Statistická indukce, náhodný výběr

1 Statistická indukce

Statistická indukce je metoda, která dovoluje stanovit vlastnosti celku (**základního souboru**) na základě pozorování jeho části (**náhodného výběru**).

Definice pojmů

- **Znak** - náhodná proměnná (studovaná vlastnost)
- **Soubor** - množina nositelů znaku
- **Základní soubor** - konečný nebo nekonečný soubor všech definovaných nositelů znaku - základní soubor může být skutečný (*např. soubor všech voličů*) nebo jen uvažovaný (*soubor všech měření, kdyby se za daných podmínek opakovalo měření nekonečněkrát opakovalo; soubor všech výrobků, které případně budou vyrobeny danou technologií*)
- **Náhodný výběr** - jedno nebo vícenásobné provedení náhodného pokusu (za definovaných podmínek)
- **Výběrový soubor** - Množina všech nositelů znaku (případně hodnot náhodné proměnné), získaných náhodným výběrem
- **Rozsah výběru** - Počet n prvků výběrového souboru
- **Prostý náhodný výběr** - Provedení n náhodných pokusů se stejným rozdělením náhodné proměnné (náhodné veličiny nebo vektoru) tak, že libovolné 2 pokusy jsou navzájem nezávislé (užívá se termín "*po dvou vzájemně nezávislé pokusy*")

2 Empirické rozdělení

Pokud je náhodná proměnná **nominální** nebo **ordinální**, je možno rozdělení náhodné proměnné na základě **relativních (poměrných) četností** $\tilde{p}_i = n_i/n$, kde n_i je počet pozorování $i - t$ hodnoty náhodné proměnné.

Pro **spojitou náhodnou veličinu** je ke stanovení relativních četností nutno definovat systém bodů $-\infty \leq a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq \infty$, který rozdělí reálnou osu (nebo její část) na systém **třídních intervalů** $(a_{i-1}, a_i\rangle$. **Relativní četnosti** $\tilde{f}_i = n_i/n$ jsou dány počtem n_i hodnot náhodné veličiny veličiny v třídním intervalu $(a_{i-1}, a_i\rangle$.

Graficky je obvykle rozdělení relativních četností znázorněno pomocí **histogramu četností** nebo **polygonu četností**.

Pozn. Pokud je rozsah n výběru ze spojitého náhodného rozdělení malý ($n \lesssim 20$), reprezentace výběrového souboru pomocí relativních četností obvykle obsahuje podstatně méně informace než sám výběrový soubor.

Variační rozpětí výběrového souboru náhodné veličiny $\tilde{R} = X_{max} - X_{min}$.

Empirickou distribuční funkci lze sestrojit pro ordinální a spojitou náhodnou proměnnou. Empirická distribuční funkce je dána **poměrnými kumulativními četnostmi** $\tilde{F}(x) = N(x)/n$, kde $N(x)$ je počet všech $X_i \leq x$.

3 Výběrové statistiky (prostého náhodného výběru)

Podobně jako jsou pro rozdělení pravděpodobnosti používány charakteristiky rozdělení pravděpodobnosti, tak podobné charakteristiky lze sestrojit i pro náhodné výběry. Nazýváme je buď **výběrovými charakteristikami** nebo **výběrovými statistikami**, případně **statistickými ukazateli**. Výběrové statistiky mohou sloužit pro odhad charakteristik rozdělení pravděpodobnosti. Lze je opět rozdělit na statistiky dané středováním, pořadím (a extrémy relativní četnosti).

Výběrové statistiky jsou funkce náhodných veličin, a jsou tedy opět náhodné veličiny. Při znalosti rozdělení základního souboru lze stanovit rozdělení výběrových statistik. Některé charakteristiky výběrových statistik lze určit i bez znalosti rozdělení základního souboru.

3.1 Výběrové charakteristiky dané středováním

Výběrový obecný moment - K-tý výběrový obecný (počáteční) moment je dán vztahem

$$M'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

Výběrový průměr je $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Platí-li pro prostý náhodný výběr $EX_i = EX = \mu$ a $DX_i = DX = \sigma^2$, pak střední hodnota výběrového průměru $E\overline{X} = EX = \mu$ a rozptyl $D\overline{X} = DX/n = \sigma^2/n$. Výběrový průměr je tedy vhodný pro odhad střední hodnoty rozdělení.

Výběrový centrální moment - K-tý výběrový centrální moment je dán vztahem

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^k$$

Výběrový rozptyl - je dán vztahem

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Ukážeme, že střední hodnota výběrového rozptylu je rovna rozptylu rozdělení pravděpodobnosti

$$(n-1)E(S^2) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[E^2(X_i) + D(X_i)\right] - n\left[E^2(\overline{X}) + D(\overline{X})\right] = n(\mu^2 + \sigma^2) - n(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n})$$

a tedy platí

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Dále

$$D(S^2) = \frac{m_4}{n} - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma^4 \qquad \text{pro } n \geq 3$$

Veličina m_4 je čtvrtý centrální moment rozdělení pravděpodobnosti.

Pozn. - Protože $\overline{X}$ je vypočten z hodnot X_i výběrového souboru, je z n hodnot odchylek $(X_i - \overline{X})$ jen $n-1$ hodnot lineárně nezávislých, proto musíme dělit výrazem $(n-1)$ a rozdělení náhodné veličiny S^2 má $n-1$ **stupňů volnosti**.

Výběrová směrodatné odchylka je $S = \sqrt{S^2}$.
Střední hodnota $E(S)$ je obvykle menší než σ, neb $0 \leq D(S) = E(S^2) - E^2(S) = \sigma^2 - E^2(S)$. Tedy $E(S) = \sigma$ pouze tehdy, pokud $D(S) = 0$.

Výběrová kovariance Nechť při prostém výběru o rozsahu n jsou sledovány dva znaky X a Y. Dostaneme dva **soubory hodnot** $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ a $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Výběrová kovariance S_{XY} je dáma vztahem

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

Výběrový lineární korelační koeficient

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2}}$$

Hodnota $r_{XY} \in \langle -1, 1 \rangle$.

3.2 Výběrové charakteristiky dané pořadím - pořádkové statistiky

Uspořádaný výběr $\left\{X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}\right\}$ vznikne uspořádáním prvků výběru $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ vzestupně podle velikosti.

Výběrový p-kvantil $\tilde{x}_p$ je pro $0 \leq p \leq 1$ definován předpisem

$$\tilde{x}_p = \begin{cases} X_{([np]+1)} & np \notin \mathcal{N} \\ \frac{1}{2}\left(X_{(np)} + X_{(np+1)}\right) & np \in \mathcal{N} \end{cases}$$

Zde $[np]$ značí celou část čísla np a $\mathcal{N}$ je množina všech nezáporných celých čísel.

Kvantil $\tilde{x}_{0.5}$ je **výběrový medián**, $\tilde{x}_{0.25}$ a $\tilde{x}_{0.75}$ jsou první a třetí výběrový kvartil. Mírou rozptýlenosti výběru je **výběrové mezikvartilové rozpětí** $\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$.

Korelace pořadí - Spearmanův korelační koeficient Nechť při prostém výběru o rozsahu n jsou sledovány dva znaky X a Y. Dostaneme dva soubory hodnot X_i a Y_i, kde $i = 1, \ldots, n$ je index prvku výběrového souboru. Označme R_i (resp. S_i) pořadí i-tého prvku podle velikosti v souboru hodnot X_i (resp. Y_i). Pro názornost označíme průměrnou hodnotu pořadí $\overline{R} = \overline{S} = (n+1)/2$. Pak Spearmanův korelační koeficient je dán

$$r_{XY}^S = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \overline{R})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (S_i - \overline{S})^2}}$$

Hodnota $r_{XY}^S \in \langle -1, 1 \rangle$. Koeficient korelace pořadí je méně ovlivněn odlehlými body než lineární korelační koeficient.

4 Rozdělení pravděpodobnosti některých statistik

Rozdělení pravděpodobnosti statistik prostého náhodného výběru je nutno konstruovat pro každé rozdělení pravděpodobnosti základního souboru zvlášť. Nejznámější jsou rozdělení pravděpodobnosti pro statistiky výběrů z normálního rozdělení.

Příklad Nalezněte rozdělení průměru prostého náhodného výběru o rozsahu n z Poissonova rozdělení s parametrem λ.

Řešení Nejsnadněji lze takovou úlohu řešit s použitím charakteristické funkce (příp. momentové vytvořující funkce). Už dříve jsme ukázali, že charakteristická funkce sumy po dvou navzájem nezávislých veličin je součinem jejich charakteristických funkcí.
Charakteristická funkce Poissonova rozdělení je

$$\Psi_X(t) = \mathrm{E}\left[\exp(itx)\right] = \sum_{x=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \exp\left[\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)\right]$$

Charakteristická funkce výběrového úhrnu $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ je

$$\Psi_T(t) = [\Psi_X(t)]^n = \left\{\exp\left[\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)\right]\right\}^n = \exp\left[n\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)\right]$$

Výběrový úhrn T má tedy Poissonovo rozdělení s parametrem $n\lambda$. Výběrový průměr $\overline{X} = T/n$ má tedy rozdělení pravděpodobnosti

$$P(\overline{X} = w) = P(T = nw) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^{nw}}{(nw)!} \qquad\qquad w = 0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots$$

Výběrový průměr $\overline{X}$ normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$ se střední hodnotou $E\overline{X} = \mu$ a rozptylem $D\overline{X} = \sigma^2/n$.

Odvození: Výběrový úhrn $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má charakteristickou funkci

$$\Psi_T(t) = \left[\exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)\right]^n = \exp(in\mu t - n\sigma^2 t^2/2)$$

Výběrový úhrn T má tedy normální rozdělení $N(n\mu, n\sigma^2)$ se střední hodnotou $ET = n\mu$ a rozptylem $DT = n\sigma^2$. Po transformaci $\overline{X} = T/n$ dostáváme výše uvedené normální rozdělení.

4.1 Rozdělení $\chi^2(n)$ o n stupních volnosti

Nechť $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ je prostý výběr z normálního rozdělení $N(0,1)$. Pak veličina $W = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ má rozdělení $\chi^2(n)$ o n stupních volnosti s hustotou pravděpodobnosti

$$f(w) = \frac{1}{\Gamma\left(n/2\right) 2^{(n/2)}}\ \mathrm{e}^{-\frac{w}{2}} w^{\frac{n}{2}-1}$$

kde funkce $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ (pro celá k je $\Gamma(k+1) = k!$).
Střední hodnota $EW = n$, rozptyl $DW = 2n$ a charakteristická funkce $\Psi_W(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$.

Rozdělení výběrového rozptylu S^2 pro výběr z normálního rozdělení
Pro prostý náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ má veličina $W = (n-1)S^2/\sigma^2$ **rozdělení** $\chi^2(n-1)$ o $n-1$ stupních volnosti.

Pozn. Při výpočtu S^2 z výběru o rozsahu n je místo střední hodnoty EX použit výběrový průměr $\overline{X}$, a tedy diference $X_i - \overline{X}$ nejsou navzájem nezávislé. Vektorový prostor definovaný vektory $X_i - \overline{X}$ má dimenzi $n-1 =$ počet dat $-$ počet použitých parametrů z dat odvozených. Rozdělení S^2 má tedy $(n-1)$ stupňů volnosti.

4.2 Studentovo t-rozdělení

Studentovo t_ν-rozdělení o ν stupních volnosti má hustotu pravděpodobnosti definovanou vztahem

$$f_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu}\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

kde $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$.
Limitou Studentova rozdělení pro $\nu \to \infty$ je normální rozdělení $N(0,1)$.

Rozdělení odchylky průměru od střední hodnoty

Nechť $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ je prostý výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, nechť $\overline{X}$ je výběrový průměr a nechť S je výběrová směrodatná odchylka. Pak veličina

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{S}$$

má **Studentovo rozdělení** s $\nu = n - 1$ stupni volnosti.

Pozn. Veličina t je vlastně relativní odchylka výběrového průměru - odchylka průměru od střední hodnoty dělená odhadovanou směrodatnou odchylkou $S/\sqrt{n}$ výběrového průměru.

Odvození Veličina $N = (\overline{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ má rozdělení $N(0,1)$ a veličina $U = (n-1)S^2/\sigma^2$ má rozdělení $\chi^2(n-1)$. Tyto veličiny jsou navzájem nezávislé a lze tedy sestrojit hustotu pravděpodobnosti $f(N,U)$. Veličina $t = \sqrt{n-1}N/\sqrt{U}$, provedeme transformací proměnných, Jacobián transformace $J = \partial(N,U)/\partial(t,U) =$

$\sqrt{U}/\sqrt{n-1}$. Dvourozměrnou rozdělovací funkci $g(t, U)$ integrujeme přes proměnnou U.

5 Odhady parametrů rozdělení náhodné veličiny

5.1 Bodové odhady

Předpokládáme, že známe typ rozdělení náhodné veličiny, ale neznáme jeho některé parametry. Např. víme, že rozdělení je normální $N(\mu, \sigma^2)$, ale neznáme μ a σ. Nebo např. víme, že rozdělení (doby životnosti výrobku) má distribuční funkci $F(x) = 1 - \exp\left[-(x/\delta)^c\right]$, ale neznáme parametry δ a c. Zajímá nás nějaká charakteristika τ rozdělení, tedy $\tau = \tau(\delta, c)$, např. $\tau = c \ln \delta$. Chceme nalézt vhodnou statistiku výběru z náhodného rozdělení $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, která dobře aproximuje τ.

Definujeme

$\vec{X}$	náhodný výběr z rozdělení $F(x, \vec{\theta})$
$\vec{\theta}$	vektor z k-rozměrného prostoru neznámých parametrů Ω
$\tau(\vec{\theta})$	charakteristika rozdělení - funkce $\Omega \to R$
$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$	bodový odhad

Nestranný (nevychýlený) odhad

$$\forall \vec{\theta} \in \Omega \qquad E\left[T(\vec{X})\right] = \tau(\vec{\theta})$$

Vychýlení odhadu

$$B(\vec{\theta}) = E\left[T(\vec{X})\right] - \tau(\vec{\theta})$$

Nejlepší nestranný odhad $T(\vec{X})$

$$\forall T^*(\vec{X}) \text{ nestranné} \qquad D\left[T^*(\vec{X})\right] \geq D\left[T(\vec{X})\right]$$

Pozn. Není zaručena $\exists$ nejlepšího nestranného odhadu. Není vždy třeba trvat na nestrannosti odhadu.

Střední kvadratická chyba odhadu

$$E\left[\left(T(\vec{X})-\tau(\vec{\theta})\right)^2\right]=D\left[T(\vec{X})\right]+B^2(\vec{\theta})$$

Pozn. To ovšem neznamená, že vychýlený odhad vždy musí mít větší střední kvadratickou chybu než odhad nevychýlený. Např. S^2 je nevychýlený odhad rozptylu σ^2 a M_2 je vychýlený odhad s vychýlením $B(\sigma^2)=-\sigma^2/n$. Střední kvadratická chyba odhadu S^2 je pro výběry z normálního rozdělení větší než u odhadu M_2

$$E\left[(S^2-\sigma^2)^2\right]=\frac{2\sigma^4}{n-1}>E\left[(M_2-\sigma^2)^2\right]=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4$$

Asymptotické vlastnosti odhadů

Asymptoticky nestranný odhad

$$\forall\vec{\theta}\in\Omega \qquad \lim_{n\to\infty}E[T_n(\vec{X})]=\tau(\vec{\theta})$$

kde n je rozsah výběru.

Konzistentní odhad - Pokud pro odhad platí, že

$$\forall\varepsilon>0 \qquad \lim_{n\to\infty}P\left(\left|T_n(\vec{X})-\tau(\vec{\theta})\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

odhad nazýváme konzistentním (n je rozsah výběru).

Věta Nechť je odhad $T(\vec{X})$ asymptotický nestranný a nechť jeho rozptyl jde k 0
($\lim_{n\to\infty}D[T_n(\vec{X})]=0$), pak je odhad konzistentní.

Důkaz Z předpokladů vyplývá, že $\forall\varepsilon>0$ existuje n_ε takové, že

$$\forall n>n_\varepsilon \qquad |B_n(\theta)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \wedge \qquad D(T_n)<\frac{\varepsilon^3}{4}$$

Použijeme Čebyševovy nerovnosti ($P\left(|X-EX|\geq\varepsilon\right)\leq DX/\varepsilon^2$) takto

$$P\ \left(-\varepsilon<T_n(\vec{X})-\tau(\vec{\theta})<\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon-B_n(\vec{\theta})<T_n(\vec{X})-E(T_n)<\varepsilon-B_n(\vec{\theta})\right)\geq$$

$$\geq\ P\left(-\varepsilon/2<T_n(\vec{X})-E(T_n)<\varepsilon/2\right)\geq1-\frac{4D(T_n)}{\varepsilon^2}\geq1-\varepsilon$$

5.2 Konstrukce bodových odhadů

Často se odhady konstruují ad hoc. Ukážeme si však 2 obecné metody konstrukce odhadů.

A) Momentová metoda

Nechť $\vec{X}$ je prostý náhodný výběr z rozdělení $F(x;\vec{\theta})$, kde $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r) \in \Omega$ je vektor neznámých parametrů rozdělení. Nechť $\forall\theta \in \Omega$ existuje konečný obecný moment $\mu'_k(x) = E(x^k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, r$. Všechny momenty lze vyjádřit jako funkce parametrů $\vec{\theta}$ následovně

$$\mu'_k(x) = \tau_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$$

Pak odhady $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_r$ parametrů $\vec{\theta}$ lze získat řešením soustavy rovnic

$$\tau_k(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_r) = M'_k(\vec{X}) \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

kde $M'_k(\vec{X})$ je k-tý obecný výběrový moment.

Věta Odhady, provedené momentovou metodou, jsou **konzistentní**.

Příklad Nechť rozdělení má distribuční funkci

$$F(x;\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0 & x \leq \alpha_1 \\ 1 - \exp[-\alpha_2(x - \alpha_1)] & x > \alpha_1 \end{cases}$$

Odhadněte parametry $\alpha_1,\ \alpha_2$ momentovou metodou.
Řešení

$$\mu'_1 = \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2} \qquad\qquad \mu'_2 = \left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{1}{\alpha_2^2}$$

$$\Rightarrow\quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{M'^2_2 - M'^2_1}} \qquad\qquad \tilde{\alpha}_1 = M'_1 - \sqrt{M'^2_2 - M'^2_1}$$

B) Metoda maximální věrohodnosti

Pro prostý výběr $\vec{X}$ ze spojitého rozdělení vypočteme hustotu pravděpodobnosti $f(\vec{X};\vec{\theta})$ výběru $\vec{X}$ pro danou hodnotu $\vec{\theta}$ (pro výběr z diskrétního rozdělení vypočteme pravděpodobnostní funkci $p(\vec{X};\vec{\theta})$). Pak jako odhad parametrů vybereme taková $\vec{\theta}$, při nichž nastává $\max_{\vec{\theta}} f(\vec{X};\vec{\theta})$ (respektive $\max_{\vec{\theta}} p(\vec{X};\vec{\theta})$).

<u>*Vysvětlení*</u> Parametry rozdělení vybereme z množiny možných parametrů tak, aby při nich bylo dané pozorovaní nejpravděpodobnější.

<u>*Pozn.*</u> Nemusíme hledat přímo extrém f či p, ale lze hledat extrém jejich monotonní funkce. Pro prostý náhodný výběr jsou X_i vzájemně nezávislé a tedy

$$f(\vec{X};\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_1(X_i,\vec{\theta}) \qquad\qquad p(\vec{X};\vec{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} p_1(X_i,\vec{\theta})$$

Označme <u>**věrohodnostní funkci** $L(\vec{X};\vec{\theta})$</u> ($L(\vec{X};\vec{\theta}) = f(\vec{X};\vec{\theta})$ nebo $L(\vec{X};\vec{\theta}) = p(\vec{X};\vec{\theta})$). Je výhodné se vyhnout součinům hledáním <u>**maxima** $\ln L$</u>. Extrém lze hledat např. řešením rovnic

$$\frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln L(\vec{X};\vec{\theta}) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

kde r je počet neznámých parametrů.

<u>**Příklad**</u> Pomocí metody maximální věrohodnosti z výběru $\vec{X}$ odhadněte parametry μ, σ_2 normálního rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$.
<u>*Řešení*</u>

$$\begin{aligned} L(\vec{X};\mu,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ \ln L &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \end{aligned}$$

Odhady získáme řešením systému rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L &= \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i-\mu}{\sigma^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = 0 \end{aligned}$$

Řešení je

$$\tilde{\mu} = \overline{X} \qquad\qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

5.3 Intervalové odhady (intervaly spolehlivosti)

Bodový odhad parametru neumožňuje přímo zjistit, jak blízko leží skutečný parametr k odhadu. Často je potřebné zjistit oblast, kde se skutečný parametr s velkou pravděpodobností nachází. K tomu slouží intervalové odhady.

Definice Nechť θ_1, θ_2 jsou dvě výběrové statistiky takové, že

$$P\left(\theta \in (\theta_1, \theta_2)\right) = 1 - \alpha$$

kde $\alpha \in (0,1)$. Pak interval (θ_1, θ_2) nazveme **intervalem spolehlivosti** pro parametr θ s **parametrem spolehlivosti** $1 - \alpha$. Používá se též termínu $100(1-\alpha)\%$ **interv**
livosti nebo **konfidenční interval**.

Postup Obecně neexistuje způsob, jak sestrojit podmíněné rozdělení pravděpodobnosti (distribuční funkci) $F(\theta|\{X_1, \ldots, X_n\})$ při daném výběru. Zvolíme vhodný bodový odhad T parametru θ. Sestrojíme podmíněné rozdělení pravděpodobnosti $F(T|\theta)$ bodového odhadu T. Pro funkci $h(T,\theta)$ monotonní v θ pro konstantní T, která splňuje podmínku $P(h_1 < h(T,\theta) < h_2|\theta)$ nezávisí na θ, definujeme

$$P(h_1 < h(T,\theta) < h_2|T) = P(h_1 < h(T,\theta) < h_2|\theta)$$

Řešením nerovností vzhledem k θ je nalezen intervalový odhad.

Pozn. Protože lze obecně sestrojit více funkcí $h(T,\theta)$, není určení intervalového odhadu jednoznačné. Intervalové odhady souvisí úzce s testováním hypotéz, proto se k nim ještě vrátíme v následující kapitole.

Pozn. Nejčastěji hledáme symetrické intervaly spolehlivosti $P(\theta \leq \theta_1) = P(\theta \geq \theta_2) = \alpha/2$. Užívají se ale i jednostranné intervalové odhady, např. $\theta > \theta_1$ s parametrem spolehlivosti $(1-\alpha)$, tedy interval (θ_1, ∞).

<u>Příklad</u> Nechť $\vec{X}$ je výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ se známou střední hodnotou μ. Nalezněte konfidenční interval σ^2 s parametrem spolehlivosti $(1-\alpha)$.

<u>Řešení</u>

$$M_2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

je nestranný bodový odhad rozptylu σ^2. Funkce

$$h(M_2, \sigma^2) = \frac{n}{\sigma^2}\, M_2(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \qquad \sim \chi^2(n)$$

kde "$\sim$" znamená "má rozdělení". Rozdělení pravděpodobnosti veličiny $h(M_2, \sigma^2)$ při konstantním σ^2 tedy nezávisí na parametru σ^2. Určíme příslušné kvantily

$$F(h_1) = \frac{\alpha}{2} \qquad\qquad F(h_2) = 1-\frac{\alpha}{2}$$

Pak je interval spolehlivosti (σ_1^2, σ_2^2) dán hranicemi

$$\sigma_1^2 = \frac{nM_2(\vec{X})}{h_2} \qquad\qquad \sigma_2^2 = \frac{nM_2(\vec{X})}{h_1}$$