otevřeným koncem do nádobky s rtutí. Tím se mezi hladinou rtuti a zavřeným koncem trubice vytvoří vakuovaný prostor, ve kterém se nacházejí pouze páry rtuti. Jejich tlak je při běžných teplotách tak malý, že jej můžeme zanedbat.



Obr. 15.6 (a) Rtuťový barometr. (b) Rtuťový barometr v jiném provedení. Vzdálenost h je pro oba barometry stejná.

Podle rov. (15.4) nalezneme atmosférický tlak p_0 ze změřené výšky h rtuťového sloupce. Za hladinu 1 z obr. 15.2 zvolíme rozhraní vzduch-rtuť, tj. volnou hladinu rtuti v nádobce, a za hladinu 2 vršek rtuťového sloupce, jak je naznačeno v obr. 15.6a. Dosadíme tedy do rov. (15.4)

$$y_1 = 0, \ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = h, \ p_2 = 0$$

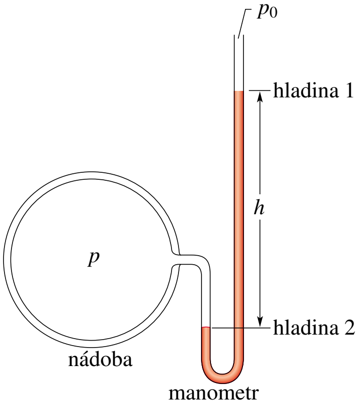
a pro hledaný atmosférický tlak dostaneme vyjádření

$$p_0 = \varrho g h, \tag{15.6}$$

kde ϱ je hustota rtuti.

Pro daný tlak nezávisí výška h na průřezu trubice se rtutí. Bizarní rtuťový barometr z obr. 15.6b měří stejně jako jednoduchý barometr z obr. 15.6a; záleží pouze na svislé vzdálenosti h mezi hladinami rtuti.

Dle rov. (15.6) závisí pro daný tlak výška sloupce rtuti na hodnotě tíhového zrychlení g v místě, kde se nachází barometr, a na hustotě ϱ rtuti, která závisí na teplotě. Výška sloupce v milimetrech je číselně rovna tlaku v torrech *pouze* tehdy, když je barometr v místě, kde má tíhové zrychlení g svou standardní hodnotu 9,806 65 m·s^{-2} a teplota rtuti je 0 °C. Jestliže tyto podmínky nejsou splněny (což je téměř vždy), musíme provést malé korekce, kterými převedeme výšku rtuťového sloupce na údaj o místním tlaku.



Obr. 15.7 Otevřený manometr, jehož levé rameno je připojeno k nádobě s plynem, jehož přetlak $p - p_0$ má být měřen. Pravé rameno U-trubice je otevřeno do atmosféry.

Otevřený kapalinový manometr

Otevřený kapalinový manometr (tlakoměr) znázorněný na obr. 15.7 měří přetlak plynu v nádobě. Je to trubice tvaru písmene U (U-trubice) naplněná kapalinou, jejíž jeden otevřený konec je spojen s nádobou, v níž chceme změřit přetlak (rozdíl tlaku oproti tlaku v okolní atmosféře), a druhý otevřený konec je spojen s okolní atmosférou. Z rov. (15.4) vyjádříme přetlak dle změřené výšky h znázorněné na obr. 15.7. Zvolíme hladiny 1 a 2 tak, jak je naznačeno na obr. 15.7. Potom dosadíme

$$y_1 = 0, \ p_1 = p_0 \quad \text{a} \quad y_2 = -h, \ p_2 = p$$

do rov. (15.4) a dostaneme

$$p_p = p - p_0 = \varrho g h. \tag{15.7}$$

Přetlak p_p je přímo úměrný výšce h.

Přetlak může být kladný, resp. záporný dle toho, zda $p > p_0$, resp. $p < p_0$. V nahuštěných pneumatikách nebo v lidském krevním oběhu je celkový tlak vyšší než atmosférický tlak, proto má přetlak kladnou hodnotu. Sajete-li šťávu stéblem, máte celkový tlak ve svých plicích nižší než atmosférický; přetlak ve vašich plicích je záporný. V češtině užíváme pro záporný přetlak lépe znějící termín **podtlak**.

PŘÍKLAD 15.4

V barometru jsme naměřili výšku h = 740,35 mm sloupce rtuti. Teplota byla −5 °C; hustota rtuti při této teplotě je 1,360 8·10^4 kg·m^{-3}. Tíhové zrychlení v místě měření je 9,783 5 m·s^{-2}. Jaký byl v místě měření atmosférický tlak? Vyjádřete jej v pascalech i torrech.

ŘEŠENÍ: Z rov. (15.6) plyne

$$\begin{aligned} p_0 &= \varrho g h = \\ &= (1{,}360\,8\cdot 10^4\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}})(9{,}783\,5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}740\,35\ \mathrm{m}) = \\ &= 9{,}856\,6\cdot 10^4\ \mathrm{Pa}. \end{aligned} \quad \text{(Odpověď)}$$

Údaje na barometru se někdy uvádějí v jednotkách torr. Tlak 1 torr je tlak, kterým působí 1 mm rtuťového sloupce v místě, kde tíhové zrychlení g má svou mezinárodně přijatou standardní hodnotu 9,806 65 m·s^{-2} a kde teplota je 0 °C. Při této teplotě má rtuť hustotu 1,359 55·10^4 kg·m^{-3}. Z rov. (15.6) tak pro jeden torr dostáváme vyjádření

$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{torr} &= (1{,}359\,55\cdot 10^4\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}})(9{,}806\,65\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\ \cdot \\ &\quad \cdot (1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}) = 133{,}326\ \mathrm{Pa}. \end{aligned}$$

Použijeme-li tento přepočtový faktor pro vyjádření hodnoty tlaku přečtené na barometru, dostaneme

$$p_0 = 9{,}856\,6\cdot 10^4\ \mathrm{Pa} = 739{,}29\ \mathrm{torr}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Všimněte si, že tlak vyjádřený v torrech (739,29 torr) je číselně blízký, ale není totožný se změřenou výškou h rtuťového sloupce barometru udanou v milimetrech (740,35 mm).

15.6 PASCALŮV ZÁKON

Když stlačíte jeden konec tuby s pastou na zuby, abyste na druhém konci vytlačili pastu na kartáček, používáte **Pascalův zákon** v praxi. Podobně je na něm založena dobrá rada, jak se zbavit kousku jídla, který vám zaskočil v krku: dát herdu do zad. Tím se prudce zvýší tlak v plicích, který vyhodí zaskočený kousek. Zákon poprvé vyslovil v roce 1652 Blaise Pascal (je po něm nazvána jednotka tlaku) ve tvaru:

Změníme-li tlak v jednom místě tekutiny, objeví se táž změna prakticky ihned v každé části této tekutiny i na stěnách nádoby, ve které je tekutina uzavřena.

Demonstrace Pascalova zákona

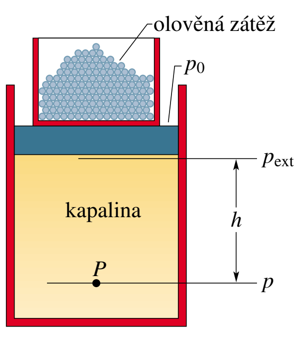
Představme si, že tekutinou je nestlačitelná kapalina ve velkém válci, jak je nakresleno v obr. 15.8. Válec je uzavřen pístem, na kterém spočívá nádoba se zátěží tvořenou olověnými broky. Atmosféra, nádoba a zátěž (spolu s hmotností pístu) vytvářejí na píst a tím i na kapalinu tlak p_{ext}. Tlak p v libovolném bodě P kapaliny je potom

$$p = p_{\text{ext}} + \varrho g h. \qquad (15.8)$$

Přidáme nyní trochu broků do nádoby, čímž zvýšíme p_{ext} o hodnotu Δp_{ext}. Hodnoty ϱ, g a h v rov. (15.8) zůstanou nezměněny, takže přidáním zátěže se v každém bodě kapaliny P tlak zvýší o

$$\Delta p = \Delta p_{\text{ext}}. \qquad (15.9)$$

Tato změna tlaku nezávisí na hloubce h. Je tedy stejná v každém bodě kapaliny, jak odpovídá Pascalovu zákonu.



Obr. 15.8 Závaží položená na píst vytvoří tlak p_{ext} na vrchní hladině uzavřené kapaliny. Když tlak p_{ext} zvýšíme přidáním dalších závaží, zvýší se tlak ve všech bodech kapaliny o stejnou hodnotu p_{ext}.

Pascalův zákon a hydraulický převod sil

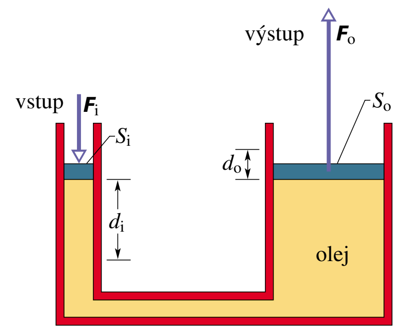
Na obr. 15.9 je znázorněno, jak se Pascalův zákon používá k násobení silového účinku, neboli jak na jeho principu může být zkonstruována jakási hydraulická páka — převodník sil. Nechť na levý (vstupní) píst o obsahu S_i působí síla velikosti F_i směrem dolů. Nestlačitelná kapalina potom v zobrazeném převodním zařízení působí na pravý (výstupní) píst o obsahu S_o silou o velikosti F_o směrem vzhůru. Aby systém byl v rovnováze, musí na pravý píst působit odshora síla stejné velikosti F_o (ta není na obrázku znázorněna). Síla F_i působící na levý píst a síla velikosti F_o působící odshora na pravý píst zvýší v kapalině tlak o hodnotu

$$\Delta p = \frac{F_i}{S_i} = \frac{F_o}{S_o},$$

odkud pro převod velikosti sil dostáváme rovnici

$$F_o = F_i \frac{S_o}{S_i}. \qquad (15.10)$$

Rov. (15.10) ukazuje, že výstupní síla F_o je větší než vstupní síla F_i, když $S_o > S_i$, jak odpovídá případu znázorněnému na obr. 15.9.



Obr. 15.9 Hydraulické zařízení, které se užívá k převodu síly F_i na vyšší hodnotu F_o. Vykonaná práce se však zvětšit nedá a je stejná pro obě síly, vstupní i výstupní.

Jestliže posuneme vstupní píst o vzdálenost d_i, posune se výstupní píst o vzdálenost d_o. Přitom se musí v okolí obou pístů přesunout stejný objem V nestlačitelné kapaliny. Platí tedy rovnice

$$V = S_i d_i = S_o d_o,$$

odkud dále plyne

$$d_o = d_i \frac{S_i}{S_o}. \qquad (15.11)$$

Poslední rovnice ukazuje, že když $S_o > S_i$, jako je tomu na obr. 15.9, je posunutí výstupního pístu menší než posunutí pístu vstupního.

Užitím rov. (15.10) a (15.11) můžeme pro výstupní práci psát

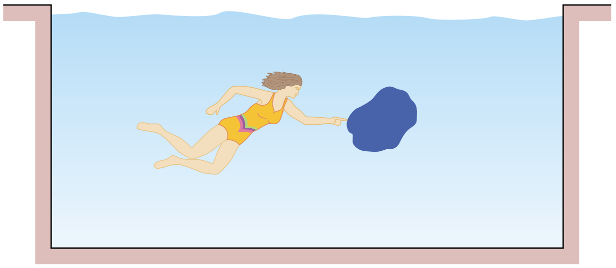
$$W = F_o d_o = \left(F_i \frac{S_o}{S_i}\right)\left(d_i \frac{S_i}{S_o}\right) = F_i d_i, \qquad (15.12)$$

odkud plyne, že práce vykonaná vstupním pístem je stejně velká jako práce vykonaná výstupním pístem.

Z toho vidíme, že **hydraulickým převodem** můžeme převést menší sílu pracující na delší dráze na větší sílu pracující na kratší dráze. Přitom součiny síly a uražené dráhy, a tedy i vykonané práce, jsou v obou případech stejné. Možnost znásobit sílu bývá často velmi výhodná. Např. většina z nás není schopna zvednout automobil, a proto uvítá službu *hydraulického zvedáku*. Při pumpování koncem ramena zvedáku ovšem urazí podstatně větší vzdálenost, než je ta, o kterou se zvedne podložená část auta. Zvedák pracuje na právě popsaném principu hydraulického převodu. Celková uražená vzdálenost d_i pístu v užším válci je však pumpováním rozdělena na sérii kratších posuvů. (Při pumpování je při každém dalším posuvu do zařízení přičerpávána ze zásobníku další kapalina — zde olej — a stav dosažený při předcházejícím posuvu je zabezpečen ventilem.)

15.7 ARCHIMEDŮV ZÁKON

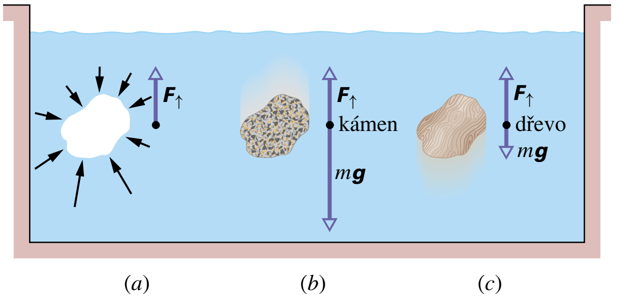
Na obr. 15.10 je v bazénu zobrazena studentka, která hýbe velmi tenkým pytlíkem z plastické hmoty plným vody. Zjišťuje, že pytlík je ve stavu statické rovnováhy: ani nestoupá, ani neklesá. Ovšem voda v pytlíku má jistou váhu, a proto by měla klesat. Zřejmě tedy na pytlík musí působit směrem vzhůru síla, která váhu pytlíku vody vyváží.



Obr. 15.10 Tenkostěnný pytlík z plastické hmoty plný vody, který se vznáší v bazénu, je ve statické rovnováze. Váha pytlíku je vyvážena výslednicí sil, kterými na pytlík působí okolní voda.

Tuto vzhůru působící sílu nazýváme **vztlaková síla**, stručně **vztlak**, a označíme ji $\boldsymbol{F}_\uparrow$. Vztlakovou silou působí na pytlík okolní voda. Vztlaková síla vzniká jako důsledek toho, že tlak v kapalině roste s hloubkou, jak jsme si již ukázali. Tlak na spodní části pytlíku je větší než na jeho vrchní části a výsledkem je vzhůru působící vztlaková síla. Představme si, že nyní odstraníme pytlík s vodou. Na obr. 15.11a jsou znázorněny síly, které působí na dutinu, která vznikla odstraněním pytlíku. Vzhůru působící vztlaková síla $\boldsymbol{F}_\uparrow$ je vektorovým součtem všech na dutinu působících sil.

Vyplňme nyní dutinu kamenem, který bude mít přesně stejné rozměry jako dutina (obr. 15.11b). *Stejný vztlak, který působil na pytlík s vodou, bude nyní působit na kámen.* Je však příliš malý na to, aby vyvážil váhu kamene, takže kámen klesne ke dnu. Přestože kámen klesá, vztlak vody jej nadlehčuje a usnadní manipulaci s kamenem.



Obr. 15.11 (a) Voda obklopující dutinu v kapalině na ni působí vztlakovou silou, jejíž velikost ani směr nezávisí na tom, čím je dutina vyplněna. (b) Je-li v dutině kámen, je velikost tíhové síly větší, než je velikost vztlakové síly. (c) Je-li v dutině dřevo, je velikost tíhové síly menší, než je velikost vztlakové síly.

Pozdě večer 21. srpna 1986 byla (pravděpodobně vulkanickým působením) narušena rozpouštěcí rovnováha oxidu uhličitého, kterého kamerunské horské jezero Nyos obsahuje velké množství. Oxid vytvořil bubliny, které byly vytlačeny nad hladinu, protože byly lehčí než obklopující tekutina — v tomto případě voda. Tam vytvořily oblak oxidu uhličitého. Tento oblak, který byl tentokrát těžší než obklopující tekutina — vzduch, začal téci po svazích hor jako řeka, přičemž zadusil 1 700 lidí a velké množství zvířat, z nichž některá vidíme na pravém obrázku.

Když vyplníme dutinu z obr. 15.11a kusem dřeva stejných rozměrů, jak je naznačeno v obr. 15.11c, bude nyní působit na dřevo stejná vztlaková síla jako dříve na kámen. Teď však bude vztlak větší, než je tíha dřeva, takže dřevo vypluje na volnou hladinu. Shrneme naše pozorování a vyslovíme **Archimedův zákon**:

> Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je stejně velká jako váha tekutiny tělesem vytlačené.

Právě tento zákon vysvětluje plování těles. Jestliže např. kus dřeva z obr. 15.11c vypluje byť jen částečně nad hladinu, vytlačí méně vody, než když je plně ponořen. Podle Archimedova zákona se úměrně zmenší vztlak, který na něj působí.

Dřevo se vynoří z kapaliny právě tolik, aby vztlak, který na něj působí, přesně vyrovnal jeho tíhu. Dřevo je pak ve statické rovnováze, plove.

Připomeňme si, že tíhovou sílu tělesa umísťujeme do těžiště. Podobně výslednou vztlakovou sílu umístíme do jejího působiště, které nazveme **vztlakový střed**. Vztlakový střed se nachází v místě, kde bylo těžiště tekutiny, než byla vytlačena. Jestliže *homogenní* těleso je plně ponořeno, splývá jeho těžiště se vztlakovým středem. Je-li však těleso ponořeno jen částečně (když plove) anebo není-li homogenní, budou oba body různé; vztlak ve vztlakovém středu a tíhová síla v těžišti pak mohou vytvořit nenulový moment silové dvojice. Ten pak rozhoduje o tom, zda je plavba lodi stabilní (moment při náhodném pootočení navrací loď zpátky) nebo ne (v opačném případě).

KONTROLA 2: Tučňák plave nejprve v kapalině hustoty ϱ_0, potom v kapalině hustoty $0{,}95\varrho_0$ a nakonec v kapalině hustoty $1{,}1\varrho_0$. (a) Seřaďte hustoty kapalin podle velikosti vztlaku, jakým působí na tučňáka. (b) Seřaďte je podle množství kapaliny vytlačené tučňákem.

PŘÍKLAD 15.5

Výraz „špička ledovce“ se v hovorové řeči užívá k označení jevu, jehož malá část je zjevná a zbytek je skryt. Jaká je vynořená část skutečného ledovce?

ŘEŠENÍ: Tíhová síla ledovce o celkovém objemu V_l je

$$G_l = \varrho_l V_l g,$$

kde $\varrho_l = 917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota ledovce.

Tíhová síla vytlačené vody, která je rovna velikosti vztlakové síly $F_\uparrow$, je

$$G_v = F_\uparrow = \varrho_v V_v g,$$

kde $\varrho_v = 1\,024\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota mořské vody a V_v je objem vody vytlačené ledovcem, tedy i objem ponořené části ledovce. Pro plovoucí ledovec jsou obě tíhové síly stejné:

$$\varrho_l V_l g = \varrho_v V_v g.$$

Z poslední rovnice pro podíl d, který hledáme, plyne

$$d = \frac{V_l - V_v}{V_l} = 1 - \frac{V_v}{V_l} = 1 - \frac{\varrho_l}{\varrho_v} = $$
$$= 1 - \frac{(917\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})}{(1\,024\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})} =$$
$$= 0{,}1 \text{ neboli } 10\,\%. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 15.6

Kulový balon plněný heliem má poloměr $R = 12\,\mathrm{m}$. Balon nese lana a koš o hmotnosti $m = 196\,\mathrm{kg}$. Jakou největší hmotnost M užitečného zatížení je balon schopný nést? Hustota helia je $\varrho_{He} = 0{,}160\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a hustota vzduchu $\varrho_{vzd} = 1{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$; objem vzduchu vytlačený zátěží balonu zanedbejte.

ŘEŠENÍ: Tíhová síla vzduchu vytlačeného balonem, která udává velikost vztlaku, a tíhová síla helia obsaženého v balonu jsou

$$G_{vzd} = \varrho_{vzd} V g \quad \text{a} \quad G_{He} = \varrho_{He} V g,$$

kde V $(= \frac{4}{3}\pi R^3)$ je objem balonu. Při rovnováze z Archimedova zákona plyne

$$G_{vzd} = G_{He} + mg + Mg$$

neboli

$$M = \tfrac{4}{3}\pi R^3(\varrho_{vzd} - \varrho_{He}) - m =$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi(12{,}0\,\mathrm{m})^3(1{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}} - 0{,}160\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}) -$$
$$- (196\,\mathrm{kg}) = 7\,690\,\mathrm{kg}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tíhová síla objektu s touto hmotností je asi 75 400 N.

15.8 TEKUTINY V POHYBU — DYNAMIKA

Pohyb *reálných tekutin* je velmi komplikovaný, řada problémů je jen obtížně numericky řešitelných a některé problémy dosud vyřešeny nejsou. Problém si podstatně zjednodušíme. Zavedeme pojem **ideální kapalina** pro modelovou tekutinu, o které předpokládáme, že je dokonale *nestlačitelná* a *neviskózní*. Při popisu jejího proudění se omezíme na případy, kdy proudění je *laminární*, *ustálené* (*stacionární*) a *nevírové*. Tak se nám podaří jednoduchými matematickými prostředky získat velmi užitečné výsledky, které nám umožní pochopit základní rysy chování proudící tekutiny. Objasníme si blíže předpoklady, které jsme učinili:

Ideální kapalina je

1. ***nestlačitelná:*** Předpoklad je stejný, jaký jsme již učinili pro tekutinu v klidu. Ideální tekutina má konstantní, všude stejnou hustotu.

2. ***neviskózní:*** **Viskozita (vazkost)** tekutiny je míra toho, jak se tekutina brání tečení. Např. tlustá vrstva medu se podstatně více brání roztékání než stejně tlustá vrstva vody. Proto říkáme, že med je viskóznější než voda. Asfalt, který jsme zmínili na začátku kapitoly, má velmi vysokou viskozitu. Viskozita tekutin je analogická smykovému tření mezi pevnými tělesy; při viskózním proudění se kinetická energie přeměňuje na teplo podobně jako při vzájemném pohybu těles za působení tření. Vymizí-li tření, kvádr může po vodorovné rovině klouzat stálou rychlostí. Podobně na těleso, které se pohybuje neviskózní tekutinou, nepůsobí žádná *smyková viskózní síla*, tj. brzdicí síla viskózního charakteru. Britský vědec lord Rayleigh poznamenal, že v ideální tekutině lodní šroub nebude pracovat, na druhé straně však loď jednou uvedená do pohybu nebude šroub potřebovat.

Omezujeme se na proudění

3. ***laminární:*** Při laminárním proudění je rozumně definována rychlost proudění v každém bodě tekutiny; může se od místa k místu měnit, ale ne příliš prudce. Pomalé proudění vody ve středu klidného toku je blízké laminárnímu, v peřejích je laminárnímu rozhodně vzdálené. Na obr. 15.12 je ukázán přechod z laminárního na **turbulentní proudění** pro stoupající cigaretový kouř. Rychlost částeček kouře roste, jak stoupají, a při jisté kritické rychlosti přejde laminární proudění v turbulentní.

4. ***ustálené (stacionární):*** Při *ustáleném* proudění se rychlost proudící tekutiny v kterémkoliv místě nemění s časem ani co do velikosti, ani co do směru. Laminární proudění může, ale nemusí být ustálené. Turbulentní proudění ustálené být nemůže, je vždy **nestacionární**.

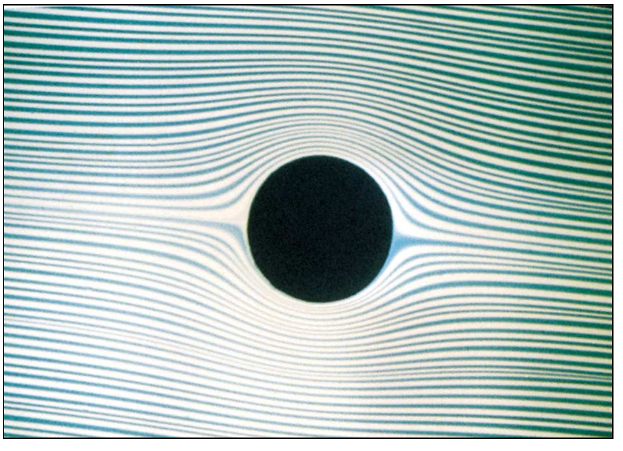
5. ***nevírové:*** Tuto vlastnost proudění si objasníme na chování malého zrnka prachu unášeného tekutinou. Zrnko se může při nevírovém proudění pohybovat i po kruhové dráze, ale nikdy nesmí rotovat okolo osy jím procházející. Příklad: ruské kolo na pouti koná jako celek rotační pohyb, ale jeho pasažéři v zavěšených kabinkách konají pouze translační pohyb, okolo vodorovné osy se neotáčejí. I když se problematikou nebudeme dále podrobněji zabývat, vymezíme si, že námi sledované proudění bude *nevírové*. Dále

Obr. 15.12 V určitém bodě změní stoupající proud kouře a ohřátého vzduchu charakter proudění z laminárního na turbulentní.

budeme ve výkladové části vždy předpokládat, že ve všech bodech daného průřezu trubice je stejná rychlost. Takové proudění je nevírové. V příkladech se však setkáme i s případy, kdy proudění v sousedních vrstvách kapaliny se děje s různou rychlostí. Takové proudění je vírové. I ve vírovém proudění však lze odvozené rovnice (rovnici kontinuity a Bernoulliovu rovnici) vhodným způsobem aplikovat.

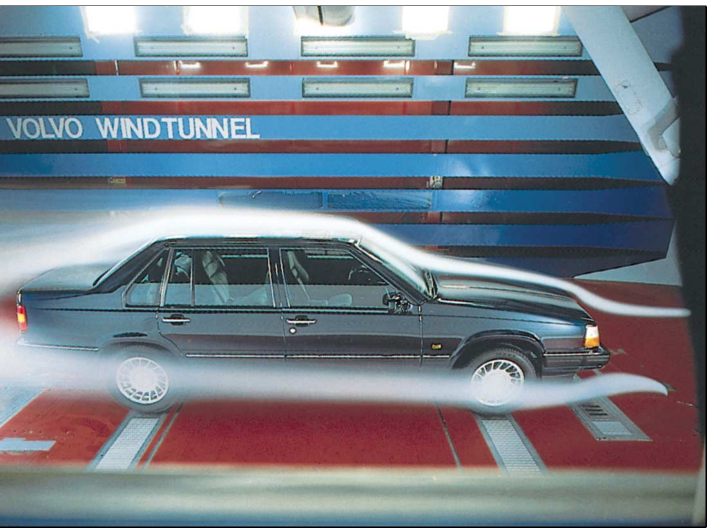
15.9 PROUDNICE A ROVNICE KONTINUITY

Na obr. 15.13 jsou zobrazeny proudnice vzniklé tím, že na řadě nesousedících míst je do proudící tekutiny vpraveno

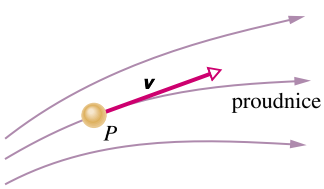


Obr. 15.13 Laminární obtékání válce. Proudnice jsou zviditelněny barevnými částicemi, které zanechávají stopu.

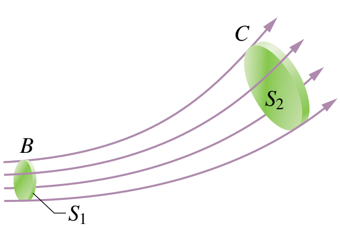
barvivo. Na obr. 15.14 jsou zachyceny proudnice podobně vytvořené kouřem. **Proudnice** je trajektorie, po níž se pohybuje drobný kousek tekutiny, který můžeme nazvat „částicí tekutiny". Když se částice tekutiny pohybuje, může se měnit směr i velikost její rychlosti. Vektor rychlosti částice je vždy tečný k proudnici (obr. 15.15). Proudnice se nikdy nekříží, protože jinak by částice, která dospěla do bodu křížení, měla současně dvě různé rychlosti, a to je nemožné.*



Obr. 15.14 Kouřem zviditelněné proudnice, které obtékají automobil umístěný v aerodynamickém tunelu.



Obr. 15.15 Stopa pohybu částice tekutiny P vytváří proudnici. Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$ částice má v každém bodě směr tečný k proudnici.



Obr. 15.16 Proudová trubice je vytvořena proudnicemi, které tvoří její hranici. Stejný objemový tok musí procházet všemi průřezy proudové trubice.

Při tečeních, jaká jsou znázorněna na obr. 15.13 a 15.14, můžeme vymezit **proudové trubice**, jejichž stěny jsou tvořeny proudnicemi. Proudová trubice se chová jako reálná trubice v tom smyslu, že žádná částice tekutiny, která se nachází v trubici, ji nemůže opustit skrz její stěny. Kdyby částice unikla, měli bychom případ křížení proudnic, který jsme již vyloučili. Na obr. 15.16 jsou znázorněny dva příčné průřezy tenké proudové trubice o obsazích S_1 a S_2. Budeme sledovat tekutinu procházející průřezem u bodu B. Tekutina jím prochází rychlostí v_1, za krátký časový interval Δt urazí vzdálenost $v_1 \Delta t$ a průřezem S_1 projde objem tekutiny

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t.$$

Předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná a že nemůže být ani vytvořena ani zničena. Proto za stejný časový interval musí projít stejný objem tekutiny i průřezem S_2 v okolí bodu C dále po proudu. Jestliže rychlost zde má velikost v_2, musí platit

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

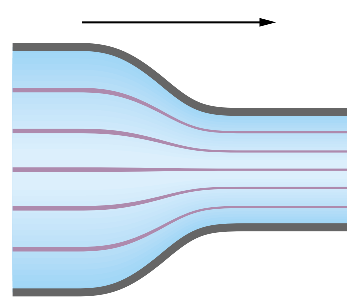
neboli

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Podél proudové trubice tedy platí rovnice

$$R = Sv = \text{konst.}, \qquad (15.13)$$

kde veličina R, jejíž jednotka v SI je $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, se nazývá **objemový tok**. Rov. (15.13) vyjadřující stálost objemového toku tekutiny proudovou trubicí se nazývá **rovnice kontinuity** proudění. Z rovnice plyne, že tečení je rychlejší v užších částech trubice, kde proudnice jsou blíže u sebe, než v jejích širších částech (obr. 15.17).

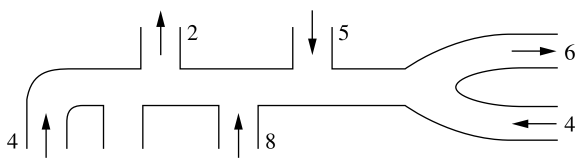


Obr. 15.17 V místě zúžení trubice se proudnice dostanou blíže k sobě a proud se zrychlí. Šipka nad obrázkem ukazuje směr proudění.

Rov. (15.13) vyjadřuje zachování hmotnosti ve tvaru vhodném pro mechaniku tekutin. Násobíme-li R hustotou tekutiny, o které předpokládáme, že je konstantní, dostaneme výraz $Sv\varrho$. Ten se nazývá **hmotnostní tok** a jeho jednotkou v SI je $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. Vyjádříme-li rovnici kontinuity v hmotnostním a nikoliv v objemovém toku, říká nám např. pro případ znázorněný na obr. 15.16, že hmotnost, která proteče každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu B, musí být stejná jako hmotnost, která proteče každou sekundu průřezem trubice v okolí bodu C.

* S výjimkou míst, kde kapalina stojí. Tam je $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ a směr rychlosti není určen.

KONTROLA 3: Na připojeném obrázku je znázorněno rozvětvené potrubí. Šipkami je označen směr toku v jednotlivých větvích a čísla udávají velikost objemového toku (v $cm^3 \cdot s^{-1}$) těmito větvemi. U jedné větve údaje chybí. Jaký je směr a velikost toku touto větví?



PŘÍKLAD 15.7

Obsah S_0 průřezu aorty (hlavní cévy vycházející ze srdce) normálního odpočívajícího člověka je $3\,cm^2$ a rychlost, jakou jí prochází krev, je $30\,cm\cdot s^{-1}$. Typická vlásečnice (nejtenčí céva na periferii krevního oběhu) má průměr přibližně $6\,\mu m$ a obsah průřezu je tedy asi $S = 3\cdot 10^{-7}\,cm^2$; rychlost proudění krve v ní je $v = 0{,}05\,cm\cdot s^{-1}$. Kolik přibližně má člověk vlásečnic?

ŘEŠENÍ: Veškerá krev, která za určitou dobu proteče vlásečnicemi, musí za stejnou dobu protéci aortou. Tuto skutečnost vystihuje rov. (15.13), takže

$$S_0 v_0 = nSv,$$

kde n značí hledaný počet vlásečnic. Vypočteme jej z poslední rovnice:

$$n = \frac{S_0 v_0}{Sv} = \frac{(3\,cm^2)(30\,cm\cdot s^{-1})}{(3\cdot 10^{-7}\,cm^2)(0{,}05\,cm\cdot s^{-1})} =$$
$$= 6\cdot 10^9; \quad \text{tedy 6 miliard.} \qquad \text{(Odpověď)}$$

Můžete lehce ukázat, že úhrnný průřez všech vlásečnic je asi 600krát větší než průřez aorty.

PŘÍKLAD 15.8

Na obr. 15.18 je zobrazeno, jak se zužuje proud vody vytékající laminárně z vodovodního kohoutku. Obsah průřezu $S_0 = 1{,}2\,cm^2$ a $S = 0{,}35\,cm^2$. Průřezy jsou vodorovně vzdáleny o $h = 45\,mm$. Jaký je objemový tok R proudu vytékajícího z kohoutku?

ŘEŠENÍ: Z rovnice kontinuity (15.13) plyne

$$S_0 v_0 = Sv, \qquad (15.14)$$

kde v_0 a v jsou rychlosti v odpovídajících průřezech. Protože voda mezi oběma průřezy se pohybuje volným pádem se zrychlením g, můžeme dle rov. (2.23) psát

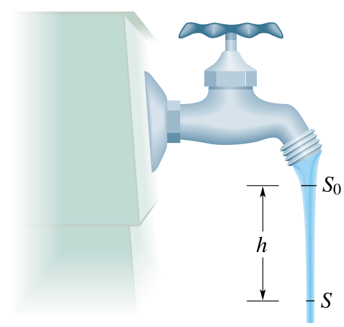
$$v^2 = v_0^2 + 2gh. \qquad (15.15)$$

Řešením soustavy posledních dvou rovnic dostaneme pro v_0 vyjádření

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghS^2}{S_0^2 - S^2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{2(9{,}8\,m\cdot s^{-2})(0{,}045\,m)(0{,}35\,cm^2)^2}{(1{,}2\,cm^2)^2 - (0{,}35\,cm^2)^2}} =$$
$$= 0{,}286\,m\cdot s^{-1} = 28{,}6\,cm\cdot s^{-1}.$$

Hledaný objemový tok R je tedy

$$R = S_0 v_0 = (1{,}2\,cm^2)(28{,}6\,cm\cdot s^{-1}) =$$
$$= 34\,cm^3\cdot s^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 15.18 Příklad 15.8. Když proud vody opustí kohoutek, roste jeho rychlost. Protože množství vody proteklé každým průřezem musí být stejné, bude se proud po výtoku z kohoutku zužovat, „zaškrcuje se“.

15.10 BERNOULLIOVA ROVNICE

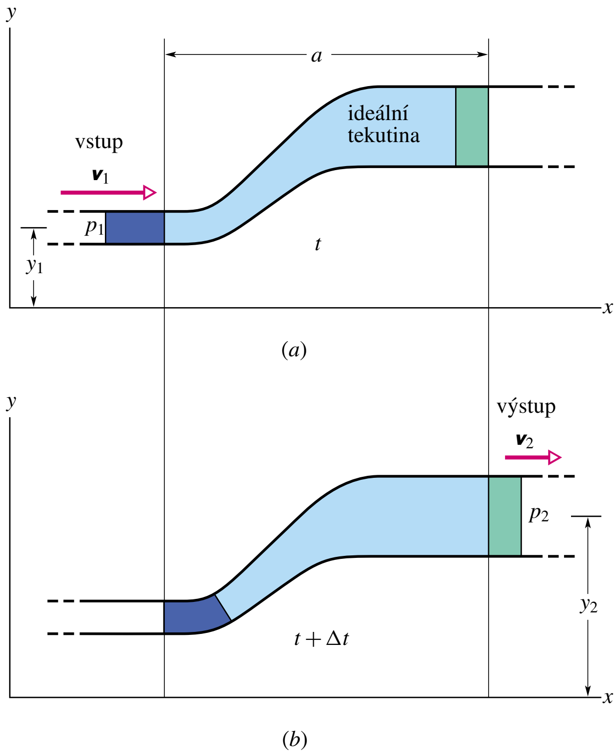
Na obr. 15.19 je znázorněna proudová trubice (může to však být i reálná trubice), kterou stacionárně proudí tekutina. Za časový interval Δt vstoupí do trubice na levé (vstupní) straně objem tekutiny ΔV, který je na obr. 15.19 vybarven purpurově, a stejný objem, vybarvený zeleně na obr. 15.19, na pravé (výstupní) straně trubici opustí. Výstupní objem musí být stejný jako vstupní, protože předpokládáme, že tekutina je nestlačitelná, že tedy má konstantní hustotu ϱ.

Nechť y_1, v_1 a p_1 jsou výška v tíhovém poli, rychlost a tlak tekutiny v místě, kde vstupuje do trubice a y_2, v_2 a p_2 tytéž veličiny v místě, kde tekutina trubici opustí. Tyto hodnoty jsou vázány vztahem

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g y_2, \qquad (15.16)$$

jak dále dokážeme na základě energetických úvah. Rovnici (15.16) můžeme též zapsat jako

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{konst.}, \qquad (15.17)$$



Obr. 15.19 Tekutina teče stacionárně trubicí mezi vstupním průřezem na levé straně a výstupním průřezem na pravé straně. Průřezy jsou horizontálně vzdáleny o délku a. V době mezi okamžikem t (stav znázorněn v části (a) obrázku) a okamžikem $t+\Delta t$ (stav znázorněn v části (b) obrázku) množství tekutiny vybarvené purpurově projde vstupním průřezem do trubice a stejné množství vybarvené zeleně projde výstupním průřezem.

čímž rozumíme, že výraz má stejnou hodnotu pro libovolný průřez trubice.

Rov. (15.16) a (15.17) jsou ekvivalentní formy **Bernoulliovy rovnice** nazvané po Danielu Bernoulliovi, který studoval proudění tekutin v 18. století.* Podobně jako rovnice kontinuity (rov. (15.13)), ani Bernoulliova rovnice není úplně novým principem, ale je pouze přeformulováním známých rovnic do tvaru vhodného pro mechaniku tekutin. Abychom si rovnici ověřili, aplikujeme ji na tekutinu v klidu. Položíme tedy v rov. (15.16) $v_1 = v_2 = 0$ a dostaneme

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2),$$

což je ze statiky tekutin známá rov. (15.4).

* V nevírovém (potenciálovém) proudění má konstanta v rov. (15.17) stejnou hodnotu ve všech bodech uvažovaného proudícího systému; body 1 a 2 srovnávané při formulaci Bernoulliovy rovnice dané rov. (15.16) mohou být kdekoliv v proudícím systému. Předpoklad, že proudění je nevírové, je však velmi silný a často (např. v řadě dále řešených příkladů) nebývá splněn. I ve vírovém proudění však Bernoulliova rovnice platí, ale pouze podél proudnice.

Základní tvrzení Bernoulliovy rovnice se ukáže, když položíme y rovno konstantě (např. $y = 0$), tedy když předpokládáme, že tekutina teče vodorovně. Rov. (15.16) pak přejde na tvar

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\varrho {v_1}^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\varrho {v_2}^2, \qquad (15.18)$$

který říká:

> Když při proudění po vodorovné proudnici vzrůstá rychlost částic tekutiny, pak klesá tlak tekutiny, a obráceně.

Jinými slovy, když se při proudění dostanou proudnice blízko k sobě (známka toho, že rychlost proudění vzrostla), tlak poklesne, a naopak.

Vztah mezi změnou rychlosti a změnou tlaku se objasní, sledujeme-li chování částice tekutiny. Když se částice přiblíží úzkému místu trubice, zrychlí ji větší tlak za ní, takže má v úžině větší rychlost. Když se přiblíží širšímu místu trubice, zbrzdí ji vyšší tlak před ní a širším místem pak prochází menší rychlostí.

Zatím jsme se zabývali jen ideální tekutinou. Je-li tekutina viskózní, zahřívá se. S touto energetickou ztrátou při následujícím odvození rovnice nepočítáme.

Odvození Bernoulliovy rovnice

Za systém zvolíme celý objem (ideální) tekutiny barevně vyznačený na obr. 15.19. Aplikujeme energetické úvahy na přechod tohoto systému z výchozí polohy (obr. 15.19a) do polohy koncové (obr. 15.19b). Stav tekutiny mezi dvěma svislými rovinami vzdálenými o a, znázorněnými na obr. 15.19, se v průběhu děje nemění. Proto se soustředíme pouze na průběh vstupu tekutiny do trubice a výstupu z ní.

Vlastní důkaz provedeme tak, že na systém aplikujeme obecnou větu

$$W = \Delta E_k, \qquad (15.19)$$

která říká, že práce W vykonaná na systém se rovná přírůstku kinetické energie systému ΔE_k. Přírůstek kinetické energie našeho systému mezi dvěma stavy znázorněnými na obr. 15.19 je dán rozdílem rychlosti tekutiny mezi oběma konci uvažované trubice:

$$\Delta E_k = \tfrac{1}{2}\Delta m\, {v_2}^2 - \tfrac{1}{2}\Delta m\, {v_1}^2 = \\ = \tfrac{1}{2}\varrho \Delta V({v_2}^2 - {v_1}^2). \qquad (15.20)$$

V poslední rovnici Δm $(= \varrho \Delta V)$ je hmotnost stejných objemů ΔV tekutiny, které za krátký časový interval Δt vstoupí do trubice u jejího levého konce a vystoupí z ní u pravého konce.

Práce vykonaná na systému je dvojího druhu. Jednak je to práce W_g tíhové síly $\Delta m\,\boldsymbol{g}$, která se musí vynaložit na přemístění hmotnosti Δm ze vstupní hladiny na výstupní hladinu, tedy práce

$$W_g = -\Delta m\, g(y_2 - y_1) = \\ = -\varrho g \Delta V(y_2 - y_1). \qquad (15.21)$$

Záporné znaménko před pravou stranou rovnice plyne ze skutečnosti, že tíhové zrychlení míří na opačnou stranu než kladná orientace osy y.

Vedle práce W_g se však koná i práce W_p na to, aby se tekutina u levého konce zatlačila do trubice a u pravého konce vystoupila z trubice. Obecně je práce vykonaná silou o velikosti F, která posune tekutinu v trubici o Δx ve směru svého působení, dána výrazem

$$F\Delta x = (pS)(\Delta x) = p(S\Delta x) = p\Delta V.$$

U vstupu do trubice směřuje síla ve směru pohybu a příspěvek $p_1\Delta V$ k práci W_p je kladný. U výstupu z trubice je posunutí Δx orientováno proti směru působící síly, a proto příspěvek k práci W_p vykonané na systém je záporný: $-p_2\Delta V$. Sečtením obou příspěvků dostaneme pro práci, vykonanou na našem systému okolním tlakem, vyjádření

$$W_p = -p_2\Delta V + p_1\Delta V = \\ = -(p_2 - p_1)\Delta V. \qquad (15.22)$$

Větu o rovnosti práce vykonané na systém a přírůstku kinetické energie systému (rov. (15.19)) nyní zapíšeme již s naším vyjádřením této práce

$$W = W_g + W_p = \Delta E_k.$$

Když nyní do této rovnice dosadíme z rov. (15.20), (15.21) a (15.22), dostaneme

$$-\varrho g\Delta V(y_2 - y_1) - \Delta V(p_2 - p_1) = \tfrac{1}{2}\varrho\Delta V({v_2}^2 - {v_1}^2).$$

Tato rovnice po vykrácení výrazem ΔV a jednoduchém přeskupení členů dá již rov. (15.16).

PŘÍKLAD 15.9

Líh hustoty $\varrho = 791\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ teče laminárně vodorovnou trubicí, která se zužuje (podobně jako na obr. 15.17) z průřezu obsahu $S_1 = 1{,}20{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^2}$ na průřez o obsahu $S_2 = S_1/2$. Rozdíl Δp tlaku lihu mezi širokou a úzkou částí trubice je 4 120 Pa. Jaký je objemový tok lihu trubicí?

ŘEŠENÍ: Když přeskupíme Bernoulliovu rovnici pro tok vodorovnou trubicí (rov. (15.18)), dostaneme

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\varrho {v_2}^2 - \tfrac{1}{2}\varrho {v_1}^2 = \tfrac{1}{2}\varrho({v_2}^2 - {v_1}^2). \qquad (15.23)$$

Index 1 se vztahuje k široké a index 2 k úzké části trubice. Podle rovnice kontinuity (rov. (15.13)) tok v úzké části trubice je rychlejší, tedy $v_2 > v_1$. Z rov. (15.23) potom plyne, že $p_1 > p_2$.

Z rov. (15.13) také plyne, že objemový tok R trubicí je stejný v široké i úzké části;

$$R = v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Tyto rovnice spolu s rovnicí $S_2 = S_1/2$ dávají

$$v_1 = \frac{R}{S_1} \quad \text{a} \quad v_2 = \frac{R}{S_2} = \frac{2R}{S_1}.$$

Když tyto poslední výrazy dosadíme do rov. (15.23) a položíme $p_1 - p_2 = \Delta p$, dostaneme po drobných algebraických úpravách

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{4R^2}{{S_1}^2} - \frac{R^2}{{S_1}^2}\right) = \frac{3\varrho R^2}{2{S_1}^2}.$$

Z poslední rovnice pak vypočteme R,

$$R = S_1\sqrt{\frac{2\Delta p}{3\varrho}} = \\ = (1{,}20{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^2})\sqrt{\frac{2(4\,120\,\mathrm{Pa})}{3(791\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}})}} = \\ = 2{,}24{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

PŘÍKLAD 15.10

Desperát z Divokého západu vpálil kulku do otevřené nádrže s vodou a provrtal v ní otvor v hloubce h pod volnou hladinou vody (obr. 15.20). Jakou rychlostí v začne voda vytékat z prostřelené nádrže?

ŘEŠENÍ: Případ je v podstatě stejný, jako když voda nejprve teče (dolů) rychlostí V širokou trubicí (celou nádrží) o obsahu průřezu S a potom teče (vodorovně) rychlostí v úzkou trubicí (vystřeleným otvorem) o obsahu průřezu s. Z rovnice kontinuity (15.13) víme, že

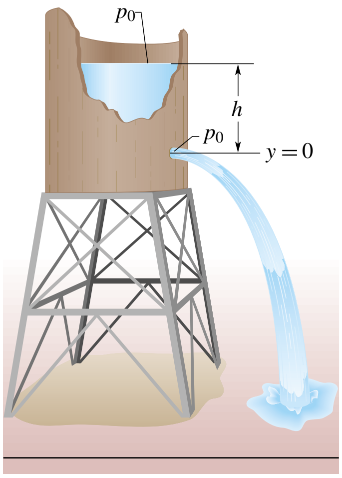
$$R = sv = SV,$$

a tedy

$$V = \frac{s}{S}v.$$

Protože $s \ll S$, vidíme, že $V \ll v$.

Vztah mezi v a V (a tedy i h) můžeme nalézt i použitím Bernoulliovy rovnice (15.16). Za nulovou hladinu pro počítání výšky (a tím i potenciální energie v tíhovém poli) zvolíme hladinu procházející prostřeleným otvorem. Když uvážíme,



Obr. 15.20 Příklad 15.10. Voda vytéká dírou v nádrži, která je v hloubce h pod povrchem (volnou hladinou) vody. Tlak vody na povrchu a v díře je roven atmosférickému tlaku p_0.

že jak tlak na volné hladině nádrže, tak i tlak v místě prostřeleného otvoru jsou rovny atmosférickému tlaku p_0 (obě místa jsou tomuto tlaku volně vystavena), dostaneme z rov. (15.16)

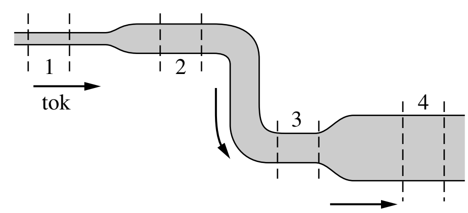
$$p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho V^2 + \varrho g h = p_0 + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g \cdot 0. \quad (15.24)$$

(Podmínkám na volné hladině nádrže je věnována levá strana rovnice, podmínkám v otvoru pravá strana. Nula na konci pravé strany odpovídá tomu, že otvor leží na námi zvolené nulové hladině.) Než budeme řešit rov. (15.24) pro neznámou v, použijeme pro její zjednodušení skutečnost, že $V \ll v$. Budeme předpokládat, že V^2 a tedy i člen $\frac{1}{2}\varrho V^2$ z rov. (15.24) je zanedbatelný proti ostatním členům rovnice a vypustíme jej. Řešením zbývající části rovnice pak pro hledanou rychlost dostaneme výraz

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Je to stejná rychlost, jakou by získalo těleso padající z výšky h, kdyby bylo vypuštěno nulovou počáteční rychlostí.

KONTROLA 4: Voda teče laminárně trubicí znázorněnou na připojeném obrázku. V průběhu tečení klesá. Seřaďte sestupně čtyři očíslované úseky trubice: (a) podle objemového toku R, který jimi prochází, (b) podle rychlosti v, jakou jimi voda teče, (c) podle tlaku p, jaký v nich je.



PŘEHLED & SHRNUTÍ

Hustota

Hustota ϱ látky je definována jako její hmotnost v jednotce objemu:

$$\varrho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \qquad (15.1)$$

Je-li těleso tvořeno látkou homogenní, můžeme rov. (15.1) přepsat na tvar $\varrho = m/V$, kde m je hmotnost tělesa a V jeho objem.

Tlak tekutiny

Tekutina je látka, která může téci: kapalina, plyn, event. i plazma. Její tvar je dán tvarem nádoby, ve které se nachází, protože nepřenáší smykové napětí (přesně to platí jen pro ideální tekutinu). Napětí tedy může působit jen silou kolmou k povrchu kapaliny. *Tlak* p v tekutině zavádíme takto:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}, \qquad (15.2)$$

kde ΔF je element síly, který působí na element plochy o obsahu ΔS. Když velikost síly působící na rovinnou plochu roste úměrně s velikostí plochy, můžeme rov. (15.2) upravit na tvar $p = F/S$, kde F je síla působící na celou plochu, jejíž obsah je S. Tlak tekutiny v daném bodě vytváří stejné silové působení na všechny roviny procházející tímto bodem bez ohledu na jejich orientaci. *Přetlak* (resp. podtlak) je rozdíl skutečného tlaku (*absolutního tlaku*) v daném bodě a tlaku v okolí, nejčastěji atmosférického tlaku.

Změny tlaku s výškou a hloubkou

Tlak tekutiny, která je v klidu, se mění podél svislé souřadnice y. Když je souřadnice orientována směrem vzhůru, platí pro nestlačitelné tekutiny (ϱ = konst.)

$$p_2 = p_1 + \varrho g(y_1 - y_2). \qquad (15.4)$$

Tlak je stejný pro všechny body ve stejné hloubce. Rov. (15.4) přejde na tvar

$$p = p_0 + \varrho g h, \qquad (15.5)$$

když h označíme *hloubku* v tekutině měřenou od jisté referenční hladiny, v níž má tlak hodnotu p_0.

Pascalův zákon

Pascalův zákon stanoví, že změna tlaku působící v jedné části tekutiny se přenese do všech míst vyplněných touto tekutinou a to i na stěny nádoby, která tekutinu vymezuje.

Archimedův zákon

Na těleso ponořené do tekutiny působí síly vyvolané tlakem tekutiny. Vektorový součet těchto sil — říká se mu *vztlaková síla* nebo stručně *vztlak* — působí svisle vzhůru. Působištěm vztlakové síly je těžiště vytlačené tekutiny, které se nazývá *vztlakový střed*. Archimedův zákon stanoví, že vztlaková síla působící na těleso je stejně velká jako tíhová síla tekutiny tělesem vytlačené. Když těleso plove na volné hladině, je jeho tíhová síla co do velikosti rovna vztlakové síle, která na něj působí.

Proudění ideální tekutiny

Ideální kapalina je nestlačitelná a není viskózní. Předpokládáme navíc, že její proudění je stacionární a nevírové. *Proudnice* je dráha částice tekutiny. Proudová trubice obaluje svazek proudnic. Z principu zachování hmotnosti plyne, že pro proudění v proudové trubici je *hmotnostní tok* $Sv\varrho$ konstantní. Je-li navíc kapalina nestlačitelná, tedy je-li hustota ϱ konstantní, platí *rovnice kontinuity*:

$$R = Sv = \text{konst.}, \qquad (15.13)$$

kde R je *objemový tok*, S obsah příčného průřezu trubice v libovolném bodě a v rychlost tekutiny v tomto bodě. Předpokládáme, že tato rychlost má stejnou hodnotu v každém bodě plochy S.

Bernoulliova rovnice

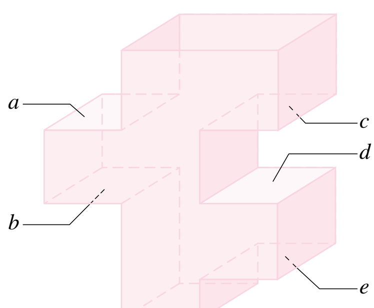
Použijeme-li zákon zachování mechanické energie na proudění ideální kapaliny, získáme *Bernoulliovu rovnici*:

$$p + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{konst.}, \qquad (15.17)$$

která platí podél každé proudnice.

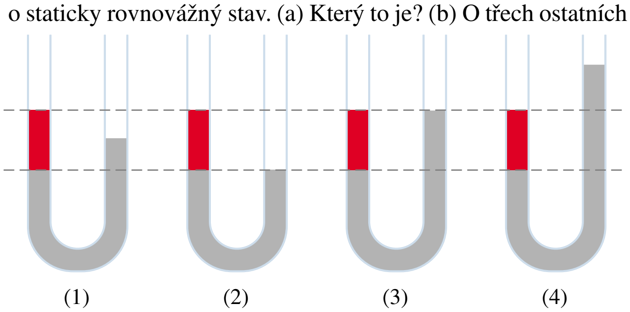
OTÁZKY

1. Na obr. 15.21 je zobrazena nádrž zvláštního tvaru zcela zaplněná vodou. Je označeno pět vodorovných spodních nebo vrchních ploch. Obsah všech je stejný a jsou umístěny v hloubkách h, $2h$ a $3h$ pod hladinou. Seřaďte plochy podle velikosti síly, která na ně působí.



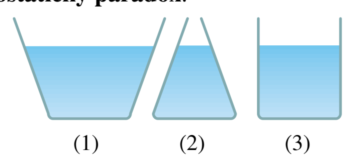
Obr. 15.21 Otázka 1

2. Na obr. 15.22 jsou znázorněny čtyři případy, jak červená a šedivá kapalina vyplňují U-trubici. V jednom případě nemůže jít o staticky rovnovážný stav. (a) Který to je? (b) O třech ostatních případech předpokládejte, že kapaliny jsou ve statické rovnováze. Je v nich vždy hustota některé z kapalin větší než té druhé?



Obr. 15.22 Otázka 2

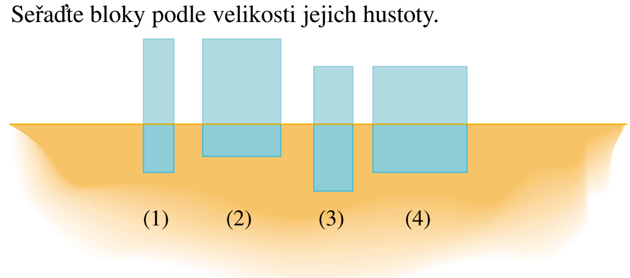
3. Nádoby z obr. 15.23 mají stejný obsah základny, jsou vyrobeny ze stejného materiálu a výška vody v nich je stejná. (a) Seřaďte nádoby s vodou podle jejich váh, nádobu s největší váhou zařaďte jako první. (b) Seřaďte nádoby podle tlaku, jakým voda působí na jejich dna. (c) Plyne z rov. (15.2), že odpovědi na otázky (a) a (b) jsou v rozporu? Tento zdánlivý rozpor se často nazývá **hydrostatický paradox**.



Obr. 15.23 Otázka 3

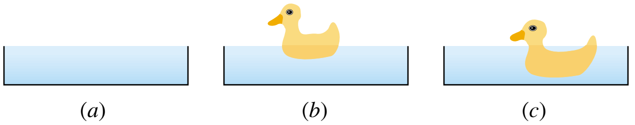
4. Kus materiálu o hmotnosti 3 kg zcela ponoříme do kapaliny. Kapalina stejného objemu, jako má vnořený kus, má hmotnost 2 kg. (a) Co udělá uvažovaný kus materiálu, když ho v kapalině volně vypustíme: bude klesat, stoupat, nebo zůstane v klidu? (b) Co udělá stejný kus materiálu, když jej ponoříme do kapaliny o menší hustotě?

5. Obr. 15.24 zobrazuje čtyři pevné bloky plovoucí na melase. Seřaďte bloky podle velikosti jejich hustoty.



Obr. 15.24 Otázka 5

6. Na obr. 15.25 jsou znázorněny tři stejné otevřené nádoby po okraj naplněné vodou. Ve dvou z nich plovou kačenky. Nádoby i s kačenkami zvážíme. Seřaďte je podle váhy.



Obr. 15.25 Otázka 6

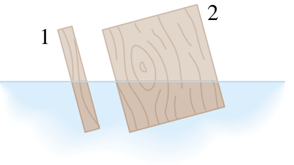
7. Člun s kotvou na palubě pluje v bazénu, který je jen trochu širší než člun. Zvedne se hladina vody v bazénu, když je kotva (a) vhozena do vody, (b) hozena ven z bazénu? (c) Hladina vody v bazénu se zvedne, klesne, nebo zůstane stejná, když místo kotvy vhodíme do vody kus korku, který jsme měli ve člunu?

8. Tři balonky stejné velikosti jsou zcela ponořeny do vody. Balonek 1 je naplněn vodíkem, balonek 2 heliem a balonek 3 oxidem uhličitým. Seřaďte balonky podle velikosti vztlaku, který na ně působí.

9. Kus dřeva pluje ve vědru vody umístěném ve výtahu. Bude plout více, méně, nebo stejně ponořen, když se výtah pohybuje (a) rovnoměrně vzhůru, (b) rovnoměrně dolů; (c) zrychleně vzhůru, (d) zrychleně dolů, se zrychlením menším, než je tíhové zrychlení $9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

10. Nádoba s vodou je umístěna na pérových vahách. Bude údaj vah větší, menší, nebo stejný, když do vody (a) ponoříme zavěšený kovový předmět, (b) vložíme korkový předmět, který na ní bude plovat? (Z nádoby nepřeteče žádná voda ven.)

11. Na obr. 15.26 jsou dva pravoúhlé bloky, které jsme rukou vychýlili z rovnovážné polohy a potom pustili. Pro každý blok stanovte, zda (a) vztlaková síla vyvolá jeho otáčení z naznačené polohy ve směru, či proti směru hodinových ručiček, (b) blok se působením této síly ještě více vychýlí, nebo se narovná.



Obr. 15.26 Otázka 11

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 15.3 Hustota a tlak

1C. Kolik činí hustota $1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$, vyjádříme-li ji v jednotkách $\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$?

2C. Tři kapaliny, které se nemísí, byly nality do válcové nádoby. Objemy a hustoty těchto kapalin jsou: 0,50 l, $2{,}6\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$; 0,25 l, $1{,}0\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a 0,40 l, $0{,}80\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Jakou silou kapaliny působí na dno nádoby? (Jeden litr $= 1\,\mathrm{l} = 1\,000\,\mathrm{cm^3}$.)

3C. Určete tlak v injekční stříkačce, když sestra zatlačí na kruhový píst o poloměru 1,1 cm silou 42 N.

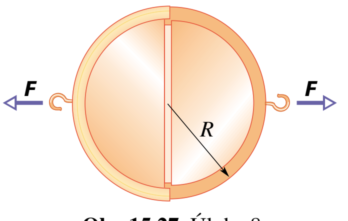
4C. Angličan řekne, že nafoukl přední pneumatiky svého auta na tlak 28 psi. Lékař řekne, že váš krevní tlak je 120/80 milimetrů rtuťového sloupce. Udejte v kilopascalech (kPa): (a) tlak, na který byly nafouknuty pneumatiky, (b) svůj systolický a diastolický tlak.

5C. Okno má rozměry 3,4 m na 2,1 m. Při závanu větru poklesl vnější tlak na 0,96 atm, zatímco tlak uvnitř místnosti zůstal na hodnotě 1 atm. Jaká byla síla, která způsobila, že okno se rozletělo směrem ven?

6C. Ryba reguluje hloubku plavání nastavením své průměrné hustoty na hodnotu stejnou, jakou má voda. Provádí to změnou objemu vzduchu v porézních kostech nebo ve vzduchovém měchýři. Předpokládejte, že s vyfouknutým měchýřem má ryba hustotu $1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. O jakou část svého koncového (nafouknutého) objemu musí ryba zvětšit objem vzduchového měchýře, aby vyrovnala svou hustotu na hustotu vody?

7Ú. Vzduchotěsná nádoba má uzávěr o obsahu $100\,\mathrm{cm^2}$. Nádoba je částečně vyčerpána. Jaký je v ní tlak, je-li na její otevření potřeba síla nejméně 500 N? Okolní atmosféra má tlak $1{\cdot}10^5$ Pa.

8Ú. Magdeburské polokoule. Vynálezce vývěvy Otto von Guericke provedl v roce 1654 před císařem pokus, při kterém se dvě koňská osmispřeží marně snažila od sebe oddělit dvě mosazné polokoule, z jejichž vnitřního prostoru byl vyčerpán vzduch. (a) Ukažte, že síla F potřebná k odtržení polokoulí je rovna $F = \pi R^2 \Delta p$, kde Δp je rozdíl mezi vnějším tlakem a tlakem uvnitř polokoulí. Předpokládejte, že tloušťka mosazi je tak malá, že za poloměr R můžeme pokládat poloměr vyznačený na obr. 15.27. (b) Vypočtěte sílu, jakou by koně museli táhnout, aby polokoule odtrhli,* kdyby R bylo 30 cm a vnitřní tlak by byl 0,1 atm. (c) Proč byly užity dvě skupiny koní? Stačilo by použít jen jednu skupinu a druhou polokouli přivázat k pevné stěně?



Obr. 15.27 Úloha 8

* To se také stalo, ale až tehdy, když zapřáhli dvě koňská dvanáctispřeží.

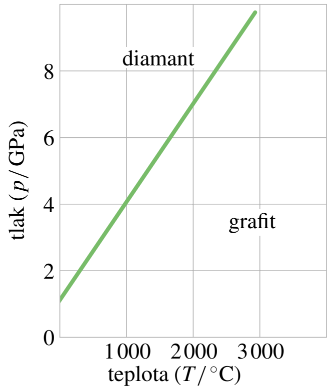
ODST. 15.4 Tekutiny v klidu — statika

9C. Vypočtěte rozdíl hydrostatického tlaku mezi mozkem a chodidlem osoby vysoké 1,83 m. Hustota krve je $1{,}06\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

10C. Najděte absolutní tlak v pascalech v hloubce 150 m pod mořskou hladinou. Hustota mořské vody je $1{,}03\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ a atmosférický tlak na hladině $1{,}01\cdot 10^5$ Pa.

11C. Výpusť splašků domu stojícího na svahu je 8,2 m pod úrovní ulice. Stoka je 2,1 m pod úrovní ulice. Vypočtěte minimální tlakový rozdíl, který musí vyvinout kalové čerpadlo, aby odpad o průměrné hustotě $900\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ přečerpalo do stoky.

12C. Obr. 15.28 představuje část **fázového diagramu** uhlíku s křivkou fázové rovnováhy mezi diamantem a grafitem. V jaké minimální hloubce pod povrchem Země se mohou tvořit diamanty, je-li teplota v této hloubce 1 000 °C a hustota skalního nadloží je $3{,}1\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$? Předpokládejte, že i v tomto případě je tlak dán tíhou hornin, které leží nad daným místem, podobně jako v tekutině.



Obr. 15.28 Cvičení 12

13C. Lidské plíce vyvinou přetlak nanejvýš dvacetinu atmosféry. Když potápěč užívá sací trubky, jak nejhlouběji pod hladinou může plavat?

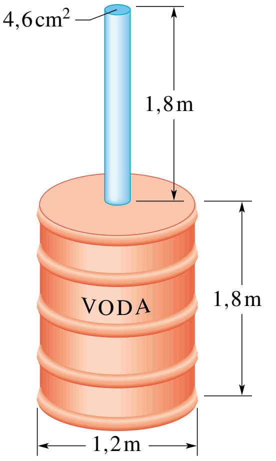
14C. Bazén má rozměry 40 m × 15 m × 4 m. (a) Jakou silou působí voda vyplňující bazén na jeho dno, na kratší boční stěny a na delší boční stěny? (b) Musí se uvažovat také atmosférický tlak působící na hladinu, když posuzujeme vliv tlaku na soudržnost betonu tvořícího dno a stěny bazénu? Proč?

15C. (a) Najděte celkovou sílu, kterou voda působí na vrchní část atomové ponorky v hloubce 200 m, když předpokládáme, že celková plocha vrchní části trupu ponorky je $3\,000\,\mathrm{m^2}$. (b) Jaký tlak vody by působil na potápěče v této hloubce? Výsledek vyjádřete v atmosférách. Myslíte si, že posádka havarované ponorky z ní může v této hloubce uniknout bez speciálního vybavení? Hustotu mořské vody pokládejte za rovnu $1{,}03\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

16C. Členové posádky ponorky, která havarovala 100 m pod vodní hladinou, se z ní pokoušejí uniknout. Jakou silou musí tlačit na výstupní poklop, aby ho otevřeli, když jeho rozměry jsou 1,2 m × 0,60 m? Hustotu mořské vody pokládejte nyní za rovnu $1\,025\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

17C. V otevřeném kapalinovém manometru (v U-trubici) je rtuť. Jak vysoko vystoupí rtuť v levé trubici, když do pravé trubice je nalito 11,2 cm vody?

18C. Válcový kovový sud zobrazený na obr. 15.29 má ke své vrchní základně přitavenu tenkou trubku. Rozměry sudu a trubky jsou uvedeny na obrázku. Vzniklá nádoba je až po vršek trubky naplněna vodou. Vypočtěte poměr síly, kterou voda působí na dno sudu, k tíze vody obsažené v sudu. Proč vypočtený poměr není roven jedné?



Obr. 15.29 Cvičení 18

19Ú. Dvě stejné válcové nádoby jsou vedle sebe postaveny tak, že jejich dna jsou ve stejné výši. Obě obsahují stejnou kapalinu, jejíž hustota je ϱ. Obě dna mají obsah S, výšky kapalin jsou však různé: v jedné nádobě h_1, v druhé h_2. Jakou práci vykoná tíhová síla, když po propojení obou nádob se v nich výšky kapalin vyrovnají?

20Ú. (a) Kapalina v nádobě se pohybuje se zrychlením a mířícím *svisle vzhůru*. Ukažte, že v tomto případě tlak s hloubkou h v nádobě stoupá dle zákona

$$p = \varrho h(g + a),$$

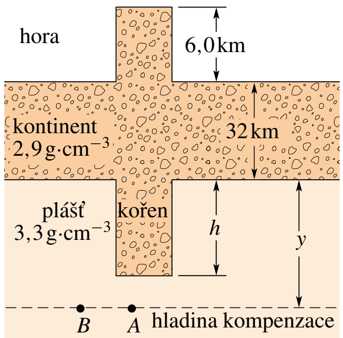
kde ϱ je hustota kapaliny. (b) Ukažte též, že když se nádoba pohybuje se zrychlením a mířícím *svisle dolů*, je závislost tlaku na hloubce dána výrazem

$$p = \varrho h(g - a).$$

(c) Jaký je tlak, když voda s nádobou padají volným pádem?

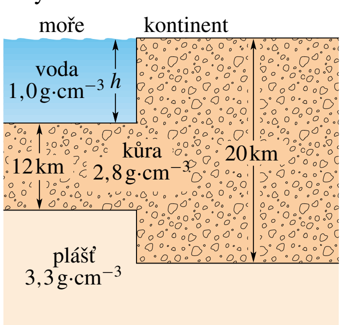
21Ú. Při geologickém rozboru Země je často účelné předpokládat, že tlak v určité vodorovné **hladině kompenzace**, která se nachází hluboko pod zemským povrchem, je ve velké oblasti stálý a rovná se tlaku vyvolanému tíhou nadložních vrstev. To znamená, že tlak v této hladině se vypočítá podle hydrostatické rovnice platné pro tekutiny. Pro splnění takového modelu musíme např. předpokládat, že hory mají své *kořeny* (obr. 15.30). Uvažujme horu vysokou 6 km. Kontinentální horniny mají hustotu $2{,}9\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ a pod nimi je zemský plášť s hustotou $3{,}3\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$.

Vypočtěte hloubku h kořene hory. (*Tip*: Požadujte, aby tlak v bodech A a B vyznačených na obrázku byl stejný; neznámá hloubka y hladiny kompenzace vám vypadne.)



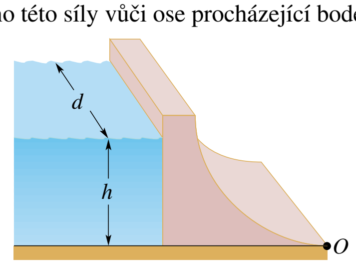
Obr. 15.30 Úloha 21

22Ú. Na obr. 15.31 je naznačeno, jak se oceán nasouvá na kontinent. Užijte metodu hladiny kompenzace vysvětlenou v úloze 21 k výpočtu hloubky h oceánu.



Obr. 15.31 Úloha 22

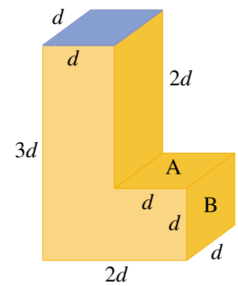
23Ú. Přehradou je zadržena masa vody, která v místě přehradní hráze má hloubku h a šířku d, jak je znázorněno na obr. 15.32. (a) Vypočtěte výslednou sílu, kterou voda působí na hráz přehrady. (b) Vypočtěte výsledný moment sil vůči ose proložené rovnoběžně se šířkou d bodem O, který leží v patě přehrady. (c) Najděte působiště výsledné síly působící na přehradní hráz, a tím i rameno této síly vůči ose procházející bodem O.



Obr. 15.32 Úloha 23

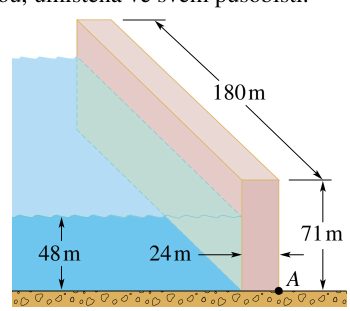
24Ú. Nahoře otevřená nádrž tvaru písmene L je naplněna vodou (obr. 15.33). Jaká je (a) síla na stěnu A a (b) síla na stěnu B, když $d = 5\,\mathrm{m}$?

25Ú. Na obr. 15.34 je znázorněna přehradní hráz a část zachycené vody, která na ni tlačí. Přehradní hráz je z betonu hustoty



Obr. 15.33 Úloha 24

$3{,}2\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a má rozměry ukázané na obrázku. (a) Síla, kterou voda tlačí na přehradní hráz, se snaží hráz posunout vodorovným směrem. Proti posunutí působí síla statického smykového tření mezi hrází a podložím. Statický činitel tření je 0,47. Vypočtěte bezpečnostní činitel, jaký má přehrada proti posunutí. Bezpečnostní činitel je poměr uvažovaného havarijního zatížení k nejvyššímu reálně odhadnutému zatížení; v našem případě je to poměr maximální statické třecí síly (tíhy hráze × statický činitel tření) k velikosti síly, kterou na hráz působí voda. (b) Voda se též snaží otočit přehradní hráz okolo osy, která prochází bodem A a postupuje podél základny hráze (srovnej s úlohou 23). Proti tomu působí moment tíhy přehrady okolo uvažované osy. Vypočtěte bezpečnostní činitel proti otočení přehrady, tedy poměr velikosti momentu tíhy přehrady k velikosti momentu síly, kterým vůči uvažované ose působí celková síla na přehradní hráz vyvolaná vodou, umístěná ve svém působišti.



Obr. 15.34 Úloha 25

ODST. 15.5 Měření tlaku

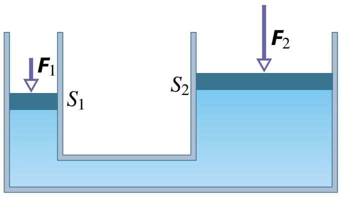
26C. Vypočtěte výšku sloupce vody, na jehož základně bude tlak 1 atm. Tíhové zrychlení $g = 9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

27C. Jaký minimální podtlak musíte vytvořit v plicích, abyste brčkem nasáli limonádu o hustotě $1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ do výšky 4 cm?

28Ú. Jaká by byla výška atmosféry, kdybychom předpokládali: (a) že hustota atmosféry se s výškou nemění, (b) že hustota klesá s výškou lineárně, dokud nedosáhne nulové hodnoty. Hustota atmosféry u hladiny moře $\varrho = 1{,}3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

ODST. 15.6 Pascalův zákon

29C. V hydraulickém lisu (obr. 15.35) se pístem o malé ploše s obsahem S_1 působí na kapalinu silou F_1. Spojovací trubka vede kapalinu k pístu o podstatně větším obsahu S_2. (a) Jak velká síla F_2 působí na větší píst? (b) Jak velká síla F_1 působící na malý píst vyváží na velkém pístu tíhu předmětu o hmotnosti 2 tuny, když malý píst má průměr 4 cm a velký 56 cm?



Obr. 15.35 Cvičení 29 a 30

30C. Jak velkou dráhu musí urazit velký píst hydraulického lisu ze cvič. 29, aby se jeho malý píst posunul o 1 m?

ODST. 15.7 Archimedův zákon

31C. Plechovka má celkový objem 1 200 cm^3 a hmotnost 130 g. Kolik gramů olověných broků může plechovka nést, aniž se ve vodě potopí? Hustota olova je $11{,}4\,g{\cdot}cm^{-3}$.

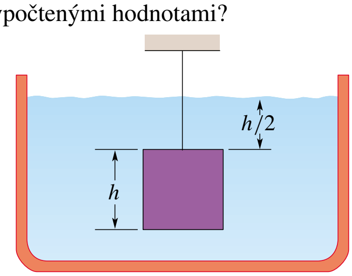
32C. Člun plující ve sladké vodě vytlačí 4 000 kg vody. (a) Jaká bude hmotnost vytlačené vody, když člun popluje ve slané vodě hustoty $1{,}03\,g{\cdot}cm^{-3}$? (b) Změní se objem vytlačené vody? Jestliže ano, tak o kolik?

33C. Přibližně jedna třetina těla fyzika, který plave v Mrtvém moři, je nad hladinou. Fyzik z tohoto údaje vypočte hustotu vody v Mrtvém moři, když předpokládá, že průměrná hustota lidského těla je $0{,}98\,g{\cdot}cm^{-3}$. K jakému výsledku došel? (Proč je hustota o tolik větší než $1{,}0\,g{\cdot}cm^{-3}$?)

34C. Železná kotva se jeví ve vodě lehčí o 200 N než ve vzduchu. (a) Jaký je její objem? (b) Kolik kotva váží na vzduchu? Hustota železa je $7{,}870\,g{\cdot}cm^{-3}$.

35C. Předmět visí na pérových vahách. Na vzduchu ukazují váhy 30 N. Když předmět plně ponoříme do vody, údaj klesne na 20 N. Když jej plně ponoříme do kapaliny neznámé hustoty, váhy ukazují 24 N. Jaká je hustota této kapaliny?

36C. Předmět tvaru krychle o hraně 60 cm působí ve vakuu na závěs silou $G = 5\,000\,N$ (tíha tělesa). Předmět zavěsíme do otevřené nádrže s kapalinou hustoty $0{,}8\,g{\cdot}cm^{-3}$ způsobem naznačeným na obr. 15.36. (a) Vypočtěte celkovou sílu, kterou kapalina a atmosféra působí na vrchní stěnu krychle. (b) Najděte celkovou sílu působící směrem vzhůru na spodní stěnu krychle. (c) Najděte sílu přenášenou závěsem. (d) Vypočtěte z Archimedova zákona vztlakovou sílu působící na předmět. Jaké vztahy platí mezi vypočtenými hodnotami?



Obr. 15.36 Cvičení 36

37C. Dřevěný předmět plove na vodě, přičemž dvě třetiny jeho objemu jsou ponořeny. V oleji plove předmět tak, že 90 % jeho objemu je ponořeno. Stanovte: (a) hustotu dřeva, (b) hustotu oleje.

38C. Bylo navrženo, aby byl zemní plyn ze Severního moře přepravován ve velkých vzducholodích, přičemž plyn sám by sloužil jako nosné medium. Vypočtěte sílu nutnou na stažení takové vzducholodi k zemi, aby ji bylo možno vyložit — získat převážený zemní plyn. Plně naložená vzducholoď obsahuje $1{,}0\cdot10^6\,m^3$ zemního plynu hustoty $0{,}80\,kg{\cdot}m^{-3}$. Váhu konstrukčních částí vzducholodi lze zanedbat.

39C. Heliem naplněný balon pluje pomalu v nízké výšce. Jeho maximální užitečné zatížení, tj. zatížení posádkou a nákladem, je 1 280 kg. O kolik by se mohlo zvýšit toto užitečné zatížení, kdyby se místo helia pro plnění balonu užil vodík? Objem helia v balonu je 5 000 m^3. Hustota helia je $0{,}16\,kg{\cdot}m^{-3}$, hustota vodíku $0{,}081\,kg{\cdot}m^{-3}$. (Proč se přesto užívá mnohem dražší helium?)

40C. Heliový balon se užívá k vyzdvižení užitečného zatížení o hmotnosti 40 kg do výšky 27 km, kde hustota vzduchu je $0{,}035\,kg{\cdot}m^{-3}$. Konstrukce balonu má hmotnost 15 kg a helium v něm hustotu $0{,}005\,1\,kg{\cdot}m^{-3}$. Jaký je objem balonu? Objem nákladu zanedbejte.

41Ú. Dutá koule o vnitřním poloměru 8,0 cm a vnějším poloměru 9,0 cm plove napůl ponořena v kapalině hustoty $800\,kg{\cdot}m^{-3}$. (a) Jaká je hmotnost koule? (b) Vypočtěte hustotu materiálu, z kterého je koule zhotovena.

42Ú. Dutá kulová železná skořepina plove téměř úplně ponořena ve vodě. Vnější průměr koule je 60,0 cm a hustota železa je $7{,}87\,g{\cdot}cm^{-3}$. Jaký je vnitřní průměr koule?

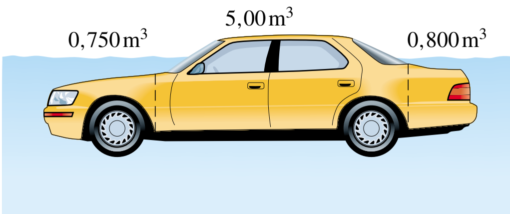
43Ú. Železný odlitek, který obsahuje mnoho dutinek, váží 6 000 N na vzduchu a 4 000 N ve vodě. Jaký je celkový objem dutinek v odlitku? Hustota homogenního železa je $7{,}87\,g{\cdot}cm^{-3}$.

44Ú. (a) Jaká je nejmenší plocha ledové desky tlusté 30 cm plující na sladké vodě, která na sobě udrží automobil hmotnosti 1 100 kg? (b) Záleží na tom, kde na desce automobil stojí?

45Ú. Tři děti — každé o hmotnosti 40 kg — si udělaly vor svázaný z klád. Každá kláda měla průměr 30 cm a délku 6 m. Kolik klád musely děti použít, aby se s nimi vor nepotopil? Hustotu dřeva pokládejte za rovnu $940\,kg{\cdot}m^{-3}$.

46Ú. Předpokládejte, že hustota mosazných závaží je $8{,}0\,g/cm^3$ a hustota vzduchu $0{,}001\,2\,g/cm^3$. Jaké se dopustíme chyby zanedbáním vztlaku vzduchu, když na rovnoramenných vahách vážíme předmět, který má hmotnost m a hustotu ϱ? Chybu vyjádřete v procentech.

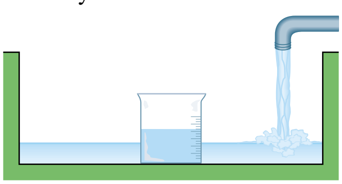
47Ú. Automobil má celkovou hmotnost 1 800 kg. Objem vzduchu v prostoru pro cestující je 5,00 m^3. Objem motoru a předních kol je 0,750 m^3 a objem zadních kol, palivové nádrže a kufru je 0,800 m^3; předpokládejme, že do těchto prostorů voda nepronikne. Automobil parkoval na svahu, lanko ruční brzdy se přetrhlo a vůz sjel ze svahu do rybníka (obr. 15.37). (a) Nejprve žádná voda nevnikla do prostoru pro cestující. Jaký je objem potopené části vozu v této fázi děje, která je zachycena na obrázku? (b) Jak se voda postupně dostává do prostoru pro cestující, automobil klesá. Kolik do něho vnikne vody do okamžiku, kdy automobil zmizí pod hladinou? (Automobil plove vodorovně, protože v kufru má těžký náklad.)



Obr. 15.37 Úloha 47

48Ú. Kus dřeva má hmotnost 3,67 kg a hustotu $600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Přidáme k němu tolik olova, aby 90 % objemu dřeva bylo potopeno. Jaké množství olova je zapotřebí: (a) když olovo je přidáno na vrchní část dřeva (není potopeno), (b) když olovo je přidáno na spodní část dřeva (je potopeno)? Hustota olova je $1{,}13{\cdot}10^4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

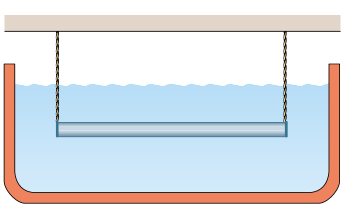
49Ú. Kádinku částečně naplněnou vodou postavíme na dno dřezu (obr. 15.38). Vlastní hmotnost kádinky je 390 g a její vnitřní objem $500\,\mathrm{cm^3}$. Když plníme dřez vodou a kádinka je naplněna méně než z poloviny, začne plovat. Když je kádinka naplněna více, zůstane stát na dně dřezu, a když připouštěná voda dosáhne jejího okraje, nateče do ní. Jaká je hustota materiálu, z kterého je kádinka vyrobena?



Obr. 15.38 Úloha 49

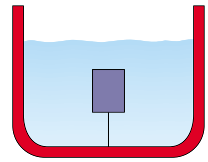
50Ú. Jaké je zrychlení stoupajícího balonu na horký vzduch, když poměr hustoty vzduchu vně balonu k hustotě vzduchu uvnitř balonu je 1,39? Hmotnosti konstrukce balonu a obsazeného koše zanedbejte.

51Ú. Válcová kovová tyč délky 80 cm a hmotnosti 1,6 kg má průřez o obsahu $6{,}0\,\mathrm{cm^2}$. Těžiště tyče leží 20 cm od jednoho jejího konce, protože hustota tyče není konstantní. Tyč je zavěšena vodorovně na dvou vláknech a ponořena do vody, jak je ukázáno na obr. 15.39. (a) Jaká napěťová síla je přenášena vláknem, které je blíže k těžišti? (b) Jaká napěťová síla je přenášena vzdálenějším vláknem?



Obr. 15.39 Úloha 51

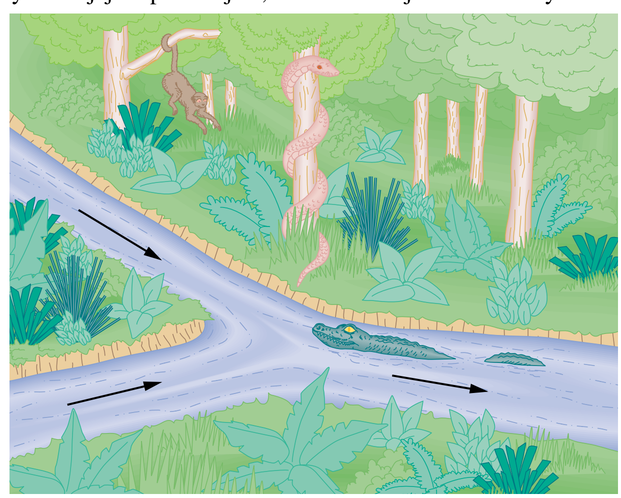
52Ú★. Napětí ve vlákně, které drží pevný předmět pod povrchem kapaliny (kapalina má větší hustotu než předmět) je T_0, když je nádoba s kapalinou v klidu (obr. 15.40). Ukažte, že když se nádoba začne pohybovat se zrychlením o velikosti a mířícím svisle vzhůru, napětí T ve vlákně stoupne na hodnotu $T_0(1 + a/g)$.



Obr. 15.40 Úloha 52

ODST. 15.9 Proudnice a rovnice kontinuity

53C. Na obr. 15.41 je znázorněn soutok dvou potoků, které vytvoří řeku. Jeden potok má šířku 8,2 m, hloubku 3,4 m a rychlost jeho proudu je $2{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Druhý potok je 6,8 m široký, 3,2 m hluboký a rychlost jeho proudu je $2{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Šířka řeky je 10,5 m, rychlost jejího proudu je $2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je hloubka řeky?



Obr. 15.41 Cvičení 53

54C. Voda přitéká trubkou, jejíž vnitřní průměr je 2,1 cm, a dále teče třemi trubkami o průměru 1,4 cm. (a) Jaký je objemový tok širší trubkou, když objemové toky užšími trubkami jsou postupně $0{,}035\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$, $0{,}025\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$ a $0{,}015\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$? (b) Jaký je poměr rychlosti proudění v širší trubici k rychlosti proudění v trubici s objemovým tokem $0{,}035\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$?

55C. Zahradní hadice tříčtvrtěcoulka (tj. hadice s vnitřním průměrem 0,75 palce) je připojena k postřikovači trávníku, který se skládá z 24 děr o průměru 0,05 palce. Jakou rychlostí je voda vystřikována z otvorů postřikovače, jestliže v přívodní hadici je její rychlost $1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

56Ú. Ze zatopeného sklepa je vyčerpávána voda rychlostí 5 m/s hadicí o vnitřním poloměru 1 cm. Hadice je vyvedena okénkem, které se nachází 3 m nad hladinou čerpané vody. Jaký je výkon čerpadla?

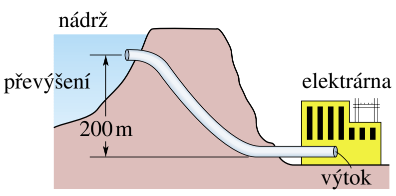
57Ú. Řeka široká 20 m a hluboká 4 m odvodňuje území o rozloze $3\,000\,\mathrm{km}^2$. Průměrné roční srážky na tomto území činí $505\,\mathrm{mm/m}^2$. Čtvrtina srážek se vypaří a zbytek je odvodněn řekou. Jaká je průměrná rychlost proudu vody?

ODST. 15.10 Bernoulliova rovnice

58C. Voda teče rychlostí $5\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$ trubicí, která má příčný průřez o obsahu $4\,\mathrm{cm}^2$. Voda postupně klesne o 10 m a obsah průřezu trubice se rozšíří na $8\,\mathrm{cm}^2$. (a) Jaká je rychlost vody po poklesu? (b) Jaký je tlak po poklesu, když předtím byl $1{,}5{\cdot}10^5$ Pa?

59C. Modely torpéd bývají zkoušeny ve vodorovné trubici s proudící vodou, podobně jako modely letadel v aerodynamickém tunelu. Uvažujme, že do takové trubice o vnitřním průměru 25 cm umístíme souose model torpéda, který má průměr 5 cm. Při zkoušce proudí voda kolem torpéda rychlostí $2{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. (a) Jakou rychlostí musí voda proudit v místech, kde její proud není zúžen modelem? (b) Jaký je rozdíl tlaku vody v trubici mezi místem, kde se nachází model, a ostatními částmi trubice?

60C. Vstup do potrubí spojujícího nádrž přečerpávací elektrárny s elektrárnou (obr. 15.42) má obsah $0{,}75\,\mathrm{m}^2$. Voda do něj vstupuje rychlostí $0{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. V budově elektrárny, která je o 200 m níže, je výstup z trubice užší a voda z něj vytéká rychlostí $9{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. Jaký je rozdíl tlaku mezi vstupem a výstupem?



Obr. 15.42 Cvičení 60

61C. Potrubí o vnitřním průměru 2,5 cm čerpá vodu do přízemí domu rychlostí $1\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$ pod tlakem $1{,}7{\cdot}10^5$ Pa. Má-li potrubí ve druhém podlaží ve výšce 8 m průměr 1,25 cm, jaká je v něm (a) rychlost proudu a (b) jaký tlak vody?

62C. Jakou práci vykoná okolní tlak na protlačení $1{,}4\,\mathrm{m}^3$ vody trubicí o vnitřním průměru 13 mm, když mezi konci trubice je tlakový rozdíl 1 atm?

63C. Vodorovnou trubkou konstantního průřezu teče olej. Pokles tlaku mezi dvěma místy vzdálenými 300 m je $35{\cdot}10^3$ Pa. Jakou energii ztratí $1\,\mathrm{cm}^3$ oleje, když proteče vzdálenost 1 m?

64C. Nádrž s velkou plochou hladiny je naplněna vodou do výše 0,3 m. Otvor o obsahu $6\,\mathrm{cm}^2$ ve dnu nádrže způsobí únik vody. (a) Jaký je objemový tok vytékající kapaliny? (b) V jaké hloubce pod dnem nádrže se plocha vytékajícího paprsku zúží na polovinu plochy otvoru?

65C. Máme dvě nádrže (1 a 2) s velkou plochou vrchní hladiny, ve kterých jsou dvě různé kapaliny. Ve stejné hloubce h pod vrchní hladinou jsou v obou nádržích udělány otvory, přičemž otvor v nádrži 1 má poloviční plochu ve srovnání s otvorem v nádrži 2. (a) Jaký je poměr hustot kapalin ϱ_1/ϱ_2, když hmotnostní toky oběma otvory jsou stejné? (b) Jaký je poměr objemových toků z obou nádrží? (c) Jak se musí změnit výška kapaliny nad otvorem v nádrži 2, aby se vyrovnaly objemové toky z obou nádrží?

66C. Vzduch obtéká vršek křídla letadla rychlostí v_1 a jeho spodek rychlostí v_2. Plocha křídla je S. Ukažte, že v tomto zjednodušeném modelu Bernoulliova rovnice předpovídá pro velikost F_{vz} síly, která nadnáší křídlo (říkáme jí též vztlaková síla), hodnotu

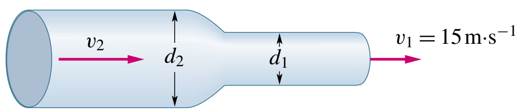
$$F_{\mathrm{vz}} = \tfrac{1}{2}\varrho S({v_1}^2 - {v_2}^2),$$

kde ϱ je hustota vzduchu.

67C. Je-li rychlost obtékání spodní strany křídla $110\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, jaká rychlost obtékání vrchní strany křídla povede k tlakovému rozdílu 900 Pa mezi oběma stranami? Hustotu vzduchu pokládejte za rovnu $1{,}3{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{g{\cdot}cm}^{-3}$ a použijte výsledek cvič. 66.

68C. Letadlo má plochu každého křídla rovnu $10{,}0\,\mathrm{m}^2$. Při jisté rychlosti letadla vzduch obtéká vrchní plochu křídla rychlostí $48{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$ a spodní plochu rychlostí $40{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. Jaká je hmotnost letadla? Předpokládejte, že letadlo letí stálou rychlostí, hustota vzduchu je $1{,}20\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$ a vliv obtékání trupu a ocasních ploch na vztlak je zanedbatelný. Diskutujte velikost vztlaku, když letadlo při stejné rychlosti (a) letí vodorovně, (b) stoupá pod úhlem 15°, (c) klesá pod úhlem 15°. (Vyjděte z výsledku cvič. 66.)

69Ú. Voda teče vodorovnou trubicí a do okolního prostoru (do atmosféry) vytéká rychlostí $15\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$, jak je naznačeno na obr. 15.43. Průměr levé části trubice je 5,0 cm a pravé části 3,0 cm. (a) Kolik vody vyteče do okolního prostoru za 10 min? (b) Jaká je rychlost proudění v levé části trubice? (c) Jaký je přetlak nebo podtlak (rozdíl tlaku proti tlaku v okolním prostoru) v levé části trubice?



Obr. 15.43 Úloha 69

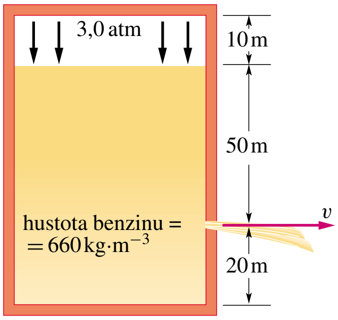
70Ú. V uzavřeném soudku je 50 cm pod povrchem nápoje pípa, ze které, když je otevřena, vytéká nápoj průřezem o obsahu $0{,}25\,\mathrm{cm}^2$. Hustota nápoje je $1\,\mathrm{g{\cdot}cm}^{-3}$. Jakou rychlostí bude nápoj vytékat otevřenou pípou, když přetlak v soudku v prostoru nad nápojem je (a) nulový, (b) 0,4 atm?

71Ú. Vítr při vichřici obtéká střechu domu rychlostí 110 km/h. Hustota vzduchu je $1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$. (a) Jaký je rozdíl tlaků v prostoru nad střechou a pod střechou, který se snaží střechu nadzvednout a odnést? (b) Jaká bude síla nadnášející střechu o obsahu $90\,\mathrm{m}^2$?

72Ú. Okna budovy úřadu mají rozměry 4 m × 5 m. Ve větrném dnu se prohnal okolo oken v nejvyšším patře budovy závan větru rychlostí $30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. Vypočtěte celkovou sílu, která při závanu větru působila na okno. Hustota vzduchu byla $1{,}23\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$.

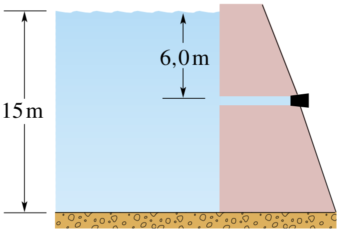
73Ú. Ostřelovač prostřelil kulkou z pušky vzduchotěsně uzavřenou benzinovou nádrž 50 m pod povrchem benzinu. Nad benzinem je absolutní tlak 3 atm, jak je naznačeno na obr. 15.44.

Skladovaný benzin má hustotu $660\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou rychlostí v začal benzin stříkat prostřeleným místem?



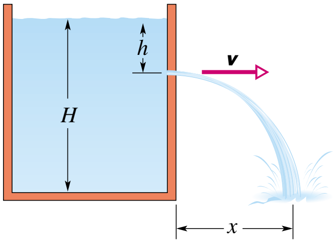
Obr. 15.44 Úloha 73

74Ú. Nádrž na pitnou vodu je za přehradní hrází 15 m hluboká. Vodorovná trubka o průměru 4,0 cm prochází hrází v hloubce 6,0 m pod vodní hladinou, jak je ukázáno na obr. 15.45. Trubka je uzavřena zátkou. (a) Najděte nejmenší nutnou velikost síly tření mezi trubkou a zátkou. (b) Zátku odstraníme. Jaký objem vody vyteče trubkou za tři hodiny?



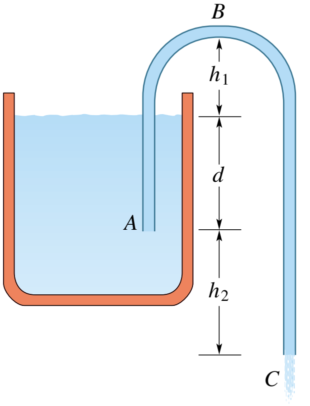
Obr. 15.45 Úloha 74

75Ú. Nádrž je naplněna vodou do výšky H. V nádrži byl provrtán otvor v hloubce h pod vodní hladinou (obr. 15.46). (a) Ukažte, že vzdálenost x od stěny nádrže do místa, kde vodní proud vytékající z nádoby dopadne na zem, je dána výrazem $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Je možné navrtat nádrž v jiné hloubce, ze které by vytékající proud dopadl na zem ve stejné vzdálenosti x? Pokud ano, v jaké? (c) V jaké hloubce musí být otvor umístěn, aby vzdálenost x byla maximální?



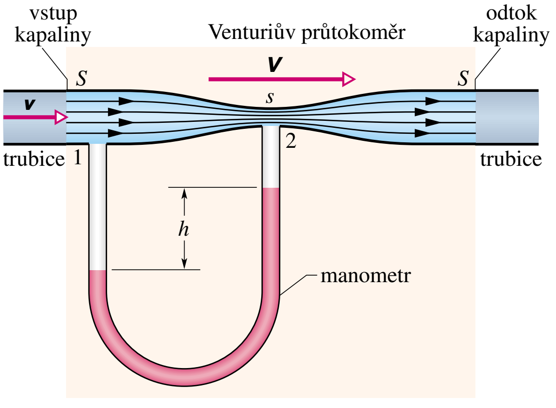
Obr. 15.46 Úloha 75

76Ú. **Násoska** je zařízení, které může sloužit k vyčerpání kapaliny z nádrže. Jak pracuje, je znázorněno na obr. 15.47. Trubka ABC musí nejprve být naplněna kapalinou. Jakmile je naplněna, odčerpává kapalinu z nádrže tak dlouho, dokud hladina nádrže neklesne k ústí trubky A. Kapalina má hustotu ϱ a zanedbatelnou viskozitu. (a) Jakou rychlostí vytéká kapalina z trubky v místě C? (b) Jaký tlak je v kapalině v nejvyšším bodě trubky B? (c) Jaká je největší teoretická výška h_1, přes kterou sifon může čerpat vodu?



Obr. 15.47 Úloha 76

77Ú. **Venturiův průtokoměr** (obr. 15.48) je přístroj, který slouží k měření rychlosti proudění trubicí, a tím i množství kapaliny, které trubicí protéká. Údaje se vypočtou ze změřeného rozdílu tlaků mezi místem, kde trubice má svůj běžný průměr (průměr před vstupem a po výstupu z přístroje), a mezi zúženým místem, tzv. krčkem. V místech, kde trubice má svůj běžný průměr (obsah průřezu S), tedy i v místě 1, kde je připojen jeden konec manometrické trubice, má kapalina rychlost v. V krčku, kde obsah průřezu je s, je v místě na obrázku označeném 2



Obr. 15.48 Úlohy 77 a 78

připojen druhý konec manometrické trubice. Kapalina zde má vyšší rychlost V. Z rozdílu rychlostí plyne rozdíl tlaku Δp, který se v U-manometru projeví rozdílem výšek h kapaliny v jeho ramenech. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice a rovnice kontinuity pro srovnání průtokových poměrů v místech 1 a 2 (obr. 15.48) ukažte, že pro stanovení hledané rychlosti v platí rovnice

$$v = \sqrt{\frac{2s^2\Delta p}{\varrho(S^2 - s^2)}},$$

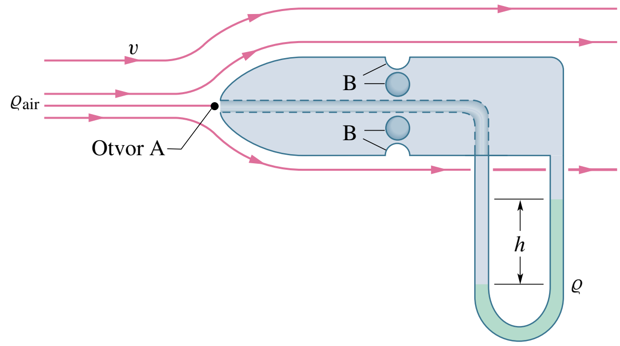
kde ϱ je hustota kapaliny. (b) Předpokládejte, že trubicí teče voda, že plochy příčných průřezů mají hodnoty $S = 60\,\mathrm{cm}^2$, $s = 30\,\mathrm{cm}^2$, tlak v širší části trubice je $8\cdot 10^4$ Pa a v krčku $6\cdot 10^4$ Pa. Jaký je objemový tok vody trubicí?

78Ú. Uvažujte Venturiův průtokoměr z předcházející úlohy na obr. 15.48 bez připojeného manometru. Nechť $S = 5s$ a tlak v místě 1, kde se nachází průřez S, je 2 atm. (a) Vypočtěte rychlosti v v místě průřezu S (místo 1) a V v místě průřezu s (místo 2), které způsobí, že tlak p_2 v místě 2 vymizí. (b) Vypočtěte, jaký v tom případě bude objemový tok trubicí, když průřez S má průměr 5,0 cm. Jev, který nastane v místě 2, kde tlak klesne na nulovou hodnotu, se nazývá **kavitace**; voda ztratí kontinuitu, vytvoří se v ní drobné bublinky.

79Ú. **Pitotova trubice** znázorněná na obr. 15.49 se užívá ke stanovení rychlosti letadla. Sestává z vnější trubice, na jejímž boku je větší počet malých otvorů B (na obrázku jsou vidět čtyři), která je spojena s jedním koncem manometru (na obrázku je manometrem U-trubice). Druhý konec manometru je spojen s vnitřní trubicí přístroje, do které vzduch vstupuje jejím čelním otvorem A. Přístroj se umísťuje na přední část letadla tak, aby vzduch vstupoval kolmo do vnitřní trubice, takže se v ní zastaví. Rychlost v_A je rovna nule. Otvory B jsou obtékány rychlostí v velmi blízkou rychlosti letadla. (a) Užitím Bernoulliovy rovnice ukažte, že

$$v = \sqrt{\frac{2\varrho g h}{\varrho_{\mathrm{vzd}}}},$$

kde ϱ je hustota kapaliny užité v U-trubici, h výšková odlehlost hladin v ramenech U-trubice a ϱ_{vzd} hustota vzduchu, kterým letadlo letí. (b) V U-trubici je líh a ukazuje rozdíl výšek $h = 26\,\mathrm{cm}$. Jaká je rychlost letadla vůči okolnímu vzduchu? Hustota vzduchu v dané výšce je $1{,}03\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a hustota lihu $810\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.



Obr. 15.49 Úlohy 79 a 80

80Ú. Pitotova trubice (viz úlohu 79) umístěná na letadle letícím ve velké výšce ukazuje tlakový rozdíl 180 Pa. Jaká je rychlost letadla, jestliže hustota vzduchu v této výšce je $0{,}031\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$?