9
Soustavy částic

Potemnělé hlediště a ozářená scéna. Obecenstvo s obdivem sleduje sólový výstup primabaleríny. Je nadšeno zejména efektními skoky „grand jeté“, při nichž se její hlava i trup pohybují takřka vodorovně téměř po celou dobu letu. Baletka se na scéně doslova vznáší. Laik v hledišti asi není podrobně obeznámen s problematikou gravitačního působení a pohybu těles v tíhovém poli Země. Ví však, že kdyby se sám pokusil takto vyskočit, bude dráha jeho trupu i hlavy spíše parabolická, podobně jako je tomu v případě vyhozeného kamene či fotbalového míče po brankářově výkopu. Na scéně se tedy zjevně děje něco velmi neobvyklého. Jak to baletka dokáže, že se jí gravitace příliš „netýká“?

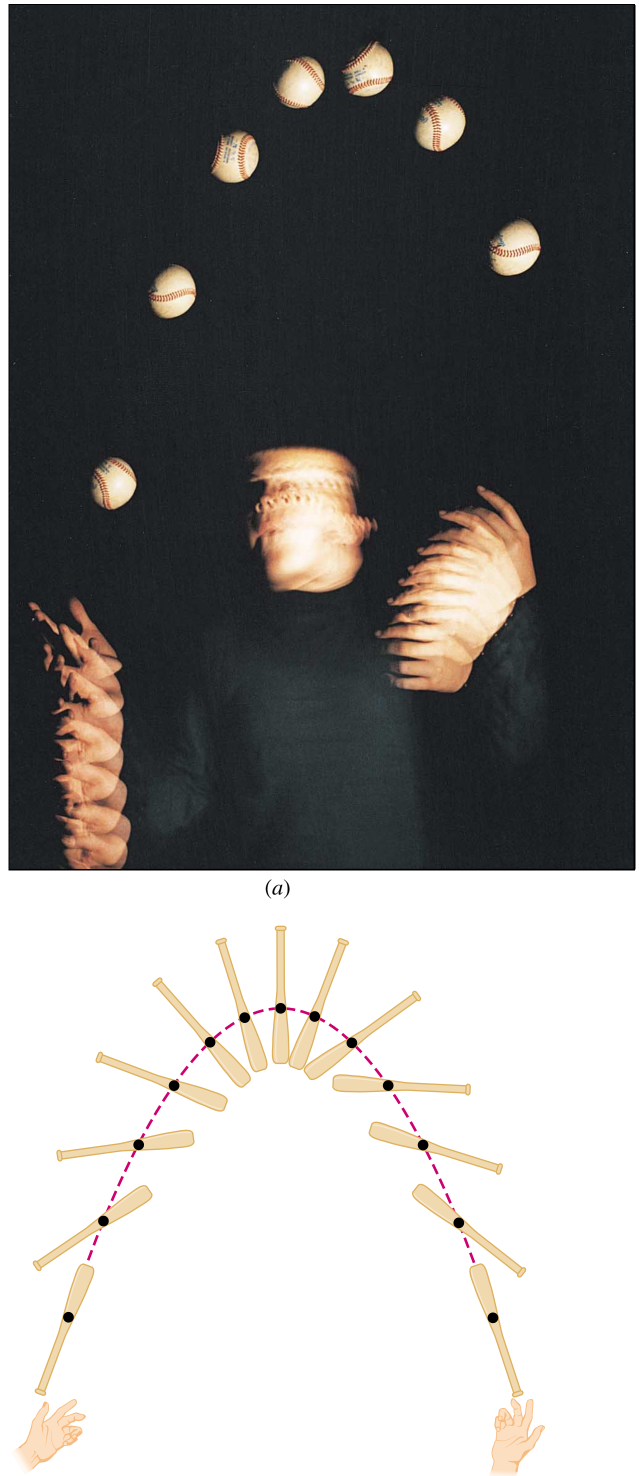
9.1 VÝZNAČNÝ BOD

Fyzikové rádi přemýšlejí nad složitými problémy a hledají v nich něco jednoduchého a známého. Představme si například, že vyhazujeme do vzduchu baseballovou pálku. Pálka se otáčí. Její pohyb je tedy mnohem složitější než třeba pohyb míčku, který se chová jako hmotný bod (obr. 9.1a). Trajektorie jednotlivých elementů pálky jsou navzájem odlišné. Proto ji při popisu jejího pohybu nelze nahradit hmotným bodem. Pálku je třeba chápat jako soustavu hmotných bodů.

Při podrobnějším zkoumání však zjistíme, že jeden z bodů pálky má význačné postavení. Pohybuje se totiž po jednoduché parabolické dráze, stejně jako se pohybuje částice při šikmém vrhu (obr. 9.1b). Jeho pohyb je přesně takový, jako kdyby (1) v něm byla soustředěna veškerá hmota pálky a (2) působila v něm celková tíhová síla působící na pálku. Tento význačný bod se nazývá **střed hmotnosti** pálky neboli **těžiště**.* Obecně platí:

Těžiště tělesa nebo soustavy těles je bod, který se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna veškerá hmota tělesa (soustavy) a působily v něm všechny vnější síly působící na těleso (soustavu).

Těžiště baseballové pálky leží na její podélné ose. Můžeme ho najít tak, že si pálku položíme vodorovně na napjatý prst a vyvážíme ji. Těžiště pak bude ležet na ose pálky právě nad prstem.



(*a*)

(*b*)

Obr. 9.1 (a) Míček vržený šikmo vzhůru se pohybuje po parabolické trajektorii. (b) Těžiště baseballové pálky (černá tečka) vyhozené do vzduchu se rovněž pohybuje po parabole, ostatní body pálky však opisují trajektorie komplikovanější.

9.2 TĚŽIŠTĚ

Zabývejme se nyní problémem, jak nalézt těžiště nejrůznějších soustav. Začneme u soustavy složené pouze z několika částic a teprve pak budeme uvažovat o souborech obsahujících velké množství částic (např. baseballová pálka).

Soustavy částic

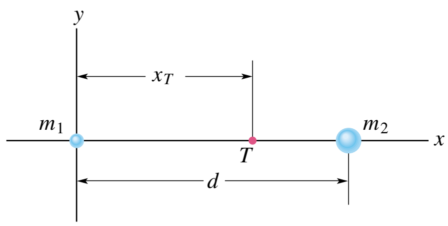
Na obr. 9.2a jsou zakresleny dvě částice o hmotnostech m_1 a m_2. Jejich vzdálenost je d. Počátek osy x, jehož volba není nijak omezena, jsme vybrali tak, aby splýval s částicí m_1. Polohu těžiště této dvoučásticové soustavy *definujeme* vztahem

$$x_T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d. \tag{9.1}$$

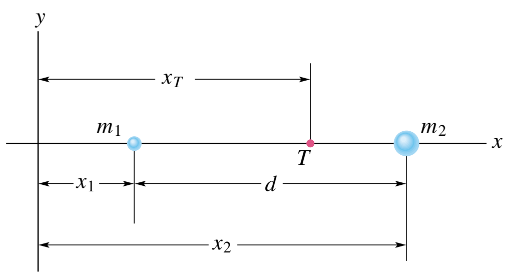
Abychom posoudili, nakolik je tato definice rozumná, uvažujme speciální případy. Zvolme nejprve $m_2 = 0$. Tato volba odpovídá soustavě s jedinou částicí m_1. Její těžiště

* V celé knize užíváme označení „těžiště“, „hmotný střed“ a „střed hmotnosti“ jako synonyma. V čl. 13.3 najdete podrobné zdůvodnění.

by mělo s touto částicí splývat. Z rov. (9.1) skutečně plyne $x_T = 0$. Je-li naopak $m_1 = 0$, obsahuje soustava opět jedinou částici, tentokrát m_2. Podle očekávání dostáváme $x_T = d$. Pro $m_1 = m_2$ by mělo být těžiště uprostřed mezi částicemi. Skutečně tomu tak je, neboť z rov. (9.1) dostáváme $x_T = d/2$. Ze vztahu (9.1) také vyplývá, že pro obecně zvolené nenulové hmotnosti obou částic leží hodnota x_T vždy uvnitř intervalu $(0, d)$. Těžiště tedy v každém případě leží někde mezi oběma částicemi.



(*a*)



(*b*)

Obr. 9.2 (a) Vzdálenost dvou částic o hmotnostech m_1 a m_2 je d. Bod označený symbolem T je těžištěm dvoučásticové soustavy, vypočteným z rov. (9.1). (b) Situace se od obr. (a) liší obecným umístěním počátku soustavy souřadnic. Těžiště je vypočteno z rov. (9.2). Poloha těžiště soustavy vzhledem k oběma částicím je v obou případech stejná.

Na obr. 9.2b je znázorněna situace odpovídající obecnější volbě počátku soustavy souřadnic. Poloha těžiště je v takovém případě definována vztahem

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{9.2}$$

Všimněme si, že pro $x_1 = 0$ přejde rov. (9.2) na jednodušší tvar (9.1). Posunutí počátku soustavy souřadnic nemá vliv na polohu těžiště vzhledem k jednotlivým částicím.

Přepišme rov. (9.2) do tvaru

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}, \tag{9.3}$$

kde M je celková hmotnost soustavy, $M = m_1 + m_2$. Platnost tohoto vztahu lze snadno zobecnit na případ soustavy n částic umístěných na ose x. Celková hmotnost soustavy je $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ a těžiště je v bodě o souřadnici

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{9.4}$$

Sčítací index i nabývá všech celočíselných hodnot od 1 do n. Představuje pořadové (identifikační) číslo částice a „čísluje" i její hmotnost a x-ovou souřadnici.

Jsou-li částice soustavy rozmístěny v trojrozměrném prostoru, je poloha jejího těžiště určena trojicí souřadnic. Získáme ji zobecněním rov. (9.4) na trojrozměrný případ:

$$x_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad z_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{9.5}$$

Polohu těžiště můžeme zapsat i použitím vektorové symboliky. Polohu i-té částice lze totiž zadat buď jejími souřadnicemi x_i, y_i a z_i, nebo polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_i = x_i \boldsymbol{i} + y_i \boldsymbol{j} + z_i \boldsymbol{k}. \tag{9.6}$$

Index i označuje částici, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ a $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory kartézské soustavy souřadnic. Těžiště je zadáno polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r}_T = x_T \boldsymbol{i} + y_T \boldsymbol{j} + z_T \boldsymbol{k}. \tag{9.7}$$

Tři skalární rovnice (9.5) lze tak nahradit jedinou vektorovou rovnicí:

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{9.8}$$

O její správnosti se můžeme přesvědčit dosazením z (9.6) a (9.7) a rozepsáním do souřadnic. Dostaneme skalární rovnice (9.5).

Tuhá tělesa

Běžné těleso, jakým je například i baseballová pálka, obsahuje tak obrovské množství částic (atomů), že je přirozenější posuzovat je jako objekt se spojitě rozloženou hmotou. Takový objekt již není tvořen jednotlivými navzájem oddělenými částmi, nýbrž infinitezimálně malými částicemi (elementy) o hmotnosti dm. Součty v rovnicích (9.5) je třeba nahradit integrály a souřadnice těžiště definovat vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\qquad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\qquad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

M opět představuje celkovou hmotnost tělesa. Integrály symbolizují „sčítání“ všech elementů v celém tělese. Jejich výpočet je ovšem třeba provádět v souřadnicích. Je-li těleso homogenní, lze jeho hustotu ϱ (hmotnost jednotkového objemu) vyjádřit vztahem

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \frac{M}{V}, \tag{9.10}$$

kde dV je objem elementu hmotnosti dm a V je celkový objem tělesa. V rov. (9.9) můžeme element dm nahradit výrazem $\varrho\,\mathrm{d}V$ získaným z rov. (9.10) a dostaneme

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\qquad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\qquad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V. \tag{9.11}$$

Integračním oborem těchto integrálů je objem tělesa, tj. útvar vymezený tímto tělesem v trojrozměrném prostoru (př. 9.4).

Celá řada těles má určitou geometrickou symetrii, například středovou, osovou nebo rovinnou. Poloha těžiště takového symetrického *homogenního* tělesa s jeho symetrií úzce souvisí. Je-li těleso středově symetrické, splývá jeho těžiště se středem symetrie. Těžiště tělesa s osovou (resp. rovinnou) symetrií leží na ose (resp. v rovině) symetrie. Těžiště homogenní koule splývá s jejím geometrickým středem. Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose. Těžiště banánu, jehož rovina symetrie jej dělí na dvě zrcadlově stejné části, leží v této rovině.

Těžiště však nemusí nutně ležet v tělese. Tak například v těžišti preclíku není žádné těsto a v těžišti podkovy není žádné železo.

PŘÍKLAD 9.1

Na obr. 9.3 jsou tři částice o hmotnostech $m_1 = 1{,}2$ kg, $m_2 = 2{,}5$ kg a $m_3 = 3{,}4$ kg umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 140$ cm. Určete polohu těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Zvolme souřadnicové osy x a y tak, aby jedna z částic byla umístěna v počátku a osa x splývala s jednou ze stran trojúhelníka. Částice mají tyto souřadnice:

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	x (cm)	y (cm)
m_1	1,2	0	0
m_2	2,5	140	0
m_3	3,4	70	121

Díky vhodné volbě soustavy souřadnic jsou tři souřadnice v tabulce nulové. Výpočet bude velmi jednoduchý.

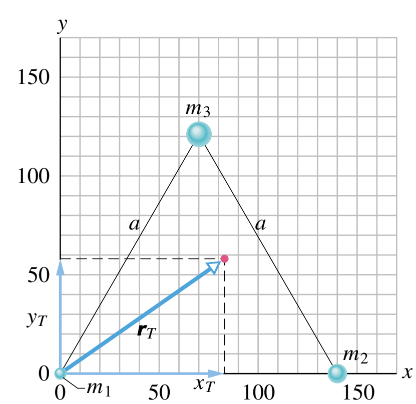
Z rov. (9.5) plyne, že souřadnice těžiště jsou

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i x_i = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = \\ &= \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(140\,\mathrm{cm}) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(70\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = \\ &= 83\,\mathrm{cm} \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = \\ &= \frac{(1{,}2\,\mathrm{kg})(0) + (2{,}5\,\mathrm{kg})(0) + (3{,}4\,\mathrm{kg})(121\,\mathrm{cm})}{(7{,}1\,\mathrm{kg})} = \\ &= 58\,\mathrm{cm}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

Těžiště soustavy na obr. 9.3 je určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_T$ o souřadnicích x_T a y_T.



Obr. 9.3 Příklad 9.1. Tři částice s různými hmotnostmi tvoří rovnostranný trojúhelník o straně a. Polohový vektor těžiště je $\boldsymbol{r}_T$.

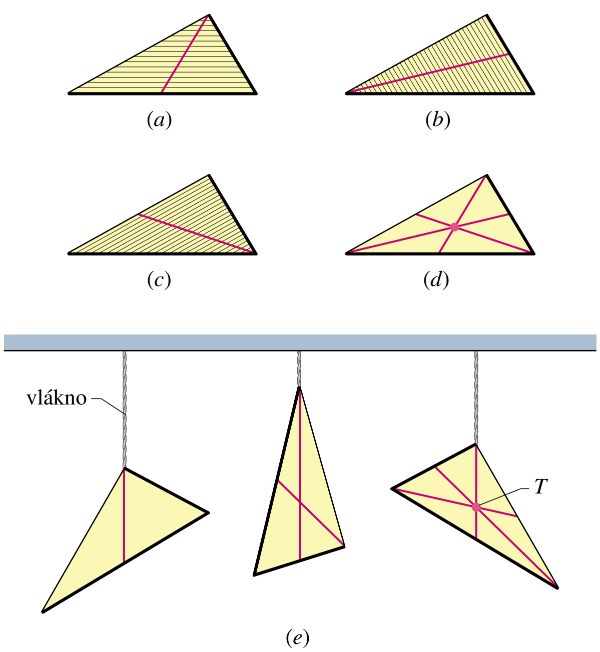
PŘÍKLAD 9.2

Najděte těžiště homogenní trojúhelníkové desky znázorněné na obr. 9.4.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.4a znázorňuje desku rozdělenou na úzké proužky rovnoběžné s jednou z jejích stran. Ze symetrie je zřejmé, že těžiště úzkého homogenního proužku leží v jeho geometrickém středu. Těžiště trojúhelníkové desky musí proto ležet někde na spojnici středů všech rovnoběžných proužků. Touto spojnicí je přímka spojující vrchol trojúhelníka se středem protilehlé strany, tj. je těžnicí trojúhelníka. Kdybychom desku podepřeli rovným ostřím nože přesně podél těžnice, byla by v rovnováze.

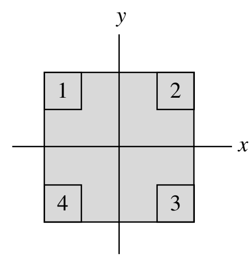
Na obr. 9.4b, c jsme desku rozdělili na proužky rovnoběžné s dalšími dvěma stranami. V každém z těchto případů leží těžiště desky na přímce spojující středy proužků (na těžnici trojúhelníka), podobně jako na obr. 9.4a. Všechny tři těžnice mají společný průsečík. V něm leží těžiště desky (obr. 9.4d).

Předchozí závěr můžeme ověřit jednoduchým pokusem. Využijeme při tom správnou intuitivní představu, že těleso zavěšené v jednom bodě zaujme takovou polohu, v níž jeho těžiště leží pod bodem závěsu. Zavěsíme tedy trojúhelníkovou desku postupně v jednotlivých vrcholech a podle obr. 9.4e vedeme z každého vrcholu svislou přímku. Těžiště desky splývá s průsečíkem těchto tří přímek. Kdybychom desku umístili do vodorovné polohy a podepřeli ji v těžišti hrotem, byla by v rovnováze.



Obr. 9.4 Příklad 9.2. Na obrázcích (a), (b) a (c) je trojúhelníková deska rozdělena na soustavu úzkých proužků rovnoběžných s některou její stranou. Těžiště desky leží na těžnici trojúhelníka, tj. na spojnici středů proužků. (d) Průsečík těžnic splývá s těžištěm desky. (e) Experimentální zjištění polohy těžiště. Trojúhelník postupně zavěšujeme v jeho vrcholech.

KONTROLA 1: Na obrázku je nakreslena homogenní čtvercová deska, z níž byly odříznuty čtyři stejné čtverce. (a) Jaká je poloha těžiště původní desky? (b) Odhadněte polohu těžiště zbylého útvaru po odstranění čtverce 1, (c) čtverců 1 a 2, (d) čtverců 1 a 3, (e) čtverců 1, 2 a 3, (f) všech čtyř čtverců. Neprovádějte žádný přesný výpočet. Využijte pouze symetrie útvaru nebo naopak jeho asymetrie vzniklé odstraňováním čtverců a rozhodněte, v kterém z kvadrantů, na které ose či v kterém bodě těžiště leží.



PŘÍKLAD 9.3

Obr. 9.5a znázorňuje zbytek homogenní kruhové kovové desky o poloměru $2R$, z níž byl vyříznut kotouč o poloměru R. Vzniklé těleso označme X. Jeho těžiště leží na ose x a v obrázku je označeno tečkou. Určete jeho souřadnici.

ŘEŠENÍ: Obr. 9.5b ukazuje desku C před vyjmutím kotouče D. Ze symetrie vyplývá, že těžiště desky C je v jejím středu (obr. 9.5b).

Těleso C je složeno ze dvou částí, D a X. Můžeme předpokládat, že hmotnost každé z nich je soustředěna v jejím těžišti. Těžiště dvoučásticové soustavy $T_{\mathrm{D}} + T_{\mathrm{X}}$ splývá s těžištěm tělesa C. Polohy těžišť těles C, D a X na ose x jsou vyznačeny v obr. 9.5c.

Z rov. (9.2) vyplývá, že těžiště tělesa C je v bodě

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{m_{\mathrm{D}}x_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{X}}x_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{D}} + m_{\mathrm{X}}},$$

kde x_{D} a x_{X} jsou souřadnice těžišť těles D a X. Vzhledem k tomu, že je $x_{\mathrm{C}} = 0$, platí

$$x_{\mathrm{X}} = -\frac{x_{\mathrm{D}}m_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{X}}}. \tag{9.12}$$

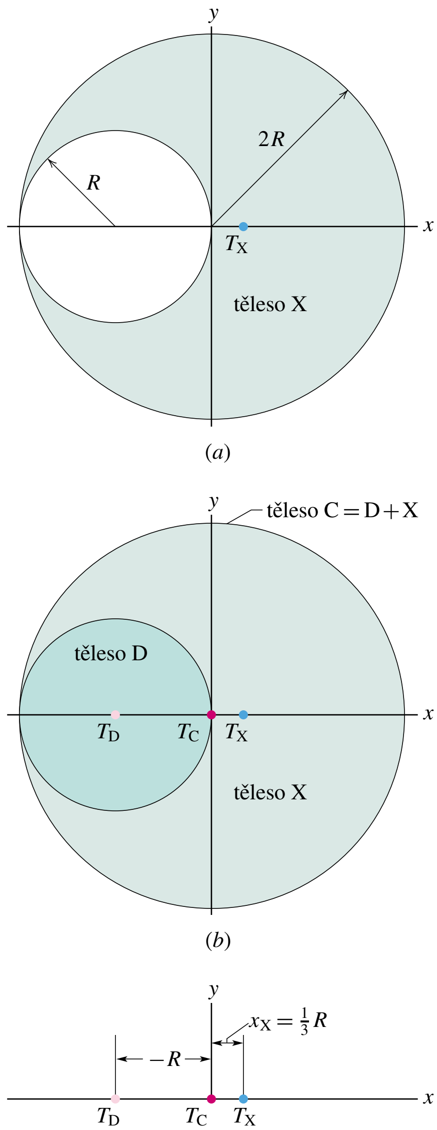
Označme ϱ hustotu materiálu desky a d její (konstantní) tloušťku. Pak

$$m_{\mathrm{D}} = \pi R^2 \varrho d \qquad \text{a} \qquad m_{\mathrm{X}} = \pi(2R)^2\varrho d - \pi R^2 \varrho d.$$

Uvážíme-li navíc, že $x_{\mathrm{D}} = -R$, dostaneme z rov. (9.12) polohu těžiště tělesa X:

$$x_{\mathrm{X}} = -\frac{(-R)(\pi R^2 \varrho d)}{\pi(2R)^2\varrho d - \pi R^2 \varrho d} = \frac{1}{3}R. \quad \text{(Odpověď)}$$

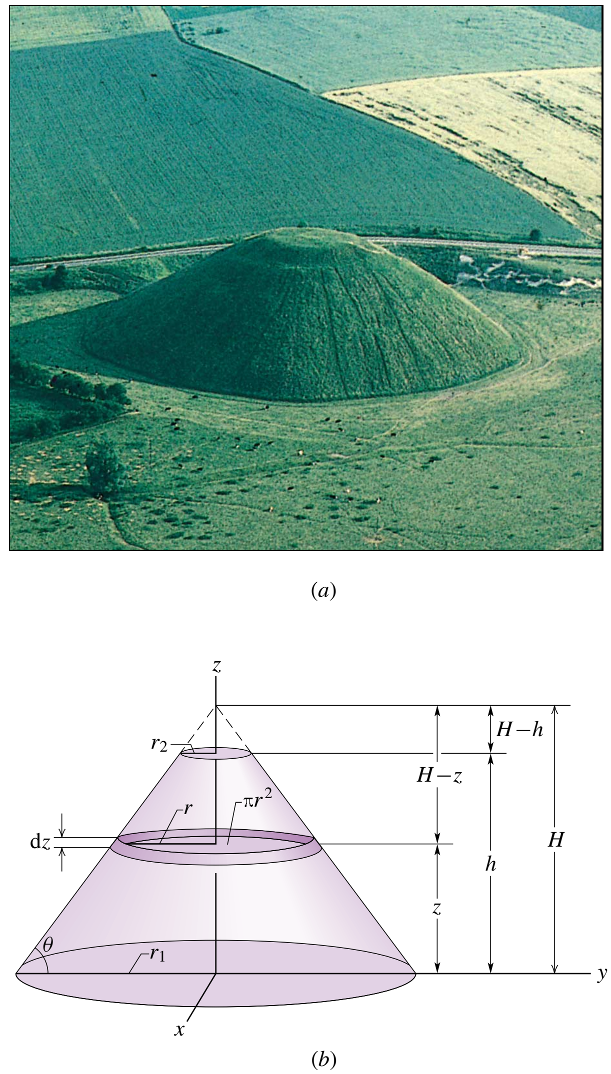
Všimněme si, že konstantní hustota a konstantní tloušťka desky se při výpočtu vykrátily. Na hodnotu x_X tedy nemají vliv.



Obr. 9.5 Příklad 9.3. (a) Těleso X, jehož těžiště je označeno T_X, vzniklo vyříznutím kruhového otvoru o poloměru R v kovovém kotouči o poloměru $2R$. (b) Vyjmutý kotouč je označen symbolem D. Jeho těžiště T_D leží v jeho geometrickém středu a má souřadnici $x_D = -R$. Těleso C je složeno z částí X a D. Jeho těžiště je v počátku soustavy souřadnic. (c) Těžiště všech tří těles.

PŘÍKLAD 9.4

Obr. 9.6a zachycuje mohylu Silbury Hill, postavenou na pláních nedaleko Stonehenge před 4 600 lety. Účel stavby není přesně znám, pravděpodobně sloužila jako pohřebiště. Má tvar komolého kužele (obr. 9.6b) o výšce $h = 40$ m a poloměrech podstav $r_2 = 16$ m (horní podstava) a $r_1 = 88$ m (základna). Jeho objem je $V = 4{,}09 \cdot 10^5$ m^3. Povrchové přímky kužele svírají s vodorovnou rovinou úhel $\theta = 30°$.



Obr. 9.6 Příklad 9.4. (a) Mohyla Silbury Hill v Anglii pochází z mladší doby kamenné. Její stavba si vyžádala asi $1{,}8 \cdot 10^7$ pracovních hodin. (b) Komolý kužel představující Silbury Hill. V obrázku je vyznačena vrstva o poloměru r s infinitezimální tloušťkou dz, ležící ve výšce z nad základnou kužele.

(a) Určete polohu těžiště mohyly.

ŘEŠENÍ: Mohyla je rotačně symetrická, takže její těžiště leží na její ose symetrie, ve výšce z_T nad základnou kužele. K výpočtu této výšky použijeme poslední z rovnic (9.11) a integrál zjednodušíme užitím symetrie mohyly. Uvažme tenkou vodorovnou vrstvu zvolenou podle obr. 9.6b. Vrstva má poloměr r, tloušťku dz a leží ve vzdálenosti z od základny mohyly. Obsah její podstavy je πr^2 a objem

$$\mathrm{d}V = \pi r^2\,\mathrm{d}z. \qquad (9.13)$$

Mohyla je tvořena všemi takovými vrstvami, jejichž poloměr se mění od největší hodnoty r_1, odpovídající poloměru základny, po hodnotu r_2 poloměru horní podstavy. Výšku celého kužele, z něhož náš komolý kužel vznikl, označme H (obr. 9.6b). Pro poloměr r libovolné vrstvy pak platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H}{r_1} = \frac{H-z}{r},$$

tj.

$$r = (H-z)\frac{r_1}{H}. \qquad (9.14)$$

Dosazením z (9.13) a (9.14) do poslední z rovnic (9.11) dostaneme

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V = \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h z(H-z)^2\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\int_0^h (z^3 - 2z^2H + zH^2)\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{\pi r_1^2}{VH^2}\left[\frac{z^4}{4} - \frac{2z^3H}{3} + \frac{z^2H^2}{2}\right]_0^h = \\ &= \frac{\pi r_1^2 h^4}{VH^2}\left[\frac{1}{4} - \frac{2H}{3h} + \frac{H^2}{2h^2}\right]. \end{aligned}$$

Pro zadané číselné hodnoty pak vychází

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{\pi(88\,\mathrm{m})^2(40\,\mathrm{m})^4}{(4{,}09\cdot 10^5\,\mathrm{m}^3)(50{,}8\,\mathrm{m})^2}\,\cdot \\ &\quad\cdot\left[\frac{1}{4} - \frac{2(50{,}8\,\mathrm{m})}{3(40\,\mathrm{m})} + \frac{(50{,}8\,\mathrm{m})^2}{2(40\,\mathrm{m})^2}\right] = \\ &= 12{,}37\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{m}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

(b) Předpokládejme, že průměrná hustota materiálu, z něhož je mohyla Silbury Hill postavena, je $\varrho = 1{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou práci vykonali dělníci při vršení mohyly, jestliže zeminu zvedali z úrovně základny kužele?

ŘEŠENÍ: K výpočtu elementární práce $\mathrm{d}W$ potřebné k vyzdvižení hmotného elementu $\mathrm{d}m$ do výšky z použijeme rov. (7.21), do níž dosadíme $\varphi = 180°$:

$$\mathrm{d}W = -\mathrm{d}m\,gz\cos 180° = gz\,\mathrm{d}m.$$

Ze vztahu (9.10) vyjádříme $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$\mathrm{d}W = \varrho gz\,\mathrm{d}V.$$

Celkovou práci vypočteme pomocí integrálu jako součet elementárních prací $\mathrm{d}W$:

$$W = \int \mathrm{d}W = \int \varrho gz\,\mathrm{d}V = \varrho g\int z\,\mathrm{d}V.$$

Ze vztahů (9.11) je zřejmé, že poslední integrál má hodnotu Vz_T. Nakonec tedy dostáváme

$$W = \varrho Vgz_T. \qquad (9.15)$$

Práce potřebná k navršení mohyly Silbury Hill je tedy stejná jako práce, kterou bychom museli vykonat při zvednutí stejně hmotného bodového objektu z úrovně základny do těžiště mohyly. Pro číselné hodnoty uvedené v zadání úlohy pak z rov. (9.15) dostaneme:

$$\begin{aligned} W &= (1{,}5\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}})(4{,}09\cdot 10^5\,\mathrm{m}^3)\,\cdot \\ &\quad\cdot(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(12{,}37\,\mathrm{m}) = \\ &= 7{,}4\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}. \qquad \text{(Odpověď)} \end{aligned}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.1: *Úlohy o těžišti*

V příkladech 9.1 až 9.3 jsme se seznámili se třemi různými způsoby zjednodušení úloh směřujících k výpočtu polohy těžiště: (1) Využití všech prvků symetrie zadaného tělesa (střed symetrie, osy symetrie, roviny symetrie). (2) Těleso lze pro účely výpočtu rozdělit na několik částí a každou z nich nahradit částicí umístěnou v jejím těžišti. (3) Vhodná volba souřadnicových os: volba souřadnic nemá vliv na polohu těžiště soustavy částic vzhledem k těmto částicím. Je proto vhodné volit počátek i osy soustavy souřadnic tak, aby se výpočet co nejvíce zjednodušil. Je-li zadaná soustava tvořena jen několika částicemi, volíme obvykle počátek soustavy souřadnic v některé z nich. Má-li soustava navíc osu symetrie, ztotožníme ji s některou ze souřadnicových os, například s osou x.

9.3 VĚTA O HYBNOSTI

Sledujeme-li srážku dvou kulečníkových koulí, z nichž jedna je zpočátku v klidu, přirozeně očekáváme, že i po srážce bude soustava nějak pokračovat v pohybu ve směru nárazu. Asi bychom se divili, kdyby se obě koule vrátily zpět nebo se třeba pohybovaly obě stejným směrem kolmým k pohybu první koule před srážkou.

Bod, který se stále pohybuje kupředu bez ohledu na srážku, opravdu existuje. Je jím těžiště soustavy našich dvou koulí. Snadno se o tom přesvědčíme přímo při kulečníkové hře. Stačí si uvědomit, že těžiště soustavy dvou stejně hmotných těles leží vždy uprostřed mezi nimi. Ať je srážka jakákoliv — přímá, nebo zcela obecná, těžiště se neochvějně pohybuje kupředu, jako by srážka vůbec nenastala. Sledujme tento jev podrobněji.

Místo dvojice kulečníkových koulí vezměme v úvahu soustavu n částic, jejichž hmotnosti jsou obecně různé. Budeme se zabývat pohybem těžiště této soustavy, *bez ohledu* na pohyb jednotlivých částic. I když je těžiště pouze geometrickým bodem, můžeme o něm uvažovat jako o částici, jejíž hmotnost je rovna celkové hmotnosti soustavy. Můžeme mu přisoudit polohu, rychlost i zrychlení. Později ukážeme, že vektorová rovnice popisující pohyb těžiště soustavy částic, zvaná **věta o hybnosti** (soustavy částic) neboli **první impulzová věta**,* má tvar

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \tag{9.16}$$

Vztah (9.16) má tvar druhého Newtonova zákona pro těžiště soustavy částic. Skutečně, má stejný tvar ($m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$) jako druhý Newtonův zákon pro částici. Veličiny vystupující v rov. (9.16) je však třeba správně interpretovat:

1. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ je *vektorový* součet *všech vnějších sil* působících na soustavu, tj. všech sil, jimiž okolní objekty působí na jednotlivé částice soustavy. Síly, kterými na sebe působí jednotlivé částice, resp. části soustavy navzájem, se nazývají silami *vnitřními*. Ve vztahu (9.16) nevystupují, neboť podle třetího Newtonova zákona je jejich součet roven nule: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \boldsymbol{0}$.
2. M je *celková hmotnost* soustavy. Předpokládáme, že nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím, takže M je konstantní. Taková soustava se nazývá **uzavřená**.
3. $\boldsymbol{a}_T$ je zrychlení *těžiště* soustavy. Vztah (9.16) nedává žádnou informaci o zrychlení jiných bodů soustavy.

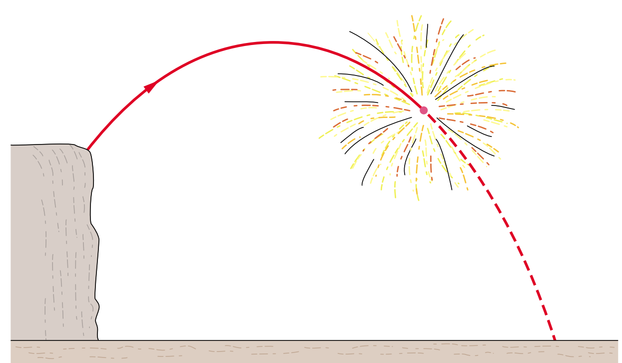
Jako každá vektorová rovnice je i rov. (9.16) ekvivalentní třem rovnicím skalárním pro složky vektorů $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ a $\boldsymbol{a}_T$ vzhledem ke zvolené soustavě souřadnic:

$$\begin{aligned} Ma_{T,x} &= \sum F_{\text{ext},x}, \\ Ma_{T,y} &= \sum F_{\text{ext},y}, \\ Ma_{T,z} &= \sum F_{\text{ext},z}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Vraťme se nyní k původnímu problému a zkoumejme chování soustavy dvou kulečníkových koulí. Po uvedení první koule do pohybu je výsledná vnější síla působící na soustavu nulová, tj. $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \boldsymbol{0}$. Podle rov. (9.16) je tedy nulové i zrychlení těžiště soustavy ($\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{0}$). Těžiště soustavy koulí se tedy před srážkou pohybuje konstantní rychlostí. Při srážce na sebe koule působí silami, které jsou z hlediska soustavy silami *vnitřními*. Tyto síly mají sice vliv na pohyb každé z koulí, neovlivní však pohyb těžiště soustavy. Nepřispívají totiž k výrazu $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jehož hodnota tak zůstává stále nulová. Těžiště soustavy se i po srážce pohybuje konstantní rychlostí, shodnou s jeho rychlostí před srážkou.

Rov. (9.16) platí nejen pro soustavu částic, ale i pro tuhé těleso, jakým je např. baseballová pálka na obr. 9.1b. V tomto případě značí M v rov. (9.16) hmotnost pálky a $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ představuje tíhovou sílu $M\boldsymbol{g}$, jíž na pálku působí Země.

Obr. 9.7 ukazuje jiný zajímavý případ. Raketa vystřelená při ohňostroji se pohybuje po parabolické dráze a najednou se roztrhne na malé části. Kdyby k explozi nedošlo, raketa by pokračovala v pohybu po parabole, vyznačené v obrázku. Síly, které způsobily explozi, jsou z hlediska soustavy, tvořené nejprve raketou a poté všemi jejími částmi, silami *vnitřními*, tj. silami vzájemného působení jednotlivých částí soustavy. Zanedbáme-li odpor vzduchu, je výslednice *vnějších* sil působících na soustavu určena výhradně silou tíhovou: $\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{g}$, bez ohledu na to, zda raketa explodovala či nikoliv. Z rov. (9.16) je tedy zřejmé, že zrychlení těžiště soustavy úlomků (pokud jsou ještě všechny v pohybu ve vzduchu) je $\boldsymbol{g}$ a těžiště opisuje tutéž parabolickou trajektorii, po jaké by se pohybovala raketa, kdyby se neroztrhla.



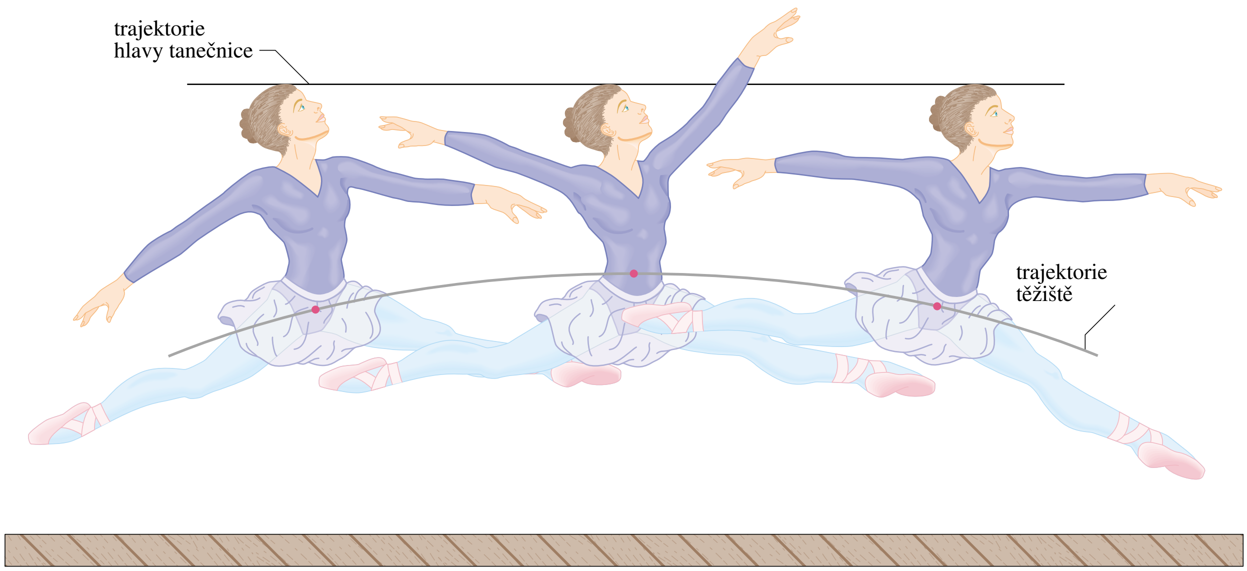
Obr. 9.7 Při ohňostroji exploduje raketa během letu. Zanedbáme-li odpor vzduchu, opisuje těžiště soustavy úlomků původní parabolickou dráhu rakety, dokud některý z úlomků nedopadne na zem.

Při figuře „grand jeté“, zvedne baletka ruce a napne nohy do vodorovné polohy (obr. 9.8). Tím posune těžiště uvnitř svého těla co nejvýše. Těžiště samozřejmě věrně sleduje parabolickou trajektorii. Hmotnost tanečnice je však vůči němu rozložena tak, že se její hlava a trup pohybují takřka vodorovně.

Odvození věty o hybnosti

Věta o hybnosti je jednou ze dvou významných pohybových rovnic soustavy částic. V tomto odstavci se věnujeme jejímu odvození. Uvažujme soustavu n částic. Podle

* Její první název pochopíme později z jejího ekvivalentního zápisu (9.28). Druhý název souvisí s rovnicí (10.4).



Obr. 9.8 Baletní skok „grand jeté“. (Převzato z Kennet Laws, *The Physics of Dance*, Schirmer Books, 1984.)

rov. (9.8) pro ni platí

$$M\boldsymbol{r}_T = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n, \qquad (9.18)$$

kde M je její celková hmotnost, $\boldsymbol{r}_T$ polohový vektor jejího těžiště. Derivováním rov. (9.18) podle času dostaneme

$$M\boldsymbol{v}_T = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \qquad (9.19)$$

Symbolem $\boldsymbol{v}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i/\mathrm{d}t)$ jsme označili rychlost i-té částice a $\boldsymbol{v}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_T/\mathrm{d}t)$ představuje rychlost těžiště.

Dalším derivováním rov. (9.19) vzhledem k času již dospějeme ke vztahu

$$M\boldsymbol{a}_T = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n, \qquad (9.20)$$

kde $\boldsymbol{a}_i$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_i/\mathrm{d}t)$ je zrychlení i-té částice a $\boldsymbol{a}_T$ $(= \mathrm{d}\boldsymbol{v}_T/\mathrm{d}t)$ zrychlení těžiště. Znovu si uvědomme, že těžiště je pouze geometrickým bodem. Má však smysl mu kromě polohy připisovat i rychlost a zrychlení, jako by se jednalo o hmotnou částici.

Podle druhého Newtonova zákona je součin $m_i\boldsymbol{a}_i$ určen výslednicí $\boldsymbol{F}_i$ všech sil působících na i-tou částici. Vztah (9.20) můžeme tedy přepsat do tvaru

$$M\boldsymbol{a}_T = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots + \boldsymbol{F}_n. \qquad (9.21)$$

Pravá strana rov. (9.21) zahrnuje kromě vnějších sil, jimiž na jednotlivé částice soustavy působí její okolí, i interakční síly, jimiž na sebe částice působí navzájem (vnitřní síly). Podle třetího Newtonova zákona je však součet vnitřních sil nulový, neboť je tvořen dvojicemi typu akce — reakce, tj. dvojicemi stejně velkých opačně orientovaných sil. Na pravé straně rov. (9.21) tak zůstane pouze vektorový součet *vnějších* sil působících na soustavu, ve shodě s větou o hybnosti (9.16).

KONTROLA 2: František a Eva bruslí ve dvojici. Drží přitom v rukou opačné konce dlouhé tyče. František má dvakrát větší hmotnost než Eva, hmotnost tyče je zanedbatelná. Tření mezi bruslemi a ledem rovněž zanedbáváme. Bruslaři jsou zpočátku v klidu. (a) Potom František začne ručkovat k Evě, zatímco ona drží pevně v rukou svůj konec tyče. Určete polohu bodu, v němž se setkají. (b) Řešte tutéž úlohu za předpokladu, že se Eva přitahuje k Františkovi, a (c) za předpokladu, že ručkují oba. Soustavu souřadnic volíme tak, že její počátek umístíme do počáteční polohy těžiště soustavy a jednu z os namíříme podél tyče.

PŘÍKLAD 9.5

Na obr. 9.9a je soustava tří částic, které jsou zpočátku v klidu. Na každou z nich působí vnější síla, která je v obrázku rovněž vyznačena. Určete zrychlení těžiště soustavy.

ŘEŠENÍ: Podle př. 9.1 vypočteme počáteční polohu těžiště soustavy (obr. 9.9a). Jak napovídá obr. 9.9b, zacházíme s ním jako s částicí o hmotnosti M, shodné s celkovou hmotností soustavy (16 kg), na niž působí všechny vnější síly působící na soustavu. Výslednice všech vnějších sil působících na soustavu $\sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$ představuje tedy výslednici všech sil působících na těžiště. Její x-ová, resp. y-ová složka jsou

$$\sum F_{\mathrm{ext},x} = (14\,\mathrm{N}) - (6{,}0\,\mathrm{N}) + (12\,\mathrm{N})\cos 45^\circ = 16{,}5\,\mathrm{N},$$

resp.

$$\sum F_{\mathrm{ext},y} = (12\,\mathrm{N})\sin 45^\circ = 8{,}49\,\mathrm{N}.$$

Výsledná síla má velikost

$$\sum F_{\text{ext}} = \sqrt{(16{,}5\,\text{N})^2 + (8{,}49\,\text{N})^2} = 18{,}6\,\text{N}$$

a svírá s osou x úhel

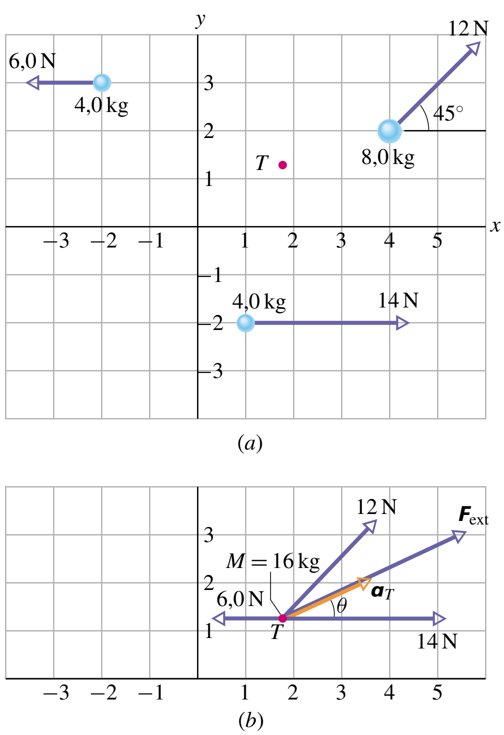
$$\operatorname{tg}\theta = \left(\frac{8{,}49\,\text{N}}{16{,}5\,\text{N}}\right) = 0{,}515,$$

$$\theta = 27^\circ. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Tímto úhlem je určen směr zrychlení těžiště $\boldsymbol{a}_T$, jehož velikost je podle rov. (9.16)

$$a_T = \frac{\sum F_{\text{ext}}}{M} = \frac{(18{,}6\,\text{N})}{(16\,\text{kg})} = 1{,}16\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq$$

$$\doteq 1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$



Obr. 9.9 Příklad 9.5. (a) Na tři částice, které jsou zpočátku v klidu, působí vnější síly. Těžiště soustavy je v bodě označeném T. (b) Vnější síly umístíme do těžiště. Jeho pohyb se řídí stejnými zákonitostmi jako pohyb částice o hmotnosti M shodné s celkovou hmotností soustavy. Obrázek zachycuje výslednici vnějších sil i zrychlení těžiště soustavy částic.

Pohyb každé z částic na obr. 9.9a je přímočarý a rovnoměrně zrychlený, stejně jako pohyb těžiště celé soustavy. Jednotlivá zrychlení jsou však navzájem různá. Poněvadž zpočátku byly částice v klidu, bude se každá z nich pohybovat s rovnoměrně rostoucí rychlostí ve směru síly, která na ni působí. Těžiště se bude pohybovat po přímce rovnoběžné s vektorem $\boldsymbol{a}_T$.

9.4 HYBNOST

Hybnost částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \tag{9.22}$$

kde m je hmotnost částice a $\boldsymbol{v}$ její rychlost. Hmotnost částice je kladná skalární veličina. Vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou tedy souhlasně rovnoběžné. Z rov. (9.22) je také zřejmé, že jednotkou hybnosti v soustavě jednotek SI je kg·m·s^{-1}.

Původní Newtonova formulace druhého zákona již pojem hybnosti obsahovala:

Časová změna hybnosti částice je rovna výslednici sil, které na částici působí.

Matematické vyjádření tohoto zákona má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Předpokládejme, že hmotnost částice je neproměnná. Dosazením za $\boldsymbol{p}$ z definičního vztahu (9.22) a úpravou pak dostaneme

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}.$$

Vztahy $\sum \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$ a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ tedy představují dvě ekvivalentní vyjádření druhého Newtonova zákona pro pohyb částice s konstantní hmotností v rámci klasické mechaniky.

Hybnost při velmi velkých rychlostech

Víme již, že pro částice s rychlostmi blízkými rychlosti světla nesouhlasí výsledky newtonovské mechaniky s experimenty. V takových případech musíme použít Einsteinovu speciální teorii relativity. Vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}$ zůstane v platnosti i v rámci této obecnější teorie *za předpokladu*, že změníme definici hybnosti takto:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Člen $\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ signalizuje relativistický charakter vztahu.

Tabulka 9.1 Některé definice a zákony v klasické mechanice

DEFINICE NEBO ZÁKON	JEDNA ČÁSTICE		SOUSTAVA ČÁSTIC	
Druhý Newtonův zákon	$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$	(5.1)	$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$	(9.16)
Hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	(9.22)	$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$	(9.26)
Druhý Newtonův zákon	$\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}$	(9.23)	$\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$	(9.28)

Rychlosti běžných makroskopických objektů, jakými jsou například míče, projektily nebo kosmické sondy, jsou ovšem mnohem menší než rychlost světla, takže veličina $(v/c)^2$ v rovnici (9.24) je prakticky nulová. V takovém případě lze (9.24) nahradit klasickou definicí (9.22) a Einsteinova speciální teorie relativity se redukuje na newtonovskou mechaniku. U elektronů a jiných subatomových částic lze však snadno dosáhnout rychlostí velmi blízkých rychlosti světla. Pak *je nutné* použít pro vyjádření hybnosti vztahu (9.24), a to dokonce i při rutinních technických výpočtech.

9.5 HYBNOST SOUSTAVY ČÁSTIC

Uvažujme nyní soustavu n částic, z nichž každá je charakterizována svou hmotností, rychlostí a hybností. Částice mohou vzájemně interagovat a okolní objekty na ně mohou působit vnějšími silami. Soustavě přisoudíme celkovou hybnost $\boldsymbol{P}$, definovanou jako vektorový součet hybností jednotlivých částic:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 + \ldots + \boldsymbol{p}_n = \\ = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n. \quad (9.25)$$

Porovnáme-li tento vztah s (9.19), vidíme, že platí

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T. \quad (9.26)$$

Hybnost soustavy částic můžeme tedy vyjádřit i jinak:

Hybnost soustavy částic je rovna součinu její celkové hmotnosti M a rychlosti jejího těžiště.

Derivací rov. (9.26) dostaneme

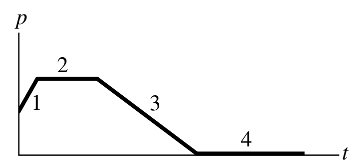
$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = M\frac{d\boldsymbol{v}_T}{dt} = M\boldsymbol{a}_T. \quad (9.27)$$

Porovnáním rov. (9.26) a (9.27) získáme nakonec ekvivalentní vyjádření věty o hybnosti ve tvaru

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}}. \quad (9.28)$$

Tento výsledek můžeme považovat za zobecnění druhého Newtonova zákona pro částici, zapsaného ve tvaru $(d\boldsymbol{p}/dt) = \sum \boldsymbol{F}$, na případ soustavy částic. (Uvědomme si, že jsme při formulaci tohoto zobecnění použili i třetího Newtonova zákona.) V tab. 9.1 jsou shrnuty důležité vztahy platné pro jednu částici a odpovídající vztahy odvozené pro soustavu částic.

KONTROLA 3: Na obrázku je znázorněna časová závislost hybnosti částice pohybující se po přímce. Na částici působí síla ve směru této přímky. (a) Seřaďte čtyři označené oblasti sestupně podle velikosti této síly. (b) V které oblasti je částice brzděna?



PŘÍKLAD 9.6

Obr. 9.10a zachycuje dětské autíčko o hmotnosti 2,0 kg před a za zatáčkou. Velikost jeho rychlosti před zatáčkou je $0{,}50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, za zatáčkou $0{,}40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určete odpovídající změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$.

ŘEŠENÍ: K vyjádření počáteční a výsledné hybnosti autíčka použijeme vztahu (9.26). Nejprve však musíme vyjádřit vektor jeho rychlosti $\boldsymbol{v}_{\text{i}}$ před zatáčkou a vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_{\text{f}}$ poté, co autíčko zatáčkou projelo. Zvolíme-li soustavu souřadnic podle obr. 9.10a, dostaneme

$$\boldsymbol{v}_{\text{i}} = -(0{,}50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{v}_{\text{f}} = (0{,}40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i}.$$

Pro odpovídající hybnosti $\boldsymbol{P}_{\text{i}}$ a $\boldsymbol{P}_{\text{f}}$ pak podle rov. (9.26) platí

$$\boldsymbol{P}_{\text{i}} = M\boldsymbol{v}_{\text{i}} = (2{,}0\,\text{kg})(-0{,}50\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j} = (-1{,}0\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

a

$$\boldsymbol{P}_{\text{f}} = M\boldsymbol{v}_{\text{f}} = (2{,}0\,\text{kg})(0{,}40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i} = (0{,}80\,\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i}.$$

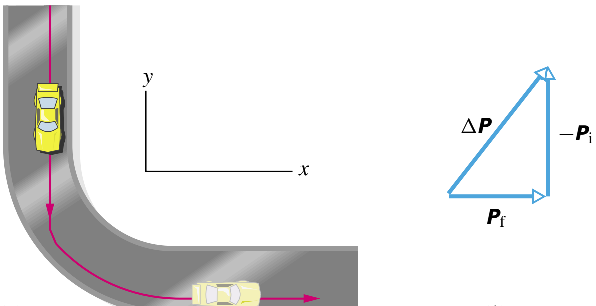
Tyto hybnosti mají různý směr. Proto *nemůžeme* vyjádřit změnu hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ jako pouhý rozdíl velikostí vektorů $\boldsymbol{P}_{\text{f}}$ a $\boldsymbol{P}_{\text{i}}$. Změna hybnosti je dána vektorovým vztahem

$$\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\text{f}} - \boldsymbol{P}_{\text{i}}, \quad (9.29)$$

tj.

$$\Delta \boldsymbol{P} = (0{,}80\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{i} - (-1{,}0\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}})\boldsymbol{j} = \\ = (0{,}8\boldsymbol{i} + 1{,}0\boldsymbol{j})\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Na obr. 9.10b jsou vyznačeny vektory $\Delta\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$. Připomeňme si, že $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ odečítáme od $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ tak, že k vektoru $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ přičteme vektor $-\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.



(*a*) (*b*)

Obr. 9.10 Příklad 9.6. (a) Autíčko v zatáčce závodní dráhy. (b) Změna hybnosti $\Delta\boldsymbol{P}$ autíčka je vektorovým rozdílem jeho výsledné hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ a počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$.

9.6 ZÁKON ZACHOVÁNÍ HYBNOSTI

Uvažujme soustavu částic, na kterou nepůsobí žádné vnější síly (soustava je izolovaná), anebo je výslednice vnějších sil nulová. Předpokládejme, že částice soustavu neopouštějí ani do ní nevstupují z okolí (soustava je uzavřená). S uvážením skutečnosti, že $\sum \boldsymbol{F}_\mathrm{ext} = \boldsymbol{0}$, dostaneme z rov. (9.28) vztah $\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\boldsymbol{P} = \text{konst.} \qquad (9.30)$$

Tento důležitý výsledek představuje **zákon zachování hybnosti** a lze jej vyjádřit také ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \qquad (9.31)$$

Indexy (i), resp. (f) označují hybnost soustavy v počátečním, resp. koncovém okamžiku. Vztahy (9.30) i (9.31) vyjadřují, že celková hybnost soustavy částic se nemění, je-li výslednice vnějších sil působících na soustavu nulová. Toto tvrzení zahrnuje i méně obecnou, avšak rovněž důležitou formulaci zákona zachování hybnosti: hybnost izolované soustavy částic je stálá.

Podobně jako v případě zákona zachování energie, formulovaného v kap. 8, sahá platnost zákona zachování hybnosti za rámec newtonovské mechaniky. Tento zákon totiž platí i v mikrosvětě, kde již s Newtonovými zákony nelze počítat. Nebude porušen ani pro soustavy částic pohybujících se velkými rychlostmi, pro něž je nutné nahradit newtonovskou mechaniku Einsteinovou teorií relativity, pokud hybnost vyjádříme vztahem (9.24) namísto (9.22).

Z rov. (9.26) ($\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T$) je zřejmé, že v případě konstantní celkové hybnosti $\boldsymbol{P}$ je stálá i rychlost těžiště soustavy $\boldsymbol{v}_T$. Znamená to, že jeho zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ je nulové, přesně ve shodě s větou o hybnosti uvedenou v tab. 9.1.

Vztahy (9.30) a (9.31) mají vektorový charakter a každý z nich je proto ekvivalentní třem skalárním rovnicím, vyjadřujícím zachování jednotlivých složek vektoru celkové hybnosti. V závislosti na silovém působení okolí na uvažovanou soustavu částic mohou nastat i situace, kdy se zachovává jen jedna nebo dvě složky celkové hybnosti:

Je-li některá složka výslednice *vnějších* sil působících na uzavřenou soustavu nulová, pak se odpovídající složka celkové hybnosti soustavy nemění.

Pro ilustraci si představme letící míč. Při zanedbatelném odporu prostředí je jedinou silou, která na míč při jeho pohybu působí, tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Ta ovšem směřuje svisle dolů. Svislá složka hybnosti míče se tedy mění, zatímco její vodorovná složka se zachovává.

Znovu připomeňme, že celkovou hybnost uzavřené soustavy lze změnit jen působením vnějších sil. Působení vnitřních sil může sice vést ke změnám hybnosti jednotlivých částí soustavy, ke změně celkové hybnosti však nepřispívá.

KONTROLA 4: Předmět spočívající v klidu na vodorovné dokonale hladké podložce explodoval a roztrhl se na dvě části. Jedna z nich se dala do pohybu podél kladné osy x. (a) Jaká byla celková hybnost soustavy po výbuchu? (b) Mohla se druhá část pohybovat po přímce svírající s osou x nenulový úhel? (c) Jaký byl směr vektoru hybnosti druhé části?

PŘÍKLAD 9.7

Záhadná bedna o hmotnosti $m = 6{,}0\,\mathrm{kg}$ klouže po dokonale hladké vodorovné podlaze podél kladné osy x. Velikost její rychlosti je $v = 4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Náhle bedna vybuchne a rozpadne se na dvě části: jedna z nich, o hmotnosti $m_1 = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, se dále pohybuje podél kladné osy x rychlostí o velikosti $v_1 = 8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaká je rychlost druhé části?

ŘEŠENÍ: Soustava částic, kterou sledujeme, je tvořena nejprve bednou a po jejím roztržení oběma jejími částmi. Jedná se sice o soustavu uzavřenou, nikoli však izolovanou. Na bednu samotnou i na každou její část působí totiž jednak tíhová síla, jednak tlaková síla podlahy. Všechny tyto síly jsou svislé a nepřispějí proto ke změně vodorovné složky celkové hybnosti soustavy. Síly, jimiž na sebe působí jednotlivé části bedny při explozi, neovlivní celkovou hybnost vůbec, neboť jsou vnitřními silami soustavy. Vodorovná složka hybnosti soustavy se tedy zachovává a platí pro ni vztah (9.31).

Počáteční hybnost soustavy je určena hybností bedny

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = m\boldsymbol{v}.$$

Hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_\mathrm{f}$ po roztržení bedny je dána vektorovým součtem hybností obou částí:

$$\boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 \quad \text{a} \quad \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_2\boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = \boldsymbol{P}_{1\mathrm{f}} + \boldsymbol{P}_{2\mathrm{f}} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Pro snazší vyjádření složek vektorů hybnosti spojíme soustavu souřadnic s podlahou a osu x zvolíme ve směru pohybu bedny. Všechny vektory hybnosti mají tedy směr osy x a jejich x-ové složky jsou dány přímo jejich velikostmi opatřenými příslušnými znaménky. Z (9.31) pak dostaneme

$$P_{\mathrm{i},x} = P_{\mathrm{f},x},$$

tj.

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}.$$

Uvážíme-li, že hmotnost druhé části bedny je $m_2 = m - m_1 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$, a dosadíme-li do obecných vztahů vstupní číselné údaje, dostaneme nakonec

$$(6{,}0\,\mathrm{kg})(4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) = (2{,}0\,\mathrm{kg})(8{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (4{,}0\,\mathrm{kg})v_{2x},$$

odkud

$$v_{2x} = 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Výsledná hodnota je kladná. Znamená to, že se druhá část bedny pohybuje rovněž ve směru kladné osy x.

PŘÍKLAD 9.8

Z děla o hmotnosti $M = 1\,300\,\mathrm{kg}$ byla ve vodorovném směru vypálena koule o hmotnosti $m = 72\,\mathrm{kg}$ (obr. 9.11). Rychlost koule vzhledem k dělu je $\boldsymbol{v}$ a má velikost $v = 55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při zpětnému rázu se dělo volně pohybuje vzhledem k Zemi rychlostí $\boldsymbol{V}$.

(a) Určete vektor $\boldsymbol{V}$.

ŘEŠENÍ: Uvažujme soustavu složenou ze dvou těles, děla a koule. Díky této volbě budou síly vzájemného působení děla a koule při výstřelu vnitřními silami soustavy a není třeba se jimi zabývat. Vodorovné složky vnějších sil působících na soustavu jsou nulové a vodorovná složka celkové hybnosti soustavy se při výstřelu zachovává. Rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ je rovna vektorovému součtu rychlosti koule vzhledem k dělu a rychlosti děla vzhledem k Zemi, tj.

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{Z} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{V}.$$

Soustavu souřadnic spojíme se zemským povrchem a osu x namíříme ve směru hlavně (na obr. 9.11 vpravo). Všechny rychlosti mají směr osy x. (V obrázku směřuje rychlost $\boldsymbol{V}$ doleva, její skutečnou orientaci však dosud neznáme.) Pak

$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x. \qquad (9.32)$$

Před výstřelem má soustava nulovou hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{0}$. Vodorovnou složku její hybnosti po výstřelu označme $P_{\mathrm{f},x}$. Podle (9.32) pro ni platí

$$P_{\mathrm{f},x} = MV_x + mv_{\mathrm{Z},x} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

První člen na pravé straně této rovnosti představuje vodorovnou složku hybnosti děla a druhý vodorovnou složku hybnosti koule vzhledem k Zemi.

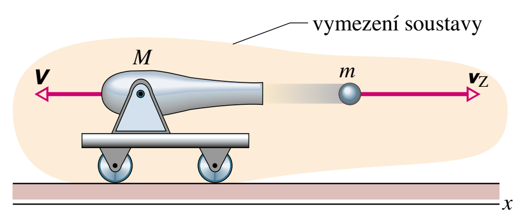
Vodorovná složka celkové hybnosti se ovšem nemění, tj. $P_{\mathrm{f},x} = P_{\mathrm{i},x}$. Platí tedy

$$0 = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Řešením této rovnice vzhledem k neznámé V_x dostaneme

$$V_x = -\frac{mv_x}{M+m} = -\frac{(72\,\mathrm{kg})(55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})}{(1\,300\,\mathrm{kg} + 72\,\mathrm{kg})} =$$
$$= -2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Záporné znaménko potvrzuje očekávání, že se dělo při zpětném rázu pohybuje v opačném směru než koule (v obr. 9.11 vlevo).



Obr. 9.11 Příklad 9.8. Dělo o hmotnosti M vypálilo kouli o hmotnosti m. Koule má rychlost $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$ vzhledem k Zemi a rychlost $\boldsymbol{v}$ vzhledem k dělu. Rychlost zpětného rázu děla vzhledem k Zemi je $\boldsymbol{V}$.

(b) Určete rychlost koule vzhledem k Zemi $\boldsymbol{v}_\mathrm{Z}$.

ŘEŠENÍ: Z rovnice (9.32) vyplývá

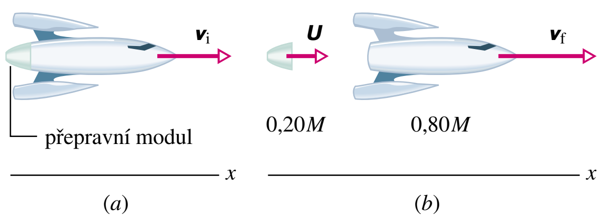
$$v_{\mathrm{Z},x} = v_x + V_x = (55\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) + (-2{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) =$$
$$= 52\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Vlivem zpětného rázu děla se koule pohybuje vzhledem k Zemi poněkud pomaleji, než kdyby ke zpětnému rázu nedocházelo.

Při řešení této úlohy jsme si mohli uvědomit důležitost vhodného vymezení studované soustavy částic (*dělo + koule*) i vhodné volby vztažné soustavy, vzhledem k níž vyjadřujeme složky vektorových veličin. (Ze dvou přirozeně se nabízejících možností, spojit soustavu souřadnic buď s povrchem Země, nebo s pohybujícím se dělem, jsme rozumně zvolili prvou možnost.)

PŘÍKLAD 9.9

Představme si vesmírnou loď o celkové hmotnosti M vybavenou přepravním modulem, která letí vesmírem rychlostí $v_i = 2\,100\,\mathrm{km/h}$ vzhledem ke Slunci (obr. 9.12a). Poté, co se přepravní modul o hmotnosti $0{,}20M$ odpoutá od lodi pomocí malého výbuchu (obr. 9.12b), pohybuje se loď o 500 km/h rychleji než modul. (Velikost relativní rychlosti lodi vůči modulu je tedy $v_{rel} = 500\,\mathrm{km/h}$.) Určete velikost rychlosti lodi v_f vzhledem ke Slunci.



Obr. 9.12 Příklad 9.9. (a) Vesmírná loď s přepravním modulem se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_i$. (b) Přepravní modul se odpoutal od lodi. Loď se nyní pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_f$ a modul rychlostí $\boldsymbol{U}$.

ŘEŠENÍ: Soustava tvořená lodí a modulem je uzavřená a izolovaná. Její celková hybnost se tedy zachovává, tj.

$$P_i = P_f. \tag{9.33}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy před a po odpoutání modulu. Soustava souřadnic je volena tak, že osa x směřuje ve směru pohybu lodi. Všechny vektorové veličiny popisující pohyb jednotlivých částí soustavy ve všech jeho fázích mají tedy nenulové pouze x-ové složky, které jsou navíc rovny velikostem příslušných vektorů. Platí

$$P_i = Mv_i. \tag{9.34}$$

Označíme-li symbolem $\boldsymbol{U}$ rychlost uvolněného modulu vzhledem ke Slunci, můžeme výslednou hybnost soustavy $\boldsymbol{P}_f$ vyjádřit vztahem

$$P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f. \tag{9.35}$$

První člen na pravé straně odpovídá hybnosti modulu a druhý hybnosti lodi.

Relativní rychlost $\boldsymbol{v}_{rel}$ lodi vzhledem k modulu je rovna rozdílu jejich rychlostí, tj.

$$v_{rel} = v_f - U.$$

Odtud

$$U = v_f - v_{rel}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.35) a využitím vztahů (9.33) a (9.34) dostaneme

$$Mv_i = 0{,}20M(v_f - v_{rel}) + 0{,}80Mv_f.$$

Odtud již snadno získáme výslednou rychlost lodi:

$$v_f = v_i + 0{,}20v_{rel},$$

tj.

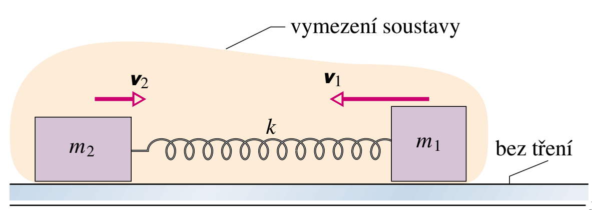
$$v_f = (2\,100\,\mathrm{km/h}) + 0{,}20(500\,\mathrm{km/h}) = \\ = 2\,200\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 5: V následující tabulce vztahující se k příkladu 9.9 jsou uvedeny některé hodnoty určující rychlost vesmírné lodi a přepravního modulu vzhledem ke Slunci, resp. relativní rychlost lodi vzhledem k modulu. Doplňte chybějící údaje.

	RYCHLOSTI (km/h)		RELATIVNÍ RYCHLOST (km/h)
	MODUL	LOĎ	
(a)	1 500	2 000	
(b)		3 000	400
(c)	1 000		600

PŘÍKLAD 9.10

Dvě tělesa na obr. 9.13 jsou spojena ideální pružinou a mohou se pohybovat po dokonale hladké vodorovné podložce. Jejich hmotnosti jsou m_1 a m_2. Tělesa nejprve oddálíme (pružina se napne) a poté uvolníme.



Obr. 9.13 Příklad 9.10. Dvě tělesa spojená pružinou a ležící na dokonale hladké vodorovné podložce nejprve oddálíme a poté uvolníme. Vektorový součet jejich hybností zůstává při jejich dalším pohybu nulový. V obrázku je vyznačen i způsob vymezení soustavy.

(a) Jaký je poměr rychlostí v_1/v_2 přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Sledujeme soustavu obou těles spojených pružinou. Vztažná soustava je spojena s podložkou a osa x směřuje podél pružiny. Počáteční hybnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ soustavy před uvolněním těles je nulová. V libovolném okamžiku po uvolnění těles lze hybnost soustavy zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{f} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2.$$

Ze zákona zachování hybnosti plyne rovnost $\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}$, tj.

$$\boldsymbol{0} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{9.36}$$

S ohledem na speciální volbu soustavy souřadnic můžeme psát

$$\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}} = -\frac{m_2}{m_1}. \tag{9.37}$$

Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že rychlosti těles mají v každém okamžiku opačný směr. Rov. (9.37) platí v libovolném okamžiku po uvolnění těles bez ohledu na jejich okamžitou rychlost.

(b) Jaký je poměr kinetických energií $E_{\mathrm{k},1}/E_{\mathrm{k},2}$ přibližujících se těles?

ŘEŠENÍ: Poměr $E_{k,1}/E_{k,2}$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_{1,x}^2}{\frac{1}{2}m_2v_{2,x}^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_{1,x}}{v_{2,x}}\right)^2.$$

Dosazením za $v_{1,x}/v_{2,x}$ z rov. (9.37) a úpravou dostaneme

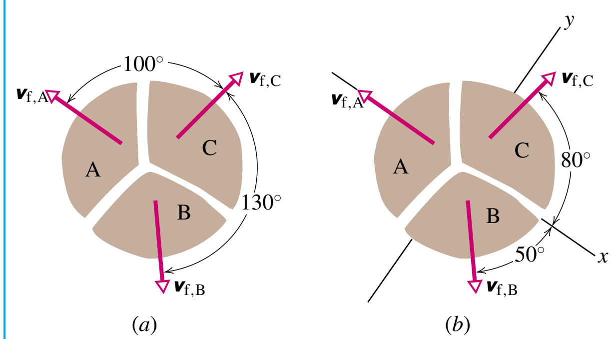
$$\frac{E_{\mathrm{k},1}}{E_{\mathrm{k},2}} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{9.38}$$

Zatímco se tělesa k sobě přibližují, zmenšuje se prodloužení spojovací pružiny. Pružná potenciální energie tak klesá ve prospěch kinetických energií těles. Hodnoty veličin $E_{\mathrm{k},1}$ a $E_{\mathrm{k},2}$ rostou, jejich poměr se však nemění. Podle rov. (9.38) je totiž v každém okamžiku určen podílem hmotností těles. Kinetická energie obou těles je největší ve chvíli, kdy je pružina opět nenapjatá. Poté se pružina začne stlačovat a pružná energie soustavy poroste na úkor energie kinetické. Vztah (9.38) však platí i v této fázi pohybu.

Vztahy (9.36) až (9.38) platí i v jiných situacích, kdy se dvě tělesa přitahují (nebo odpuzují). Můžeme je použít například při sledování pádu kamene k Zemi. V analogii s př. 9.10 a obr. 9.13 bude kámen představovat těleso 1 a Země těleso 2. Vzájemné působení kamene a Země je ovšem popsáno nikoli pružnými, nýbrž gravitačními silami. Vztažnou soustavu spojíme s těžištěm dvojice kámen + Země (takzvaná těžišťová soustava). Z rov. (9.36) je vidět, že vzhledem k takto zvolené vztažné soustavě jsou hybnosti kamene a Země v každém okamžiku stejně velké. Z rov. (9.37) a (9.38) je pak zřejmé, že padající kámen má vzhledem k těžišťové soustavě mnohem větší rychlost i kinetickou energii než Země, neboť $m_2 \gg m_1$.

PŘÍKLAD 9.11

Uvnitř tělesa o hmotnosti M, které leží na vodorovné dokonale hladké podlaze, je umístěna malá rozbuška. Výbuch roztrhne těleso na tři části, které se dají do pohybu po podlaze. Obr. 9.14 ukazuje pohled shora na situaci. Díl C o hmotnosti $0{,}30M$ má po výbuchu rychlost o velikosti $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 9.14 Příklad 9.11. Tři díly rozbitého tělesa se pohybují různými směry po dokonale hladké vodorovné podlaze. (a) Pohled na situaci shora. (b) Totéž s vyznačením soustavy souřadnic.

(a) Jaká je rychlost dílu B o hmotnosti $0{,}20M$?

ŘEŠENÍ: Zvolme soustavu souřadnic podle obr. 9.14b: záporný směr osy x splývá se směrem vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,A}}$. Osa x svírá s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,C}}$ úhel 80° a s vektorem $\boldsymbol{v}_{\mathrm{f,B}}$ úhel 50°.

Obě složky celkové hybnosti soustavy, tvořené nejprve tělesem a po rozpadu všemi jeho částmi, se zachovávají. Síly působící při výbuchu jsou totiž vnitřními silami soustavy a vnější síly (tíhová a normálová) jsou kolmé k souřadnicové rovině xy. Při výpočtu rychlosti dílu B vyjdeme ze zákona zachování pro y-ovou složku celkové hybnosti:

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y}. \tag{9.39}$$

Indexy (i) a (f) symbolizují jako obvykle počáteční a koncový stav soustavy.

Složky počáteční hybnosti $\boldsymbol{P}_\mathrm{i}$ jsou nulové, neboť těleso bylo zpočátku v klidu. Abychom získali $P_{\mathrm{f},y}$, vyjádříme y-ové složky výsledné hybnosti všech dílů tělesa:

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{f,A},y} &= 0,\\
p_{\mathrm{f,B},y} &= -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B},y} = -0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ,\\
p_{\mathrm{f,C},y} &= 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C},y} = 0{,}30Mv_{\mathrm{f,C}}\sin 80^\circ.
\end{aligned}$$

(Uvědomme si, že vzhledem k speciální volbě os soustavy souřadnic je $p_{\mathrm{f,A},y} = 0$.) Vztah (9.39) lze tedy přepsat do tvaru

$$P_{\mathrm{i},y} = P_{\mathrm{f},y} = p_{\mathrm{f,A},y} + p_{\mathrm{f,B},y} + p_{\mathrm{f,C},y}.$$

Dosazením $v_{\mathrm{f,C}} = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ dostaneme

$$0 = 0 - 0{,}20Mv_{\mathrm{f,B}}\sin 50^\circ + (0{,}30M)(5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})\sin 80^\circ$$

a odtud

$$v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 9{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaká je rychlost části B?

ŘEŠENÍ: Vzhledem k tomu, že se zachovává i x-ová složka celkové hybnosti, můžeme psát

$$P_{i,x} = P_{f,x}. \tag{9.40}$$

Platí $P_{i,x} = 0$ (těleso bylo zpočátku v klidu). Vyjádříme x-ové složky výsledných hybností jednotlivých dílů tělesa (díl A má hmotnost $0{,}50M$):

$$\begin{aligned} p_{f,A,x} &= -0{,}50M v_{f,A}, \\ p_{f,B,x} &= 0{,}20M v_{f,B,x} = 0{,}20M v_{f,B} \cos 50°, \\ p_{f,C,x} &= 0{,}30M v_{f,C,x} = 0{,}30M v_{f,C} \cos 80°. \end{aligned}$$

Vztah (9.40) nabývá tvaru

$$P_{i,x} = P_{f,x} = p_{f,A,x} + p_{f,B,x} + p_{f,C,x}.$$

Dosadíme $v_{f,C} = 5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $v_{f,B} = 9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a dostaneme

$$0 = -0{,}50M v_{f,A} + 0{,}20M(9{,}64\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cos 50° + \\ + 0{,}30M(5{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cos 80°.$$

Odtud již získáme velikost rychlosti dílu A:

$$v_{f,A} = 3{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

KONTROLA 6: Předpokládejme, že těleso v př. 9.11 je urychlováno ve směru záporné osy y (pohybuje se například po nakloněné rovině). Rozhodněte, zda se zachovává (a) x-ová složka jeho celkové hybnosti (podle (9.40)) a (b) y-ová složka jeho celkové hybnosti (vztah (9.39)).

RADY A NÁMĚTY

Bod 9.2: *Zachování hybnosti*

Je vhodné vrátit se k bodu 8.2, který se týkal zákona zachování mechanické energie. Otázky, které v něm byly formulovány, stojí za zamyšlení i v souvislosti s úvahami o zákonu zachování hybnosti.

Při výpočtech vycházejících ze zákona zachování hybnosti se především vždy ujistíme, zda soustava, pro niž chceme zákon zachování hybnosti použít, je uzavřená a izolovaná. *Uzavřenost* znamená, že si soustava nevyměňuje částice se svým okolím (žádná částice neprojde ze soustavy do okolí ani naopak). Soustavu považujeme za *izolovanou*, je-li její interakce s okolními objekty zanedbatelná. Z hlediska zákona zachování hybnosti se jako izolovaná chová i soustava, na kterou její okolí působí silami s nulovou výslednicí. Není-li soustava uzavřená nebo izolovaná, vztahy (9.30) a (9.31) neplatí.

Připomeňme si, že hybnost je vektorová veličina. Má tedy smysl uvažovat o zachování každé z jejích složek odděleně. Daná složka celkové hybnosti soustavy se zachovává za předpokladu, že odpovídající složka výslednice vnějších sil, jimiž na částice soustavy působí její okolí, je nulová. V př. 9.8 byla nulová vodorovná složka výslednice vnějších sil působících na soustavu dělo + koule. Zachovávala se tedy vodorovná složka hybnosti soustavy. Svislá složka výsledné vnější síly ovšem nulová nebyla, neboť na letící kouli působila tíhová síla. Svislá složka hybnosti soustavy byla proměnná.

Vybereme dva vhodné stavy soustavy (počáteční a koncový) a vyjádříme její celkovou hybnost v každém z nich. Přitom bychom si měli stále uvědomovat, v jaké vztažné soustavě pracujeme. Musíme dát pozor, abychom do celkové hybnosti neopomněli zahrnout hybnost některé z částí studované soustavy, nebo naopak do ní omylem nezapočítali hybnost objektů, které do soustavy nepatří. Tak třeba v př. 9.8 jsme se nejprve museli rozhodnout, zda použijeme vztažnou soustavu spojenou se Zemí, nebo s dělem, které se pohybuje vlivem zpětného rázu.

Nakonec výrazy pro $\boldsymbol{P}_i$ a $\boldsymbol{P}_f$ porovnáme a řešením získané rovnice najdeme neznámou veličinu, požadovanou v zadání úlohy.

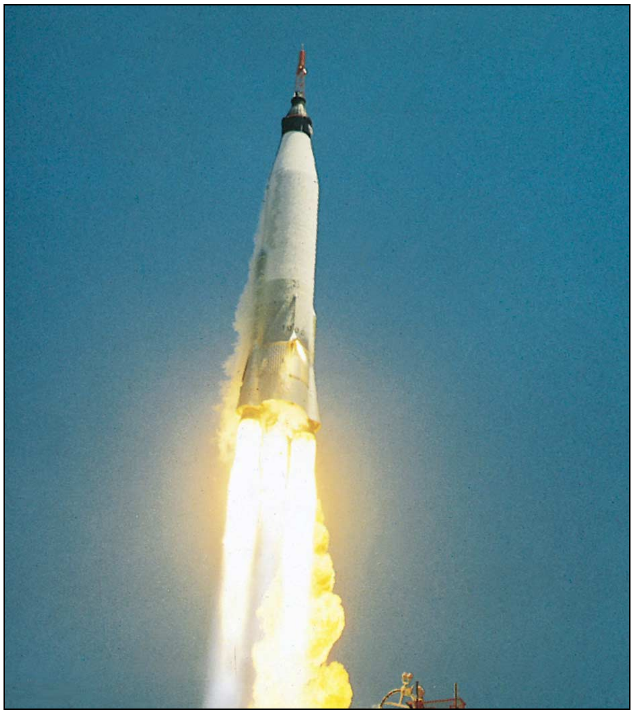
9.7 SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ: RAKETA

Prozatím jsme se zabývali soustavami, jejichž celková hmotnost byla konstantní. Tento předpoklad však nebývá vždy splněn. Uvažujme například startující raketu (obr. 9.15). Převážnou část její hmoty před startem tvoří pohonné látky, které se postupně spalují a proudí ven tryskou raketového motoru.

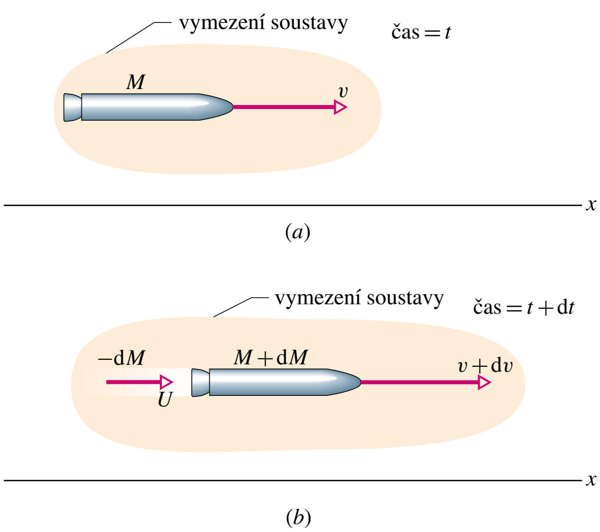
Pro popis pohybu rakety s proměnnou hmotností použijeme větu o hybnosti, nikoli však pro raketu samotnou, nýbrž pro soustavu, do níž kromě rakety zahrneme i zplodiny vzniklé spálením pohonných hmot, které raketu opouštějí. Hmotnost *takto vymezené soustavy* se *nemění*.

Výpočet zrychlení rakety

Sledujme raketu v pozdější fázi jejího pohybu v meziplanetárním prostoru, kde zanedbáme gravitační sílu i odpor prostředí. Přímočarý pohyb rakety budeme popisovat



Obr. 9.15 Start rakety v projektu Mercury



Obr. 9.16 (a) Zrychlený pohyb rakety o hmotnosti M sledujeme v inerciální vztažné soustavě. Obrázek odpovídá okamžiku t. (b) Raketa v okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Obrázek znázorňuje i odpad vzniklý spálením pohonných hmot v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a vypuzený do prostoru.

v inerciální vztažné soustavě a souřadnicovou osu x zvolíme ve směru tohoto pohybu. Označme M hmotnost rakety a v její rychlost (x-ová složka) v libovolném okamžiku t (obr. 9.16a).

Obr. 9.16b zachycuje situaci v pozdějším okamžiku $t + \mathrm{d}t$. Raketa má nyní rychlost $v + \mathrm{d}v$ a její hmotnost je $M + \mathrm{d}M$. Uvědomme si, že změna hmotnosti $\mathrm{d}M$ je *záporná*. Zplodiny vzniklé spálením pohonných látek v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ mají hmotnost $-\mathrm{d}M$ a opouštějí raketu rychlostí U měřenou ve zvolené inerciální vztažné soustavě.

Uvažujme nyní soustavu tvořenou raketou a zplodinami, které ji opustily během časového intervalu $\mathrm{d}t$. Tato soustava je uzavřená a izolovaná. Její hybnost se tedy v intervalu $\mathrm{d}t$ zachovává a platí

$$P_\mathrm{i} = P_\mathrm{f}. \tag{9.41}$$

Indexy (i) a (f) označují celkovou hybnost soustavy na začátku a na konci časového intervalu délky $\mathrm{d}t$. Rov. (9.41) můžeme přepsat do tvaru

$$Mv = -\mathrm{d}M\,U + (M + \mathrm{d}M)(v + \mathrm{d}v), \tag{9.42}$$

kde první člen na pravé straně představuje hybnost zplodin vzniklých v časovém intervalu $\mathrm{d}t$ a druhý člen značí hybnost rakety na konci tohoto intervalu.

Vztah (9.42) lze ještě zjednodušit zavedením relativní rychlosti u zplodin vzhledem k raketě. Tato rychlost je rozdílem rychlosti $v + \mathrm{d}v$ rakety na konci intervalu $\mathrm{d}t$ a rychlosti zplodin U:

$$u = (v + \mathrm{d}v) - U,$$

tj.

$$U = v + \mathrm{d}v - u. \tag{9.43}$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (9.42) dostáváme po malé úpravě

$$-\mathrm{d}M\,u = M\,\mathrm{d}v. \tag{9.44}$$

Vydělením rov. (9.44) délkou časového intervalu $\mathrm{d}t$ dostaneme:

$$-\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}u = M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{9.45}$$

Výraz $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$ vyjadřuje rychlost ubývání hmotnosti rakety. Označme jej symbolem $-R$, kde R ($R > 0$) je rychlost spotřeby paliva v kg/s. Nakonec si uvědomme, že výraz $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ v rov. (9.45) představuje zrychlení a rakety a přepíšeme rovnici ve tvaru

$$Ma = Ru \quad \text{(rovnice Měščerského).} \tag{9.46}$$

Rovnice (9.46) platí v libovolném okamžiku pro okamžité hodnoty hmotnosti M rakety, rychlosti R spotřeby paliva a zrychlení a rakety.

Její levá strana má rozměr síly ($kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2} = N$) a závisí pouze na vlastnostech raketového motoru (na rychlosti R spotřeby paliva a na rychlosti u zplodin vzhledem k raketě). Výraz Ru na pravé straně rovnice nazveme **tahem** raketového motoru a označíme jej symbolem T. Rov. (9.46) získává při tomto označení formální podobu druhého Newtonova zákona $Ma = T$, kde a je zrychlení rakety a M její hmotnost.

Výpočet rychlosti rakety

Položme si nyní otázku, jak se mění rychlost rakety při spalování pohonných hmot. Odpověď získáme integrací rovnice (9.44) upravené na tvar

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Dostaneme

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -u \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}.$$

M_i a M_f představují počáteční a výslednou hmotnost rakety. Výpočtem integrálů dostaneme vztah

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f} \qquad \text{(vzorec Ciolkovského)}, \qquad (9.47)$$

který vyjadřuje změnu rychlosti rakety při změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f.* Dokumentuje rovněž výhodnost konstrukce vícestupňových raket, jejichž hmotnost M_f klesá nejen spalováním pohonných hmot, ale i uvolněním vyhořelých stupňů. Ideální raketu by v cíli jejího letu měl tvořit pouze užitečný náklad.

PŘÍKLAD 9.12

Raketa, jejíž počáteční hmotnost M_i je 850 kg, spotřebovává palivo rychlostí $R = 2{,}3\,kg{\cdot}s^{-1}$. Zplodiny opouštějí raketu relativní rychlostí $u = 2\,800\,m{\cdot}s^{-1}$.

(a) Jaký je tah motoru?

ŘEŠENÍ: Tah motoru je

$$T = Ru = (2{,}3\,kg{\cdot}s^{-1})(2\,800\,m{\cdot}s^{-1}) = $$
$$= 6\,440\,N \doteq 6\,400\,N. \qquad \text{(Odpověď)}$$

(b) Jaké je počáteční zrychlení rakety?

ŘEŠENÍ: Z pohybové rovnice rakety dostáváme

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{(6\,440\,N)}{(850\,kg)} = 7{,}6\,m{\cdot}s^{-2}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Při startu rakety z povrchu Země musí být tah T motoru větší než tíhová síla, kterou na raketu působí Země. Ta má v našem případě velikost $M_i g = (850\,kg)(9{,}8\,m{\cdot}s^{-2}) = 8\,300\,N$. Tah motoru je však pouhých $T = 6\,400\,N$, takže naše raketa nemůže odstartovat. Může však být do meziplanetárního prostoru vynesena nějakou silnější raketou.

(c) Předpokládejme, že naše raketa startuje z vesmírné lodi, která se již nachází v meziplanetárním prostoru. Gravitační síly tedy můžeme zanedbat. Po vyčerpání paliva má raketa hmotnost $M_f = 180\,kg$. Jaká je její rychlost vzhledem k lodi v tomto okamžiku? Předpokládejme, že hmotnost vesmírné lodi je tak velká, že start rakety její pohyb neovlivní.

ŘEŠENÍ: Počáteční rychlost rakety vzhledem k vesmírné lodi je $v_i = 0$. Z rov. (9.47) dostaneme

$$v_f = u \ln \frac{M_i}{M_f} =$$
$$= (2\,800\,m{\cdot}s^{-1}) \ln \frac{(850\,kg)}{(180\,kg)} =$$
$$= (2\,800\,m{\cdot}s^{-1}) \ln 4{,}72 \doteq 4\,300\,m{\cdot}s^{-1}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Všimněme si, že výsledná rychlost rakety může převýšit relativní rychlost zplodin u vzhledem k raketě.

9.8 VNĚJŠÍ SÍLY A ZMĚNY VNITŘNÍ ENERGIE

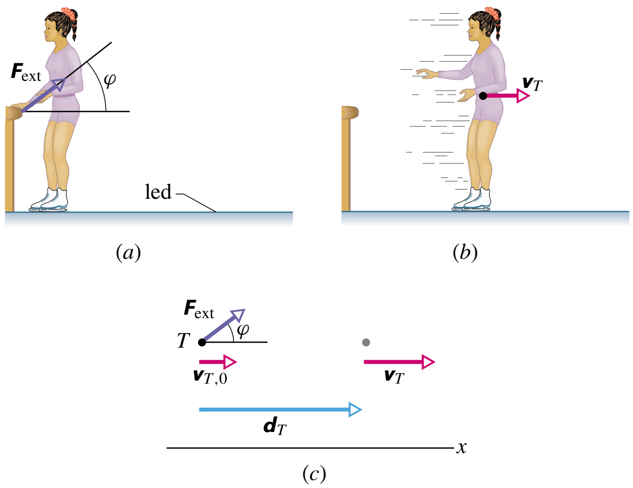
Krasobruslařka na obr. 9.17a se odráží od mantinelu. Ten na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{ext}$, svírající s vodorovnou rovinou úhel φ. Bruslařka, která byla zpočátku v klidu, získá vlivem této síly určitou rychlost, s níž se pak vzdaluje od mantinelu (obr. 9.17b). Působením síly se tedy zvýšila kinetická energie bruslařky.

Případ bruslařky se liší od předchozích příkladů, kdy docházelo ke změně kinetické energie tělesa vlivem působení vnějších sil, ve dvou podstatných rysech:

1. V předchozích příkladech byla rychlost všech částí tělesa stejná (těleso jsme mohli při studiu jeho pohybu považovat za bodový objekt). V případě bruslařky již tomu tak není. Například pohyb jejích paží se liší od pohybu jejího trupu.

2. V předchozích příkladech se kinetická energie tělesa měnila vlivem působení vnějších sil na úkor energie okolí. V případě bruslařky dochází ke změně její kinetické energie na úkor energie vnitřní (biochemické). Vnější síla v tomto případě nekoná práci, neboť vektor posunutí jejího působiště je po celou dobu jejího působení nulový (síla působí na ruku bruslařky v pevném bodě mantinelu). Práci konají síly napínající svalstvo, tj. *vnitřní síly soustavy*.

* Symbol „ln" v rovnici (9.47) značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu e (= 2,718 …).



Obr. 9.17 (a) Bruslařka se odráží od mantinelu, který na ni působí silou $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$. (b) Její těžiště má v okamžiku ztráty kontaktu s mantinelem rychlost $\boldsymbol{v}_T$. (c) Vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na bruslařku při odrazu od mantinelu je zakreslena jako síla působící na její těžiště. Při posunutí těžiště o vektor $\boldsymbol{d}_T$ se jeho rychlost změní z $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na $\boldsymbol{v}_T$. Tato změna je určena vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$.

Zdá se, že tyto rozdíly, odlišující popsaný případ bruslařky od všech ostatních příkladů změny kinetické energie těles, kterými jsme se prozatím zabývali, jsou naprosto zásadní. Přesto však je možné *formálně* vyjádřit změnu kinetické energie bruslařky jako práci síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na částici, jejímž pohybem lze nahradit pohyb bruslařky jako *celku*, tj. její **posuvný** neboli **translační** pohyb. Touto „náhradní“ částicí je těžiště bruslařky. Situaci ukazuje obr. 9.17c. Předpokládejme, že těžiště bruslařky se pohybuje vodorovně. Svislá složka výslednice sil působících na bruslařku, daná tíhovou silou $M\boldsymbol{g}$, tlakovou silou ledové plochy $\boldsymbol{N}$ a svislým průmětem síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je tedy nulová. Vodorovná složka $F_{\text{ext}} \cos\varphi$ síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ určuje vodorovné zrychlení $\boldsymbol{a}_T$ těžiště. Za dobu, po kterou tato síla působí, se rychlost těžiště změní z počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_{T,0}$ na výslednou rychlost $\boldsymbol{v}_T$. Odpovídající posunutí těžiště bruslařky označme $\boldsymbol{d}_T$. Podle rov. (2.16) je velikost výsledné rychlosti těžiště dána vztahem

$$v_T^2 = v_{T,0}^2 + 2a_{T,x}d_T. \tag{9.48}$$

Po vynásobení této rovnice hmotností M a malé úpravě dostaneme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_T. \tag{9.49}$$

Levá strana rov. (9.49) představuje změnu kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ těžiště bruslařky z počáteční hodnoty $(E_{\text{k},T})_{\text{i}}$ na výslednou hodnotu $(E_{\text{k},T})_{\text{f}}$. Vzhledem k platnosti věty o hybnosti (druhého Newtonova zákona pro těžiště) můžeme nahradit součin $Ma_{T,x}$ vodorovnou složkou vnější síly $F_{\text{ext}} \cos\varphi$:

$$\Delta E_{\text{k},T} = F_{\text{ext}}d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Tento *formální* výsledek lze interpretovat obvyklým způsobem: Kinetická energie příslušná posuvnému pohybu soustavy se mění na úkor práce, kterou koná výslednice vnějších sil umístěná v jejím těžišti.

Zdůrazněme ještě jednou důležitý aspekt problému bruslařky: Vnější síla, která na ni působí při odrazu od mantinelu, ve skutečnosti *nekoná práci*, neboť její skutečné působiště je v klidu. Změna kinetické energie $\Delta E_{\text{k},T}$ musí tedy být doprovázena změnou vnitřní energie ΔE_{int} soustavy. (Předpokládáme, že vnitřní energie bruslařky se změnila jen o biochemickou energii jejích svalů.) V souladu s obecnou formulací zákona zachování energie v kap. 8 platí

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta E_{\text{k},T}. \tag{9.51}$$

Dosazením z rov. (9.50) do (9.51) dostaneme změnu vnitřní energie bruslařky:

$$\Delta E_{\text{int}} = -F_{\text{ext}}d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Ze vztahů (9.51) a (9.52) je tedy nakonec zřejmé, že kinetická energie bruslařky se mění na úkor její energie vnitřní. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $F_{\text{ext}}d_T \cos\varphi$.

Představme si nyní ještě obecnější situaci, při níž se bude těžiště bruslařky pohybovat i ve svislém směru. Bude se při tom měnit i tíhová potenciální energie *izolované* soustavy bruslařka + Země. Označíme-li změnu tíhové potenciální energie jako $\Delta E_{\text{p},T}$, můžeme psát zákon zachování energie ve tvaru

$$\Delta E_{\text{k},T} + \Delta E_{\text{p},T} + \Delta E_{\text{int}} = 0. \tag{9.53}$$

Změna vnitřní energie soustavy je dána prací sil napínajících svalstvo bruslařky. Tu můžeme opět formálně zapsat jako práci výslednice vnějších sil působících na bruslařku, umístěné však do jejího těžiště: zvolme soustavu souřadnic tak, aby osa x měla směr vodorovného posunutí těžiště bruslařky, osa y nechť je svislá. Zrychlení těžiště označme $\boldsymbol{a}_T$ a vektor jeho posunutí $\boldsymbol{d}_T$. Stejným postupem, jakým jsme odvodili vztah (9.49), získáme změnu kinetické energie bruslařky ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = Ma_{T,x}d_{T,x} + Ma_{T,y}d_{T,y}.$$

Podle věty o hybnosti je zrychlení těžiště bruslařky určeno výslednicí všech vnějších sil, které na ni působí, tj. tíhové síly, tlakové síly ledové plochy a tlakové síly mantinelu:

$$M\boldsymbol{a}_T = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{ext}}.$$

Této vektorové rovnici odpovídají dvě skalární rovnice pro její složky:

$$Ma_{T,x} = F_{\text{ext}}\cos\varphi, \quad Ma_{T,y} = -Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi.$$

Pro změnu kinetické energie bruslařky tedy dostáváme

$$\tfrac{1}{2}Mv_T^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{T,0}^2 = F_{\text{ext}}\cos\varphi d_{T,x} + \\ + (-Mg + N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y}.$$

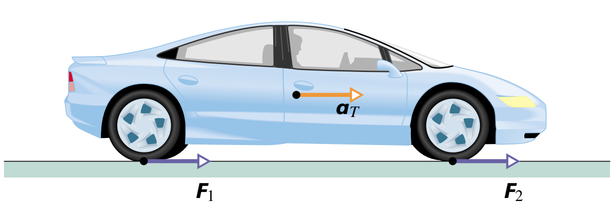
Výraz $-Mgd_{T,y}$ představuje práci tíhové síly, tj. záporně vzatou změnu tíhové potenciální energie soustavy bruslařka + Země. Porovnáme-li předchozí vztah s rov. (9.53), můžeme psát

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} - \\ -F_{\text{ext}}\cos\varphi d_{T,x} - (N + F_{\text{ext}}\sin\varphi)d_{T,y} = 0,$$

tj.

$$\Delta E = \Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} = (\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \quad (9.54)$$

ΔE značí změnu mechanické energie soustavy bruslařka + + Země, která se podle rov. (9.54) mění na úkor její vnitřní energie. Formálně lze tuto změnu vyjádřit výrazem $(\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{d}_T$. (Uvědomme si, že síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí mantinel na ruku bruslařky, se stala vnitřní silou působící v nově zvolené izolované soustavě bruslařka+Země. Odpovídající reakcí je síla $-\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, jíž působí bruslařka na mantinel. Vnitřními silami nové soustavy jsou i tíhové síly $M\boldsymbol{g}$ a $-M\boldsymbol{g}$, vyjadřující gravitační interakci bruslařky se Zemí, a tlakové síly $\boldsymbol{N}$ a $-\boldsymbol{N}$, popisující vzájemné působení bruslařky a ledové plochy.)



Obr. 9.18 Automobil, který je zpočátku v klidu, se rozjíždí směrem vpravo. Silnice působí na povrch pneumatik třecími silami, z nichž dvě $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ jsou v obrázku vyznačeny. Součet těchto sil určuje výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo.

Není-li vnější síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, nahradíme ji ve vztazích (9.52) a (9.54) odpovídající průměrnou veličinou $\overline{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$.

Věnujme bruslařce ještě poslední úvahu a zkusme si uvědomit, jakým způsobem dochází ke vzniku silového působení mantinelu na její ruku. Bruslařka položí pokrčenou paži na mantinel a začne se od něj „odtlačovat“ napínáním svalů. Svou vůlí tedy řídí vzájemné působení částí soustavy, ovlivňuje *vnitřní* síly. Ruka tlačí na mantinel určitou silou. Podle třetího Newtonova zákona působí naopak mantinel na ruku bruslařky silou opačnou. Tato síla, kterou jsme označili symbolem $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, je ovšem z hlediska bruslařky silou *vnější*.

Vztahy (9.52) a (9.54) platí i pro jiné objekty, u nichž dochází, podobně jako u bruslařky, k vyvolání vnějších sil, či jejich změn prostřednictvím změn sil vnitřních. Pokud tyto vnější síly nekonají práci (například proto, že jejich působiště je v klidu), mění se mechanická energie takových soustav pouze na úkor vnitřní energie.

Uvažujme například rozjíždějící se automobil. Motor pohání kola, jejichž pneumatiky působí na vozovku třecími silami směřujícími proti zrychlení automobilu. Podle třetího Newtonova zákona působí vozovka na povrch pneumatik rovněž třecími silami $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$, avšak ve směru zrychlení (obr. 9.18). Tyto třecí síly tvoří výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ působící na vozidlo (tíhová a normálová síla jsou kompenzovány) a udílí jeho těžišti zrychlení $\boldsymbol{a}_T$. Vnitřní energie automobilu (uvolněná spalováním paliva v motoru) klesá ve prospěch jeho energie kinetické. Je-li síla $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ konstantní, lze při daném posunutí $\boldsymbol{d}_T$ těžiště vozidla snadno vyjádřit změnu $\Delta E_{k,T}$ kinetické energie pomocí rov. (9.54), položíme-li $\Delta E_{p,T} = 0$ a uvážíme-li, že výsledná vnější síla svírá s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 0°$.

Vztah (9.54) platí i v situaci, kdy rozjetý automobil brzdí. Výsledná vnější síla je nyní orientována proti směru pohybu a svírá tedy s vektorem posunutí těžiště úhel $\varphi = 180°$. Kinetická energie těžiště vozidla klesá ve prospěch vnitřní energie (zahřívá se brzdové obložení).

PŘÍKLAD 9.13

Převrátí-li se brouk kovařík náhodou na záda, pomůže si obvykle tak, že prudce vyklene záda a vyskočí vzhůru. Při tom se energie uložená ve svalech „přemění“ v kinetickou energii. Tento pohyb je doprovázen slyšitelným cvaknutím, s kterým souvisí anglický název brouka („clik beetle“). Videozáznam výskoku brouka ukázal, že se jeho těžiště během vyklenutí zad těsně před výskokem zvedlo o $d_T = 0{,}77$ mm a při výskoku dosáhlo výšky $h = 0{,}30$ m. Hmotnost brouka je $m = 4{,}0\cdot10^{-6}$ kg. Určete velikost průměrné síly $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$, kterou při výskoku působila podložka na záda brouka.

ŘEŠENÍ: Soustava brouk + Země je izolovaná. Její celková energie se tedy zachovává. Aplikujme tento zákon zachování na časový interval T měřený od počátku výskoku do okamžiku, kdy těžiště brouka dosáhlo maximální výšky h. Během doby T dojde k následujícím změnám jednotlivých druhů energie: (1) Změna kinetické energie $\Delta E_{k,T}$ je nulová, protože na počátku i na konci uvažovaného časového intervalu je brouk v klidu. (2) Změna $\Delta E_{p,T}$ tíhové potenciální energie soustavy brouk + Země je rovna mgh. (3) Změna vnitřní energie ΔE_{int} svalstva brouka, která během „přípravy k výskoku" vyvolá vnější sílu $\boldsymbol{F}_{ext}$.

Vztah vyjadřující skutečnost, že se energie soustavy brouk + Země v průběhu časového intervalu T zachovává, má tvar

$$\Delta E_{k,T} + \Delta E_{p,T} + \Delta E_{int} = 0.$$

Dosazením za $\Delta E_{k,T}$ a $\Delta E_{p,T}$ dostaneme

$$0 + mgh + \Delta E_{int} = 0,$$

tj.

$$\Delta E_{int} = -mgh. \tag{9.55}$$

Dosadíme z rov. (9.52) do (9.55):

$$\overline{F}_{ext} d_T \cos\varphi = mgh,$$

odkud

$$\overline{F}_{ext} = \frac{mgh}{d_T \cos\varphi}. \tag{9.56}$$

Úhel φ mezi silou $\boldsymbol{F}_{ext}$ směřující vzhůru a posunutím $\boldsymbol{d}_T$ je 0°. Pro zadané hodnoty nakonec dostaneme

$$\overline{F}_{ext} = \frac{(4{,}0\cdot10^{-6}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(0{,}30\,\mathrm{m})}{(7{,}7\cdot10^{-4}\,\mathrm{m})\cos 0°} = 1{,}5\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}. \quad \text{(Odpověď)}$$

Tato síla je malá pouze zdánlivě. Velikost zrychlení, které uděluje tělu brouka při výskoku, dosahuje totiž hodnoty zhruba $380g$.

PŘEHLED & SHRNUTÍ

Těžiště

Těžiště soustavy částic je bod o souřadnicích

$$x_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\quad y_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\quad z_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i, \tag{9.5}$$

tj.

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{9.8}$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Je-li hmota soustavy rozložena spojitě, je poloha těžiště dána vztahy

$$x_T = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m,\quad y_T = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m,\quad z_T = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m. \tag{9.9}$$

Je-li hustota tělesa (hmotnost jednotkového objemu) konstantní, lze rov. (9.9) přepsat ve tvaru

$$x_T = \frac{1}{V}\int x\,\mathrm{d}V,\quad y_T = \frac{1}{V}\int y\,\mathrm{d}V,\quad z_T = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}V, \tag{9.11}$$

kde V je objem tělesa o hmotnosti M.

Věta o hybnosti pro soustavu částic

Pohyb těžiště libovolné soustavy částic se řídí **větou o hybnosti**:

$$M\boldsymbol{a}_T = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.16}$$

Symbolem $\sum \boldsymbol{F}_{ext}$ jsme označili výslednici *vnějších* sil působících na soustavu, M je celková hmotnost soustavy a $\boldsymbol{a}_T$ zrychlení jejího těžiště.

Hybnost a věta o hybnosti

Hybnost jedné částice $\boldsymbol{p}$ je vektorová veličina definovaná vztahem

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{9.22}$$

Druhý Newtonův zákon pak můžeme pomocí hybnosti přepsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{9.23}$$

Pro soustavu částic mají předchozí vztahy tvar

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_T \tag{9.26}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{F}_{ext}. \tag{9.28}$$

Relativistická hybnost

Relativistická definice hybnosti má tvar

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{9.24}$$

Tuto definici, jejíž platnost je obecná, je třeba použít pro částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla c. Pro $v \ll c$ přejde rov. (9.24) v (9.22).

Zákon zachování hybnosti

Je-li soustava izolovaná, tj. nepůsobí-li na ni žádné *vnější* síly, je její hybnost $\boldsymbol{P}$ trvale konstantní:

$$\boldsymbol{P} = \text{konst}, \tag{9.30}$$

tj.

$$\boldsymbol{P}_\mathrm{i} = \boldsymbol{P}_\mathrm{f}. \tag{9.31}$$

Indexy (i) a (f) označují hybnost soustavy $\boldsymbol{P}$ v počátečním a koncovém okamžiku časového intervalu, v němž soustavu sledujeme. Vztahy (9.30) a (9.31) představují ekvivalentní formulace **zákona zachování hybnosti**.

Soustavy s proměnnou hmotností

Při popisu pohybu soustavy s proměnnou hmotností postupujeme obvykle tak, že zkoumanou soustavu považujeme za součást rozšířené soustavy, vymezené tak, aby byla uzavřená (tj. *měla konstantní hmotnost*) a izolovaná. Pro ni pak použijeme zákon zachování hybnosti. V případě rakety bude rozšířená soustava obsahovat jak raketu, tak i zplodiny vzniklé spalováním pohonných hmot, které raketu opouštějí. Je-li takto zvolená rozšířená soustava izolovaná, lze ukázat, že se okamžité zrychlení rakety řídí rovnicí Meščerského

$$Ma = Ru, \tag{9.46}$$

kde M je okamžitá hmotnost rakety (včetně zbytku pohonných hmot), R je rychlost spotřeby paliva (v kg/s) a u představuje rychlost uvolňovaných zplodin vzhledem k raketě. Člen Ru se nazývá **tah** raketového **motoru**. Předpokládejme, že rychlost rakety (složka ve směru pohybu) se změnila z v_i na v_f při odpovídající změně její hmotnosti z hodnoty M_i na hodnotu M_f. V případě raketového motoru s konstantní rychlostí spotřeby paliva R a konstantní rychlostí u platí vzorec Ciolkovského

$$v_\mathrm{f} - v_\mathrm{i} = u \ln \frac{M_\mathrm{i}}{M_\mathrm{f}}. \tag{9.47}$$

Vnější síly a změny vnitřní energie

Vnější síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$ působící na těleso může být vyvolána působením vnitřních sil, které konají práci a způsobují odpovídající změnu vnitřní energie tělesa ΔE_int:

$$\Delta E_\mathrm{int} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} \cdot \boldsymbol{d}_T = -F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.52}$$

Symbolem $\boldsymbol{d}_T$ jsme označili posunutí těžiště tělesa, φ je úhel mezi vektory $\boldsymbol{d}_T$ a $\boldsymbol{F}_\mathrm{ext}$. Mění-li se na úkor vnitřní energie pouze kinetická energie tělesa, platí

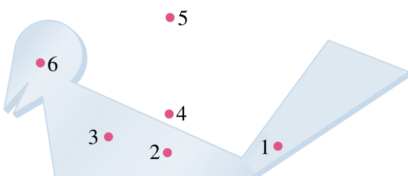
$$\Delta E_{\mathrm{k},T} = F_\mathrm{ext} d_T \cos\varphi. \tag{9.50}$$

Dochází-li i ke změnám potenciální energie tělesa, je změna mechanické energie dána vztahem

$$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k},T} + \Delta E_{\mathrm{p},T} = (\boldsymbol{F}_\mathrm{ext} + \boldsymbol{N}) \cdot \boldsymbol{d}_T. \tag{9.54}$$

OTÁZKY

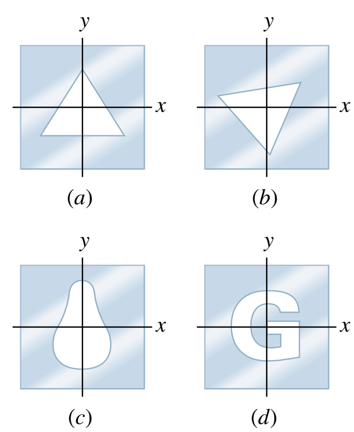
1. Chlapec vyrobil z kusu kovového plechu konstantní tloušťky c ptáka (obr. 9.19). Který z očíslovaných bodů je s největší pravděpodobností těžištěm modelu?



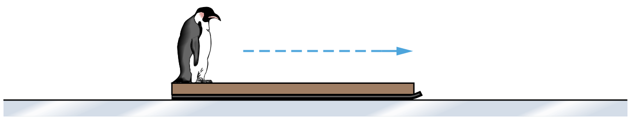
Obr. 9.19 Otázka 1

2. Na obr. 9.20 jsou zakresleny čtyři čtvercové kovové desky s vyříznutými otvory různých tvarů. Počátek soustavy souřadnic v rovině xy splývá ve všech případech se středem čtvercové desky, tj. s jejím těžištěm před vyříznutím otvoru. Odhadněte polohu těžiště každé desky s otvorem (je-li to možné, rozhodněte, v kterém leží kvadrantu, případně na které ose, nebo dokonce ve kterém bodě).

3. Na obr. 9.21 je zachycen tučňák stojící na levém konci homogenních sáněk délky L, které leží na dokonale hladkém ledovém povrchu. Hmotnosti obou těles jsou shodné. (a) Určete polohu těžiště sáněk. (b) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky. Tučňák přechází k pravému konci sáněk. Sáňky přitom kloužou po ledě. (c) Jak se pohybuje těžiště soustavy tučňák + sáňky? Doleva, doprava, nebo zůstává v klidu? (d) Určete polohu těžiště sáněk (vzdálenost a směr) vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky poté, co tučňák přešel k pravému konci sáněk. (e) Jakou dráhu tučňák urazil vzhledem k sáňkám? (f) Jakou dráhu urazilo těžiště sáněk vzhledem k těžišti soustavy tučňák + sáňky? (g) Jakou dráhu urazil vzhledem k němu tučňák? (Přípravná otázka k úloze 23.)



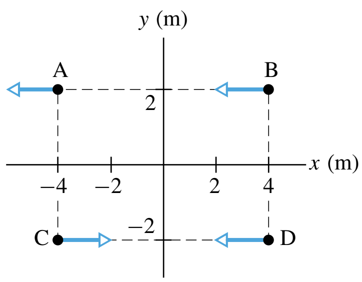
Obr. 9.20 Otázka 2



Obr. 9.21 Otázky 3 a 4

4. Předpokládejme, že se tučňák i sáňky z otázky 3 na obr. 9.21 zpočátku pohybují vpravo rychlostí v_0. (a) Rozhodněte, zda je rychlost v, kterou se pohybují sáňky vzhledem k ledu během přesunu tučňáka k jejich pravému konci, větší, menší, nebo stejná jako v_0. (b) Zodpovězte tutéž otázku, přechází-li tučňák zpět k levému konci sáněk.

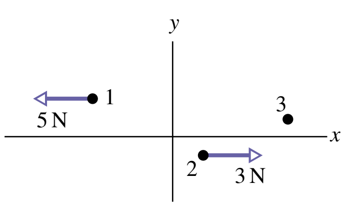
5. Na obr. 9.22 jsou zakresleny čtyři částice stejné hmotnosti, které se pohybují po dokonale hladké vodorovné rovině stálými rychlostmi (pohled shora). Směry rychlostí jsou v obrázku vyznačeny, velikosti jsou shodné. Která dvojice částic tvoří soustavu, jejíž těžiště (a) je v klidu, (b) je v klidu v počátku soustavy souřadnic, (c) projde při svém pohybu počátkem soustavy souřadnic?



Obr. 9.22 Otázka 5

6. (a) Představme si poněkud absurdní situaci: dva melouny jsme současně upustili z mostu. Jaké je zrychlení těžiště této dvoučásticové soustavy? (b) Jaké bude zrychlení těžiště soustavy dvou padajících melounů, upustíme-li jeden z nich o něco později?

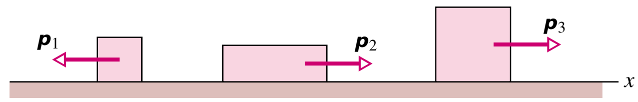
7. Obr. 9.23 představuje pohled shora na soustavu tří částic, na něž působí vnější síly. Směry a velikosti sil působících na dvě z těchto částic jsou v obrázku vyznačeny. Jaká je velikost a směr síly působící na třetí částici, jestliže (a) je těžiště soustavy v klidu, (b) pohybuje se konstantní rychlostí vpravo, (c) urychluje se směrem vpravo?



Obr. 9.23 Otázka 7

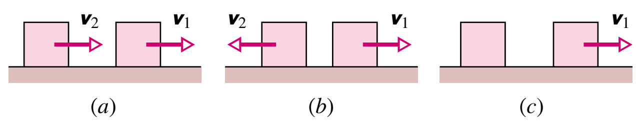
8. Těleso, které se pohybuje podél osy x po dokonale hladké vodorovné podložce, se náhle rozpadne na tři části. Každá z nich se dále pohybuje podél osy x ve směru vyznačeném v obr. 9.24. Následující tabulka obsahuje čtyři soubory hodnot velikostí hybností $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ a $\boldsymbol{p}_3$ jednotlivých částí tělesa v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte tyto soubory sestupně podle velikosti počáteční rychlosti tělesa.

	p_1	p_2	p_3
(a)	10	2	6
(b)	10	6	2
(c)	2	10	6
(d)	6	2	10



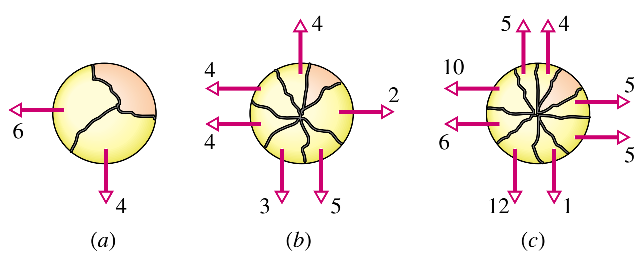
Obr. 9.24 Otázka 8

9. Podobně jako v př. 9.7 uvažujme těleso, které se pohybuje konstantní rychlostí ve směru kladné osy x a náhle se rozpadne na dvě části. Jedna z nich, o hmotnosti m_1, pokračuje v pohybu ve směru kladné osy x. Její rychlost je $\boldsymbol{v}_1$. Druhá část tělesa má hmotnost m_2 a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ (a) podél kladné osy x (obr. 9.25a), (b) podél záporné osy x (obr. 9.25b), (c) je v klidu (obr. 9.25c). Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.



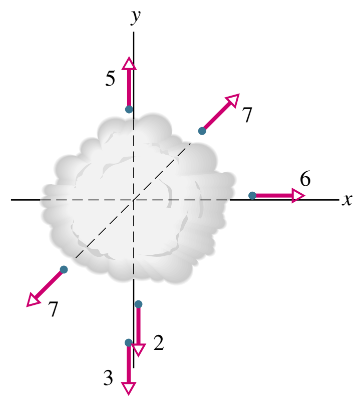
Obr. 9.25 Otázka 9

10. Obr. 9.26 ukazuje pohled shora na těleso, které se při výbuchu rozbušky rozpadlo (a) na tři části (obrázek (a)), (b) sedm částí, (c) devět částí. Díly tělesa se po výbuchu pohybovaly po dokonale hladké vodorovné podlaze. Pro každou situaci jsou v obr. 9.26 vyznačeny vektory hybnosti všech částí tělesa s výjimkou jedné, jejíž hybnost označíme $\boldsymbol{P}'$. Čísla uvedená u jednotlivých vektorů udávají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. Seřaďte situace na obrázcích sestupně podle velikosti (a) složky P'_x, (b) složky P'_y a (c) vektoru $\boldsymbol{P}'$.



Obr. 9.26 Otázka 10

11. Obr. 9.27 znázorňuje pohled shora na šest částic, které vznikly „dvojrozměrným" výbuchem tělesa. Před výbuchem spočívalo těleso v klidu na dokonale hladké vodorovné podložce. Směry hybností částic jsou na obrázku vyznačeny vektory, čísla znamenají jejich velikosti v jednotkách kg·m·s^{-1}. (a) Vzniklo při explozi více částic, než je znázorněno? (b) Jestliže ano, najděte jejich výslednou hybnost a (c) směr jejich pohybu.



Obr. 9.27 Otázka 11

12. V tabulce jsou uvedeny hmotnosti a vzdálenosti pro tři různé dvojice částic:

	m_1	m_2	POČÁTEČNÍ VZDÁLENOST d
dvojice 1	$2m$	$8m$	1,0 m
dvojice 2	$3m$	$6m$	2,0 m
dvojice 3	$4m$	$9m$	0,5 m

Částice ve dvojicích na sebe působí přitažlivými silami. Zpočátku jsou obě částice každé dvojice udržovány vnějšími silami v klidu ve vzdálenosti d a v určité chvíli jsou uvolněny. V okamžiku, kdy jejich vzdálenost klesne na hodnotu $d/2$, má částice o hmotnosti m_1 rychlost v_1 a částice o hmotnosti m_2 rychlost v_2. Bez písemných výpočtů seřaďte dvojice částic sestupně podle hodnoty poměru v_1/v_2. (*Tip*: Př. 9.10.)

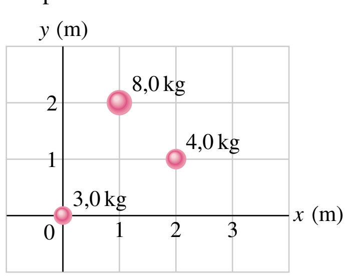
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 9.2 Těžiště

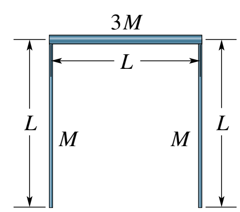
1C. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy Země + Měsíc od středu Země? (V dod. C jsou uvedeny hmotnosti Země a Měsíce i jejich vzdálenost). (b) Vyjádřete výsledek získaný v části (a) v jednotkách poloměru Země.

2C. Vzdálenost středů atomů uhlíku (C) a kyslíku (O) v molekule oxidu uhelnatého (CO) je $1{,}131 \cdot 10^{-10}$ m. Najděte polohu těžiště molekuly CO vzhledem ke středu atomu uhlíku. (Hmotnosti atomů C a O jsou uvedeny v dod. D.)

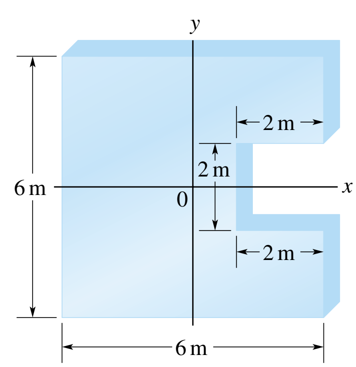
3C. (a) Určete souřadnice těžiště soustavy tří částic na obr. 9.28. (b) Co se bude dít s těžištěm, bude-li se hmotnost nejvýše položené částice postupně zvětšovat?



Obr. 9.28 Cvičení 3



Obr. 9.29 Cvičení 4



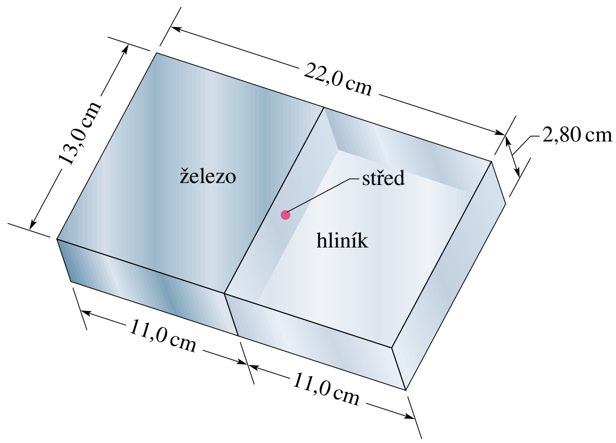
Obr. 9.30 Cvičení 5

4C. Tři tenké tyče o stejné délce L vytvořily těleso ve tvaru obráceného U (obr. 9.29). Dvě boční tyče mají hmotnost M, hmotnost třetí tyče je $3M$. Určete polohu těžiště tělesa.

5C. V homogenní čtvercové desce o straně 6 m byl vyříznut čtvercový otvor o straně 2 m podle obr. 9.30. Střed otvoru má souřadnice $x = 2$ m a $y = 0$. Určete polohu těžiště zbytku desky. Těžiště původní desky leželo v počátku soustavy souřadnic.

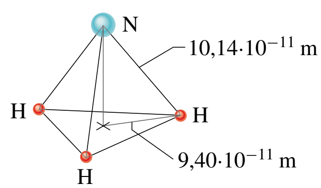
6Ú. Dokažte, že poměr vzdáleností částic dvoučásticové soustavy od jejího těžiště je roven převrácenému poměru hmotností částic.

7Ú. Na obr. 9.31 jsou uvedeny rozměry desky složené ze dvou částí. Polovina desky je vyrobena z hliníku s hustotou 2,70 g/cm^3 a polovina je ze železa o hustotě 7,85 g/cm^3. Najděte polohu těžiště desky.



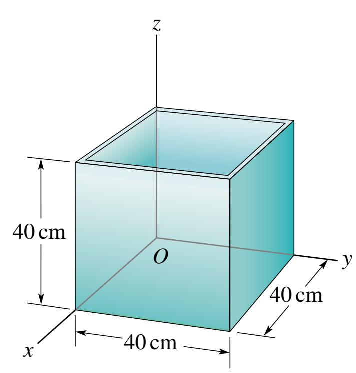
Obr. 9.31 Úloha 7

8Ú. Tři atomy vodíku (H) v molekule čpavku NH_3 (obr. 9.32) tvoří rovnostranný trojúhelník. Jeho těžiště leží ve vzdálenosti $9{,}40\cdot10^{-11}$ m od každého atomu vodíku. Atom dusíku (N) je vrcholem čtyřstěnu o podstavě tvořené atomy vodíku. Vzdálenost N-H je $10{,}14\cdot10^{-11}$ m, hmotnosti atomů N a H jsou v poměru 13,9 : 1,0. Určete polohu těžiště molekuly vůči atomu dusíku.



Obr. 9.32 Úloha 8

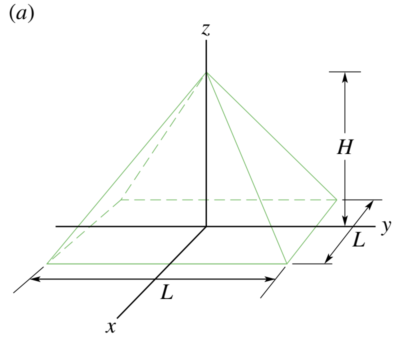
9Ú. Krychlová krabice bez horní stěny má délku hrany 40 cm. Je vyrobena z homogenního kovového plechu zanedbatelné tloušťky (obr. 9.33). Určete souřadnice jejího těžiště.



Obr. 9.33 Úloha 9

10Ú. Velká (Cheopsova) pyramida v egyptské Gíze (obr. 9.34a) měla kdysi výšku $H = 147$ m. Později z jejího vrcholu vypadl vrcholový kámen. Základnou pyramidy je čtverec o straně $L = 230$ m (obr. 9.34b), její objem je $L^2H/3$. Předpokládejme, že pyramida je homogenní těleso o hustotě $\varrho = 1{,}8\cdot10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete (a) původní výšku těžiště pyramidy nad základnou, (b) práci potřebnou k vyzdvižení vypadlého kvádru z úrovně základny na původní místo.

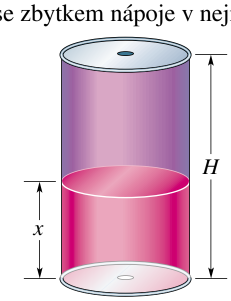
(*a*)



(*b*)

Obr. 9.34 Úloha 10

11Ú★. Válcová plechovka o hmotnosti M a výšce H je vyrobena z homogenního materiálu a naplněna limonádou o hmotnosti m (obr. 9.35). Do dna a horní podstavy plechovky vyvrtáme malé otvory, aby nápoj mohl vytékat. Okamžitou výšku těžiště plechovky nad jejím dnem označíme h. Určete hodnotu h (a) pro plnou plechovku a (b) v okamžiku, kdy již všechen nápoj vytekl. (c) Jak se mění hodnota h během vytékání nápoje? (d) Okamžitou výšku zbývajícího sloupce kapaliny v plechovce označme x. Vyjádřete hodnotu x pomocí M, H a m v okamžiku, kdy je těžiště plechovky se zbytkem nápoje v nejnižší možné poloze.



Obr. 9.35 Úloha 11

ODST. 9.3 Věta o hybnosti

12C. Dva bruslaři o hmotnostech 65 kg a 40 kg drží tyč o délce 10 m těsně u jejích konců. Tyč má zanedbatelnou hmotnost.

Bruslaři k sobě ručkují až do okamžiku setkání. Jak daleko se podél tyče posune bruslař o hmotnosti 40 kg?

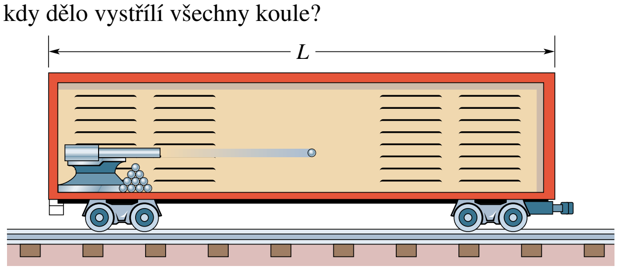
13C. Dva automobily o hmotnostech 2 400 kg a 1 600 kg jedou stejným směrem po přímé silnici rychlostmi 80 km/h a 60 km/h. Jakou rychlostí se pohybuje těžiště jejich soustavy?

14C. Člověk o hmotnosti m stojí na provazovém žebříku spuštěném z balonu o hmotnosti M (obr. 9.36). Balon je vzhledem k zemi v klidu. (a) Člověk začne stoupat rychlostí v vzhledem k žebříku. Určete rychlost balonu vzhledem k zemi (velikost a směr). (b) Popište pohybový stav soustavy od okamžiku, kdy člověk přestane šplhat.

Obr. 9.36 Cvičení 14

15C. Dvě částice P a Q o hmotnostech 0,10 kg a 0,30 kg jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti 1,0 m a přitahují se konstantní silou o velikosti $1{,}0\cdot10^{-2}$ N. Vnější síly na soustavu nepůsobí. (a) Popište pohyb těžiště soustavy. (b) V jaké vzdálenosti od původní polohy částice P se obě částice setkají?

16C. Dělo a munice jsou naloženy v uzavřeném železničním voze délky L (obr. 9.37). Dělo střílí směrem vpravo, vůz se při zpětném rázu pohybuje vlevo. Vypálené dělové koule se odrážejí od vzdálenější stěny vozu a padají na podlahu. (a) Do jaké největší vzdálenosti od své původní polohy se může vůz dostat, než dělo vystřílí všechny koule? (b) Za jakých podmínek vůz tuto vzdálenost skutečně urazí? (c) Jaká je rychlost vozu v okamžiku, kdy dělo vystřílí všechny koule?



Obr. 9.37 Cvičení 16

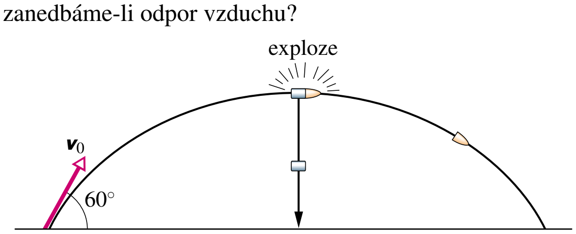
17Ú. Soustava je složena ze dvou částic o hmotnostech 3,0 kg a 4,0 kg. V jistém okamžiku má první částice rychlost 6,0 m$\cdot$s^{-1} ve směru záporné osy y a druhá se pohybuje rychlostí 7,0 m$\cdot$s^{-1} ve směru kladné osy x. Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

18Ú. Kámen byl uvolněn v okamžiku $t = 0$ a padá volným pádem. Jiný kámen o dvojnásobné hmotnosti je uvolněn z téhož místa o 100 ms později. Najděte (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy těchto dvou kamenů v okamžiku $t = 300$ ms. (Předpokládejte, že do tohoto okamžiku žádný z nich ještě nedopadl na zem.)

19Ú. Osobní automobil o hmotnosti 1 000 kg stojí před semaforem. Rozsvítí se zelená a automobil se rozjíždí s konstantním zrychlením 4,0 m$\cdot$s^{-2}. V tom okamžiku jej předjede nákladní dodávka o hmotnosti 2 000 kg, která jede stálou rychlostí 8,0 m$\cdot$s^{-1}. (a) Jaká je vzdálenost těžiště soustavy automobil + dodávka od semaforu v okamžiku $t = 3{,}0$ s? (b) Jaká je v tomto okamžiku rychlost těžiště soustavy?

20Ú. Richard a Kamila sedí v kánoi na jezeře. Richard má hmotnost 80 kg a Kamila o něco menší. Hmotnost kánoe je 30 kg. Chlapec a dívka sedí ve vzdálenosti 3,0 m od sebe, symetricky vzhledem k těžišti prázdné kánoe. Voda je klidná a kánoe je vůči ní rovněž v klidu. Richard s Kamilou se rozhodli, že si vymění místa. Richard si všiml, že se kánoe při výměně posunula o 40 cm vzhledem ke kůlu ponořenému ve vodě. Na základě tohoto údaje se mu podařilo vypočítat hmotnost Kamily. Kolik mu vyšlo?

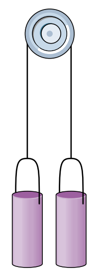
21Ú. Náboj je vystřelen s počáteční rychlostí 20 m$\cdot$s^{-1} pod elevačním úhlem 60°. Ve vrcholu své trajektorie se roztrhne na dvě části o stejné hmotnosti (obr. 9.38). Jedna část, jejíž rychlost je bezprostředně po výbuchu nulová, padá svisle dolů. Jak daleko od děla dopadne druhá část, stojí-li dělo na vodorovném terénu a zanedbáme-li odpor vzduchu?



Obr. 9.38 Úloha 21

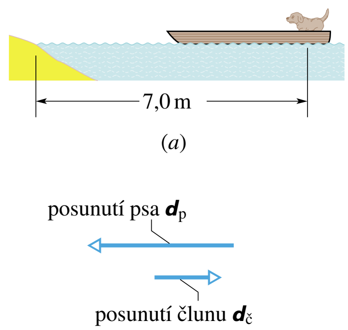
22Ú. Dvě stejné nádoby s cukrem jsou spojeny nehmotným vláknem vedeným přes kladku zanedbatelné hmotnosti o poloměru 50 mm. Kladka se může otáčet bez tření (obr. 9.39). Obě nádoby jsou ve stejné výši a původní hmotnost každé z nich je 500 g. (a) Určete polohu těžiště soustavy nádob. (b) Přidržíme nádoby, aby se nepohybovaly, a přemístíme 20 g cukru z jedné z nich do druhé. Určete polohu těžiště soustavy nyní. (c) Nádoby uvolníme. Jakým směrem se bude těžiště pohybovat? (d) Určete jeho zrychlení.

23Ú. Pes o hmotnosti 5,0 kg stojí na člunu ve vzdálenosti 7,0 m od břehu (obr. 9.40a). Rozběhne se ke břehu a zastaví se poté, co vzhledem k palubě člunu urazí dráhu 3,0 m. Člun má hmotnost 20,0 kg. Odporovou sílu, jíž působí voda proti pohybu člunu, můžeme zanedbat. Jak daleko je pes od břehu v okamžiku, kdy



Obr. 9.39 Úloha 22

se zastaví? (*Tip*: Na obr. 9.40b vidíme, že se pes pohybuje vlevo, zatímco člun ujíždí vpravo. Kterým směrem se bude pohybovat těžiště soustavy pes + člun?)



Obr. 9.40 Úloha 23

ODST. 9.5 Hybnost soustavy částic

24C. Jakou rychlostí by musel běžet člověk o hmotnosti 80 kg, aby měl stejnou hybnost jako automobil o hmotnosti 1 600 kg jedoucí rychlostí 1,2 km/h?

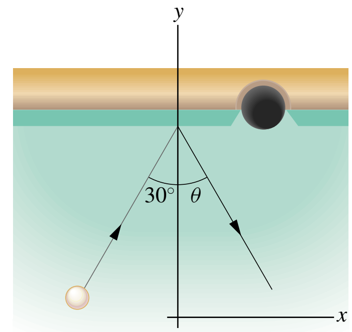
25C. Jakou rychlostí se musí pohybovat automobil o hmotnosti 816 kg, aby měl (a) stejnou hybnost, (b) stejnou kinetickou energii jako automobil o hmotnosti 2 650 kg, který jede rychlostí 16 km/h?

26C. Vypočtěte hybnost elektronu o rychlosti 0,99c ($c \doteq 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je rychlost světla).

27C. Měřením byla určena velikost hybnosti částice pohybující se rychlostí $1{,}5 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Naměřená hodnota činila $2{,}9 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte hmotnost částice a zjistěte tak, zda šlo o elektron, nebo proton.

28C. Těleso o hmotnosti 0,70 kg se pohybuje vodorovně rychlostí $5{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po kolmém nárazu na svislou stěnu se odrazí rychlostí $2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete velikost změny jeho hybnosti.

29Ú. Kulečníková koule o hmotnosti 0,165 kg narazila do okraje kulečníkového stolu rychlostí o velikosti $2{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a odrazila se podle obr. 9.41. Obrázek zachycuje i volbu soustavy souřadnic. Při srážce se změnilo znaménko y-ové složky vektoru rychlosti koule, x-ová složka se nezměnila. (a) Určete úhel θ vyznačený v obr. 9.41. (b) Vyjádřete změnu hybnosti koule při srážce pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy souřadnic. (Kutálení koule neovlivní odpověď (a) ani (b).)



Obr. 9.41 Úloha 29

30Ú. Nákladní automobil o hmotnosti 2 100 kg jel nejprve na sever rychlostí 41 km/h. Pak zabočil k východu a zvýšil svou rychlost na 51 km/h. (a) Jak se změnila kinetická energie automobilu? (b) Určete i změnu jeho hybnosti (velikost a směr).

31Ú. Radiolokátor zaregistroval objekt v poloze určené vektorem $\boldsymbol{r} = (3\,500 - 160t)\boldsymbol{i} + 2\,700\boldsymbol{j} + 300\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{r}$ je v metrech a t v sekundách. Soustava souřadnic radiolokátoru je zvolena tak, že osa x směřuje na východ, osa y na sever a osa z svisle vzhůru. Objektem byla meteorologická raketa o hmotnosti 250 kg. Určete její (a) hybnost, (b) směr pohybu a (c) výslednou sílu, která na ni působila.

32Ú. Míč o hmotnosti 50 g je vyhozen počáteční rychlostí $16\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°. (a) Určete jeho (a) kinetickou energii a (b) hybnost na počátku pohybu a těsně před dopadem na zem. (c) Dokažte, že velikost změny hybnosti míče je rovna součinu velikosti tíhové síly působící na míč a doby letu. Předpokládáme, že terén je vodorovný.

33Ú. Částice o hmotnosti m má hybnost $\boldsymbol{p}$ o velikosti mc. Vyjádřete její rychlost v jednotkách rychlosti světla c.

ODST. 9.6 Zákon zachování hybnosti

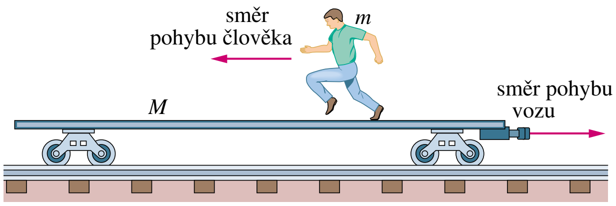
34C. Muž o hmotnosti 100 kg stojící na dokonale hladké vodorovné podlaze kopl do kamene o hmotnosti 0,08 kg, který ležel u jeho nohou. Kámen se po výkopu pohyboval vodorovně rychlostí $4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Určete rychlost pohybu člověka.

35C. Dvě tělesa o hmotnostech 1,0 kg a 3,0 kg jsou spojena pružinou a spočívají na dokonale hladké vodorovné podložce. Tělesa jsou uvedena do pohybu tak, že těžiště soustavy je v klidu a těleso o hmotnosti 1,0 kg se pohybuje směrem k němu počáteční rychlostí $1{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká je počáteční rychlost druhého tělesa?

36C. Vesmírná loď se vzdaluje od Země rychlostí 4 300 km/h. Z lodi je vymrštěn vyhořelý raketový motor směrem zpět. Jeho rychlost vzhledem k lodi má velikost 82 km/h. Hmotnost raketového motoru je čtyřikrát větší než hmotnost zbytku lodi. Jaká je rychlost lodi vzhledem k Zemi po oddělení motoru?

37C. Muž o hmotnosti 75 kg jede na vozíku o hmotnosti 39 kg. Rychlost vozíku je $2{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Muž náhle vyskočí vzhůru tak, že vodorovná složka jeho rychlosti vzhledem k *pevné podložce* je nulová. Určete změnu rychlosti vozíku.

38C. Plošinový železniční vůz o hmotnosti M se může pohybovat bez tření po přímé vodorovné trati. Na voze stojí člověk o hmotnosti m. Soustava se pohybuje vpravo rychlostí v_0 podle obr. 9.42. Jak se změní rychlost vozu, poběží-li člověk vlevo rychlostí v_{rel} vzhledem k vozu?



Obr. 9.42 Cvičení 38

39Ú. Poslední stupeň rakety se pohybuje rychlostí 7 600 m·s^{-1}. Skládá se ze dvou spojených částí: modulu s užitečným zatížením o hmotnosti 150,0 kg a raketového motoru, jehož hmotnost po vyčerpání pohonných hmot je 290,0 kg. V okamžiku, kdy je palivo spotřebováno, uvolní se spojovací mechanismus a části rakety se začnou od sebe vzdalovat díky působení stlačených pružin, které jsou mezi nimi umístěny. Vzájemná rychlost má velikost 910,0 m·s^{-1}. (a) Určete rychlost každé z obou částí rakety vzhledem k Zemi. Předpokládáme, že všechny vektory rychlosti leží v téže přímce. (b) Určete celkovou kinetickou energii rakety před a po oddělení částí a vysvětlete případný rozdíl.

40Ú. Radioaktivní jádro je zpočátku v klidu. Rozpadá se a emituje elektron a neutrino v navzájem kolmých směrech. (*Neutrino* je jedna z elementárních částic.) Hybnost elektronu je $1{,}2\cdot10^{-22}$ kg·m·s^{-1}, hybnost neutrina $6{,}4\cdot10^{-23}$ kg·m·s^{-1}. (a) Určete směr a velikost hybnosti zbytku jádra po rozpadu. (b) Hmotnost zbytku jádra je $5{,}8\cdot10^{-26}$ kg. Jaká je jeho kinetická energie?

41C. Elektron (hmotnost $m_1 = 9{,}11\cdot10^{-31}$ kg) a proton (hmotnost $m_2 = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg) se přitahují elektrickou silou. Předpokládejme, že byly uvolněny z klidu a že jejich počáteční vzdálenost byla $d = 3{,}0\cdot10^{-6}$ m. Určete poměr (a) velikostí hybností elektronu a protonu, (b) jejich rychlostí a (c) kinetických energií v okamžiku, kdy jsou od sebe vzdáleny $1{,}0\cdot10^{-6}$ m. (d) Jak se budou měnit odpovědi na otázky (a), (b) a (c) během dalšího přibližování částic?

42Ú. Těleso o hmotnosti 4,0 kg klouže po dokonale hladké vodorovné podložce. Náhle se roztrhne na dvě části o stejných hmotnostech. Rychlosti jednotlivých částí po výbuchu jsou 3,0 m·s^{-1}směrem na sever (azimut 0°) a 5,0 m·s^{-1} s azimutem 30° (odchylka 30° východním směrem). Určete rychlost tělesa před výbuchem.

43Ú. Těleso, které bylo zpočátku v klidu, vybuchlo a rozpadlo se na tři části. Dvě z nich, o stejné hmotnosti, se rozletěly stejně velkými rychlostmi 30 m·s^{-1}do kolmých směrů. Třetí část měla třikrát větší hmotnost než každá z předchozích dvou. Určete rychlost (velikost a směr) třetí části po výbuchu.

44Ú. Plošinový železniční vůz o hmotnosti 2 140 kg, který se může pohybovat po kolejích tak, že energiové ztráty vzniklé třením jsou zanedbatelné, stojí v klidu u nástupiště. Zápasník o hmotnosti 242 kg běží rychlostí 5,3 m·s^{-1} po nástupišti souběžně s tratí a vyskočí na vůz. Určete rychlost vozu v těchto případech: (a) Zápasník zůstane na voze stát. (b) Běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} původním směrem. (c) Otočí se a běží vzhledem k vozu rychlostí 5,3 m·s^{-1} opačným směrem.

45Ú. Raketové sáně o hmotnosti 2 900 kg jedou po zamrzlém jezeře rychlostí 250 m·s^{-1}. Když projíždí kolem koryta, které je v ledu vysekáno pro možnost přístupu k vodě, spustí jezdec do vody nádobu a nabere do ní 920 kg vody. Pomocí zákona zachování hybnosti určete výslednou rychlost saní. Všechny brzdicí síly zanedbejte.

46Ú. Izolované těleso o hmotnosti 8 kg se pohybuje rychlostí 2 m·s^{-1}. Náhle exploduje a rozpadne se na dvě části o hmotnostech 4 kg. Kinetická energie každé z nich bezprostředně po výbuchu je 16 J. Obě části se pohybují po původní přímkové trajektorii tělesa. Určete rychlost (velikost a směr) každé z nich.

47Ú. Sáně s jezdcem o celkové hmotnosti M spočívají v klidu na dokonale hladké hladině zamrzlého jezera. Jezdec naložil na sáně ještě dva kameny o hmotnostech m_1 a m_2, pro něž platí $M = 6{,}00m_1 = 12{,}0m_2$. Člověk hodlá uvést sáně do pohybu tak, že kameny vyhodí dozadu (současně nebo jeden po druhém) vodorovnou rychlostí v_{rel} vzhledem k saním. Určete výslednou rychlost saní, vymrští-li člověk kameny (a) současně, (b) nejprve m_1 a pak m_2 a (c) v opačném pořadí?

48Ú. Dělo o hmotnosti 1 400 kg vystřelilo náboj o hmotnosti 70,0 kg rychlostí o velikosti 556 m·s^{-1} vzhledem k hlavni děla. Hlaveň svírá s vodorovnou rovinou úhel 39,0°. Dělo je umístěno na vozíku, který se pohybuje bez tření. (a) Jaká je rychlost náboje vzhledem k zemi? (b) Pod jakým úhlem vzhledem k zemi je náboj vystřelen? (*Tip*: Vodorovná složka hybnosti soustavy se během výstřelu nemění.)

ODST. 9.7 Soustavy s proměnnou hmotností: raketa

49C. Raketa je v klidu v meziplanetárním prostoru, kde na ni nepůsobí gravitační síla. Její hmotnost je $2{,}55\cdot10^5$ kg, z toho $1{,}81\cdot10^5$ kg paliva. Raketový motor spotřebovává palivo rychlostí 480 kg/s, rychlost zplodin vzhledem k raketě je 3,27 km/s. Zážeh motoru trvá 250 s. (a) Určete tah motoru. (b) Jaká je hmotnost rakety po vypnutí motoru? (c) Jaká je její výsledná rychlost?

50C. Posádka rakety hodlá opustit sluneční soustavu. V okamžiku, kdy se raketa pohybuje rychlostí $6{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1}, zažehne se motor. Rychlost zplodin vzniklých spalováním pohonných hmot je $3{,}0\cdot10^3$ m·s^{-1} vzhledem k raketě. V okamžiku zážehu má raketa hmotnost $4{,}0\cdot10^4$ kg a její zrychlení je 2,0 m·s^{-2}. (a) Určete tah motoru a (b) rychlost spotřeby paliva.

51C. Vesmírná sonda o hmotnosti 6 090 kg letí přídí směrem k Jupiteru a má vzhledem ke Slunci rychlost 105 m·s^{-1}. Během krátkodobého zážehu motoru vznikne 80,0 kg zplodin, které opustí sondu relativní rychlostí 253 m·s^{-1}. Jaká je rychlost sondy po skončení zážehu?

52C. Raketa je v klidu ve vesmírném prostoru. Zjistěte, jaký musí být poměr počáteční a výsledné hmotnosti rakety, má-li být po vyhoření paliva rychlost rakety (a) shodná s relativní rychlostí zplodin, (b) dvakrát větší než tato rychlost.

53C. Posádka lodi směřující k Měsíci je nucena provést korekci letu. Velikost rychlosti lodi je třeba zvýšit z počáteční hodnoty 400 m·s^{-1} o 2,2 m·s^{-1}při zachování směru letu. Relativní rychlost, s níž zplodiny vyhořelého paliva tryskají z raketového motoru, je 1 000 m·s^{-1}. Jakou část původní hmotnosti lodi tvoří spálené palivo v okamžiku, kdy je korekce letu ukončena?

54C. Nákladní železniční vůz jede pod dopravníkem zrní stálou rychlostí 3,20 m·s^{-1}. Za jednu minutu se z dopravníku vysype na vůz 540 kg zrní. Jakou silou musíme na vůz působit, aby se jeho rychlost neměnila? (Tření zanedbáváme.)

55Ú. Jednostupňová raketa o hmotnosti M je v klidu vzhledem k jisté inerciální vztažné soustavě $\mathscr{S}$. V okamžiku $t = 0$ dojde k zážehu motoru. Dokažte, že spálené plyny opouštějící trysku motoru budou vzhledem k soustavě $\mathscr{S}$ v klidu v okamžiku, kdy se hmotnost rakety sníží na hodnotu $0{,}368M$.

56Ú. Raketa o hmotnosti 6 100 kg startuje svisle z povrchu Země. Relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě je 1 200 m·s^{-1}. Určete hmotnost zplodin opouštějících raketu za jednu sekundu ve dvou různých případech: (a) Tah motoru je roven váze rakety. (b) Velikost počátečního zrychlení rakety má hodnotu 21 m·s^{-2}.

57Ú. Dva dlouhé nákladní čluny plují po klidné hladině stejným směrem, stálými rychlostmi 10 km/h a 20 km/h. (Tažná síla každého motoru právě kompenzuje odporovou sílu vody.) Během míjení člunů se z pomalejšího na rychlejší překládá uhlí. Za jednu minutu přeloží dělníci 1 000 kg uhlí (obr. 9.43). Poněvadž je třeba, aby se rychlosti člunů během překládky neměnily, musí posádky změnit výkon motorů. Určete dodatečnou tažnou sílu každého z nich za předpokladu, že dělníci uhlí volně přesypávají přesně kolmo k bočnímu okraji pomalejšího člunu (rychlost, kterou kusům uhlí udělují vzhledem k pomalejšímu člunu, je zanedbatelně malá). Odporovou sílu vody považujeme za nezávislou na zátěži člunů.

Obr. 9.43 Úloha 57

58Ú. Tryskové letadlo letí rychlostí 180 m·s^{-1}. Každou sekundu nasaje jeho motor 68 m^3 vzduchu (hmotnost 70 kg). Vzduch se spotřebuje ke spálení 2,9 kg paliva za sekundu. Produkty hoření proudí z tryskového motoru rychlostí 490 m·s^{-1} vzhledem k letadlu. Určete (a) tah tryskového motoru a (b) jeho výkon ve wattech.

ODST. 9.8 Vnější síly a změny vnitřní energie

59C. Horolezec o hmotnosti 90 kg vystupuje z tábora ve výšce 4 425 m n. m. na vrchol Mount Everestu (8 850 m n. m.). (a) Určete výslednou změnu potenciální energie soustavy horolezec + Země při tomto výstupu. (b) Kolik čokoládových tyčinek je potřeba k dodání této energie, je-li kalorická hodnota každé z nich 300 kcal? Odpověď na tuto otázku ukáže, že práce potřebná k překonání gravitační síly tvoří zcela jistě jen mizivou část energie, kterou horolezec vydá při takovém náročném výstupu.

60C. Chlapec o hmotnosti 51 kg vyšplhal za 10 s po laně délky 6,0 m. (a) Určete odpovídající změnu potenciální energie soustavy chlapec + Země a (b) průměrný výkon chlapce.

61C. Žena o hmotnosti 55 kg vyběhla po schodišti vysokém 4,5 m za 3,5 s. Určete odpovídající průměrný výkon.

62C. Sprinter o váze 670 N uběhl prvních 7,0 m závodu za 1,6 s. Startoval z klidu a pohyboval se s konstantním zrychlením. Určete jeho (a) rychlost a (b) kinetickou energii na konci tohoto časového intervalu a (c) odpovídající průměrný výkon.

63C. Luxusní parník *Queen Elizabeth 2* má dieselelektrický pohon o maximálním výkonu 92 MW. Maximální cestovní rychlost je 32,5 uzlů (1 uzel = 1,853 km/h). Jak velká je tažná síla motoru, pluje-li loď maximální rychlostí?

64C. Automobil o hmotnosti 1 600 kg jede rovnoměrně rychlostí 25,1 m·s^{-1}. Tažná síla motoru kompenzuje třecí sílu o velikosti 703 N. Určete výkon motoru v jednotkách HP.

65C. Průměrná rychlost plavce je 0,22 m·s^{-1} při průměrné velikosti odporové síly prostředí 110 N. Určete jeho výkon.

66C. Energie, kterou musí vydat běžec bez ohledu na dosaženou rychlost, je asi 335 J/m. Určete průměrný výkon (a) sprintera při závodu na 100 m (čas $t = 10$ s), (b) maratonce (trať maratonu = = 42,2 km, doba = 2 h 10 min).

67C. Automobil i s cestujícími váží 16 400 N a jede rychlostí 113 km/h. Řidič začne brzdit. Určete brzdnou dráhu automobilu, je-li celková brzdná síla 8 230 N.

68C. Volejbalista trénuje výskoky. Ze vzpřímeného postoje poklesne v kolenou a sníží tak polohu těžiště o 18 cm. Poté vyskočí svisle vzhůru. Průměrná síla, kterou působí podlaha na chodidla sportovce, je asi třikrát větší než jeho váha. Určete rychlost jeho těžiště v okamžiku, kdy prochází původní polohou.

69C. Žena o hmotnosti 55 kg vyskočí z podřepu svisle vzhůru. V podřepu je její těžiště 40 cm nad úrovní podlahy. V okamžiku, kdy její chodidla ztrácejí s podlahou kontakt, je výška těžiště nad podlahou 90 cm, zatímco jeho největší výška nad podlahou činí 120 cm. (a) Jak velká průměrná síla působí na chodidla sportovkyně při odrazu? (b) Jak velká je největší rychlost jejího těžiště?

70Ú. Hokejista o hmotnosti 110 kg bruslí rychlostí 3,0 m·s^{-1} směrem ke hrazení a zabrzdí se o ně rukama. Během brzdění se jeho těžiště posune o 30 cm ke hrazení. (a) Určete výslednou změnu kinetické energie jeho těžiště. (b) Jak velká je průměrná síla, kterou hokejista působí na hrazení?

71Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rozjíždí z klidu po vodorovné silnici. Za 30 s dosáhne rychlosti je 72 km/h. (a) Jaká je kinetická energie automobilu na konci 30. sekundy? (b) Jaký je jeho průměrný výkon při rozjezdu? (c) Jaký je okamžitý výkon automobilu na konci 30. sekundy za předpokladu, že zrychlení je konstantní?

72Ú. Automobil o hmotnosti 1 710 kg jede stálou rychlostí o velikosti $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tažná síla motoru, jehož výkon je 16,0 kW, kompenzuje síly tření a odporu prostředí. (a) Určete výslednici třecích a odporových sil. (b) Jaký by byl výkon motoru, kdyby automobil jel po silnici se stoupáním 8 % (tj. 8,00 m převýšení na každých 100 m měřených ve vodorovném směru) rychlostí $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? (c) Automobil sjíždí z kopce bez motoru stálou rychlostí $15{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete sklon vozovky v procentech.

73Ú. Lokomotiva s maximálním výkonem 1,5 MW může urychlit vlak z rychlosti $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na rychlost $25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ za dobu 6,0 min. (a) Vypočtěte hmotnost vlaku. V uvedeném časovém intervalu zapište (b) rychlost vlaku a (c) urychlující sílu jako funkce času (měřeného v sekundách). (d) Určete vzdálenost, kterou vlak za tuto dobu urazil.

74Ú. Celková odporová síla, která působí proti pohybu automobilu, je výslednicí třecí síly, jíž působí silnice na kola automobilu a která je takřka nezávislá na rychlosti, a odporové síly vzduchu, jejíž velikost je úměrná čtverci rychlosti. Pro automobil o váze 12 000 N je velikost celkové odporové síly dána vztahem $F = 300 + 1{,}8v^2$, kde F je v newtonech a v v metrech za sekundu. Vypočtěte výkon motoru, jestliže automobil zvyšuje svou rychlost z počáteční hodnoty 80 km/h se zrychlením $0{,}92\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

75Ú★. Závodní automobil o hmotnosti m se rozjíždí z klidu. Jeho motor má stálý výkon P. Za jakou dobu urazí automobil dráhu d?

PRO POČÍTAČ

76Ú. Následující tabulka udává polohu tří částic v souřadnicové rovině (xy) a jejich rychlost v určitém okamžiku. Hmotnosti částic jsou různé a jsou v tabulce rovněž uvedeny. Určete (a) polohu a (b) rychlost těžiště soustavy tří částic v tomto okamžiku. (c) Vypočtěte jejich celkovou hybnost.

ČÁSTICE	HMOTNOST (kg)	SOUŘADNICE (m)	RYCHLOST $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}})$
1	4,00	(0, 0)	$1{,}50\boldsymbol{i} - 2{,}50\boldsymbol{j}$
2	3,00	(7,00; 3,00)	0
3	5,00	(3,00; 2,00)	$2{,}00\boldsymbol{i} - 1{,}00\boldsymbol{j}$

77Ú. Těleso o hmotnosti 2,00 kg je v okamžiku $t = 0$ upuštěno ze střechy vysoké budovy a volně padá podél její stěny. V okamžiku $t = 1{,}00\,\mathrm{s}$ je z téhož místa na střeše upuštěno těleso o hmotnosti 3,00 kg. První těleso dopadne na zem v okamžiku $t = 5{,}00\,\mathrm{s}$. Sestrojte graf časové závislosti (a) polohy a (b) rychlosti těžiště soustavy těchto dvou těles v intervalu od $t = 0$ do $t = 6{,}00\,\mathrm{s}$. Počátek svislé osy y zvolte na střeše budovy a její kladný směr orientujte dolů.