

39

Fotony a de Broglieho vlny



Stopy drobných bublinek v tomto obrázku z bublinkové komory ukazují, kudy se pohybovaly elektrony (stopy vybarveny zeleně) a pozitrony (červené stopy). Jedna γ -částice, která vletěla do komory shora a nezanechala žádnou stopu, vytrhla elektron z jednoho z atomů vodíku, kterými je komora naplněna, a přeměnila se na pár elektron-pozitron. Další γ -částice vytvořila jiný pár o trochu níž. Tyto dráhy (zakřivené magnetickým polem) jasně ukazují, že elektrony a pozitrony jsou částice, které se pohybují podél určitých drah. Přesto tyto částice mohou být také interpretovány jako vlny. Může být částice vlnou?

39.1 NOVÝ SMĚR

Naše diskuse Einsteinovy teorie relativity nás zavedla do světa daleko od obvyklé zkušenosti, do světa objektů pohybujících se rychlostí blízkou rychlosti světla. Einsteinova teorie překvapivě předpovídá, že rychlost chodu hodin záleží na tom, jak rychle se hodiny pohybují vzhledem k pozorovateli: čím rychleji se pohybují, tím pomalejší je jejich chod. Tato i další předpovědi teorie vydržely všechny možné testy, které se dosud podařilo vymyslet, a teorie relativity vedla k hlubšímu a uspokojivějšímu pohledu na podstatu prostoru a času.

Nyní se chystáme prozkoumat jiný svět, který je mimo obvyklou zkušenost — subatomový svět. Setkáme se s celou řadou překvapení, která, i když mohou často vypadat neuvěřitelně, vedla fyziky krok za krokem k hlubšímu pohledu na podstatu světa kolem nás.

Kvantová fyzika, jak se tento nový předmět nazývá, umí odpovědět na otázky jako: Proč svítí hvězdy? Proč jsou prvky seřazeny tak, jak se objevují v periodické tabulce prvků? Jak pracuje tranzistor a jiné mikroelektronické prvky? Proč měď vede elektrický proud a sklo ne? Kvantová fyzika pokrývá celou chemii včetně biochemie. Musíme jí tedy porozumět, pokud chceme pochopit samotný život.

Některé předpovědi kvantové fyziky se zdají podivné i fyzikům a filozofům, kteří studují její základy. Nicméně i tato teorie obstála v každém experimentálním testu — a bylo jich hodně — bez nejmenších problémů. Její předpovědi nikdy neselhaly.

39.2 SVĚTELNÉ VLNY A FOTONY

Popsali jsme světlo jako vlnu, která má vlnovou délku λ , frekvenci f a rychlost c spojené vztahem

$$c = \lambda f. \quad (39.1)$$

V kap. 34 jsme na základě Maxwellových rovnic ukázali, že světelná vlna je vzájemně provázaná kombinace elektrického a magnetického pole, z nichž každé se mění s frekvencí f . Dále jsme ukázali, že viditelné světlo je součástí elektromagnetického spektra, které se rozprostírá ve spojitěm rozsahu vlnových délek od γ -záření po dlouhé rádiové vlny.

V roce 1905 Einstein navrhl hypotézu, která neplyne z Maxwellových rovnic a přináší první z našich kvantových překvapení: při emisi nebo absorpci světla atomem se nepředává energie spojitě, ale diskrétně, tedy po malých „kouscích“ energie, **kvantech**. Toto kvantum světla nazýváme od roku 1926 **foton**.

Má-li světelná vlna frekvenci f , pak podle Einsteinovy hypotézy je energie E předaná jedním fotonem rovna

$$E = hf \quad (\text{energie fotonu}). \quad (39.2)$$

Zde h je **Planckova konstanta**, která má hodnotu

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}. \quad (39.3)$$

Vedle ní (a ještě častěji) se používá tzv. redukovaná Planckova konstanta, která má hodnotu

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Planckova konstanta je základní konstanta kvantové fyziky, stejně jako rychlost světla c je základní konstanta relativistické fyziky. Rychlost světla c je velká, ale konečná; kdyby byla nekonečná, nebyla by potřeba teorie relativity. Podobně Planckova konstanta h je malá, ale nenulová; kdyby byla nulová, nebyla by potřeba kvantové teorie.

KONTROLA 1: Seřadte následující záření podle jemu příslušné energie fotonu od nejvyšší po nejnižší: (a) žluté světlo sodíkové výbojky, (b) γ -částice emitovaná radioaktivním jádrem, (c) rádiová vlna vyslaná anténou rozhlasové stanice, (d) mikrovlnný svazek vysílaný radarem pro řízení letového provozu.

PŘÍKLAD 39.1

100 W sodíková výbojka je umístěna ve středu velké koule absorbující veškeré světlo, které na ni dopadá. S jakou četností dopadají fotony na kouli? Vlnová délka sodíkového světla je 590 nm.

ŘEŠENÍ: Z rov. (39.2) je energie fotonu pro sodíkové světlo

$$\begin{aligned} E = hf &= \frac{hc}{\lambda} = \\ &= \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{(590 \cdot 10^{-9} \text{ m})} = \\ &= 3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

Pokaždé, když atom sodíku vyzáří foton, ztrácí energii $3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, tedy energii 2,1 eV. Kdykoli koule pohlcuje světlo, přebírá energii jen po „kvantech“ této velikosti.

Abychom našli četnost R , s jakou jsou fotony absorbovány na kouli, vydělíme rychlost, s níž výbojka vyzařuje energii (výkon P), hodnotou E :

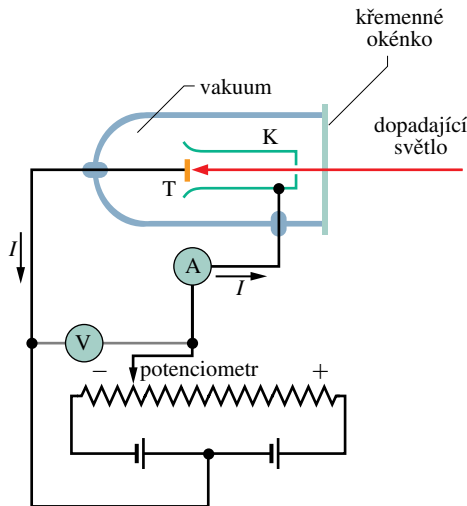
$$\begin{aligned} R = \frac{P}{E} &= \frac{(100 \text{ W})}{(3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J/foton})} = \\ &= 2,97 \cdot 10^{20} \text{ fotonů/s}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

To je opravdu hodně! Pokud bychom mohli číst slova (jako jakési „fotony“ informace) tímto tempem, pak přečteme všechny knihy v knihovně Kongresu USA asi za nanosekundu.

39.3 FOTOELEKTRICKÝ JEV

Ozařujeme-li svazkem světla s dostatečně krátkou vlnovou délkou čistý kovový povrch, vyráží světlo z tohoto povrchu elektrony. Tento **fotoelektrický jev**, stručně také **fotoefekt**, se využívá v mnoha zařízeních včetně televizních kamer, snímacích elektronek a převaděčů obrazu pro noční vidění — noktovizorů. Einstein použil svou hypotézu fotonu při vysvětlení tohoto jevu, který nemůže být jednoduše pochopen pomocí klasické fyziky.

Rozebereme nyní dva fotoelektrické pokusy, z nichž každý používá zařízení z obr. 39.1. V něm světlo o frekvenci f vyráží při dopadu na terč T elektrony. Napětí U mezi terčem T a kolektorem K volíme tak, aby se tyto elektrony (kterým říkáme **fotoelektrony**) odsály. Takto vytváříme **fotoelektrický proud** I (stručně též **fotoproud**), který měříme ampérmetrem A.



Obr. 39.1 Zařízení pro studium fotoelektrického jevu. Dopadající světlo osvětluje terč T a emituje elektrony, které dopadají na kolektor K. Elektrony se pohybují v obvodu ve směru opačném, než podle konvence ukazují šipky pro proud. Baterií a potenciometrem se nastaví potřebné napětí mezi terčem a kolektorem.

První fotoelektrický pokus

Posuvným kontaktem z obr. 39.1 nastavíme napětí U tak, že kolektor K je záporný vzhledem k terči T. Působením tohoto napětí zpomalujeme vyražené elektrony. Napětí U

pak měníme tak dlouho, dokud nedosáhne hodnotu, které říkáme **brzdné napětí** U_b ; fotoproud I při něm právě klesne na nulu. Pro $U = U_b$ jsou i elektrony emitované s nejvyšší energií zastaveny, a to těsně před dopadem na kolektor. Pak kinetická energie $E_{k,max}$ těchto elektronů s nejvyšší energií je

$$E_{k,max} = eU_b, \quad (39.4)$$

kde e je elementární náboj.

Měření ukazuje, že pro světlo dané frekvence *nezávisí* $E_{k,max}$ *na intenzitě zdroje světla*. Ať je zdroj oslnivě jasný nebo tak slabý, že jej stěží pozorujeme (nebo cokoli mezi tím), nejvyšší kinetická energie emitovaných elektronů má vždy stejnou hodnotu.

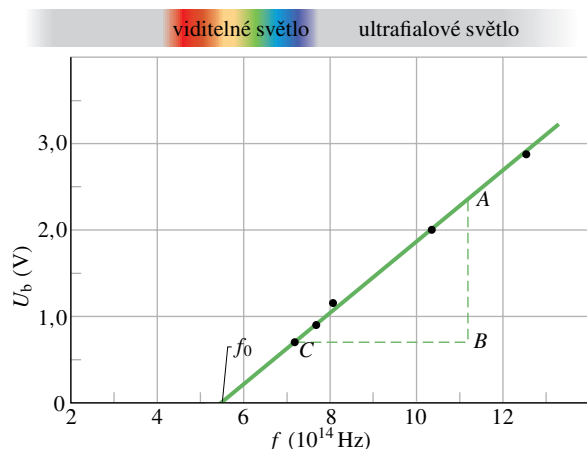
Tento jev *nedokážeme* vysvětlit pomocí klasické fyziky. Považujeme-li dopadající světlo za klasickou elektromagnetickou vlnu, budou elektrony terče kmitat pod vlivem střídavého elektrického pole dopadající světelné vlny. Za jistých podmínek získá kmitající elektron dost energie k tomu, aby unikl z povrchu terče. Když zvýšíme intenzitu dopadajícího svazku světla, zvýšíme tím amplitudu střídavého elektrického pole a zdá se rozumné předpokládat, že toto silnější střídavé pole dodá větší „kopanec“ emitovaným elektronům. To je ale v protikladu s tím, co pozorujeme. Pro danou frekvenci dávají jak intenzivní, tak slabý světelný svazek stejně velký maximální kopanec unikajícím elektronům.

Naproti tomu pozorovaný výsledek přirozeně vyplyne z představy světla jako toku fotonů. Maximální energie, kterou elektron v terči T z obr. 39.1 může získat od dopadajícího světla, je pak energie jednotlivého fotonu. Zvyšováním intenzity světla se zvyšuje *počet* fotonů dopadajících na povrch terče, ale *energie každého fotonu* daná rov. (39.2) zůstává stejná. Maximální kinetická energie dodaná elektronu se tedy nemění.

Druhý fotoelektrický pokus

V tomto pokusu měníme frekvenci f dopadajícího světla a měříme s ním spojený brzdný potenciál U_b . Obr. 39.2 ukazuje závislost U_b na f . Všimněme si, že fotoelektrický jev nenastane, jestliže je frekvence nižší než jistá **prahová frekvence** f_0 ; ukazuje se, že tomu tak je *nezávisle na intenzitě dopadajícího světla*.

To je další záhada pro klasickou fyziku. Pokud světlo považujeme za elektromagnetickou vlnu, musíme předpokládat, že *nezávisle* na tom, jak nízká je její frekvence, mohou být elektrony emitovány *vždy*, pokud jim dodáme dost energie — tedy pokud použijeme dostatečně intenzivní zdroj. *To se ale nestane*. Pro světlo s frekvencí nižší než prahovou fotoelektrický jev nenastane, ať už je světlo jakkoli intenzivní.



Obr. 39.2 Brzdňý potenciál U_b jako funkce frekvence f dopadajícího světla pro sodíkový terč T v zařízení z obr. 39.1 (data změřil R. A. Millikan v roce 1916).

Existenci prahové frekvence ale můžeme očekávat, pokud je energie předávána fotony. Elektronů jsou v terči drženy elektrostatickými silami. (Pokud by tomu tak nebylo, vypadávaly by z terče už vlastní vahou.) Aby elektrony právě unikly z terče, musí získat jistou minimální energii Φ , kde Φ je vlastnost materiálu terče, které říkáme **výstupní práce**. Pokud energie hf předaná elektronu přesahuje výstupní práci materiálu (tedy pokud platí $hf > \Phi$), může elektron uniknout z povrchu terče. Pokud předaná energie nepřesahuje výstupní práci (tedy pokud platí $hf < \Phi$), elektrony uniknout nemohou. To je přesně to, co obr. 39.2 ukazuje.

Fotoelektrický zákon

Einstein shrnul výsledky obou fotoelektrických pokusů do jediné rovnice

$$hf = E_{k,\max} + \Phi \quad (\text{fotoelektrický zákon}), \quad (39.5)$$

která vyjadřuje zákon zachování energie pro jednotlivou interakci mezi fotonem o frekvenci f a elektronem z terče o výstupní práci Φ . Zbývající energie ($hf - \Phi$), kterou elektron získá při interakci, se projeví jako jeho kinetická energie. Za nejvýhodnějších podmínek může elektron vystoupit z povrchu bez úbytku této kinetické energie a očitne se pak mimo terč s maximální možnou energií $E_{k,\max}$.

Přepišme rov. (39.5) dosazením za $E_{k,\max}$ z rov. (39.4). Po malých úpravách dostaneme

$$U_b = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e}. \quad (39.6)$$

Podíly h/e a Φ/e jsou konstantní, a tak očekáváme lineární závislost změřeného brzdňého potenciálu U_b na frekvenci f , jak ukazuje obr. 39.2. Dále pak směrnice přímky

by měla být rovna h/e . Pro kontrolu změříme na obr. 39.2 vzdálenosti $|AB|$ a $|BC|$ a píšeme

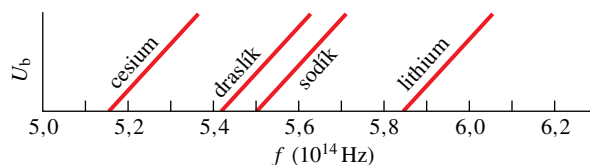
$$\begin{aligned} \frac{h}{e} &= \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{(2,35 - 0,72) \text{ V}}{(11,2 \cdot 10^{14} - 7,2 \cdot 10^{14}) \text{ Hz}} = \\ &= 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

Vynásobením výsledku elementárním nábojem e dostaneme

$$\begin{aligned} h &= (4,1 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = \\ &= 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}. \end{aligned}$$

Tato hodnota Planckovy konstanty souhlasí s hodnotami měřenými pomocí jiných metod.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje data podobná obr. 39.2 pro terče z cesia, draslíku, sodíku a lithia. Přímky zobrazující závislosti jsou rovnoběžné. (a) Seřadte terče sestupně podle jejich výstupní práce. (b) Seřadte závislosti sestupně podle hodnoty h , kterou určují.



PŘÍKLAD 39.2

Fólie z draslíku je ve vzdálenosti $r = 3,5$ m od izotropního zdroje světla, který má výkon $P = 1,5$ W. Výstupní práce pro draslík je $\Phi = 2,2$ eV. Předpokládejte, že energie je přenášena dopadajícím světelným svazkem spojitě a plynule (tedy jako by platila klasická fyzika a fotony neexistovaly). Jak dlouho potrvá, než fólie vstřebá dostatek energie, aby mohla emitovat elektron? Předpokládejte, že fólie absorbuje všechnu dopadající energii a že elektron, který bude emitován, absorbuje energii dopadající na kruhovou plošku o poloměru $5,0 \cdot 10^{-11}$ m, daném typickým poloměrem atomu.

ŘEŠENÍ: Spočtíme si intenzitu I (výkon/plocha) světelné energie, dopadající na vzorek. Z ní můžeme snadno určit, za jak dlouho absorbuje studovaná ploška energii 2,2 eV.

Předpokládejme, že energie emitovaná ze zdroje je rozložena stejnoměrně v rozšiřující se kulové vlnoploše se středem ve zdroji. Z rov. (34.27) je intenzita světla v místě fólie

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{(1,5 \text{ W})}{4\pi(3,5 \text{ m})^2} = 9,74 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Dopadá-li na plochu $S = \pi(5,0 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2 = 7,85 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2$ světlo s intenzitou I po dobu t , pohltí se energie $E = IS t = R t$. Tok R energie ploškou „průřezu atomu“ je

$$R = IS = (9,74 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2})(7,85 \cdot 10^{-21} \text{ m}^2) = 7,65 \cdot 10^{-23} \text{ W}.$$

Jestliže tuto energii bude „nasávat“ jediný elektron, potřebuje k získání 2,2 eV dobu

$$t = \frac{\Phi}{R} = \frac{(2,2 \text{ eV})}{(7,65 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1})} \left(\frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) = 4600 \text{ s} \doteq 1,3 \text{ h.} \quad (\text{Odpověď})$$

Museli bychom tedy čekat více než hodinu od zapnutí zdroje světla na to, aby začaly být emitovány elektrony. Skutečná čekací doba je méně než 10^{-9} s. Elektron zřejmě nemusí čekat a postupně „sát“ energii z dopadající vlny; pohltí tuto energii celou naráz v jediné interakci fotonu s elektronem.

PŘÍKLAD 39.3

Nalezněte výstupní práci sodíku z dat vynesných v obr. 39.2.

ŘEŠENÍ: Prahová frekvence f_0 , při které graf v obr. 39.2 protíná osu frekvence, je přibližně $5,5 \cdot 10^{14}$ Hz. Fotony při této frekvenci mají energii přesně rovnou výstupní práci, a tak můžeme rov. (39.2) psát jako

$$E = hf_0 = \Phi,$$

což dává

$$\Phi = hf_0 = (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}) = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,3 \text{ eV.} \quad (\text{Odpověď})$$

39.4 FOTONY MAJÍ HYBNOST

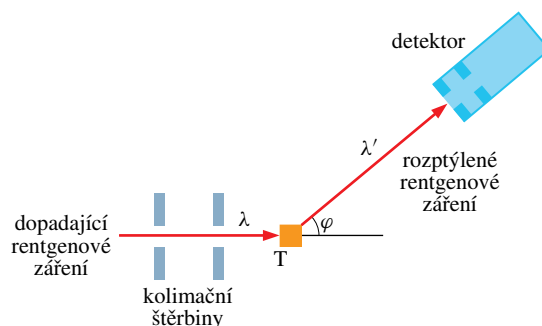
V roce 1916 rozšířil Einstein svou hypotézu o fotonech o předpoklad, že při interakci světla s hmotou předávají fotony nejen energii, ale i hybnost. Stejně jako energie se i hybnost předává po diskretních kvantech a v jednotlivých bodech namísto rozměrnějších oblastí prostoru.

Velikost hybnosti p fotonu spojeného s vlnou o frekvenci f je

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{hybnost fotonu}). \quad (39.7)$$

Rov. (39.2) ($E = hf = hc/\lambda$) a rov. (39.7) nám říkají například to, že fotony ve svazku rentgenového záření ($\lambda \approx 0,05 \text{ nm}$) mají mnohem větší hodnotu jak energie, tak hybnosti než fotony viditelného světla ($\lambda \approx 500 \text{ nm}$).

O několik let později, v roce 1923, prováděl Arthur Compton z Washingtonovy univerzity v St. Louis pokus, který podpořil názor, že jak hybnost, tak energie světla jsou předávány fotony. V tomto pokusu dopadal svazek rentgenového záření o vlnové délce λ na uhlíkový terč, jak ukazuje obr. 39.3. Compton měřil vlnové délky a intenzity rentgenových paprsků rozptýlených tímto terčem do různých směrů.



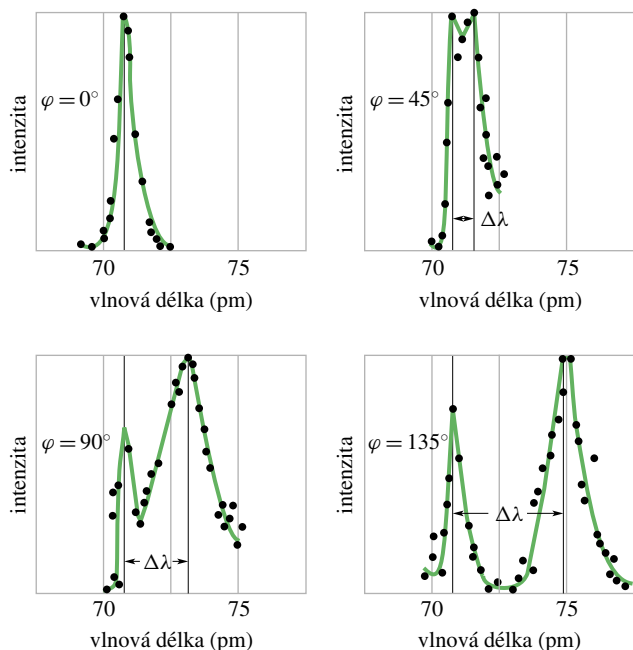
Obr. 39.3 Comptonovo zařízení. Svazek rentgenového záření o vlnové délce $\lambda = 71,1 \text{ pm}$ dopadá na uhlíkový terč T. Rentgenové záření rozptýlené na terči pozorujeme pro různé úhly φ vůči směru dopadajícího záření. Detektor měří jak intenzitu rozptýleného rentgenového záření, tak jeho vlnovou délku.

Obr. 39.4 ukazuje jeho výsledky. I když v dopadajícím svazku byla prakticky jediná vlnová délka ($\lambda = 71,1 \text{ pm}$), vidíme, že rozptýlený svazek obsahuje velký rozsah vlnových délek se dvěma výraznými píky v intenzitě. Jeden pík má střed kolem dopadající vlnové délky λ , druhý kolem jiné hodnoty λ' ; rozdíl $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ nazýváme **Comptonův posuv**. Hodnota Comptonova posuvu se mění s úhlem, pod kterým je rozptýlené rentgenové záření detegováno.

Obr. 39.4 je z pohledu klasické fyziky další záhada. Pokud považujeme dopadající svazek rentgenového záření za elektromagnetickou vlnu, musíme si představit elektrony v uhlíkovém terči, jak kmitají pod vlivem střídavého elektrického pole dopadající vlny. Elektron bude kmitat s frekvencí střídavého elektrického pole a — podobně jako maličká anténa rádiového vysílače — bude vyzařovat *na stejné frekvenci*. Rozptýlené rentgenové záření by mělo mít stejnou frekvenci, a tedy i stejnou vlnovou délku jako dopadající svazek. Ale nemá.

Compton interpretoval rozptyl rentgenových paprsků na uhlíku pomocí fotonů jako přenos energie a hybnosti mezi dopadajícím rentgenovým svazkem a volně vázanými elektrony v uhlíkovém terči. Podívejme se nejdříve kvalitativně a pak kvantitativně na to, jak kvantově mechanické představy vedou k pochopení Comptonových výsledků.

Předpokládejme, že interakce mezi dopadajícím rentgenovým svazkem a elektronem v klidu se účastní jediný



Obr. 39.4 Comptonovy výsledky pro čtyři hodnoty úhlu rozptylu φ . Všimněte si, že hodnota Comptonova posuvu $\Delta\lambda$ roste pro rostoucí úhel rozptylu φ .

foton o energii $E = hf$. Směr rentgenového záření se obecně změní (říkáme, že se rentgenový foton rozptyluje) a elektron se začne pohybovat. Elektron tedy získá jistou kinetickou energii. Protože se energie při interakci zachovává, musí být energie rozptýleného fotonu $E' = hf'$ menší než energie dopadajícího fotonu. Rozptýlené rentgenové záření tedy musí mít nižší frekvenci f' , a proto i delší vlnovou délku λ' , než dopadající rentgenové záření; to je v souladu s Comptonovým měřením na obr. 39.4. Tento druh rozptylu s posuvem frekvence nazýváme **Comptonův rozptyl**.

Při kvantitativním postupu nejprve použijeme zákon zachování energie. Obr. 39.5 znázorňuje „srážku“ mezi rentgenovým fotonem a volným elektronem, který je na počátku v klidu. Po srážce vystupuje rentgenové záření o vlnové délce λ' pod úhlem φ a elektron se pohybuje ve směru daném úhlem θ . Zákon zachování energie pak dává

$$hf = hf' + E_k,$$

kde hf je energie dopadajícího fotonu, hf' je energie rozptýleného fotonu a E_k je kinetická energie elektronu po srážce. Protože elektrony mohou získat rychlost srovnatelnou s rychlostí světla, musíme pro kinetickou energii elektronu použít relativistický vzorec podle rov. (38.33)

$$E_k = mc^2(\gamma - 1),$$

kde m je hmotnost elektronu a γ je Lorentzův koeficient

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Dosažením za E_k do zákona zachování energie dostaneme

$$hf = hf' + mc^2(\gamma - 1)$$

a odtud dosažením $c/\lambda = f$ a $c/\lambda' = f'$ získáme

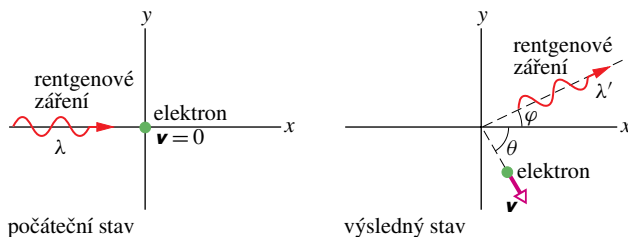
$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1). \quad (39.8)$$

Dále použijeme (vektorově) zákon zachování hybnosti na srážku rentgenového fotonu s elektronem podle obr. 39.5. Hybnost dopadajícího a rozptýleného fotonu určuje rovnice (39.7) ($p = h/\lambda$) a hybnost elektronu po srážce rov. (38.31) ($p = \gamma mv$). Napíšeme-li zvlášť rovnice pro zachování složek hybnosti ve směru x a y , dostaneme

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi + \gamma mv \cos \theta \quad (\text{složka } x) \quad (39.9)$$

a

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi - \gamma mv \sin \theta \quad (\text{složka } y). \quad (39.10)$$



počáteční stav

výsledný stav

Obr. 39.5 Rentgenové záření o vlnové délce λ interaguje s elektronem v klidu. Rentgenový svazek je rozptýlen do úhlu φ a jeho vlnová délka vzroste na λ' . Elektron se pohybuje s rychlostí v pod úhlem θ .

Chceme najít výraz pro Comptonův posuv rozptýleného rentgenového záření $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$. Z pěti proměnných ($\lambda, \lambda', v, \varphi, \theta$), které vystupují v rov. (39.8), (39.9) a (39.10), vyloučíme v a θ , které se vztahují jen k elektronu po srážce. Po složitějších úpravách dostaneme závislost Comptonova posuvu na úhlu rozptylu φ :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \varphi) \quad (\text{Comptonův posuv}). \quad (39.11)$$

Konstantní veličina $h/(mc)$ se nazývá **Comptonova vlnová délka** elektronu. Rov. (39.11) přesně souhlasí s Comptonovými experimentálními výsledky.

A pro úplnost...

Zbývá nám vysvětlit pík na vlnové délce dopadajícího záření ($\lambda = 71,1 \text{ pm}$) na obr. 39.4a. Ten nevzniká při rozptylu rentgenových paprsků na velmi volně vázaných elektronech v terči, ale při rozptylu na elektronech, které jsou *těsně* vázány k atomům uhlíku, z nichž je terč vyroben. Každá taková srážka je pak vlastně srážkou mezi dopadajícím rentgenovým fotonem a celým atomem uhlíku. Dosadíme-li za m v rov. (39.11) hmotnost atomu uhlíku (která je zhruba 22 000krát větší než hmotnost elektronu), vidíme, že posuv $\Delta\lambda$ je 22 000krát menší než Comptonův posuv pro elektron, a tedy příliš malý na to, abychom jej mohli zjistit. Proto pro rentgenové záření rozptýlené při těchto srážkách naměříme vlnovou délku stejnou, jako má dopadající rentgenové záření.

PŘÍKLAD 39.4

Rentgenové záření o vlnové délce $\lambda = 22 \text{ pm}$ (energie fotonu 56 keV) se rozptyluje na uhlíkovém terči pod úhlem 85° vůči dopadajícímu svazku.

(a) Jaký je Comptonův posuv rozptýleného svazku?

ŘEŠENÍ: Z rov. (39.11) máme

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) = \\ &= \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(1 - \cos 85^\circ)}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})} = \\ &= 2,21 \cdot 10^{-12} \text{ m} \doteq 2,2 \text{ pm}. \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(b) Jaká část α z počáteční energie rentgenového fotonu je při tomto rozptylu předána elektronu?

ŘEŠENÍ: Podíl ztráty energie je

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{E - E'}{E} = \frac{hf - hf'}{hf} = \frac{c/\lambda - c/\lambda'}{c/\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \\ &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.\end{aligned} \quad (39.12)$$

Dosazením dostaneme

$$\alpha = \frac{(2,21 \text{ pm})}{(22 \text{ pm} + 2,21 \text{ pm})} = 0,091 \text{ neboli } 9,1 \%. \quad (\text{Odpověď})$$

Ačkoli Comptonův posuv $\Delta\lambda$ nezávisí na vlnové délce λ dopadajícího rentgenového záření (rov. (39.11)), *relativní* ztráta energie rentgenového záření závisí na λ . Jak ukazuje rov. (39.12), relativní ztráta roste, když se vlnová délka dopadajícího záření zmenšuje.

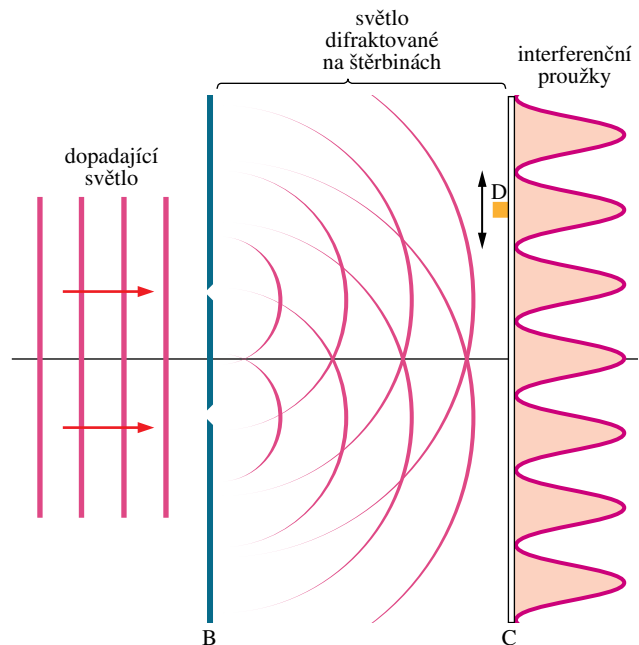
(a) Comptonův posuv, (b) relativní posuv vlnové délky, (c) relativní změna energie fotonu a (d) energie předaná elektronu?

39.5 SVĚTLO JAKO VLNA PRAVDĚPODOBNOSTI

Může se to zdát podivné, že světlo může být vlna a přesto vzniká a při interakci zaniká jako určité kvantum energie — foton. Nový pohled na pokus s dvojštěrbinou z čl. 36.4 nám pomůže tuto záhadu objasnit. Budeme uvažovat tři verze tohoto důležitého pokusu.

Standardní verze

Obr. 39.6 nám připomene původní pokus prováděný Thomasem Youngem v roce 1801, který jsme viděli na obr. 36.6. Světlo dopadá na stínítko B se dvěma úzkými rovnoběžnými štěrbinami. Světelné vlny vycházejí z obou štěrbin, původně jediný směr šíření se rozšíří difrakcí, takže se po dopadu na stínítko C překrývají. Interferencí vzniká obrazec, kde se střídají minima a maxima intenzity. V čl. 36.4 jsme brali existenci těchto interferenčních proužků jako důkaz vlnové podstaty světla.



Obr. 39.6 Světlo dopadá na stínítko B, které obsahuje dvě rovnoběžné štěrbin. Světlo na nich difraktuje. Obě difraktované vlny dopadají na stínítko C, skládají se a vytvářejí interferenční proužky. Malý detektor fotonů D v rovině stínítka C klapne pokaždé, když absorbuje foton.

KONTROLA 3: Srovnajte Comptonův rozptyl pro rentgenové záření ($\lambda \doteq 20 \text{ pm}$) a viditelné světlo ($\lambda \doteq 500 \text{ nm}$) pro daný úhel rozptylu. Kde je větší

Do jednoho bodu v rovině stínítka umístíme malý detektor fotonů D — například fotoelektrické zařízení, které klapne, když pohltí foton. Detektor bude v náhodné okamžiky klapat a každé klapnutí signalizuje přenos energie od světelné vlny na stínítko — dopad jednoho fotonu.

Posouváme-li velmi pomalu detektor nahoru a dolů, jak je znázorněno na obr. 39.6, bude se četnost klapání zvětšovat a zmenšovat tak, jak bude detektor postupně procházet maximy a minimy, která přesně odpovídají poloze maxim a minim v interferenčních prouzcích.

Co je podstatou tohoto myšleného experimentu? Nedokážeme předpovědět, kdy bude foton detegován v daném bodě na stínítku C; fotony jsou detegovány v každém bodě v náhodných časových okamžicích. Můžeme však předpovědět, že *pravděpodobnost*, že foton bude detegován v daném bodě v zadaném časovém intervalu, je úměrná intenzitě světla dopadajícího na stínítko C.

V čl. 34.4 jsme viděli, že intenzita I světelné vlny je v každém bodě úměrná čtverci amplitudy E_m proměnného elektrického pole.

Pravděpodobnost, že foton bude detegován (za jednotku času) v malém objemu se středem v daném bodě světelné vlny, je úměrná čtverci amplitudy vektoru intenzity elektrického pole vlny v tomto bodě.

Tím jsme vytvořili pravděpodobnostní popis světelné vlny, a tedy jiný způsob, jak se dívat na světlo. Je to nejen elektromagnetická vlna, ale i **vlna!pravděpodobnosti**. To znamená, že každému bodu světelné vlny můžeme přiřadit číslo – pravděpodobnost (za jednotku času), že foton může být detegován v malém objemu kolem tohoto bodu.

Jednofotonová verze

Jednofotonovou verzi pokusu s dvojtěrbinou poprvé provedl G. I. Taylor v roce 1909 a pokus byl od té doby mnohokrát zopakován. Od standardní verze se liší tím, že zdroj světla je natolik slabý, že další foton je náhodně emitován až poté, co předcházející foton dopadl na stínítko. Překvapivě se na stínítku C stále vytvářejí interferenční proužky, pokud pokus probíhá dostatečně dlouho (v Taylorově prvním pokusu to bylo po dobu několika měsíců).

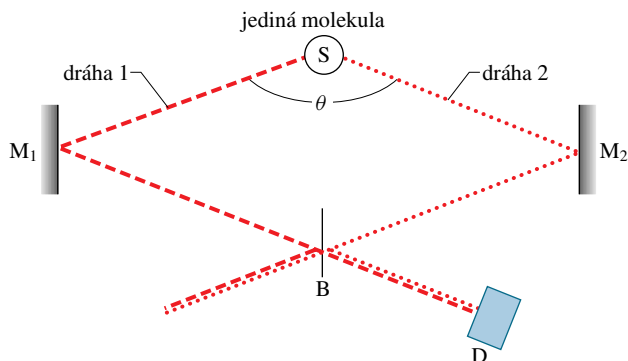
Jak můžeme tento jednofotonový dvojtěrbinový pokus vysvětlit? Dříve, než se vůbec pustíme do interpretace výsledků, měli bychom si položit otázky jako: Když se v aparatuře pohybuje jediný foton, kterou štěrbinou ve stínítku B prochází? Jak tento foton „ví“, že se někde vyskytuje další štěrbinou, a že tedy může interferovat? Může jediný foton nějak projít oběma štěrbinami a interferovat sám se sebou?

Mějme na paměti, že fotony se projevují jen při interakci světla s hmotou. Víme tedy, že fotony *vznikají* ve zdroji, který vytváří dopadající světlo na obr. 39.6, a že *zanikají* na stínítku C, kde světlo interaguje s pevnou látkou, ze které je stínítko složeno. Mezi zdrojem a detektorem však *postulujeme*, že se světlo pohybuje *ne* jako tok fotonů, ale jako vlna pravděpodobnosti. Tato vlna může difraktovat na každé cloně nezávisle na tom, jak slabý je zdroj světla. Obě difraktované vlny, každá od jedné štěrbinu, spolu mohou interferovat, když se setkají v daném bodě stínítka C, kde pak na stínítku vytvářejí maxima a minima „proužků pravděpodobnosti“. Fotony pak budeme přednostně detegovat v oblastech maximální pravděpodobnosti. V oblastech minima, kde je pravděpodobnost nulová, detegovány nebudou.

Toto vypadá jako uspokojivé vysvětlení jednofotonového pokusu, neboť klasická fyzika nenabízí vůbec žádné vysvětlení. Podle známého fyzika Richarda Feynmana je jednofotonový pokus na dvojtěrbině jev, který není možné, *absolutně* není možné, vysvětlit klasickým způsobem a který je vlastní povaze kvantové fyziky.

Jednofotonová širokouhlá verze

Obr. 39.7 ukazuje uspořádání v další verzi dvojtěrbinového pokusu, který provedli Ming Lai a Jean-Claude Diels na Univerzitě v Novém Mexiku v roce 1992. Zdroj S obsahuje molekuly, které emitují jednotlivé fotony dostatečně dlouho po sobě. Zrcadla M_1 a M_2 odrážejí světlo emitované ze zdroje tak, že prochází po dvou různých drahách 1 a 2 svírajících úhel θ blízký 180° . Toto uspořádání se liší od standardního dvojtěrbinového pokusu, u něhož je velmi malý úhel mezi oběma drahami světelných vln dopadajících na obě štěrbinu.



Obr. 39.7 Světlo jediného fotonu emitované ze zdroje S se pohybuje po dvou vzdálených drahách a interferuje samo se sebou na detektoru D po spojení na děliči svazku B. (Ming Lai and Jean-Claude Diels, *Journal of the Optical Society of America B*, 9, 2290–2294, December 1992.)

Po odrazu od zrcadel M_1 a M_2 se světelné vlny, pohybující se podél drah 1 a 2, setkávají na děliči svazku B. (*Dělič svazku* je optické zařízení, které propouští polovinu dopadajícího světla a odráží druhou polovinu.) Na pravé straně děliče z obr. 39.7 se světelná vlna, která se pohybovala po dráze 2 a odrazila od B, spojuje se světelnou vlnou, která se pohybovala po dráze 1 a prošla děličem B. Obě tyto vlny pak spolu interferují při dopadu na detektor D (*fotonásobič* detegující jednotlivé fotony).

Výstup z detektoru je série náhodně rozložených elektrických pulzů; každý pulz signalizuje detekci jednoho fotonu. V pokusu se dělič B pomalu pohybuje ve vodorovném směru (zde maximálně jen asi o $50 \mu\text{m}$) a výstup z detektoru se zaznamenává na zapisovači. Posun děliče B mění délku dráhy 1 a 2 a vytváří fázový rozdíl mezi světelnými vlnami, které dopadají na detektor D. Na výstupním signálu z detektoru se objevují interferenční maxima a minima.

Tento pokus se dá těžko pochopit pomocí tradičních pojmů. Například emituje-li molekula jediný foton, pohybuje se foton po dráze 1 nebo po dráze 2 v obr. 39.7 (nebo po nějaké zcela jiné dráze)? Může se snad současně pohybovat po obou drahách? Abychom našli odpověď, předpokládáme, že emitující molekula při kvantovém přechodu na nižší hladinu energie vyzařuje vlnu pravděpodobnosti do všech směrů. Pokus vzorkuje tuto vlnu ve dvou směrech, zvolených tak, že jsou prakticky protilehlé.

Vidíme, že všechny tři verze pokusu na dvojštěrbíně můžeme interpretovat, předpokládáme-li, že (1) světlo ve zdroji vzniká jako jednotlivé fotony, (2) světlo se v detektoru pohlcuje jako jednotlivé fotony a (3) světlo se pohybuje mezi zdrojem a detektorem jako vlna pravděpodobnosti.

39.6 ELEKTRONY A DE BROGLIEHO VLNY

Fyzikové jen zřídka kdy udělali chybu, když předpokládali symetrii v přírodě. Zjistíme-li, že proměnné magnetické pole vytváří elektrické pole, můžeme usuzovat jako Faraday a Maxwell, že proměnné elektrické pole vytváří pole magnetické. A ono ho také vytváří.

V roce 1924 se francouzský fyzik Louis de Broglie rovněž dovolával symetrie. Svazek světla je vlna, ale předává energii a hybnost hmotě v kvantech — fotonech. Proč nemohou mít svazky částic podobné vlastnosti? Proč nemůžeme považovat pohybující se elektron — nebo jakoukoli jinou částici — za **vlnu hmoty**?

De Broglie navrhl, že rov. (39.7) ($p = h/\lambda$) neplatí jen pro fotony, ale také pro hmotné částice — například pro elektrony. V čl. 39.4 jsme použili tuto rovnici, abychom přiřadili fotonu hybnost p , známe-li vlnovou délku λ vlny

příslušné fotonu. Nyní tento vztah použijeme ve tvaru

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (\text{de Broglieho vlnová délka}) \quad (39.13)$$

k přiřazení vlnové délky λ částici, která má hybnost o velikosti p . Vlnová délka určená rov. (39.13) se nazývá **de Broglieho vlnová délka** pohybující se částice.

De Broglieho hypotézu o existenci vlnových vlastností hmoty poprvé experimentálně ověřili v roce 1927 C. J. Davison a L. H. Germer z Bellových laboratoří a George P. Thomson z Aberdeenské univerzity ve Skotsku. V roce 1989 byla vlnová podstata elektronů demonstrována i pokusem s dvojštěrbínou, kterou jsme použili pro diskusi vlnové podstaty světla.

Obr. 39.8 je fotografický důkaz existence vln hmoty, **de Broglieho vln**, v nedávno provedeném experimentu. V tomto experimentu byl vytvářen interferenční obrazec elektrony, posílanými *jeden za druhým* zařízením s dvojštěrbínou. Toto zařízení bylo podobné, jaké jsme používali dříve pro demonstrování optické interference, až na to, že pozorovací stínítko pracovalo stejně jako obvyklá televizní obrazovka. Když elektron dopadne na stínítko, vyvolá světelný záblesk a jeho poloha je zaznamenána.

Prvních několik elektronů neodhalilo nic zajímavého; zdánlivě dopadaly na stínítko v náhodných bodech (dva horní obrázky). Po dopadu několika tisíc elektronů se na obrazovce objevuje obrazec se světlými proužky v místech, kam dopadlo mnoho elektronů, a s tmavými, kam dopadlo elektronů málo. Tento obrazec je přesně to, co bychom očekávali při interferenci vln. To znamená, že *každý* elektron prošel zařízením jako de Broglieho vlna; část, která prošla jednou štěrbinou, interferovala s částí, která prošla druhou štěrbinou. Tato interference pak určila pravděpodobnost, že se elektron při dopadu objeví v daném bodě stínítka. Mnoho elektronů dopadlo do oblastí odpovídajících jasným proužkům při optické interferenci, málo elektronů dopadlo do oblastí odpovídajících tmavým proužkům.

Podobné interference byly pozorovány pro protony, neutrony a řadu atomů. V roce 1994 byly prokázány i pro molekuly jodu I_2 , které jsou nejen 500 000krát hmotnější než elektrony, ale jsou i mnohem složitější. V roce 1999 byly interference demonstrovány i pro mnohem složitější *fulerény* (*buckyballs*) C_{60} a C_{70} . (Fulerény jsou molekuly, které vypadají jako fotbalový míč vytvořený ze 60, resp. 70 atomů uhlíku.) Takové malé objekty, jako jsou elektrony, protony, atomy a molekuly, se zřejmě pohybují jako de Broglieho vlny. Když však uvažujeme větší a složitější objekty, musíme dojít k tomu, že již přestává mít smysl uvažovat vlnovou podstatu objektu. Pak se dostáváme do našeho známého nekvantového světa, jehož fyzikálním vlastnostem jsme

se věnovali v předchozích kapitolách. Krátce, elektron je de Broglieho vlna a může interferovat sám se sebou, ale kočka není de Broglieho vlna a nemůže sama se sebou interferovat (což musí být pro kočky velká úleva).

Obr. 39.9a ukazuje jiný pokus, který můžeme použít pro demonstraci rozptylu buď elektronů, nebo rentgenového záření na krystalech. Svazek částic jednoho nebo druhého druhu dopadá na terč tvořený práškem s malými krystalky hliníku. Rentgenové záření má jistou vlnovou délku λ . Elektrony mají energii takovou, aby jejich vlnová délka λ byla stejná. Po rozptylu na krystalech má vystupující svazek válcovou symetrii kolem počátečního směru dopadu a v důsledku Braggova rozptylu na atomových rovinách hliníku (viz čl. 37.9) vytváří soustředné kroužky na fotografickém filmu. Obr. 39.9b ukazuje výsledky pro rentgenové záření, obr. 39.9c ukazuje výsledky pro svazek elektronů. Geometrie kroužků je stejná a ukazuje, že jak rentgenové záření, tak elektrony se chovají v tomto pokusu jako vlny.

V současné době považujeme vlnovou podstatu hmoty za samozřejmou. Difrakce elektronů nebo neutronů se běžně používá pro studium atomové struktury pevných látek a kapalin. De Broglieho vlny jsou při tomto studiu důležitým doplňkem rentgenového záření. Elektrony pronikají do menší hloubky než rentgenové záření, a jsou proto užitečné pro studium vlastností povrchů. Rentgenové záření interaguje ve vzorku zejména s elektrony, a proto není vhodné pro určení polohy atomů o malé hmotnosti (především vodíku), které mají málo elektronů. Naproti tomu neutrony interagují s jádry atomů v terči, a jsou proto užitečné tam, kde nelze použít rentgenové záření.

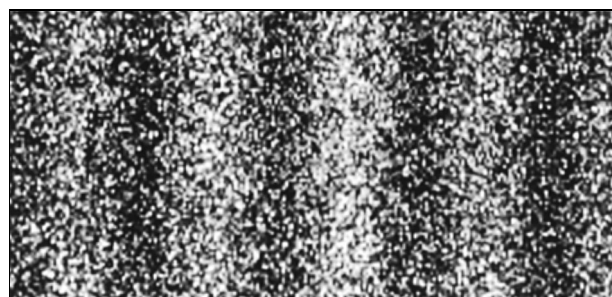
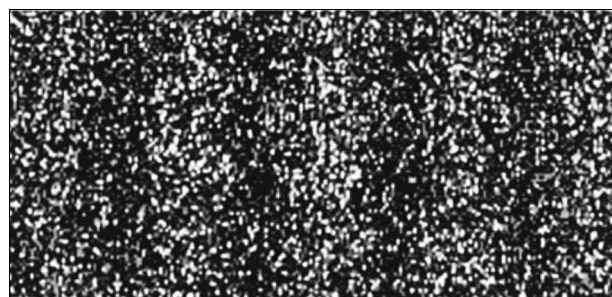
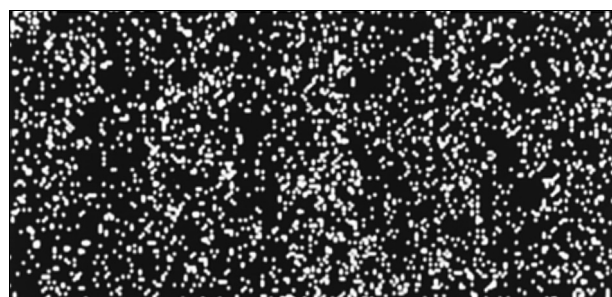
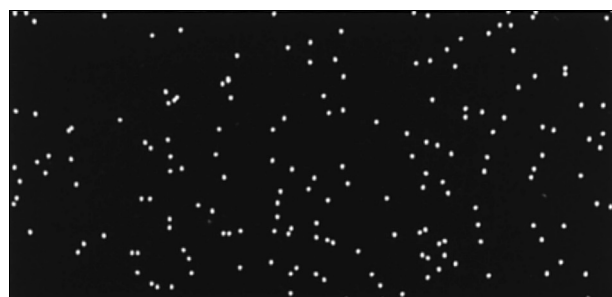
Obr. 39.10 ukazuje strukturu tuhého benzenu, jak ji můžeme určit pomocí difrakce neutronů. Každý ze soustředných modrých kroužků ukazuje polohu jednoho ze šesti atomů uhlíku, které vytvářejí známý benzenový kruh. Každý červený kroužek pak ukazuje polohu atomu vodíku vázaného k atomu uhlíku.

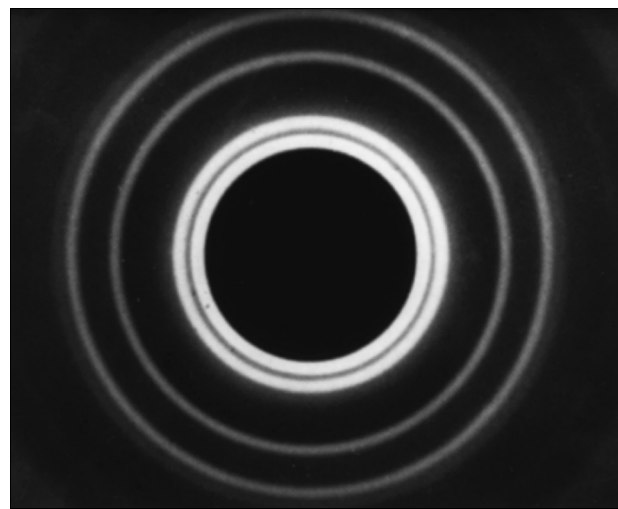
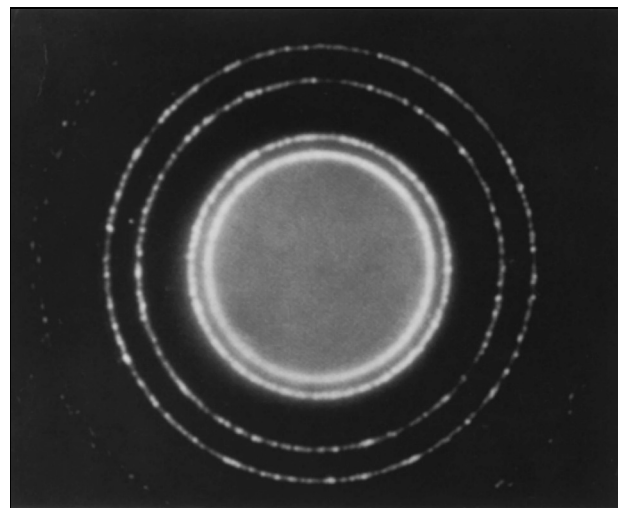
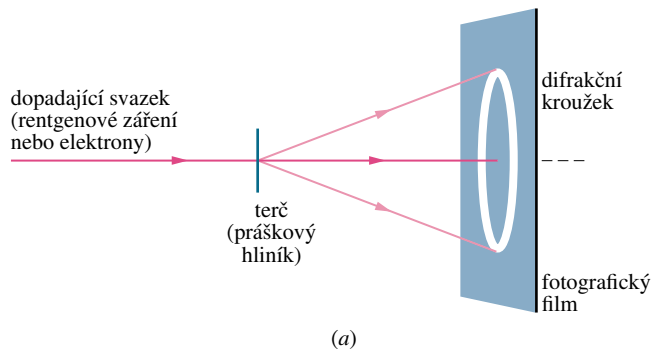
Vlny a částice

Obr. 39.8, 39.9 a 39.10 přesvědčivě dokazují vlnovou podstatu hmoty. Máme ale nejméně stejně tolik pokusů, které svědčí o částicové podstatě hmoty. Vezměme si jako příklad stopy vytvořené elektrony z úvodního obrázku k této kapitole. Tyto stopy — řada bublinek vytvořených v bublinkové komoře naplněné kapalným vodíkem — naznačují průchod částice. Kde je tedy ta vlna?

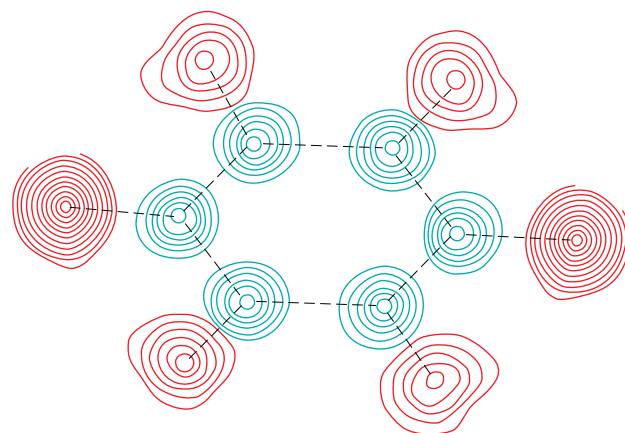
Abychom si zjednodušili situaci, vypneme magnetické pole, takže řada bublinek bude ležet na přímce. Každou bublinku můžeme považovat za bod detekce elektronu. De Broglieho vlny, které se pohybují mezi dvěma body de-

Obr. 39.8 Vytváření interferenčního obrazce pomocí svazku elektronů při pokusu na dvojštěrbíně podobně jako na obr. 39.6. De Broglieho vlny jsou stejně jako světelné vlny vlnami pravděpodobnosti. Shora dolů je přibližný počet elektronů v obrazci 7, 100, 3 000, 20 000 a 70 000.





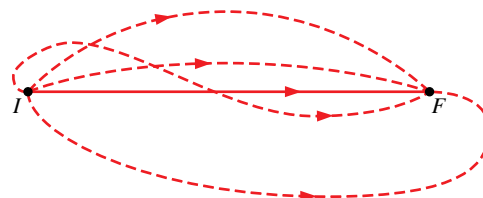
Obr. 39.9 (a) Experimentální uspořádání pro demonstraci vlnového charakteru dopadajícího svazku. (b) Difrakční obrazec pro dopadající rentgenový svazek (elektromagnetická vlna). (c) Difrakční obrazec pro dopadající svazek elektronů („vlna hmoty“). Základní geometrie obou obrazců je shodná.



Obr. 39.10 Atomová struktura benzenu zobrazená pomocí difrakce neutronů. Uzavřené křivky ukazují hustotu elektronů v pevném terči. Můžeme snadno vidět známý benzenový kruh se šesti atomy uhlíku (modře) a k nim vázané atomy vodíku (červeně).

tekce, jako jsou I a F na obr. 39.11, prozkoumávají všechny možné dráhy, z nichž některé jsou znázorněny.

Obecně pro každou dráhu spojující body I a F bude existovat blízká dráha taková, že vlny sledující obě dráhy se vyruší interferencí. To ale neplatí pro přímku spojující body I a F ; v tomto případě vlny na sousedních drahách zesilují vlnu postupující po přímce. Bublinky vytvářející stopu částice pak můžeme považovat za sérii detekčních bodů, ve kterých částicová vlna prodělala konstruktivní interferenci.



Obr. 39.11 Několik z mnoha drah spojujících body I a F , ve kterých jsou částice detegovány. Pouze ty částicové vlny, které sledují dráhy blízké přímce spojující oba body, interferují tak, že se sčítají. Pro všechny další dráhy se vlny sledující sousední dráhy interferencí vyruší. Proto částicová vlna sleduje přímkovou dráhu.

PŘÍKLAD 39.5

Jaká je vlnová délka de Broglieho vlny elektronu, jehož kinetická energie je 120 eV?

ŘEŠENÍ: De Broglieho vlnovou délku najdeme z rovnice (39.13) ze známé hybnosti elektronu. Z nerelativistického vztahu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ můžeme ukázat, že pro $E_k = 120$ eV je $v = 6,5 \cdot 10^6$ m·s⁻¹, což je velikost dostatečně malá vzhledem k rychlosti světla. To nám dovoluje použí-

vat nerelativistické vztahy jak pro kinetickou energii, tak pro hybnost ($p = mv$). Vyloučíme-li rychlost v v obou výrazech, dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mE_k} = \\ &= \sqrt{2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(120 \text{ eV})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV})} = \\ &= 5,91 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Z rov. (39.13) pak je

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}{(5,91 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})} = \\ &= 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 112 \text{ pm}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

To odpovídá typické velikosti atomu.

KONTROLA 4: Elektron a proton mají stejnou (a) kinetickou energii, (b) hybnost, (c) rychlost. Která z částic má v každém vyjmenovaném případě kratší de Broglieho vlnovou délku?

39.7 SCHRÖDINGEROVA ROVNICE

Jednoduchá vlna libovolného typu, ať už je to vlna na struně, zvuková vlna nebo světelná vlna, je popsána pomocí nějaké veličiny, která se mění v prostoru a čase způsobem typickým pro vlnu. Například pro světelné vlny je takovouto veličinou $\mathbf{E}(x, y, z, t)$, elektrická složka vlny. Pozorovaná hodnota v libovolném bodě pak záleží na souřadnicích tohoto bodu a na čase, ve kterém se provádí pozorování.

Jakou proměnnou veličinou máme popsat de Broglieho vlnu? Můžeme čekat, že tato veličina, které budeme říkat **vlnová funkce** $\Psi(x, y, z, t)$, bude složitější než odpovídající veličina pro světlo, protože de Broglieho vlna kromě energie a hybnosti také přenáší hmotnost a často i elektrický náboj. Ukazuje se, že funkce Ψ (velké řecké písmeno *psi*) je v matematickém smyslu komplexní funkce; to znamená, že její hodnoty můžeme psát jako $a + ib$, kde a a b jsou reálná čísla a $i^2 = -1$.

Ve všech případech, se kterými se v dalším setkáme, mohou být prostorové a časové proměnné separovány a Ψ můžeme psát ve tvaru součinu

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)e^{-i\omega t}, \quad (39.14)$$

kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence de Broglieho vlny. Funkce ψ (malé řecké písmeno *psi*) představuje jen prostoro-ově závislou část úplně, i na čase závislé funkce Ψ . V dalším se takřka výlučně budeme zabývat funkcí ψ . Vznikají pak dvě otázky: co znamená vlnová funkce a jak ji najdeme?

Co znamená vlnová funkce? De Broglieho vlna je podobně jako světelná vlna vlnou pravděpodobnosti. Předpokládejme například, že hmota dopadá na malý detektor částic; potom pravděpodobnost, že částice bude detegována v určitém časovém intervalu, je úměrná $|\psi|^2$, kde $|\psi|$ je absolutní hodnota vlnové funkce v místě detektoru. I když ψ je obvykle komplexní veličina, $|\psi|^2$ je vždycky reálná, a to nezáporná. *Fyzikální smysl* má tedy nikoli samotné ψ , ale veličina $|\psi|^2$, které říkáme **hustota pravděpodobnosti**. Vlně řečeno:

Pravděpodobnost detekce částice (za jednotku času) v malém objemu se středem v daném bodě je pro de Broglieho vlny úměrná hodnotě $|\psi|^2$ v tomto bodě.

Protože funkce ψ je obvykle komplexní, čtverec její absolutní hodnoty najdeme vzájemným vynásobením funkce ψ a funkce ψ^* , *komplexně sdružené* k funkci ψ . (Pro nalezení ψ^* nahradíme imaginární jednotku „ i “ při každém výskytu v ψ výrazem $-i$.)

Jak najdeme vlnovou funkci? Zvukové vlny a vlny na struně jsou popsány rovnicemi newtonovské mechaniky. Světelné vlny jsou popsány Maxwellovými rovnicemi. De Broglieho vlny jsou popsány **Schrödingerovou rovnicí**, kterou zavedl v roce 1926 rakouský fyzik Erwin Schrödinger.

V mnoha případech, které budeme diskutovat, se budeme zabývat pohybem částice podél osy x v oblasti, ve které působení síly na částici lze popsat změnou potenciální energie $E_p(x)$ částice. Schrödingerova rovnice se pak zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - E_p(x)]\psi &= 0 \\ (\text{Schrödingerova rovnice} & \quad (39.15) \\ \text{pro pohyb v jednom rozměru),} & \end{aligned}$$

kde E je celková mechanická energie (součet potenciální a kinetické energie) pohybující se částice. Schrödingerovu rovnici nemůžeme odvodit ze základnějších principů; je sama základní princip. S ostatními principy ovšem souvisí (problém 86).

Je-li $E_p(x)$ v rov. (39.15) rovna nule, pak tato rovnice popisuje **vlnou částici**, tedy takovou pohybující se částici, na kterou nepůsobí žádné síly. Celková energie částice je v tomto případě rovna její kinetické energii, a tedy E v rov. (39.15) je $\frac{1}{2}mv^2$. Rovnice pak má tvar

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \psi = 0.$$

Po dosazení $p = mv$ ji můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 \psi = 0.$$

Podle rov. (39.13) je výraz p/\hbar roven $1/\lambda$, kde λ je de Broglieho vlnová délka pohybující se částice. Dále víme, že $2\pi/\lambda$ je úhlový vlnčet* k , definovaný v rov. (17.5). Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (\text{Schrödingerova rovnice pro volnou částici}). \quad (39.16)$$

Rov. (39.16) má obecné řešení

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (39.17)$$

kde A a B jsou libovolné konstanty. Snadno ukážeme, že toto je skutečně řešením rov. (39.16), protože dosazením $\psi(x)$ a její druhé derivace dostaneme identitu.

Dosazením rov. (39.17) do rov. (39.14) najdeme, že časově závislá vlnová funkce Ψ volné částice pohybující se podél osy x je

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \psi(x)e^{-i\omega t} = \\ &= (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t} = \\ &= Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx + \omega t)}. \end{aligned} \quad (39.18)$$

Nalezení hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$

Z čl. 17.5 víme, že každá funkce tvaru $F(kx \pm \omega t)$ představuje postupnou vlnu. To platí jak pro exponenciální funkci v rov. (39.18), tak pro sinusovou závislost, kterou jsme dosud používali pro popis vlnění struny. Obě vyjádření spolu souvisí pomocí vztahů

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{a} \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta,$$

kde θ je libovolný úhel.

První člen na pravé straně rov. (39.18) představuje vlnu pohybující se v kladném směru osy x a druhý člen vlnu pohybující se v záporném směru osy x . Obecné řešení (rov. (39.18)) převedeme na případ pohybu v kladném směru osy x tak, že položíme konstantu B v rov. (39.18) a (39.17) rovnu nule, a současně označíme konstantu A jako ψ_0 . Rov. (39.17) pak dostane tvar

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ikx}. \quad (39.19)$$

Pro spočtení hustoty pravděpodobnosti musíme určit čtveřec absolutní hodnoty $\psi(x)$. Dostaneme

$$|\psi|^2 = |\psi_0 e^{ikx}|^2 = (\psi_0^2) |e^{ikx}|^2.$$

* V kvantové fyzice se úhlový vlnčet k často nazývá vlnové číslo.

Protože

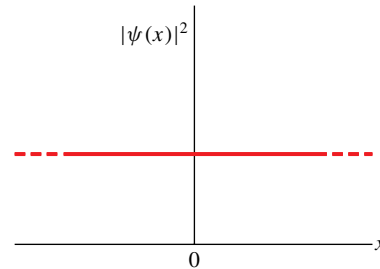
$$|e^{ikx}|^2 = (e^{ikx})(e^{ikx})^* = e^{ikx - ikx} = e^0 = 1,$$

dostaneme

$$|\psi|^2 = (\psi_0^2)(1)^2 = \psi_0^2.$$

Obr. 39.12 znázorňuje závislost hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$ na x pro volnou částici — je to přímka rovnoběžná s osou x od $-\infty$ do $+\infty$. Vidíme, že hustota pravděpodobnosti $|\psi|^2$ je stejná pro všechny hodnoty x , což znamená, že částice má stejnou pravděpodobnost být kdekoli podél osy x . Žádná poloha částice tedy není preferována.

Význam tohoto tvrzení si ozřejmíme v další části.



Obr. 39.12 Graf hustoty pravděpodobnosti $|\psi|^2$ pro volnou částici pohybující se v kladném směru osy x . Protože $|\psi|^2$ má stejnou konstantní hodnotu pro všechny hodnoty x , částice má v každém bodě stejnou pravděpodobnost, že bude detegována.

39.8 HEISENBERGŮV PRINCIP NEURČITOSTI

To, že volná částice v obr. 39.12 nemá žádnou preferovanou polohu, je náš první příklad použití **Heisenbergova principu neurčitosti**, který postuloval v roce 1927 německý fyzik Werner Heisenberg. Tento princip říká, že částici nelze současně přiřadit polohu \mathbf{r} a hybnost \mathbf{p} s neomezenou přesností.

Heisenbergův princip neurčitosti stanoví pro složky \mathbf{r} a \mathbf{p} tyto meze:

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar \end{aligned} \quad (\text{Heisenbergův princip neurčitosti}). \quad (39.20)$$

Zde např. Δx a Δp_x jsou neurčitosti pro měření x -ových složek \mathbf{r} a \mathbf{p} . I s těmi nejlepšími měřicími zařízeními, která nám může poskytnout moderní technika, bude každý součin neurčitosti polohy a neurčitosti hybnosti v rov. (39.20) větší než \hbar ; nikdy nemůže být menší.

Částice, jejíž hustota pravděpodobnosti je znázorněna na obr. 39.12, je volná částice. To znamená, že na ni nepůsobí žádná síla, takže její hybnost \mathbf{p} musí být konstantní. Přitom jsme předpokládali, aniž jsme to výslovně řekli, že \mathbf{p} můžeme určit absolutně přesně. Tím jsme ovšem předpokládali, že v rov. (39.20) je $\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = 0$. Tento předpoklad však vyžaduje, aby $\Delta x \rightarrow \infty$, $\Delta y \rightarrow \infty$ a $\Delta z \rightarrow \infty$. S touto nekonečně velkou neurčitostí je pak nemožné určit polohu částice, jak to také ukazuje obr. 39.12.

Nemůžeme si tedy myslet, že částice *má ve skutečnosti nějakou přesně určenou polohu, která je před námi z nějakého důvodu skryta. Jestliže je hybnost částice určena s absolutní přesností, slova jako „poloha částice“ jednoduše ztrácejí jakýkoli smysl. Částice z obr. 39.12 může být nalezena se stejnou pravděpodobností kdekoli podél osy x .*

PŘÍKLAD 39.6

Snadno ukážeme, že elektron s kinetickou energií 12,0 eV má rychlost $2,05 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Předpokládejme, že se elektron pohybuje ve směru osy x a že můžeme měřit jeho rychlost s přesností 0,50 %. Jaká je nejmenší neurčitost (podle Heisenbergova principu neurčitosti), se kterou můžeme současně měřit polohu elektronu podél osy x ?

ŘEŠENÍ: Rychlost elektronu je mnohem menší než rychlost světla, a proto můžeme jeho hybnost určit z nerelativistického vztahu jako

$$p = p_x = mv = (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(2,05 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) = 1,87 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Neurčitost Δp_x při měření hybnosti je 0,50 % této hodnoty, tedy $9,35 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Podle Heisenbergova principu neurčitosti (rov. (39.20)) je minimální neurčitost pro měření polohy

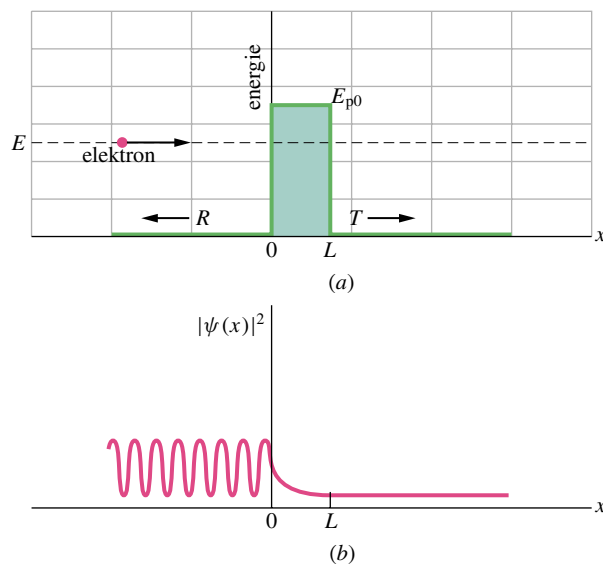
$$\Delta x \approx \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})/2\pi}{(9,35 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1})} = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ m} \doteq 11 \text{ nm}, \quad (\text{Odpověď})$$

to je asi 100 průměrů atomu. S danou neurčitostí měření hybnosti nemá smysl snažit se určit polohu elektronu s větší přesností.

39.9 TUNELOVÁNÍ

Představte si, že házíte lentilky po stole, na kterém někde v jejich dráze leží kniha. Byli byste velice překvapeni, kdyby lentilka prošla knihou místo toho, aby se od ní

odrazila. Něco takového od lentilek očekávat nemůžeme. Ale pro elektrony a jiné částice s malou hmotností takový jev, kterému se říká tunelování bariérou nebo prostě jen **tunelování**, nastat může.



Obr. 39.13 (a) Průběh závislosti energie v prostoru vytváří potenciálovou bariérou o výšce E_{p0} a tloušťce L . Elektron o celkové energii E se přibližuje k bariéře zleva. (b) Hustota pravděpodobnosti $|\psi|^2$ de Broglieho vlny reprezentující elektron ukazuje tunelování elektronu bariérou. Vlevo od bariéry dostaneme stojatou vlnu v důsledku superpozice dopadající a odražené de Broglieho vlny.

Obr. 39.13a ukazuje elektron o energii E , který se pohybuje ve směru osy x . Působí na něj takové síly, že jeho potenciální energie E_p je nulová všude kromě oblasti $0 < x < L$, kde má hodnotu E_{p0} . Takové oblasti říkáme **bariéra potenciální energie** (nebo volněji **potenciálová bariéra**) o výšce E_{p0} a tloušťce L .

Protože $E < E_{p0}$, měl by se podle klasické fyziky elektron, který se k bariéře přibližuje zleva, od bariéry odrazit a pohybovat se zpět proti původnímu směru pohybu. V kvantové fyzice je však v tomto případě elektron de Broglieho vlnou, a proto existuje jistá nenulová pravděpodobnost, že tato vlna „prosákne“ bariérou a ocitne se na druhé straně. To znamená, že existuje konečně velká pravděpodobnost, že se elektron ocitne na vzdálené straně bariéry a bude pokračovat v pohybu vpravo.

Vlnová funkce $\psi(x)$, která popisuje elektron, se najde řešením Schrödingerovy rovnice (39.15) samostatně pro tři oblasti znázorněné na obr. 39.13a: (1) vlevo od bariéry, (2) uvnitř bariéry a (3) vpravo od bariéry. Konstanty, které se v řešení objeví, určíme tak, aby funkce $\psi(x)$ byla hladká

(tzn. spojitá i se svou derivací) i v bodech $x = 0$ a $x = L$. Čtverec absolutní hodnoty $\psi(x)$ pak udává hustotu pravděpodobnosti.

Obr. 39.13b ukazuje výsledky graficky. Oscilující křivka vlevo od bariéry z obr. 39.13a (pro $x < 0$) je kombinací dopadající a odražené de Broglieho vlny. Odražená vlna má menší amplitudu než dopadající vlna a interferencí se vytvoří stojatá vlna.

Uvnitř bariéry (pro $0 < x < L$) klesá hustota pravděpodobnosti exponenciálně v závislosti na x . Předpokládáme-li však, že L je malé, není hustota pravděpodobnosti v $x = L$ zanedbatelná.

Vpravo od bariéry z obr. 39.13a (pro $x > L$) popisuje hustota pravděpodobnosti prošlou vlnu s malou, ale konstantní amplitudou. To znamená, že elektron se v této oblasti může nacházet se stejnou relativně malou pravděpodobností kdekoli podél osy x , pokud se mu podaří protunelovat bariérou. (Srovnajte tuto část obrázku s obr. 39.12 pro volnou částici.)

Definujeme *koeficient průchodu* T pro dopadající vlnu a bariéru z obr. 39.13a, který určuje pravděpodobnost, že dopadající elektron projde bariérou, tedy pravděpodobnost, že se uskuteční tunelování. Například pro $T = 0,02$ z každých 1 000 elektronů vystřelených do bariéry jich průměrně 20 protuneluje a 980 se odrazí.

Koeficient průchodu T bariérou výšky E_{p0} je přibližně

$$T \approx e^{-2\kappa L}, \quad (39.21)$$

kde

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}. \quad (39.22)$$

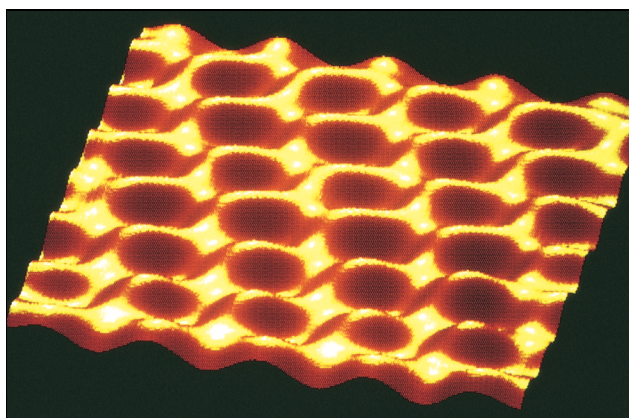
Závislost T v rov. (39.21) je exponenciální, a proto je T velice citlivá na hodnotu všech tří proměnných, na kterých závisí: na hmotnosti částice m , tloušťce bariéry L a rozdílu energie $E_{p0} - E$.

Tunelování má mnoho praktických aplikací, jako je například *tunelová dioda*, ve které můžeme rychle zapnout a vypnout proud tunelujících elektronů tím, že změníme výšku bariéry. Tuto změnu můžeme provádět velmi rychle (do 5 ps), a proto tunelovou diodu můžeme použít tam, kde vyžadujeme velmi rychlou odezvu. Nobelovu cenu za fyziku v roce 1973 dostali tři „tuneláři“, Leo Esaki za tunelování v polovodičích, Ivar Giaever za tunelování v supravodičích a Brian Josephson za objev *Josephsonova jevu* (rychlého kvantového přepínače založeného na tunelování). Nobelova cena za fyziku v roce 1986 byla udělena Gerdu Binnigovi a Heinrichu Rohrerovi za to, že vyvinuli další užitečné zařízení založené na tunelování, a to rastrovací tunelový mikroskop.

KONTROLA 5: Je vlnová délka prošlé vlny v obr. 39.13b větší, menší, nebo stejná jako vlnová délka dopadající vlny?

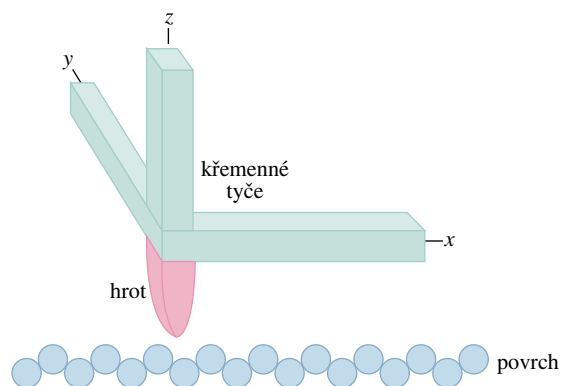
Rastrovací tunelový mikroskop (STM)

Na tunelování je založen rastrovací tunelový mikroskop STM (z angl. scanning tunneling microscope), který dovo-luje vytvářet podrobné zobrazení povrchů a ukázat detaily s atomovými rozměry, tedy s rozlišením mnohem lepším než u optického mikroskopu. Obr. 39.14 ukazuje jeden takový příklad, na kterém můžeme vidět jednotlivé atomy.



Obr. 39.14 Kontury povrchu grafitu zobrazené v rastrovacím tunelovém mikroskopu. Zřetelně vidíme atomy uhlíku tvořící šestiúhelníkovou strukturu.

Obr. 39.15 ukazuje princip rastrovacího tunelového mikroskopu. Ostrý kovový hrot, upevněný v průsečíku tří vzájemně kolmých křemenných tyčí, je umístěn do blízkosti



Obr. 39.15 Princip rastrovacího tunelového mikroskopu (STM). Tři křemenné tyče vedou ostrý vodivý hrot těsně nad studovaným povrchem tak, že při rastrování udržují konstantní vzdálenost mezi hrotem a povrchem. Hrot tedy sleduje konturu povrchu. Záznam jeho pohybu vytvoří zobrazení jako je obr. 39.14.

studovaného povrchu. Mezi hrotem a povrchem vzorku se udržuje malé napětí, někdy jen 10 mV.

Krystal křemene vykazuje zajímavou vlastnost zvanou *piezoelektrický jev*: vlivem elektrického napětí, přiloženého na křemenný krystal, se nepatrně změní jeho rozměry. Tato vlastnost se dá využít pro plynulou změnu délky každé ze tří tyčí z obr. 39.15 o velmi malé hodnoty, takže hrotem můžeme nejen rastrovat podél povrchu (ve směrech x a y), ale také jím můžeme pohybovat kolmo k povrchu vzorku ve směru z .

Vzdálenost mezi povrchem a hrotem vytváří bariéru potenciální energie podobně jako na obr. 39.13a. Je-li hrot dostatečně blízko u povrchu, elektrony ze vzorku mohou touto bariérou tunelovat do hrotu a vytvářet tak tunelový proud.

Při praktickém provozu se používá zpětná vazba pro nastavení svislé vzdálenosti hrotu tak, aby se při rastrování nad povrchem udržoval tunelový proud konstantní. To znamená, že i vzdálenost hrotu od vzorku zůstává při rastrování konstantní. Na výstupu — jako je obr. 39.14 — pak můžeme na monitoru zobrazit proměnnou svislou polohu hrotu a tedy obrys povrchu jako závislost na poloze hrotu v rovině xy .

Rastrovací tunelové mikroskopy se dají běžně zakoupit a používají se v řadě laboratoří.

PŘÍKLAD 39.7

Předpokládejme, že v obr. 39.13a máme elektron o celkové energii 5,1 eV dopadající na bariéru o výšce $E_{p0} = 6,8$ eV a šířce $L = 750$ pm.

(a) Jak je přibližně velký koeficient průchodu T pro tyto elektrony?

ŘEŠENÍ: Pro výpočet T z rov. (39.21) nejprve určíme z rov. (39.22)

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}.$$

Čítec zlomku pod odmocninou je

$$2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(6,8 \text{ eV} - 5,1 \text{ eV}) \cdot (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}) = 4,955 \cdot 10^{-49} \text{ J} \cdot \text{kg}.$$

Tedy

$$\kappa = \sqrt{\frac{(4,955 \cdot 10^{-49} \text{ J} \cdot \text{kg})}{(1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1}.$$

Bezrozměrová veličina $2\kappa L$ je potom

$$2\kappa L = 2(6,67 \cdot 10^9 \text{ m}^{-1})(750 \cdot 10^{-12} \text{ m}) = 10,0$$

a z rov. (39.21) dostaneme koeficient propustnosti

$$T \approx e^{-2\kappa L} = e^{-10,0} = 45 \cdot 10^{-6}. \quad (\text{Odpověď})$$

Z každého milionu elektronů, které dopadnou na bariéru, jich přibližně 45 protuneluje.

(b) Jak velký by byl koeficient propustnosti pro protony?

ŘEŠENÍ: Zopakujeme-li tento výpočet znovu pro hmotnost protonu ($1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) místo hmotnosti elektronu, dostaneme $T \approx 10^{-186}$. Koeficient průchodu se nesmírně snižuje pro hmotnější částice. *Představte si, jak malý by pak musel být pro lentilky!*

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Fotony

Při interakci světla s hmotou se energie a hybnost přenášejí v daném místě v diskretních množstvích, „kvantech“ energie nazývaných **fotony**. Energie a hybnost fotonu jsou

$$E = hf \quad (\text{energie fotonu}), \quad (39.2)$$

$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{hybnost fotonu}), \quad (39.7)$$

kde f a λ jsou frekvence a vlnová délka příslušné světelné vlny.

Fotoelektrický jev

Při dopadu světla o dostatečně vysoké frekvenci na čistý kovový povrch jsou emitovány elektrony v důsledku interakce fotonu s elektrony v kovu. Platí rovnice

$$hf = E_{k,\max} + \Phi, \quad (39.5)$$

kde hf je energie fotonu, $E_{k,\max}$ je maximální kinetická energie emitovaných elektronů a Φ je *výstupní práce* materiálu terče, tedy minimální energie, kterou musí elektron získat, aby mohl opustit povrch terče. Je-li hf menší než Φ , fotoelektrický jev nenastane.

Comptonův posuv

Při rozptylu rentgenového záření na volně vázaných elektronech v terči má část rozptýleného rentgenového záření delší vlnovou délku než záření dopadající. *Comptonův posuv* (změna vlnové délky) pro rozptyl rentgenového záření do úhlu φ je

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi). \quad (39.11)$$

Světelné vlny a fotony

Při interakci světla s hmotou se energie a hybnost přenášejí

fotony. Při šíření světla však interpretujeme světelnou vlnu jako vlnu *pravděpodobnosti*, ve které je pravděpodobnost (za jednotku času), že foton bude detegován, úměrná E_m^2 , kde E_m je amplituda kmitajícího elektrického pole příslušné světelné vlny v místě detektoru.

Vlnové vlastnosti hmoty

Pohybující se částice, jako je elektron nebo proton, může být popsána jako de Broglieho vlna. Její vlnová délka, nazývaná *de Broglieho vlnová délka*, je rovna $\lambda = h/p$, kde p je hybnost částice.

Vlnová funkce

Šíření de Broglieho vlny je popsáno její vlnovou funkcí $\Psi(x, y, z, t)$, kterou zpravidla můžeme rozdělit na prostorově závislou část $\psi(x, y, z)$ a na časově závislou část $e^{-i\omega t}$. Pro částici o hmotnosti m pohybující se podél osy x s konstantní celkovou energií E v oblasti, kde je její potenciální energie $E_p(x)$, můžeme $\psi(x)$ nalézt řešením *Schrödingerovy rovnice*

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - E_p(x)]\psi = 0. \quad (39.15)$$

De Broglieho vlna je stejně jako světelná vlna vlnou pravděpodobnosti v tomto smyslu: když do této vlny vložíme detektor, je pravděpodobnost, že detektor zaregistruje částici v libovolně zvoleném časovém intervalu, úměrná *hustotě pravděpodobnosti* $|\psi|^2$.

Pro volnou částici, tedy pro částici, pro kterou je $E_p(x) = 0$, pohybující se v kladném (nebo záporném) směru osy x , má

$|\psi|^2$ konstantní hodnotu pro libovolnou polohu podél osy x .

Heisenbergův princip neurčitosti

Pravděpodobnostní podstata kvantové fyziky klade zásadní omezení na detekci polohy a hybnosti částice. Nemůžeme měřit polohu \mathbf{r} a hybnost \mathbf{p} částice současně s neomezenou přesností. Neurčitost složek těchto veličin je dána vztahy

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar, \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar, \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar. \end{aligned} \quad (39.20)$$

Tunelování

Podle klasické fyziky se dopadající částice s energií E vždy odrazí od bariéry potenciální energie o výšce $E_{p0} > E$. V kvantové fyzice má vlna pravděpodobnosti příslušná dané částici konečnou pravděpodobnost, že částice takovou bariérou protuneluje.

Pravděpodobnost, že daná částice o hmotnosti m a energii E protuneluje bariérou o výšce E_{p0} a tloušťce L , je určena koeficientem průchodu T

$$T \approx e^{-2\kappa L}, \quad (39.21)$$

kde

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}. \quad (39.22)$$

OTÁZKY

1. Mikrovlnná trouba i lékařský rentgen vytvářejí elektromagnetické vlny. Které z nich mají větší (a) vlnovou délku, (b) frekvenci a (c) energii fotonů?
2. Které z následujících tvrzení o fotoelektrickém jevu platí a které neplatí? (a) Čím větší je frekvence dopadajícího světla, tím větší je brzdný potenciál. (b) Čím větší je intenzita dopadajícího světla, tím větší je prahová frekvence. (c) Čím větší je výstupní práce materiálu terče, tím větší je brzdný potenciál. (d) Čím větší je výstupní práce materiálu terče, tím větší je prahová frekvence. (e) Čím větší je frekvence dopadajícího světla, tím větší je maximální kinetická energie emitovaných elektronů. (f) Čím větší je energie fotonů, tím menší je brzdný potenciál.
3. Určete z obrázku v kontrole 2, zda je pro danou frekvenci dopadajícího světla větší maximální kinetická energie emitovaných elektronů pro terč vyrobený ze sodíku, nebo z draslíku.
4. Která z následujících veličin u fotoelektrického jevu (pro daný terč a danou frekvenci dopadajícího světla), pokud vůbec nějaká, závisí na intenzitě dopadajícího světla: (a) maximální kinetická energie emitovaných elektronů, (b) maximální proud fotoelektronů, (c) brzdný potenciál, (d) prahová frekvence?
5. Svítíte-li ultrafialovým světlem na izolovanou kovovou des-

tičku, destička po krátkou dobu emituje elektrony. Proč tato emise po nějaké době přestane?

6. Kovová destička je osvětlována světlem s danou frekvencí. Co určuje, zda jsou elektrony emitovány nebo ne: (a) intenzita světla, (b) délka doby osvětlení, (c) tepelná vodivost destičky, (d) plocha destičky, (e) materiál destičky?
7. V pokusu s Comptonovým posuvem je foton rozptýlen dopředu, takže podle obr. 39.3 je $\varphi = 0$. Jakou energii získá při rozptýlení elektron?
8. Podle vztahu (39.11) je Comptonův posuv stejný pro rentgenové záření i pro viditelné světlo. Proč můžeme snadno měřit Comptonův posuv pro rentgenové záření a nemůžeme jej měřit pro viditelné světlo?
9. Foton A má dvojnásobnou energii než foton B. (a) Je hybnost fotonu A menší, stejná, nebo větší než u fotonu B? (b) Je vlnová délka fotonu A menší, stejná, nebo větší než u fotonu B?
10. Porovnejte fotony z lékařského rentgenu (foton A) a z mikrovlnné trouby (foton B). Který má větší (a) vlnovou délku, (b) energii, (c) frekvenci, (d) hybnost?
11. Data z obr. 39.4 byla měřena na uhlíkovém terči. Jakým

zásadním způsobem by se výsledky lišily, kdyby terč byl ze síry místo z uhlíku?

12. Elektron a proton mají stejnou kinetickou energii. Který z nich má větší de Broglieho vlnovou délku?

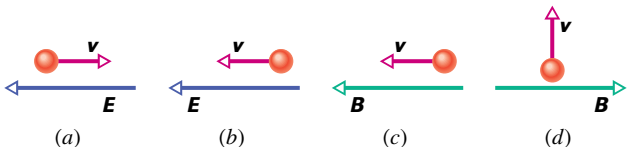
13. (a) Zdvojnásobíme-li kinetickou energii nerelativistické částice, jak se změní její de Broglieho vlnová délka? (b) Jak se změní vlnová délka, zdvojnásobíme-li rychlost částice?

14. Následující nerelativistické částice mají stejnou kinetickou energii. Seřadte je podle jejich de Broglieho vlnové délky od největší: elektron, α -částice, neutron.

15. Je de Broglieho vlnová délka vystřelené kulky velmi malá, nebo velmi velká?

16. Srovnajte Comptonovu vlnovou délku elektronu a jeho de Broglieho vlnovou délku. Která trzení platí? (a) Comptonova vlnová délka je vždy větší. (b) Comptonova vlnová délka je vždy menší. (c) Obě vlnové délky jsou vždy stejné. (d) Obě vlnové délky jsou navzájem nezávislé.

17. Obr. 39.16 ukazuje čtyři možné případy pohybu elektronu v poli. Pohybuje se (a) proti směru elektrického pole, (b) ve směru elektrického pole, (c) ve směru magnetického pole,



Obr. 39.16 Otázka 17

(d) kolmo ke směru magnetického pole. Určete pro každý případ, jestli se de Broglieho vlnová délka zvětšuje, zmenšuje, nebo zůstává stejná.

18. Proton a deutron, každý o stejné kinetické energii 3 MeV, dopadají na bariéru o výšce $E_{p0} = 10$ MeV. Která částice má větší pravděpodobnost protunelovat bariérou? (Deutron má dvakrát větší hmotnost než proton.)

19. Co má větší vliv na koeficient průchodu T potenciálovou bariérou: (a) zvětšení výšky bariéry E_{p0} o 1 %, nebo (b) snížení kinetické energie dopadajícího elektronu o 1 %?

20. Proč jsou minima hodnot pravděpodobnosti $|\psi|^2$ v levé části obr. 39.13b větší než nula?

21. Předpokládejte, že výška potenciálové bariéry na obr. 39.13a je nekonečná. (a) Jakou hodnotu má koeficient průchodu pro elektron přibližující se k bariéře? (b) Předpovídá rov. (39.21) očekávaný výsledek?

22. Tabulka popisuje tři případy při pokusu s tunelováním z obr. 39.13. Seřadte je sestupně podle pravděpodobnosti, že elektrony protunelují bariérou.

	ENERGIE ELEKTRONŮ	VÝŠKA BARIÉRY	TLOUŠŤKA BARIÉRY
(a)	E	$5E$	L
(b)	E	$17E$	$L/2$
(c)	E	$2E$	$2L$

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 39.2 Světelné vlny a fotony

1C. Ukažte, že energie E fotonu v eV a jeho vlnová délka λ v nm jsou číselně svázány vztahem $E = 1240/\lambda$.

2C. Oranžové světlo dálniční výbojky má vlnovou délku 589 nm. Jaká je příslušná energie fotonů tohoto světla?

3C. Vyjádřete Planckovu konstantu v jednotkách eV·fs (elektronvolt-femtosekunda).

4C. Monochromatické světlo dopadá na fotografický film. Jednotlivý foton se zaznamená, pokud má energii alespoň 0,6 eV, aby disocioval molekulu AgBr ve filmu. Jaká je největší vlnová délka světla, kterou můžeme zaznamenat? V jaké oblasti spektra se tato hodnota nachází?

5C. Spektrální emisní čára, která je velmi důležitá v astronomii, má vlnovou délku 21 cm. Jaká je příslušná energie fotonu?

6C. Jak rychle se musí pohybovat elektrony, aby měly stejnou energii jako fotony sodíkového světla ($\lambda = 590$ nm)?

7C. S jakou četností emituje Slunce fotony? Pro jednoduchost předpokládejte, že světlo Slunce je monochromatické s $\lambda = 550$ nm. Slunce vyzařuje světlo s výkonem $3,9 \cdot 10^{26}$ W.

8C. Helium-neonový laser vyzařuje svazek červeného světla ($\lambda = 633$ nm) o průměru přibližně 3,5 mm. Je-li výkon laseru

5,0 mW, kolik fotonů dopadá na detektor v dráze svazku? Předpokládejte, že detektor absorbuje celý svazek.

9C. Donedávna byl metr definován jako 1 650 763,73 násobek vlnové délky oranžového světla emitovaného světelným zdrojem obsahujícím atomy kryptonu-86. Jaká je energie fotonu tohoto záření?

10Ú. Za ideálních podmínek vnímá lidské oko světlo o vlnové délce 550 nm, je-li četnost dopadajícího světla jen kolem 100 fotonů za sekundu. Jakému výkonu to odpovídá?

11Ú. Ultrafialová výbojka, vyzařující světlo o vlnové délce 400 nm, a infračervená žárovka, vyzařující světlo o vlnové délce 700 nm, mají obě výkon 400 W. (a) Který zdroj světla vytváří víc fotonů a (b) jaká je jejich četnost?

12Ú. Družice na dráze kolem Země používá solární panely o ploše $2,60$ m² kolmé na směr slunečních paprsků. Sluneční energie má intenzitu $1,39$ kW/m². (a) S jakou četností dopadají fotony ze Slunce na panel? (b) S jakou četností jsou fotony pohlcovány panelem? Předpokládejte, že sluneční světlo je monochromatické, má vlnovou délku 550 nm a všechno záření dopadající na panel se pohltí. (c) Za jak dlouho dopadne na panel jeden mol fotonů?

13Ú. Speciální zdroj vyzařuje monochromatické světlo o vlnové délce 630 nm. Jeho příkon je 60 W a účinnost převodu elektrické energie na světlo je 93 %. Kolik fotonů vyzaří zdroj za svou dobu života 730 h?

14Ú. Argonový laser ($\lambda = 515$ nm) o výkonu 1,5 W má průměr svazku $d = 3,0$ mm. Svazek je zaostřen systémem čoček s ohniskovou vzdáleností $f = 2,5$ mm. Zfokuzovaný svazek dopadá na dokonale pohlcující stínítko, kde vytváří kruhový difrakční obrazec, jehož centrální kroužek má poloměr R daný vztahem $1,22f\lambda/d$. Lze dokázat, že 84 % dopadající energie je soustředěno v centrálním kroužku a zbytek světla je v soustředných difrakčních kroužcích, které obklopují tento kroužek. S jakou četností jsou fotony absorbovány stínítkem v centrálním kroužku difrakčního obrazce?

15Ú. Sodíková výbojka ($\lambda = 589$ nm) s výkonem 100 W vyzařuje rovnoměrně do všech směrů. (a) S jakou četností se ve výbojce vytvářejí fotony? (b) V jaké vzdálenosti od výbojky bude absorbuující stínítko přijímat fotony s četností 1,00 fotonu/(cm²·s)? (c) Jaký je tok fotonů (počet fotonů na jednotku plochy za jednotku času) na malém stínítku 2,00 m od výbojky?

ODST. 39.3 Fotoelektrický jev

16C. Výstupní práce draslíku a cesia jsou 2,25 eV a 2,14 eV. (a) Uskuteční se fotoelektrický jev pro některý z těchto prvků pro dopadající světlo o vlnové délce 565 nm? (b) Uskuteční se pro světlo o vlnové délce 518 nm?

17C. Hledáte látku pro fotočlánek, který bude pracovat na principu fotoelektrického jevu s viditelným světlem. Který materiál bude vyhovovat (výstupní práce je uvedena v závorce): tantal (4,2 eV), wolfram (4,5 eV), hliník (4,2 eV), baryum (2,5 eV), lithium (2,3 eV)?

18C. (a) Energie potřebná pro emisi elektronu z kovového sodíku je 2,28 eV. Vykazuje sodík fotoefekt pro červené světlo s $\lambda = 680$ nm? (b) Jaká je prahová vlnová délka pro emisi fotoelektronů ze sodíku? Jaké barvě světla odpovídá?

19C. Naleznete nejvyšší kinetickou energii elektronů emitovaných z materiálu o výstupní práci 2,3 eV pro frekvenci dopadajícího záření $3,0 \cdot 10^{15}$ Hz.

20C. Světlo dopadá na povrch sodíku a způsobuje fotoemisi. Brzdný potenciál je pro emitované elektrony 5,0 V a výstupní práce sodíku je 2,2 eV. Jaká je vlnová délka dopadajícího světla?

21C. Výstupní práce wolframu je 4,50 eV. Spočtete největší rychlost elektronů emitovaných při dopadu světla o energii 5,80 eV na povrch wolframu.

22Ú. Ultrafialové záření o vlnové délce 200 nm dopadá na povrch hliníku. Hliník má výstupní práci 4,2 eV. Jaká je kinetická energie (a) nejrychlejšího a (b) nejpomalejšího emitovaného elektronu? (c) Jaký je v tomto případě brzdný potenciál? (d) Jaká je prahová vlnová délka pro hliník?

23Ú. (a) Je-li výstupní práce daného kovu 1,8 eV, jaký je brzdný potenciál pro světlo o vlnové délce 400 nm? (b) Jaká je největší rychlost fotoelektronů při opuštění povrchu kovu?

24Ú. Vlnová délka světla příslušná prahové frekvenci je pro stříbro 325 nm. Najděte největší kinetickou energii elektronů emitovaných z povrchu stříbra ultrafialovým světlem o vlnové délce 254 nm.

25Ú. Družice na oběžné dráze se může nabíjet v důsledku fotoefektu, protože světlo Slunce vyrazí elektrony z jejího vnějšího povrchu. Družice se musí navrhovat tak, aby se toto nabíjení minimalizovalo. Předpokládejme, že povrch družice pokryjeme platinou, kovem o velmi vysoké výstupní práci ($\Phi = 5,32$ eV). Najděte nejdelší vlnovou délku dopadajícího slunečního světla, které může vyrazit elektrony z platiny.

26Ú. Brzdný potenciál pro elektrony emitované z povrchu ozářeného světlem o vlnové délce 491 nm je 0,710 V. Když změníme vlnovou délku na novou hodnotu, brzdný potenciál se změní na 1,43 V. (a) Jaká je tato nová vlnová délka? (b) Jaká je výstupní práce pro daný povrch?

27Ú. Při fotoelektrickém pokusu na sodíkovém povrchu najdeme brzdný potenciál 1,85 V pro vlnovou délku 300 nm a brzdný potenciál 0,820 V pro vlnovou délku 400 nm. Pomocí těchto hodnot určete (a) hodnotu Planckovy konstanty, (b) výstupní práci Φ pro sodík, (c) prahovou vlnovou délku λ_0 (vlnovou délku odpovídající prahové frekvenci) pro sodík.

28Ú. Kolem roku 1916 našel R. A. Millikan při fotoelektrickém pokusu na lithiu následující hodnoty pro brzdný potenciál:

Vlnová délka (nm)	433,9	404,7	365,0	312,5	253,5
Brzdný potenciál (V)	0,55	0,73	1,09	1,67	2,57

Z těchto dat vykreslete graf jako na obr. 39.2 (který je pro sodík) a použijte tento graf pro nalezení (a) Planckovy konstanty a (b) výstupní práce pro lithium.

29Ú. Předpokládejte, že relativní účinnost povrchu cesia (o výstupní práci 1,80 eV) je $1,0 \cdot 10^{-16}$; v průměru je tedy emitován jeden elektron na 10^{16} fotonů, které dopadají na povrch. Jaký změříte proud elektronů emitovaných tímto povrchem, když jej ozáříme laserem o vlnové délce 600 nm a výkonu 2,00 mW, pokud měříme všechny emitované elektrony?

30Ú. Rentgenové záření o vlnové délce 71 pm vyrazí ze zlaté fólie elektrony z vnitřních hladin atomů zlata. Emitované elektrony se pohybují po kruhových drahách o poloměru r v oblasti homogenního magnetického pole \mathbf{B} tak, že hodnota součinu $B r = 1,88 \cdot 10^{-4}$ T·m. Určete (a) maximální kinetickou energii emitovaných elektronů a (b) práci potřebnou pro jejich emisi z atomů zlata.

ODST. 39.4 Fotony mají hybnost

31C. Rentgenové záření má vlnovou délku 35,0 pm. (a) Jaká je odpovídající frekvence záření? Určete příslušné hodnoty (b) energie fotonu a (c) hybnosti fotonu.

32C. (a) Jaká je hybnost fotonu, jehož energie se rovná kinetické energii elektronu? Jaká je (b) vlnová délka a (c) frekvence příslušného záření?

33C. Záření o vlnové délce 2,4 pm dopadá na terč obsahující volné elektrony. (a) Najděte vlnovou délku světla rozptýleného

do úhlu 30° vůči směru dopadajícího záření. (b) Opakujte pro úhel rozptylu 120° .

34Ú. Záření γ o energii fotonu $0,511$ MeV dopadá na volné elektrony v hliníkovém terči a rozptyluje se do různých směrů. (a) Jaká je vlnová délka dopadajícího záření γ ? (b) Jaká je vlnová délka paprsků rozptýlených do úhlu $90,0^\circ$ vůči dopadajícímu svazku? (c) Jaká je energie fotonů rozptýlených do tohoto směru?

35Ú. Analyzujte srážku mezi fotonem a volným elektronem a ukažte (při použití relativistické mechaniky), že není možné, aby foton předal celou svou energii volnému elektronu.

36Ú. Rentgenové záření o vlnové délce $0,01$ nm dopadá na terč obsahující volné elektrony. Uvažujte rentgenové záření rozptýlené do úhlu 180° . Určete (a) změnu vlnové délky rozptýleného rentgenového záření, (b) změnu energie fotonu v dopadajícím a rozptýleném svazku, (c) kinetickou energii předanou elektronu a (d) směr pohybu elektronu.

37Ú. Určete Comptonovu vlnovou délku (a) elektronu a (b) protonu. Jaká je energie fotonu, jehož vlnová délka je rovna Comptonově vlnové délce (c) elektronu a (d) protonu?

38Ú. Určete procentuální změnu energie fotonu při srážce jako na obr. 39.5 pro $\varphi = 90^\circ$ pro záření (a) v oblasti mikrovln s $\lambda = 3,0$ cm, (b) ve viditelném světle s $\lambda = 500$ nm, (c) pro rentgenové záření s $\lambda = 25$ pm a (d) pro γ -záření o energii fotonu $1,0$ MeV. (e) Jaké jsou možnosti detekce Comptonova posuvu v uvedených oblastech elektromagnetického spektra, použijeme-li jako základní kritérium ztrátu energie při jednotlivé srážce fotonu s elektronem?

39Ú. Jaká procentuální změna vlnové délky vede ke ztrátě 75% energie fotonu při srážce fotonu s volným elektronem?

40Ú. Jaký je maximální posuv vlnové délky pro Comptonův rozptyl fotonu na volném protonu?

41Ú. Elektron o hmotnosti m a rychlosti v se čelně sráží s fotonem γ -záření o energii hf_0 a foton se odrazí proti původnímu směru dopadu. Dokažte, že energie odraženého fotonu, měřená v laboratorním systému, je

$$E = hf_0 \left(1 + \frac{2hf_0}{mc^2} \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \right)^{-1}.$$

42Ú. Jakou hodnotu bude mít (a) Comptonův posuv, (b) relativní hodnota Comptonova posuvu a (c) změna energie fotonu pro světlo o vlnové délce 590 nm při rozptylu na volném elektronu v klidu pro rozptyl do úhlu 90° vůči dopadajícímu svazku? (d) Spočítejte tytéž veličiny pro rentgenové záření s energií fotonu $50,0$ keV.

43Ú. Uvažujte srážku mezi rentgenovým fotonem s počáteční energií $50,0$ keV a elektronem v klidu, při které se foton odrazí zpět a elektron dopředu. (a) Jaká je energie zpětně odraženého fotonu? (b) Jaká je kinetická energie elektronu?

44Ú. Ukažte, že relativní ztráta energie fotonu $\Delta E/E$ při srážce s částicí o hmotnosti m je dána vztahem

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{hf'}{mc^2} (1 - \cos \varphi),$$

kde E je energie dopadajícího fotonu, f' je frekvence rozptýleného fotonu a úhel φ je definován na obr. 39.5.

45Ú. Do jakého úhlu se musí rozptýlit foton o energii 200 keV na volném elektronu, aby ztratil 10% své energie?

46Ú. Ukažte, že při rozptylu fotonu o energii E na volném elektronu je maximální kinetická energie předaná elektronu dána vztahem

$$E_{k,\max} = \frac{E^2}{E + mc^2/2}.$$

47Ú. Jaká je maximální kinetická energie elektronů vyzařených z tenké měděné fólie dopadajícím svazkem rentgenového záření o energii $17,5$ keV?

48Ú. Odvoďte rov. (39.11) pro Comptonův posuv z rov. (39.8), (39.9) a (39.10) vyloučením v a θ .

ODST. 39.6 Elektrony a de Broglieho vlny

49C. Projektil o hmotnosti 40 g má rychlost $1\,000$ m·s⁻¹. (a) Jakou vlnovou délku můžete projektilu přiřadit? (b) Proč nelze vlnový charakter projektilu demonstrovat pomocí difrakčních jevů?

50C. Použitím klasického vztahu mezi hybností a kinetickou energií ukažte, že de Broglieho vlnová délka elektronu (v nm) může být určena jako $\lambda = 1,226/\sqrt{E_k}$, kde E_k je kinetická energie elektronu v eV.

51C. V obvyklých televizních přístrojích jsou elektrony urychlovány napětím $25,0$ kV. Jaká je vlnová délka těchto elektronů? (Nezapočítávejte relativistické jevy.)

52C. Určete vlnovou délku (a) $1,00$ keV elektronu, (b) $1,00$ keV fotonu a (c) $1,00$ keV neutronu.

53Ú. Vlnová délka žluté spektrální emisní čáry sodíku je 590 nm. Pro jakou kinetickou energii má elektron stejnou de Broglieho vlnovou délku?

54Ú. Elektron a foton mají každý vlnovou délku $0,20$ nm. Určete (a) jejich hybnost a (b) jejich energii.

55Ú. Neutrony v tepelné rovnováze s látkou mají střední kinetickou energii $\frac{3}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta a T je teplota okolí, kterou bereme pro pokojovou teplotu jako 300 K. (a) Jaká je střední kinetická energie těchto neutronů? (b) Jaká je odpovídající de Broglieho vlnová délka?

56Ú. Je-li vlnová délka protonu 100 fm, (a) jaká je rychlost protonu a (b) jakým elektrickým potenciálem musíme proton urychlit, aby získal tuto rychlost?

57Ú. Uvažujte balon plněný plyným heliem při pokojové teplotě a atmosférickém tlaku. (a) Určete průměrnou de Broglieho vlnovou délku atomů helia a průměrnou vzdálenost mezi atomy helia za těchto podmínek. Střední kinetická energie atomu je rovna $\frac{3}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta. (b) Můžeme atomy považovat za těchto podmínek za částice?

58Ú. (a) Foton má energii $1,00$ eV a elektron má kinetickou energii o téže velikosti. Jaké jsou jejich vlnové délky? (b) Zopakujte výpočet i pro energii $1,00$ GeV.

59Ú. (a) Foton a elektron mají stejné vlnové délky 1,00 nm. Určete energii fotonu a kinetickou energii elektronu. (b) Určete tyto hodnoty pro vlnovou délku 1,00 fm.

60Ú. Jedenkrát nabitě ionty sodíku jsou urychleny napětím 300 V. (a) Jakou hybnost získá takový iont? (b) Jakou má de Broglieho vlnovou délku?

61Ú. Velký elektronový urychlovač na Stanfordské univerzitě poskytuje elektrony s kinetickou energií 50 GeV. Elektrony s touto energií mají malou vlnovou délku, vhodnou pro studium jemných detailů jaderné struktury. Jaká je de Broglieho vlnová délka pro energii elektronu 50 GeV? Porovnejte tuto vlnovou délku s poloměrem typického jádra (kolem 5,0 fm). (Pro tuto energii stačí použít ultrarelativistický vztah mezi hybností a energií, a to $p = E/c$. To je stejný vztah, jaký používáme pro světlo, a platí pro kinetickou energii mnohem větší, než je klidová energie, což je v tomto případě splněno.)

62Ú. Existenci atomového jádra objevil v roce 1911 Ernest Rutherford, který správně interpretoval pokusy, při kterých se α -částice rozptylovaly na kovových fóliích z atomů jako je zlato. (a) Používané α -částice měly energii 7,5 MeV; jaká je jejich de Broglieho vlnová délka? (b) Měl být vlnový charakter dopadajících α -částic použit při interpretaci těchto pokusů? Hmotnost α -částic je 4,00 u (u je atomová hmotnostní jednotka) a nejkratší vzdálenost částic od jádra v těchto pokusech byla kolem 30 fm. (Vlnový charakter hmoty nebyl znám ještě nejméně deset let poté, kdy se tyto pokusy prováděly.)

63Ú. Nerelativistická částice se pohybuje třikrát rychleji než elektron. Podíl de Broglieho vlnové délky částice a vlnové délky elektronu je $1,813 \cdot 10^{-4}$. Určete hmotnost částice a tím i to, o jakou částici se jedná.

64Ú. Dosažitelná rozlišovací schopnost mikroskopu je dána pouze používanou vlnovou délkou; to znamená, že nejmenší detail, který můžeme rozlišit, má velikost přibližně rovnou vlnové délce. Předpokládejte, že chceme „vidět“ dovnitř atomu. Má-li atom průměr kolem 100 pm, znamená to, že musíme rozlišit detaily o vzdálenosti kolem 10 pm. (a) Použijeme-li elektronový mikroskop, jakou nejmenší energii elektronů potřebujeme? (b) Použijeme-li světelný mikroskop, jakou potřebujeme nejmenší energii fotonů? (c) Který mikroskop se dá prakticky lépe použít a proč?

65Ú. Jaké urychlovací napětí elektronů je třeba, aby elektronový mikroskop měl stejnou mezní rozlišovací schopnost, jakou můžeme získat pomocí γ -záření o energii 100 keV (úloha 64)?

ODST. 39.7 Schrödingerova rovnice

66C. (a) Mějme komplexní číslo $n = a + ib$, kde a a b jsou reálná (kladná nebo záporná) čísla. Ukažte, že součin nm^* je vždy kladné reálné číslo. (b) Mějme jiné komplexní číslo $m = c + id$. Ukažte, že $|nm| = |n| |m|$.

67C. Dosazením $\psi(x)$ a její druhé derivace do rov. (39.16) ukažte, že rov. (39.17) je řešením rov. (39.16).

68Ú. (a) Napište vlnovou funkci $\psi(x)$ v rov. (39.19) ve tvaru $\psi(x) = a + ib$, kde a a b jsou reálné veličiny. (Předpokládejte,

že ψ_0 je reálné.) (b) Určete časově závislou vlnovou funkci $\Psi(x, t)$, která odpovídá $\psi(x)$.

69Ú. Ukažte, že vlnové číslo k pro volnou částici o hmotnosti m může být určeno vztahem

$$k = \frac{\sqrt{2mE_k}}{\hbar},$$

kde E_k je kinetická energie částice.

70Ú. Funkce $\psi(x)$ z rov. (39.19) popisuje volnou částici, pro kterou ve Schrödingerově rovnici (39.15) předpokládáme, že $E_p(x) = 0$. Předpokládejte nyní, že $E_p(x) = E_{p0}$ je konstantní. Ukažte, že rov. (39.19) je stále řešením Schrödingerovy rovnice s vlnovým číslem k částice daným nyní vztahem

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - E_{p0})}.$$

71Ú. Ukažte, že $|\psi|^2 = |\Psi|^2$, kde ψ a Ψ jsou definovány v rov. (39.14). Dokažte tak, že hustota pravděpodobnosti nezávisí na čase.

72Ú. V rov. (39.17) položme $A = 0$ a označme B jako ψ_0 . Co potom výsledná vlnová funkce popisuje? Jak, pokud vůbec, se změní obr. 39.12?

73Ú. V rov. (39.18) ponecháme oba členy a položíme $A = B = \psi_0$. Rovnice pak popisuje superpozici dvou de Broglieho vln o stejné amplitudě, které se pohybují v opačných směrech. (Připomeňme si, že toto je podmínka pro vznik stojaté vlny.) (a) Ukažte, že $|\Psi(x, t)|^2$ je pak dáno vztahem

$$|\Psi(x, t)|^2 = 2\psi_0^2(1 + \cos 2kx).$$

(b) Vyneste tuto funkci do grafu a ukažte, že vyjadřuje čtverec amplitudy stojaté de Broglieho vlny. (c) Ukažte, že uzly této stojaté vlny se nacházejí v místech o souřadnicích

$$x = (2n + 1)\left(\frac{1}{4}\lambda\right), \quad \text{kde } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

a λ je de Broglieho vlnová délka částice. (d) Napište výraz pro nejpravděpodobnější polohy pro nalezení částice.

ODST. 39.8 Heisenbergův princip neurčitosti

74C. Obr. 39.12 ukazuje, že kvůli platnosti Heisenbergova principu neurčitosti nemůžeme určit souřadnici x polohy elektronu. Můžete určit souřadnici y a z ? (Tip: Hybnost elektronu nemá y a z složky.)

75C. Neurčitost polohy elektronu je dána jako 50 pm, což je zhruba rovno poloměru atomu vodíku. Jaká je nejmenší neurčitost při současném měření hybnosti tohoto elektronu?

76C. Představte si, že hrajete fotbal ve vesmíru (ne v našem!), kde má Planckova konstanta hodnotu 0,60 J·s. S jakou neurčitostí polohy by se pohyboval míč o hmotnosti 0,5 kg s rychlostí 20 m·s⁻¹, je-li neurčitost rychlosti 1,0 m·s⁻¹?

77C. Obr. 39.12 ukazuje případ, ve kterém je složka hybnosti p_x částice přesně určena, takže $\Delta p_x = 0$; potom podle Heisenbergova principu neurčitosti (rov. (39.20)) je poloha x částice zcela neznámá. Z téhož principu plyne, že také platí opačné tvrzení: je-li poloha částice přesně určena ($\Delta x = 0$), je neurčitost hybnosti nekonečně velká.

Uvažujte případ, kdy měříme polohu částice ne s absolutní přesností, ale s neurčitostí $\lambda/(2\pi)$, kde λ je de Broglieho vlnová délka částice. Ukažte, že neurčitost při současném měření hybnosti je rovna velikosti hybnosti, tedy že $\Delta p_x = p$. Bylo by za těchto okolností překvapivé, kdybyste naměřili nulovou hodnotu hybnosti? Jak by to bylo v případě, když změříte hybnost $0,5p$? A v případě $2p$? A co v případě, když změříte $12p$?

78Ú. V kap. 40 se dozvíte, že si už nepředstavujeme, že elektrony se pohybují po přesných drahách v atomu jako planety ve slunečním systému. Abychom to pochopili, pokusme se „pozorovat“ takovýto elektron ve světelném mikroskopu, ve kterém se snažíme změřit jeho předpokládanou polohu s přesností např. 10 pm (typický atom má poloměr kolem 100 pm). Vlnová délka světla použitá v mikroskopu musí být kolem 10 pm. (a) Jaká by musela být energie fotonu pro toto světlo? (b) Kolik energie by takový foton předal elektronu při čelní srážce? (c) Co nám tyto výsledky říkají o možnosti „pozorovat“ elektron v atomu ve dvou a více bodech podél jeho předpokládané dráhy? (Tip: Vnější elektrony jsou v atomu vázány s energií jen několika eV.)

ODST. 39.9 Tunelování

79Ú. Proton a deuteron (má stejný náboj, ale dvojnásobnou hmotnost) dopadnou na bariéru o tloušťce 10 fm a výšce 10 MeV. Obě částice mají před dopadem kinetickou energii 3,0 MeV. (a) Jaký je koeficient průchodu každé z částic? (b) Jaké jsou jejich kinetické energie po průchodu bariérou, pokud bariérou projdou? (c) Jaké jsou jejich kinetické energie, když se na bariéře odrazí?

80Ú. Uvažujte bariéru potenciální energie jako na obr. 39.13a o výšce $E_{p0} = 6,0$ eV a tloušťce $L = 0,70$ nm. Jaká je energie dopadajícího elektronu, jehož pravděpodobnost průchodu je 0,001 0?

81Ú. (a) Uvažujte svazek protonů o energii 5,0 eV dopadajících na bariéru o výšce 6,0 eV a tloušťce 0,70 nm s četností odpovídající proudu 1 000 A. Jak dlouho musíte v průměru čekat, než jediný proton projde? (b) Jak dlouhá by byla tato doba pro elektrony místo protonů?

82Ú. Uvažujte tunelování bariérou z př. 39.7. O kolik procent se změní koeficient průchodu T , změní-li se o 1,0 % (a) výška bariéry, (b) tloušťka bariéry a (c) kinetická energie dopadajícího elektronu?

83Ú. Automobil o hmotnosti 1 500 kg se rychlostí $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ blíží ke kopci, který je 24 m vysoký a 30 m dlouhý. Jaká je

pravděpodobnost, že automobil protuneleje kvantově mechanicky tímto kopcem a objeví se na druhé straně — neboli jaký je koeficient průchodu kopcem pro automobil? (Tip: Potenciální energie je v tomto případě dána gravitací.)

84Ú. Částice o hybnosti p dopadá na bariéru z obr. 39.13a zleva. V oblasti vlevo od bariéry je $E_p = 0$ a Schrödingerova rovnice má tvar (39.16). (a) Ukažte, že v této oblasti je funkce

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

řešením Schrödingerovy rovnice. A a B jsou libovolné reálné konstanty a $k = p/\hbar$. (b) Ukažte dále, že

$$|\psi|^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos 2kx.$$

(c) Ukažte, že $|\psi|^2$ osciluje mezi $(A+B)^2$ a $(A-B)^2$. Všimněte si, že pro $A \neq B$ je $|\psi|^2$ vždy kladné a nikdy nemá nulovou hodnotu. Porovnejte tyto výsledky s grafem $|\psi|^2$ z obr. 39.13b.

85Ú. Částice o energii E dopadá zleva na bariéru z obr. 39.13a. Uvnitř bariéry je $E < E_{p0}$. Ukažte, že v této oblasti má řešení Schrödingerovy rovnice tvar

$$\psi(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x},$$

kde

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m(E_{p0} - E)}{\hbar^2}}$$

a C a D jsou konstanty.

PROBLÉM

86. Schrödingerova rovnice a zákon zachování mechanické energie.

Uvažujme vlnovou funkci volné částice pohybující se v kladném směru osy x (rov. (39.19))

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}, \quad \text{kde } \psi(x) = Ae^{ikx}.$$

(a) Zderivujte $\psi(x)$ podle x . (b) Vyjádřete z de Broglieho vztahu k pomocí hybnosti p a ukažte, že $p\psi = -i\hbar d\psi/dx$.

Zapišme zákon zachování mechanické energie jako $E = E_k + E_p$. Vynásobme tuto rovnici funkcí ψ :

$$E\psi = (E_k + E_p)\psi = \left[\frac{1}{2m} p \cdot p + E_p \right] \psi.$$

(c) Dosadte do této rovnice za p podle (b) příkaz k derivování $-i\hbar d/dx$ (jeho opakování povede ke druhé derivaci) a ukažte, že získaná diferenciální rovnice je ekvivalentní Schrödingerově rovnici (39.15).