Parciální diferenciální rovnice

- nezávisle proměnné t, x, y
- neznámá funkce $u(t, x), u(x, y)$
- derivace $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- typy rovnic
  - eliptické, např. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplaceova rovnice
  - parabolické, např. $u_t + au_{xx} = 0$ rovnice vedení tepla
  - hyperbolické, např. $u_t + au_x = 0$ advekční rovnice
  - kombinované, např. $u_t + au_x + bu_{xx} = 0$
- zdrojové členy $s(t, x, u)$ na pravé straně
- podmínky
  - počáteční $u(0, x) = u_0(x)$
  - okrajové $u(t, 0) = f(t)$
- podmíněnost PDR

Hyperbolické parciální diferenciální rovnice

- počáteční problém, Cauchyho problém, najít $u(t, x)$

$$u_t + au_x = 0, u(0, x) = u_0(x), t \geq 0, x \in R$$

advekční rovnice, 1-stranná vlnová rovnice

- řešení $u(t, x) = u_0(x - at)$
- charakteristiky - přímky, na kterých je u konstantní

$$\xi = x - at, u(t, x) = u_0(\xi)$$

a - rychlost šíření podél charakteristiky $t = (x - \xi)/a$

- se zdrojem

$$u_t + au_x = bu, u(0, x) = u_0(x), t \geq 0, x \in R$$

- transformace proměnných

$$\begin{aligned} \tau = t \quad &, \quad \xi = x - at \\ t = \tau \quad &, \quad x = \xi + a\tau \\ \tilde{u}(\tau, \xi) \ &= \ u(t, x) \end{aligned}$$

- derivace

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = u_t t_\tau + u_x x_\tau = u_t + au_x = bu$$

- $\forall \xi$ dostaneme ODR s počáteční podmínkou

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = b\tilde{u}, \tilde{u}(0, \xi) = u_0(\xi)$$

- řešení

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\tau,\xi) &= u_0(\xi)e^{b\tau}\\ u(t,x) &= u_0(x-at)e^{bt}\end{aligned}$$

- lze rozšířit na řešení

$$u_t + au_x = f(t,x,u), u(0,x) = u_0(x)$$

Hyperbolická PDR s proměnnými koeficienty

- rovnice

$$u_t + a(t,x)u_x = 0, u(0,x) = u_0(x)$$

- transformace proměnných, nové proměnné τ, ξ

$$\tau = t, \xi =?, \tilde{u}(\tau,\xi) = u(t,x)$$

- derivace

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = u_t t_\tau + u_x x_\tau = u_t + x_\tau u_x$$

- položíme

$$\frac{dx}{d\tau} = a(t,x) = a(\tau,x)$$

- dostaneme systém ODR s počátečními podmínkami

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0 \ , \ \tilde{u}(0,\xi) = u_0(\xi)$$
$$\frac{dx}{d\tau} = a(\tau,x) \ , \ x(0) = \xi$$

- příklad $a(t,x) = x$

$$\begin{aligned} u_t + xu_x &= 0 \\ u_0(x) &= \begin{cases} 1 \text{ pro } & 0 \le x \le 1 \\ 0 \text{ pro } & x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- ODR

$$\frac{dx}{d\tau} = x, x(0) = \xi$$

má řešení $x(\tau) = \xi e^{\tau}$, charakteristiky jsou křivky $\xi = xe^{-t} = konst$, nebo $x(t) = \xi e^{t}, \quad t = \ln(x/\xi)$

- ODR

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0, \tilde{u}(0, \xi) = u_0(\xi)$$

má řešení $\tilde{u}(\tau, \xi) = u_0(\xi)$

- konečné řešení $u(t, x) = u_0(xe^{-t})$ čili

$$u(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le e^t \\ 0 & \text{pro} \quad x < 0 \vee x > e^t \end{cases}$$

Systém PDR

- systém PDR

$$U_t + A \cdot U_x = 0$$

pro $U(t,x) \in R^d$ tj. $U = (u_1, u_2, \cdots, u_d)'$ je hyperbolický právě když má matice A reálná vlastní čísla λ_i a existuje matice P z vlastních vektorů, tak že

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} = \Lambda$$

- vynásobíme rovnici zleva maticí P

$$\begin{aligned} P \cdot U_t + P \cdot A \cdot U_x = 0 \\ (P \cdot U)_t + (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot P \cdot U_x = 0 \\ W_t + \Lambda \cdot W_x = 0 \end{aligned}$$

kde $W = P \cdot U = (w_1, w_2, \cdots, w_d)$ a počáteční podmínka je $W(0,x) = PU_0(x)$

- původní systém PDR jsme převedli na d navzájem nezávislých skalárních advekčních rovnic

$$(w_i)_t + \lambda_i (w_i)_x = 0, i = 1, \cdots, d$$

s počátečními podmínkami $w_i(0,x) = w_{i0}(x) = (P \cdot U_0(x))_i$

- každá advekční rovnice má řešení $w_i(t,x) = w_{i0}(x - \lambda_i t)$ a dohromady dají vektor řešení $W(t,x)$
- řešení původního systému potom je $U = P^{-1}W$

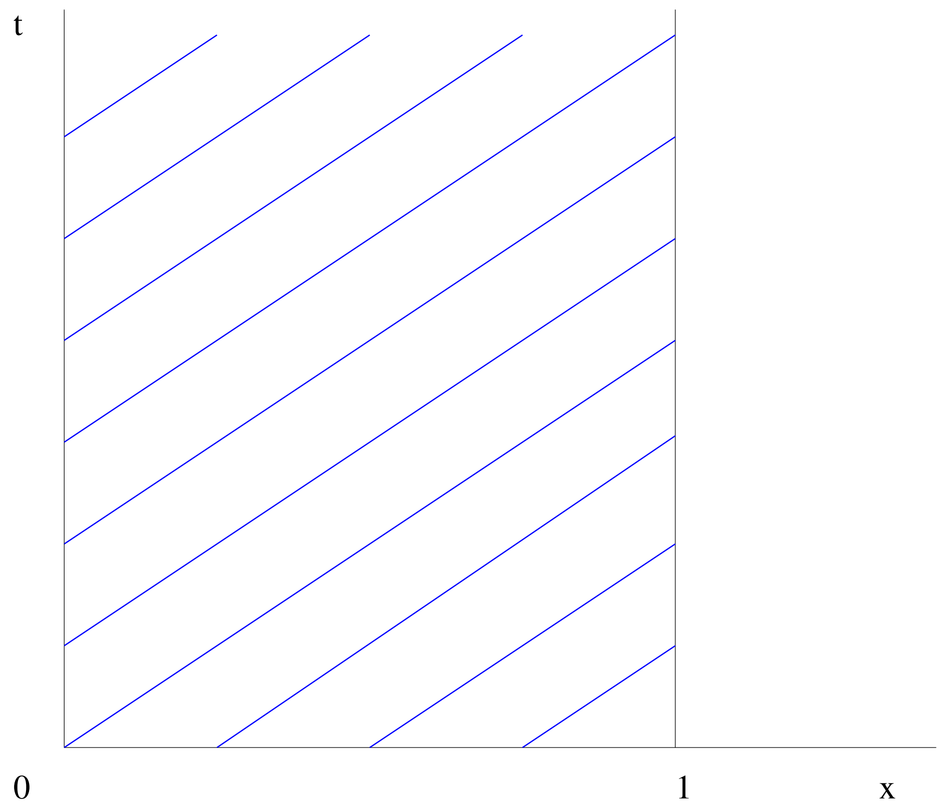
Okrajové podmínky pro PDR

- advekční rovnice na intervalu $x \in (0,1)$ s počátečními a okrajovými podmínkami

$$u_t + au_x = 0,\ u(0,x) = u_0(x),$$

$$u(t,0) = f_0(t),\ u(t,1) = f_1(t)$$

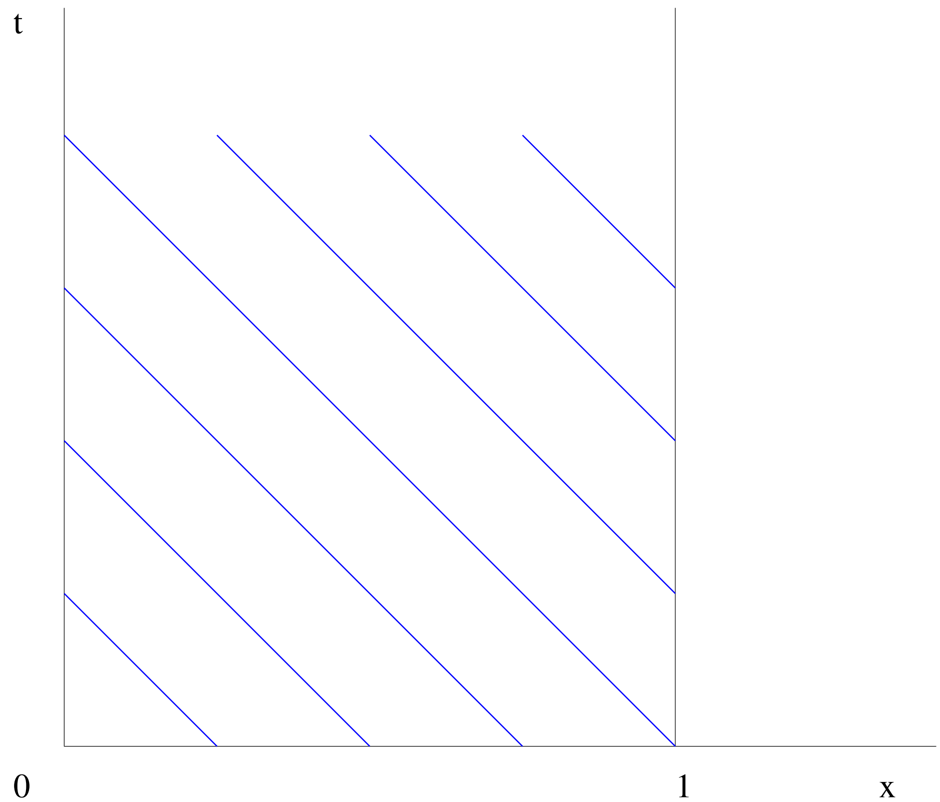
charakteristiky pro $a > 0$



řešení pro $a > 0$

$$u(t,x) = \begin{cases} u_0(x-at) & \text{pro } x-at>0 \\ f_0(t-x/a) & \text{pro } x-at<0 \end{cases}$$

závisí jen na $f_0(t)$, tj. na okrajové podmínce nalevo charakteristiky pro $a < 0$



řešení pro $a < 0$

$$u(t,x) = \begin{cases} u_0(x - at) & \text{pro } x - at < 1 \\ f_1(t - (1-x)/a) & \text{pro } x - at > 1 \end{cases}$$

závisí jen na $f_1(t)$, tj. na okrajové podmínce napravo

Okrajové podmínky pro systém PDR

- příklad $x \in (0,1), a > 0, b > 0$

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x = 0$$

- matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

její charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2,$$

vlastní čísla $\lambda_{1,2} = a \pm b$ a vlastní vektory

$$A \cdot v = \lambda v$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = (a \pm b) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- matice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

charakteristické proměnné

$$w = P \cdot u = \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}$$

- diagonální systém

$$\begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 + u^2 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}_x = 0$$

- 2 nezávislé rovnice, $a > 0, b > 0$

$$\begin{aligned} (u^1 + u^2)_t + (a+b)(u^1 + u^2)_x &= 0 \qquad & w^1_t + (a+b) w^1_x = 0 \\ (u^1 - u^2)_t + (a-b)(u^1 - u^2)_x &= 0 \qquad & w^2_t + (a-b) w^2_x = 0 \end{aligned}$$

- pro advekční rovnici $u_t + au_x = 0$ potřebujeme pro $a > 0$ okrajovou podmínku nalevo v $x = 0$ a pro $a < 0$ okrajavou podmínku napravo v $x = 1$

- pro $a > b$, tj. $a - b > 0$ potřebujeme pro $u^1 + u^2$ a $u^1 - u^2$ okrajové podmínky nalevo v $x = 0$

- pro $a < b$, tj. $a - b < 0$ potřebujeme pro $u^1 + u^2$ okrajovou podmínku nalevo v $x = 0$ a pro $u^1 - u^2$ okrajovou podmínku napravo v $x = 1$

- obecné okrajové podmínký pro $a < b$ jsou

$$\begin{aligned} u^1(t,0) + u^2(t,0) &= c_1(u^1(t,0) - u^2(t,0)) + f_0(t) \\ u^1(t,1) - u^2(t,1) &= c_2(u^1(t,1) + u^2(t,1)) + f_1(t) \end{aligned}$$

Druhy okrajových podmínek

- Dirichletova OP, $u(t,0) = f_0(t)$
- Neumannova OP, $u_x(t,0) = f_n(t)$
  přirozená $u_x(t,0) = 0$
- Robinova OP, $\alpha u(t,0) + \beta u_x(t,0) = \gamma, \quad \alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$
- periodická okrajová podmínka

  $$u_t + a u_x = 0, u(0,x) = u_0(x), x \in (0,1), u(t,0) = u(t,1)$$

  kompatibilita počáteční podmínky $u_0(0) = u_0(1)$
- odrazová OP
- absorbující OP

Advekční rovnice

- advekční neboli jednostranná vlnová rovnice pro $u(t,x)$

  $$\frac{\partial\, u}{\partial\, t} + a\frac{\partial\, u}{\partial\, x} = 0, u_t + au_x = 0$$

  s počáteční podmínkou

  $$u(0,x) = u_0(x)$$

  má řešení

  $$u(t,x) = u_0(x - at)$$

  což je funkce daná počáteční podmínkou, pohybující se rychlostí a

Výpočetní síť

- namísto spojitých proměnných $(t,x) \in [0,\infty)\times R$ zavedeme diskrétní proměnné, neboli diskrétní výpočetní siťku

  $$(t_n, x_j) = (n\Delta t, j\Delta x), n \in N_0, j \in Z,$$

  kde Δt a Δx jsou časový a prostorový krok výpočetní sítě

- hodnoty funkce $u(t,x)$ jsou nahrazeny přibližnými diskrétními hodnotami

  $$u(t_n, x_j) \approx u_j^n$$

Konečné diference

- náhrady derivací konečnými diferencemi
- dopředná

$$u_x \longrightarrow \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$$

- zpětná

$$u_x \longrightarrow \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}$$

- centrální

$$u_x \longrightarrow \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$$

Základní diferenční schemata pro advekční rovnici

- advekční rovnice $u_t + au_x = 0$
- dopředné schema, dopředná diference v čase i prostoru

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0,$$

známe vše na časové vrstvě n, vyjádříme jedinou neznámou u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\Delta t\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

- při výpočtu se časový krok počítá jako

$$\Delta t = C\frac{\Delta x}{|a|},$$

kde C je tak zvané CFL (Courant-Friedrichs-Levy) číslo

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/pde.m

- zpětné schema, dopředná diference v čase a zpětná diference v prostoru

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

- centrální schema, dopředná diference v čase a centrální diference v prostoru

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Lax-Friedrichsovo schema, dopředná diference v čase používající průměr a centrální diference v prostoru

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Lax-Wendroffovo schema, dopředná diference v čase a centrální diference v prostoru s korekcí

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** experimentálně určete pro které hodnoty a a C jsou uvedená schemata stabilní, sestavte tabulku podmínek stability

- **Úloha:** implementujte periodické okrajové podmínky a vyzkoušejte je zvětšením konečného času
- **Úloha:** sestavte pro uvedená schemata tabulku konvergence s použitím 200, 400, 800 a 1600 bodů; do tabulky zaneste L_1 chyby numerického řešení a jejich podíly

  L_1 chyba numerického řešení u_i^n je jeho L_1 odchylka od přesného řešení u^e

$$err_{L_1} = ||u_i^n - u^e(t_n, x_i)||_{L_1} = \sum_i |u_i^n - u^e(t_n, x_i)|\Delta x$$

Konvergence a konzistence

- **Definice:** Jednokrokové diferenční schema aproximující parciální diferenciální rovnici (PDR) je **konvergentní** $\Leftrightarrow$ $\forall u(x,t)$ řešení PDR, $\forall u_j^n$ řešení diferenčního schematu takové, že $u_j^0 \to u_o(x)$ když $j\Delta x \to x, \Delta x \to 0$, potom
$u_j^n \to u(t,x)$ pro $(n\Delta t, j\Delta x) \to (t,x), \Delta x \to 0, \Delta t \to 0$
- **Definice:** Diferenční schema $P_{\Delta t,\Delta x} u_j^n = f_j^n$ je **konzistentní** s PDR $Pu = f$ $\Leftrightarrow$
$\forall$ hladkou funkci $\Phi(t,x)$ platí $P\Phi - P_{\Delta t,\Delta x}\Phi_j^n \to 0$ pro $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$
(bodová konvergence v každém bodě sítě)
- **Příklad:** advekční rovnice $P\Phi = \Phi_t + a\Phi_x$, dopředné schema

$$P_{\Delta t,\Delta x}\Phi_j^n = \frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\Delta t} + a\frac{\Phi_{j+1}^n - \Phi_j^n}{\Delta x} = 0$$

Taylorův rozvoj v bodě $(n\Delta t, j\Delta x)$

$$\begin{aligned}\Phi_j^{n+1} &= \Phi + \Delta t\Phi_t + \frac{1}{2}\Delta t^2\Phi_{tt} + O(\Delta t^3)\\ \Phi_{j+1}^n &= \Phi + \Delta x\Phi_x + \frac{1}{2}\Delta x^2\Phi_{xx} + O(\Delta x^3)\end{aligned}$$

dif. schema po dosazení

$$P_{\Delta t,\Delta x}\Phi_j^n = \Phi_t + a\Phi_x + \frac{1}{2}\Delta t\Phi_{tt} + \frac{1}{2}a\Delta x\Phi_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

čili

$$P\Phi - P_{\Delta t,\Delta x}\Phi_j^n = -\frac{1}{2}\Delta t\Phi_{tt} - \frac{1}{2}a\Delta x\Phi_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \to 0$$

pro $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$, čili schema je konzistentní $\forall a$

- **Úloha:** ověřte konzistenci centrálního schematu

$$\frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\Delta t} + a\frac{\Phi_{j+1}^n - \Phi_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Stabilita a podmíněnost

- **Definice:** Diferenční schema $P_{\Delta t,\Delta x} u_j^n = 0$ pro parciální diferenciální rovnici 1. řádu je **stabilní** v oboru stability $S \Leftrightarrow$

$$\exists J \in N_0, J \ll n, \forall T > 0, \exists c_T \in R$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^n|^2 \leq c_T \sum_{m=0}^{J} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |u_j^m|^2$$

pro $0 \leq n\Delta t \leq T$ a $(\Delta t, \Delta x) \in S$

- lze použít k určení oboru stability, ale nepraktické
- praktická metoda – založená na Fourierově transformaci
- **Definice:** Počáteční problém pro PDR 1. řádu $Pu = 0$ je **dobře podmíněný** $\Leftrightarrow$

$$\forall T > 0, \exists c_T, \forall u(t,x), Pu(t,x) = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,x)|^2 dx \leq c_T \int_{-\infty}^{\infty} |u(0,x)|^2 dx$$

pro $0 \leq t \leq T$

- **Lax-Richtmyerova věta:** Diferenční schema konzistentní s PDR pro kterou je počáteční problém dobře podmíněný je konvergentní $\Leftrightarrow$ je schema stabilní

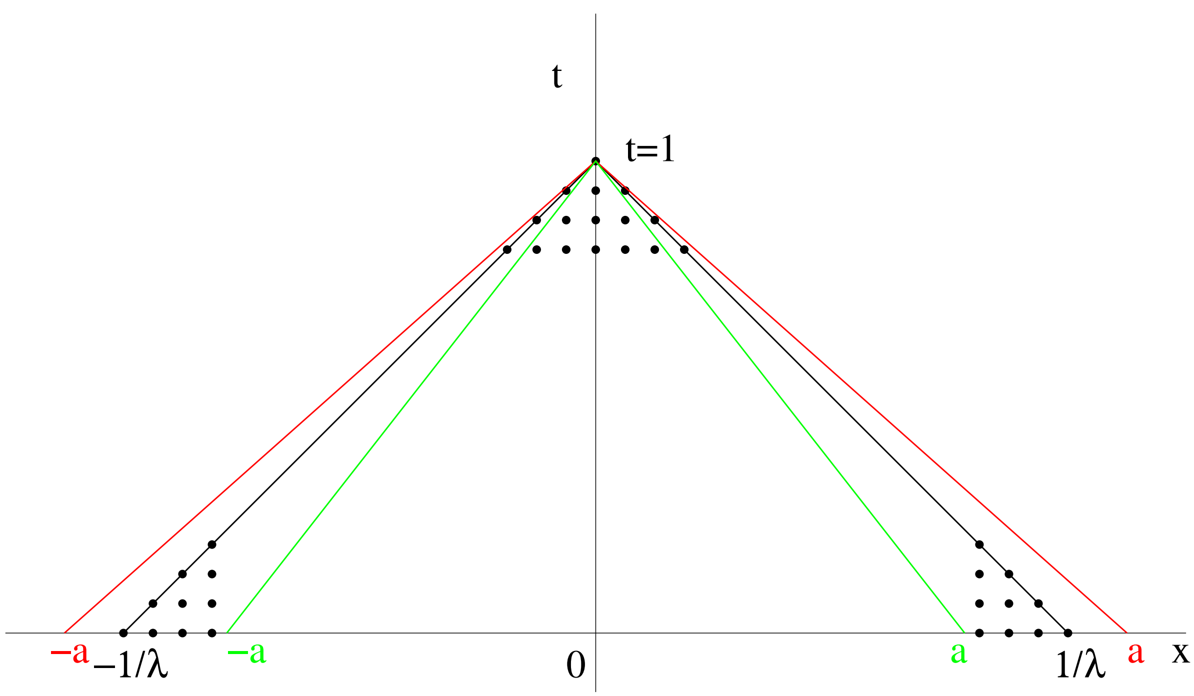
Courant-Friedrichs-Lewyho (CFL) podmínka

- **Věta:** Pro explicitní diferenční schema

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n$$

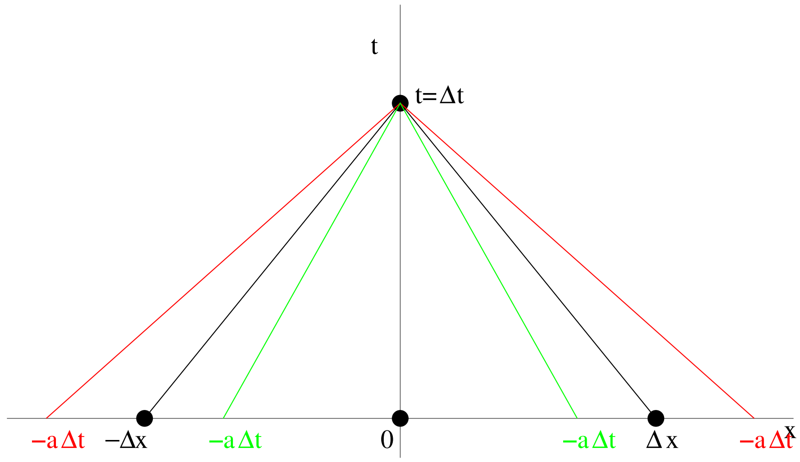
aproximující advekční PDR $u_t + a u_x = 0$ s $\lambda = \Delta t/\Delta x$ konstantním je nutná podmínka stability (CFL podmínka) $|a|\lambda \leq 1$

- předpokládáme bod $(t,x) = (1,0) = (n\Delta t, 0)$ a najdeme všechny body sítě, na kterých závisí u_0^n; pro $t = 1$ to jsou body pro které $|x| \leq 1/\lambda$; víme $n = 1/\Delta t$, čili $n\Delta x = \Delta x/\Delta t = 1/\lambda$



- charakteristiky pro $|a| < 1/\lambda$ splňující CFL podmínku a pro $|a| > 1/\lambda$ nesplňující CFL podmínku

- charakteristiky mají směrnici $1/a$; charakteristika procházející bodem $(\Delta t, 0)$ protíná osu x v bodě $(0, -a\Delta t)$



- charakteristiky pro $|a|\Delta t < \Delta x$ splňující CFL podmínku a pro $|a|\Delta t > \Delta x$ nesplňující CFL podmínku
- pro systém $U_t + AU_x = 0$ je CFL podmínka $|a_i|\lambda \leq 1, \quad \forall a_i, a_i$ je vlastní číslo matice A
- postačující podmínka může být úplně jiná
- omezení časového kroku $\Delta t \leq \Delta x/|a|$
- **Věta:** Neexistuje explicitní, bezpodmínečně stabilní, konzistentní diferenční schema pro systém hyperbolických PDR.
- **Poznámka:** implicitní schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

je bezpodmínečně stabilní

Fourierova analýza

- Fourierova transformace, $u(x), x \in R$

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx, \qquad \omega \in R$$

- inverzní Fourierova transformace

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega) d\omega, \qquad x \in R$$

- na diskrétním oboru $\Delta x Z = \{\Delta x m, m \in Z\}$
- síťová funkce $v_m \approx u(\Delta x m)$
- diskrétní Fourierova transformace

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi\Delta x} v_m \Delta x, \qquad \xi \in (-\pi/\Delta x, \pi/\Delta x)$$

- inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{im\xi\Delta x} \hat{v}(\xi) d\xi, \qquad m \in Z$$

složení vln

- L^2 norma

$$||u||_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx}, \quad ||v_m||_2 = \sqrt{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \Delta x}$$

- Parsevalova rovnost $||u||_2 = ||\hat{u}||_2$, v diskrétním tvaru

$$||u||_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_m|^2 \Delta x = ||\hat{u}||_2^2$$

Fourierova analýza a PDR

- derivace inverzní Fourierovy transformace

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} i\omega \hat{u}(\omega) d\omega, \qquad x \in R$$

čili

$$(\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}})(\omega) = i\omega \hat{u}(\omega)$$

- derivace $\longrightarrow$ násobení
diferenciální rovnice $\longrightarrow$ algebraická rovnice
PDR $\longrightarrow$ ODR

- **Příklad:** $u_t + au_x = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$, Fourierova transformace v x

$$\hat{u}_t = -ia\omega\hat{u}$$

je ODR pro $\hat{u}$ s řešením

$$\hat{u}(t,\omega) = e^{-ia\omega t}\hat{u}_0(\omega)$$

s použitím Parsevalovy rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} ||u||^2 &= ||\hat{u}||^2 = ||e^{-ia\omega t}\hat{u}_0||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ia\omega t}\hat{u}_0|^2 d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ia\omega t}|^2 |\hat{u}_0|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0|^2 d\omega = ||\hat{u}_0||^2 = ||u_0||^2 \end{aligned}$$

čili PDR je dobře podmíněná

- **Úloha:** analyzujte podmíněnost rovnice vedení tepla

$$u_t = b u_{xx}, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

- **Úloha:** analyzujte podmíněnost advekčně difuzní rovnice

$$u_t + a u_x = b u_{xx}, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

- **Úloha:** analyzujte podmíněnost disperzní rovnice

$$u_t + c u_{xxx} = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

- **Úloha:** analyzujte podmíněnost hyper-difuzní rovnice

$$u_t = d u_{xxxx}, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

- **Úloha:** analyzujte podmíněnost rovnice

$$u_t + A u_x + B u_{xx} + C u_{xxx} + D u_{xxxx} = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

Von Neumannova (Fourierova) analýza

- zpětné diferenční schema pro advekční rovnici $u_t + a u_x = 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$u_j^{n+1} = (1 - a\lambda)u_j^n + a\lambda u_{j-1}^n, \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

- inverzní diskrétní Fourierova transformace

$$u_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ij\xi\Delta x} \hat{u}^n(\xi) d\xi$$

nám dává

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} e^{ij\xi\Delta x} [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i\xi\Delta x}] \hat{u}^n(\xi) d\xi$$

čili

$$\hat{u}^{n+1} = [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i\xi\Delta x}] \hat{u}^n(\xi) = g(\xi\Delta x)\hat{u}^n(\xi)$$

- zesilující faktor

$$\hat{u}^{n+1} = g(\xi\Delta x)\hat{u}^n(\xi)$$

pro zpětné schema je

$$g(\xi\Delta x) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i\xi\Delta x}$$

- a počáteční podmínky

$$\hat{u}^n = g(\xi\Delta x)^n \hat{u}^0(\xi)$$

- z Parsevalovy rovnosti

$$\begin{aligned} ||u^n||_2^2 &= ||\hat{u}^n||_2^2 = ||g(\xi\Delta x)^n \hat{u}^0(\xi)||_2^2 \\ &= \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} |g(\xi\Delta x)|^{2n} |\hat{u}^0(\xi)|^2 d\xi \leq c_T ||\hat{u}^0(\xi)||_2^2 \end{aligned}$$

- $||u^n||_2^2$ musí být omezené, aby bylo schema stabilní, číli

$$|g(\xi\Delta x)|^2 \leq 1$$

- **Úloha:** určete kdy zesilující faktor pro zpětné schema

$$g(\xi\Delta x) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-i\xi\Delta x}$$

  splňuje tuto podmínku

- **Von Neumannova věta:** Jednokrokové diferenční schema (s konstantními koeficienty) je stabilní $\Leftrightarrow$
  $\exists K$ (explicitně nezávislé na $\Theta, \Delta t, \Delta x$, může však záviset na $\lambda = \Delta t/\Delta x$) $\exists \Delta t_0 > 0, \Delta x_0 > 0$
  $|g(\Theta, \Delta t, \Delta x) \leq 1 + K\Delta t,$
  $\Theta = \xi\Delta x, \forall\Theta, \Delta t, \Delta x . 0 < \Delta t \leq \Delta t_0, 0 < \Delta x < \Delta x_0$
  Pokud $g(\Theta, \Delta t, \Delta x)$ nezávisí explicitně na Δt a Δx (může záviset na $\lambda = \Delta t/\Delta x$) pak je podmínkou stability
  $\forall\Theta, |g(\Theta)| \leq 1$

- standardní postup – nahrazení

$$u_j^n \longrightarrow g^n e^{ij\Theta} \hat{u}^0$$

respektive

$$u_{j+k}^{n+m} \longrightarrow g^m e^{ik\Theta}$$

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/stab.mws počítá zesilující faktor pro zpětné schema, resp. počítá $|g(\Theta)|^2 - 1 \leq 0$, nerovnici již řešíme ručně
- **Úloha:** analyzijte stabilitu pro: dopředné schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0,$$

centrální schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Friedrichsovo schema

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Wendroffovo schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Stabilita pro proměné koeficienty

- advekční rovnice s proměnným koeficientem $u_t + a(t,x)u_x = 0$
- Lax-Friedrichsovo schema
$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a(t^n, x_j)\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$
- metoda zamrzlých koeficientů
  - schema se vyšetřuje lokálně v každém bodě (t^n, x_j)
  - podmínka stability $|a(t^n, x_j)|\lambda \le 1, \forall n, \forall j$

Stabilita pro vícekrokové schema

- dosazením
$$u_{j+k}^{n+m} \longrightarrow g^m e^{ik\Theta}$$
dostaneme charakteristický polynom diferenčního schematu $P(g, \Theta, \Delta t, \Delta x)$ a vyšetřujeme jeho kořeny $g_l(\Theta, \Delta t, \Delta x)$
- pokud $P(g, \Theta, \Delta t, \Delta x)$ nezávisí explicitně na $\Delta t, \Delta x$ (může záviset na $\lambda = \Delta t/\Delta x$) potom je schema stabilní $\Leftrightarrow$

1. $|g_l(\Theta)| \le 1, \forall l, \forall \Theta$
2. $|g_l(\Theta)| = 1 \Rightarrow g_l(\Theta)$ je jednoduchý kořen $P(g, \Theta)$

- obecně, pokud $P(g, \Theta, \Delta t, \Delta x)$ závisí explicitně na $\Delta t, \Delta x$, schema je stabilní $\Leftrightarrow$

  1. $\exists K, |g_l(\Theta)| \leq 1 + K\Delta t, \forall l, \forall \Theta$
  2. $\exists c > 0, 1 \leq |g_l(\Theta)| \leq 1{+}K\Delta t \Rightarrow g_l(\Theta)$ je jednoduchý kořen $P(g, \Theta)$ a $|g_l - g_m| \geq c, \forall m \neq l, \forall \Theta$

- **Příklad:** schema Leapfrog

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

  vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/stab-leap-frog.mws spočítá kořeny charakteristického polynomu; vyšetřit případ $|a|\lambda > 1$ a potom $|a|\lambda \leq 1$; ověřit možnou násobnost kořenu s $|g_l| = 1$

Stabilita jednokrokového schematu pro systém

- systém

$$\sum_k \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{U}_{j+k}^{n+1} = \sum_k \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{U}_{j+k}^{n}$$

- dosadíme

$$\mathbf{U}_{j+k}^{n+m} \longrightarrow \hat{\mathbf{U}}^{n+m} e^{ik\Theta}$$

  a dostaneme

$$\mathbf{A}(\Theta) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{B}(\Theta) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{n}$$

$$\hat{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{n}$$

- matice přechodu, zesilující matice

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

- podmínka stability potom je
  - $||\mathbf{G}(\Theta)|| \leq 1, \forall\Theta$, pokud $\mathbf{G}$ nezávisí explicitně na $\Delta t, \Delta x$
  - $||\mathbf{G}(\Theta, \Delta t, \Delta x)|| \leq 1 + K\Delta t, \forall\Theta$, pokud $\mathbf{G}$ závisí explicitně na $\Delta t, \Delta x$

- vyšetřují se vlastní čísla $g_l(\Theta)$ matice $\mathbf{G}$

$$|g_l(\Theta)| \leq 1, \forall l, \forall\Theta$$

$$|g_l(\Theta)| \leq 1 + K\Delta t, \forall l, \forall\Theta$$

Stabilita systému diferenčních schemat

- systém PDR

$$\begin{aligned} u_t - av_x &= 0 \\ v_t - au_x &= 0 \end{aligned}$$

pro $\mathbf{U} = (u, v)^T$ po eliminaci v

$$u_{tt} - av_{xt} = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

dává vlnovou rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

- Lax-Friedrichsovo schema $\lambda = \Delta t/\Delta x$

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} + \frac{a\lambda}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ v_j^{n+1} &= \frac{v_{j+1}^n + v_{j-1}^n}{2} + \frac{a\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

- Fourierova analýza

$$\begin{aligned} \hat{u}^{n+1} &= \frac{e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}}{2}\hat{u}^n + a\lambda\frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2}\hat{v}^n \\ \hat{v}^{n+1} &= \frac{e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}}{2}\hat{v}^n + a\lambda\frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2}\hat{u}^n \\ \hat{u}^{n+1} &= \cos\Theta\hat{u}^n + ia\lambda\sin\Theta\hat{v}^n \\ \hat{v}^{n+1} &= \cos\Theta\hat{v}^n + ia\lambda\sin\Theta\hat{u}^n \end{aligned}$$

což lze přepsat jako

$$\hat{\mathbf{U}}^{n+1} = \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{U}}^n$$

kde

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} cos\Theta & ia\lambda\sin\Theta \\ ia\lambda\sin\Theta & cos\Theta \end{pmatrix}$$

je zesilující matice schematu

- její vlastní čísla

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \cos\Theta \pm ia\lambda\sin\Theta \\ |g_{1,2}|^2 &= \cos^2\Theta + a^2\lambda^2\sin^2\Theta = \\ & \quad 1 + \sin^2\Theta(a^2\lambda^2 - 1) \leq 1 \\ & \quad a^2\lambda^2 \leq 1 \\ & \quad |a|\lambda \leq 1 \end{aligned}$$

což je podmínka stability pro systém

Řád přesnosti

- diferenční náhrada u_x

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = u_x + O(\Delta x)$$
$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = u_x + O(\Delta x^2)$$

  v bodě síte j

- jednostranná diferenční náhrada je řádu $O(\Delta x^2)$ v bodě $j + 1/2$

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/rad.mws pro analýzu řádu přesnosti diferenční náhrady v 1D

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/navrh.mws pro návrh diferenční náhrady v 1D

$$au_{j-1} + bu_j + cu_{j+1} \approx u_x$$

- **Úloha:** navrhněte diferenční náhradu u_{xx} na bodech sítě $j-1, j, j+1$

- **Úloha:** navrhněte diferenční náhrady u_x, u_{xx}, u_{xxx} na bodech sítě $j-1, j, j+1, j+2$ a určete jejich řád přesnosti

- **Úloha:** navrhněte diferenční náhrady u_x, u_{xx}, u_{xxx} na bodech sítě $j-2, j-1, j, j+1$ a určete jejich řád přesnosti

- **Úloha:** navrhněte diferenční náhrady $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}$ na bodech sítě $j-2, j-1, j, j+1, j+2$ a určete jejich řád přesnosti

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/rad2.mws pro analýzu řádu přesnosti centrálního diferenčního schematu ve 2D

- **Úloha:** určete řád přesnosti pro: dopředné schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0,$$

Lax-Friedrichsovo schema

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Lax-Wendroffovo schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

- **Úloha:** navrhněte explicitní diferenční schema pro advekční rovnici používající na časové vrstvě n 4 body sítě $j-2, j-1, j, j+1$ a na časové vrstvě $n+1$ bod j, analyzujte jeho stabilitu – vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/stab_4points.mws

Odvození Lax-Wendroffova schematu

- advekční rovnice $u_t + au_x = 0$
- Taylorův rozvoj v t

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) + \Delta t u_t(t,x) + \frac{\Delta t^2}{2} u_{tt}(t,x) + O(\Delta t^3)$$

víme, že $u_t = -au_x$ čili $u_{tt} = -au_{tx} = a^2 u_{xx}$

- dosadíme do Taylorova rozvoje

$$u(t+\Delta t, x) = u(t,x) - a\Delta t u_x + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} u_{xx} + O(\Delta t^3)$$

a použijeme centrální diference pro prostorové derivace

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

a dostáváme Lax-Wendroffovo schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{a^2 \Delta t}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

Implicitní schema

- advekční rovnice $u_t + au_x = 0$
- implicitní centrální prostorová diference

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0,$$

- **Úloha:** analyzujte stabilitu implicitního schematu
- volné okrajové podmínky $u_x = 0$

$$u_2^{n+1} - u_1^{n+1} = 0, \quad u_J^{n+1} - u_{J-1}^{n+1} = 0$$

- přepíšeme systém

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} - u_2^{n+1} &= 0 \\ -u_{j-1}^{n+1} a\frac{\Delta t}{2\Delta x} + u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} a\frac{\Delta t}{2\Delta x} &= u_j^n, \quad j = 2, \cdots, J-1 \\ -u_{J-1}^{n+1} + u_J^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

- v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a\Delta t}{2\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{2\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a\Delta t}{2\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{2\Delta x} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a\Delta t}{2\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{2\Delta x} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot U^{n+1} &= UU^n \\ U^{n+1} &= M^{-1} \cdot UU^n \end{aligned}$$

- vzorový program
  http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/impl.m; vyzkoušejte volbu časového kroku; implementujte periodické okrajové podmínky

Modifikovaná rovnice diferenčního schematu

- Lax-Friedrichsovo schema pro $u_t + a u_x = 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Taylorův rozvoj v t, x

$$u_t + a u_x + \frac{1}{2}\left(\Delta t u_{tt} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t} u_{xx}\right) = O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

vyjádříme

$$u_t = -a u_x + O(\Delta t, \Delta x)$$

derivováním dostaneme postupně

$$\begin{aligned} u_{tt} &= -a u_{tx} + O(\Delta t, \Delta x) \\ u_{tx} &= -a u_{xx} + O(\Delta t, \Delta x) \\ u_{tt} &= a^2 u_{xx} + O(\Delta t, \Delta x) \end{aligned}$$

- z Taylorova rozvoje vyloučíme všechny časové derivace kromě u_t a dostaneme modifikovanou rovnici

$$u_t + a u_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\left(1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} a^2\right) u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u_t + a u_x = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\left(1 - a^2\lambda^2\right) u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

- diferenční schema řeší přesněji modifikovanou rovnici než původní advekční rovnici

- z modifikované rovnice lze usuzovat vlastnosti schematu
- modifikovaná rovnice LF schematu je dobře podmíněná pro $|a|\lambda \leq 1$, což je podmínka stability LF schematu
- koeficient u 2. derivace má vztah ke stabilitě
- poduk zahrnuje modifikovaná rovnice 2. derivaci je schema difuzní, numerická difuze vyhlazuje nespojitosti
- výpočet modifikované rovnice:
  - Taylorův rozvoj v t, x
  - vyjádření časové derivace u_t
  - eliminace všech jiných časových derivací z rozvoje
  - zanedbání vyšších mocnin $\Delta t, \Delta x$
- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/˜liska/drp/ds/modif-lf.mws počítá modifikovanou rovnici LF schematu
- **Úloha:** spočítejte modifikovanou rovnici pro: dopředné schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0,$$

zpětné schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

centrální schema

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/modif-lw.mws počítá modifikovanou rovnici Lax-Wendroffova schematu

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+a\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=\frac{a^2\Delta t}{2}\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

  ve tvaru

$$u_t+au_x=\frac{1}{6}a\Delta x^2(a^2\lambda^2-1)u_{xxx}+O(\Delta x^3)$$

- disperzní rovnice $u_t+au_x=cu_{xxx}$ je vždy dobře podmíněná
- disperzní analýza, náhrada řešení $u\longrightarrow \hat{u}e^{-iq(\omega)t}e^{i\omega x}$

$$-iq(\omega)+i\omega a=-i\omega^3 c$$

- disperzní relace

$$q(\omega)=a\omega+c\omega^3$$

- fázová rychlost vlny $v_f(\omega)=q(\omega)/\omega=a+c\omega^2$
- grupová rychlost vlny $v_g(\omega)=q'(\omega)=a+3c\omega^2$
- rychlosti jsou různé pro různé frekvence
- pro modifikovanou rovnici LW schematu je $c=\frac{1}{6}a\Delta x^2(a^2\lambda^2-1)$, podmínka stability je $|a|\lambda\leq 1$, čili pro $a>0$ je $c<0$ a $v_{f,g}<a$ pro $\omega\neq 0$
- pro libovolné a platí $|v_{f,g}|<|a|$ pro $\omega\neq 0$, čili všechny frekvence s $\omega\neq 0$ se šíří rychlostí menší než $|a|$, nejpomalejší jsou nejvyšší frekvence
- schema, které má na pravé straně nejnižší derivaci třetí je disperzní, LW schema je disperzní

- disperzní schema vytváří na nespojitostech oscilace
- ukázka, nespojitá vlna řešená LF a LW schematem
- pro vztah ke stabilitě LW schematu je třeba dopočítat další člen modifikované rovnice se 4, derivací

  vzorový program http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/modif-lw4.mws počítá modifikovanou rovnici Lax-Wendroffova schematu

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= \frac{1}{6} a \Delta x^2 u_{xxx} (a^2 \lambda^2 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{8} a^2 \lambda \Delta x^3 u_{xxxx} (a^2 \lambda^2 - 1) + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

- rovnice $u_t + a u_x = c u_{xxx} + d u_{xxxx}$ je dobře podmíněná pro $d \leq 0$, čili modifikovaná rovnice LW schematu je dobře podmíněná pro $|a|\lambda \leq 1$ což je podmínka stability LW schematu
- z modifikované rovnice je možné usuzovat na:
  - konzistenci
  - řád aproximace
  - stabilita – heuristická podmínka
  - difuzní schema
  - disperzní schema

Schema Crank-Nickolsonové

- implicitní schema centrované v bodě $j, n+1/2$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+\frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{u_{j+1}^{n}-u_{j-1}^{n}}{2\Delta x}\right)=0,$$

- **Úloha:** spočítejte modifikovanou rovnici, řád přesnosti a analyzujte stabilitu schematu Crank-Nickolsonové
- volné okrajové podmínky $u_x=0$

$$u_2^{n+1}-u_1^{n+1}=0, \quad u_J^{n+1}-u_{J-1}^{n+1}=0$$

- systém

$$\begin{aligned} u_1^{n+1}-u_2^{n+1} &= 0 \\ -u_{j-1}^{n+1}a\frac{\Delta t}{4\Delta x}+u_j^{n+1}+u_{j+1}^{n+1}a\frac{\Delta t}{4\Delta x} &= u_j^n-\frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n) \\ -u_{J-1}^{n+1}+u_J^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

- v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{a\Delta t}{4\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{4\Delta x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a\Delta t}{4\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{4\Delta x} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{a\Delta t}{4\Delta x} & 1 & \frac{a\Delta t}{4\Delta x} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_3^n - u_1^n) \\ u_3^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_4^n - u_2^n) \\ \vdots \\ u_{J-1}^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x}(u_J^n - u_{J-2}^n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot U^{n+1} &= UU^n \\ U^{n+1} &= M^{-1} \cdot UU^n \end{aligned}$$

- implementujte schema Crank-Nickolsonové úpravou vzorového programu http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/drp/ds/impl.m; vyzkoušejte volbu časového kroku; implementujte periodické okrajové podmínky