Úvod do počtu pravděpodobnosti

1 Základní pojmy a definice

Deterministický děj – pozorování nebo pokus, který má v daných podmínkách jednoznačný výsledek

Stochastický (náhodný) děj – pozorování nebo pokus, který může v daných podmínkách vést k různým výsledkům

Náhodný pokus – stochastický děj, který je za týchž podmínek nekonečně opakovatelný

Náhodný jev – výsledek náhodného pokusu, o němž lze jednoznačně říci, že nastal nebo nenastal

Elementární jev – nelze vyjádřit jako sjednocení 2 nebo více jiných jevů

Elementární jevy – navzájem se vylučují a jako výsledek nutně nastane 1 z nich

– pro libovolný náhodný jev určit, zda nastal, jestliže známe, který elementární jev nastal

Jevový prostor $\mathbf{U}$ – množina všech elementárních jevů

Jevové pole $\mathcal{M}$ – σ-algebra podmnožin množiny $\mathbf{U}$

vlastnosti – $\mathbf{U} \in \mathcal{M}$

– $\mathbf{A} \in \mathcal{M} \Rightarrow \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \setminus \mathbf{A} \in \mathcal{M}$

– sjednocení konečného či spočetného počtu množin $\mathbf{A}_j$ z $\mathcal{M}$ je elementem $\mathcal{M}$, tedy $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{A}_j \in \mathcal{M}$

Jistý jev – $\mathbf{U}$
Nemožný jev – $\emptyset$

Pravděpodobnost $\times$ poměrná četnost
Geometrická pravděpodobnost - míra množiny (teorie míry)

1.1 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Nechť $\mathbf{U}$ je neprázdná množina (jevový prostor) a $\mathcal{M}$ je nějaké jevové pole, definované na $\mathbf{U}$. Nechť P: $\mathcal{M} \to \mathrm{R}$ je množinová funkce s těmito vlastnostmi:

- $\mathrm{P}(\mathbf{U}) = 1$
- $\mathrm{P}(\mathbf{A}) \geq 0$ pro $\forall\ \mathbf{A} \in \mathcal{M}$
- pro sjednocení konečného nebo spočetného počtu vzájemně disjunktních množin $\mathbf{A}_j$ platí $\mathrm{P}\left(\bigcup \mathbf{A}_j\right) = \sum \mathrm{P}(\mathbf{A}_j)$

Pak P je pravděpodobnost na $\mathcal{M}$.

1.2 Podmíněná pravděpodobnost

$\mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathrm{P}_B(\mathbf{A})$ – pravděpodobnost $\mathbf{A}$ za podmínky $\mathbf{B}$, tj. pravděpodobnost $\mathbf{A}$, jestliže $\mathbf{B}$ nastalo.

Podmíněná pravděpodobnost

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{\mathrm{P}(\mathbf{B})}$$

Nezávislé jevy

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}) &= \mathrm{P}(\mathbf{A}) \qquad \mathrm{P}(\mathbf{B}|\mathbf{A}) = \mathrm{P}(\mathbf{B}) \\ \mathrm{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) &= \mathrm{P}(\mathbf{A}).\mathrm{P}(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

Úplná soustava jevů

$\mathbf{A}_i \in \mathcal{M}$, i = 1,...,n jsou jevy těchto vlastností:

1. $\mathbf{A}_i \neq \emptyset$ pro $\forall i$
2. $\mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \emptyset$ pro $\forall i,\ j,\ i \neq j$
3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i = \mathbf{U}$

Věta o úplnépravděpodobnosti

Nechť $\mathbf{B}_i \in \mathcal{M}$, i = 1,...,n je úplná soustava jevů, pak pravděpodobnost jevu $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ je dána vztahem

$$\mathrm{P}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_i).\mathrm{P}(\mathbf{B}_i)$$

Bayesova věta

Nechť $\mathbf{B}_i \in \mathcal{M}$, i = 1,...,n je úplná soustava jevů, nechť $\mathbf{A} \in \mathcal{M}$ je náhodný jev, jehož podmíněné pravděpodobnosti $\mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_i)$, i = 1,...,n jsou známy. Pak platí vztah

$$\mathrm{P}(\mathbf{B}_k|\mathbf{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_k).\mathrm{P}(\mathbf{B}_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathbf{A}|\mathbf{B}_i).\mathrm{P}(\mathbf{B}_i)}$$

1.3 Náhodná proměnná

Výsledky náhodných pokusů budeme nazývat náhodnou proměnnou. Rozeznáváme 3 druhy náhodných proměnných:

1. Nominální - neuspořádaný soubor hodnot (elementárních náhodných jevů) - např. barvy, značka výrobku, státní příslušnost
2. Ordinální - diskrétní uspořádaný soubor dat, nemusí existovat jednotka vzdálenost mezi daty, jenom musí existovat pojem $<, >$ - např. barvy seřazené dle vlnové délky, planety dle pořadí na oběžné dráze, střední vzdálenost planety od slunce
3. Spojitá - soubor reálných čísel, který není diskrétní; při měření jde obvykle o určitou abstrakci, způsob odečtu výsledku měření obvykle neumožňuje naměřit libovolnou hodnotu v intervalu; pokud je chyba měření mnohem větší než vzdálenost mezi dvěma naměřitelnými hodnotami ($\Rightarrow$ počet možných výsledků je veliký) je tato abstrakce velmi užitečná

2 Náhodná veličina (jednorozměrná reálná)

Náhodná veličina je zobrazení, které každému výsledku náhodného pokusu přiřazuje reálné číslo.

Definice Reálná funkce X na prostoru elementárních jevů $\mathbf{U}$ je **náhodná veličina** právě tehdy, jestliže pro $\forall x \in \mathbf{R}$ je množina $\mathbf{A}_x = \{u \in \mathbf{U},\ X(u) \leq x\}$ je prvkem jevového pole $\mathcal{M}$.

2.1 Distribuční funkce

Distribuční funkce F vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná funkce nabude hodnoty menší než nebo rovné x a je tedy definována pro $\forall x \in \mathrm{R}$ vztahem

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$$

Vlastnosti distribuční funkce F

a) $0 \leq F(x) \leq 1$

b) F je neklesající; pro $x_1 < x_2$ je $F(x_1) \leq F(x_2)$

c) $P(X = x) = F(x) - \lim\limits_{y \to x-} F(y)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

e) Distribuční funkce F je zprava spojitá a má nejvýše spočetně mnoho nespojitostí

f) Pro $\forall x_1 < x_2 \in \mathrm{R}$ $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Diskrétní náhodná veličina - rozdělení diskrétního typu

Nechť $\mathbf{U} = \{\ x_1,\ x_2, \ldots\} \subset \mathrm{R}$ je konečná nebo spočetná množina taková, že $\mathrm{P}(x_i) > 0 \ \ \forall x_i \in \mathbf{U}$ a platí

$$\sum_{x_i \in \mathbf{U}} \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{x_i \in \mathbf{U}} p(x_i) = 1$$

a $p(x)$ se nazývá pravděpodobnostní (frekvenční) funkcí náhodné veličiny X.

Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Spojitá náhodná veličina - rozdělení spojitého typu

Pro spojitou náhodnou veličinu existuje nezáporná funkce $f(x)$ taková, že se distribuční funkce $F(x)$ dá vyjádřit pomocí integrálu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Funkce $f(x)$ se nazývá *hustota pravděpodobnosti*. V bodech, kde existuje derivace distribuční funkce $F(x)$ a ta existuje skoro všude je $F'(x) = f(x)$. V ostatních bodech lze $f(x)$ definovat libovolně.

2.2 Charakteristiky rozdělení

Typy charakteristik

- Charakteristiky pořadí - *medián, 1. a 3. kvartil, p-kvantil*

- Charakteristiky hustoty pravděpodobnosti - *nejpravděpodobnější hodnota = modus*
- Charakteristiky dané středováním přes hodnoty náhodné veličiny - **momenty rozdělení** - *střední hodnota, disperze, směrodatná odchylka, šikmost, špičatost*

2.3 Kvantily

Kvantilová funkce Hledáme taková x, kterým odpovídá určitá hodnota distribuční funkce $F(x)$, čili vlastně inverzní funkci k funkci $F(x)$. Distribuční funkce je sice neklesající, ale v určitých oblastech nemusí být rostoucí, proto inverzní funkce nemusí existovat (není jednoznačná). Proto je nutno funkci dodefinovat.
Def. Nechť $F(x)$ je distribuční funkce, pak kvantilovou funkci x_p zavedeme pro $p \in \langle 0,1 \rangle$ pomocí vztahu

$$\begin{aligned} x_p = F^{-1}(p) &= \frac{1}{2}\left(\inf\{x : F(x) = \sup\left[(F(x) \leq p\right]\} + \inf\{x : F(x) \geq p\}\right) \\ x_0 = F^{-1}(0) &= \sup\{x : F(x) = 0\} \qquad x_1 = F^{-1}(1) = \inf\{x : F(x) = 1\} \end{aligned}$$

Hodnoty této funkce jsou kvantily, p-kvantilem nazýváme $x_p = F^{-1}(p)$.
Kvantily $F^{-1}(0.25)$, $F^{-1}(0.5)$, $F^{-1}(0.75)$ jsou po řadě 1. kvartil $x_{0.25}$, medián $MeX = x_{0.5}$, 3. kvartil $x_{0.75}$.
Medián MeX dává informaci o poloze středu rozdělení
mezikvartilová vzdálenost $x_{0.75} - x_{0.25}$ charakterizuje šířku rozdělení

2.4 Modus

Modus MoX náhodné veličiny X se spojitým (diskrétním) rozdělením je každý lokální extrém hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ (posloupnosti $p(x_i)$). Jednovrcholová rozdělení - jen jeden modus

2.5 Momenty rozdělení

Obecné momenty - K-tý obecný (počáteční) moment EX^k náhodné veličiny X je dán

$$\begin{aligned} EX^k &\equiv \mu'_k = \sum_{x_i \in \mathbf{U}} x_i^k p(x_i) \\ \text{resp.} \quad EX^k &\equiv \mu'_k = \int_{\mathbf{U}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

První obecný (počáteční) moment EX nazýváme **střední hodnotou** (někdy se značí μ).

Centrální momenty - K-tý centrální (středový) moment μ_k náhodné veličiny X je dán

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(X - EX)^k = \sum_{x_i \in \mathbf{U}} (x_i - EX)^k p(x_i) \\ \text{resp.} \quad \mu_k &= \int_{\mathbf{U}} (x - EX)^k f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Centrální moment 2. řádu charakterizuje šířku rozdělení

Rozptyl (disperze) DX je druhý centrální moment μ_2 náhodné veličiny X.
Směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{DX}$ je mírou šířky rozdělení.
Variační koeficient $C_X = \sigma_X / EX$ je mírou relativní šířky rozdělení.

Věta (Čebyševova nerovnost) Nechť náhodná veličina X má konečný rozptyl. Pak

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Momenty vyšších řádů se užívají méně často

Koeficient šikmosti ν_3 a **koeficient špičatosti** ν_4 jsou definovány

$$\nu_3 = \frac{E(X-EX)^3}{\sigma_X^3} = \frac{\mu_3}{\sigma_X^3} \qquad \nu_4 = \frac{E(X-EX)^4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3$$

2.6 Charakteristická funkce náhodné veličiny

Jiným způsobem zápisu náhodné veličiny je její charakteristická funkce (jde vlastně o Fourierovu transformaci hustoty pravděpodobnosti)

$$\Psi_X(t) = \mathrm{E}\left[\exp(itx)\right]$$

kde i je komplexní jednotka. Pro diskrétní a spojitou náhodnou veličinu je tak charakteristická funkce dána vztahy

$$\Psi_X(t) = \sum_{k\in\mathbf{U}} p_k \exp(itx_k) \qquad \Psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(itx)\,\mathrm{d}x$$

Charakteristická funkce $\exists$ pro $\forall$ náhodné veličiny. Rozdělení náhodné veličiny je charakteristickou funkcí jednoznačně určeno.
Nechť existuje prvních n obecných momentů $\mu_k{}' = \mathrm{E}(x^k)$, $k = 1, \dots, n$. Pak charakteristická funkce má prvních n derivací v bodě $x = 0$ daných vztahem

$$\Psi_X^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = i^k \mathrm{E}(x^k) = i^k \mu_k'$$

Pak má prvních n členů Taylorova rozvoje charakteristické funkce náhodné veličiny tvar

$$\Psi_X(t) \simeq \sum_{k=0}^{n} EX^k \frac{(it)^k}{k!}$$

Pokud provedeme substituci $u = it$, pak funkci $M_X(u) = \Psi_X(-iu)$ nazýváme momentovou vytvořující funkcí.

$$M_X(u) = \mathrm{E}\left[\exp(ux)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} EX^k \frac{(u)^k}{k!}$$

Momentová vytvořující funkce existuje pouze pokud má náhodná veličina konečné obecné momenty všech řádů.

2.7 Některá diskrétní rozdělení

Alternativní rozdělení
Nechť jsou pouze 2 možné výsledky náhodného pokusu - událost nastane (1) nebo událost nenastane (0). Označme p pravděpodobnost výsledku 1, pravděpodobnost výsledku 0 je pak $q = 1 - p$. Pravděpodobnostní funkce je pak $P(x) = p^x q^{1-x}$, kde $x = 0, 1$.

Binomické rozdělení $Bi(N, p)$
Rozdělení počtu úspěšných pokusů při provedení N navzájem nezávislých pokusů se stejným alternativním rozdělením

$$p_i = \binom{N}{i} p^i \, (1-p)^{N-i} \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

Binomická věta ukazuje, že jde o pravděpodobnostní rozdělení $\sum_{i=0}^{N} p_i = [p + (1-p)]^N = 1$.

Střední hodnota

$$\begin{aligned}\mu &= EX = \sum_{i=0}^{N} i\, p_i = \sum_{i=0}^{N} i \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = \\ &= Np \sum_{i=1}^{N} \binom{N-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{N-i} = Np\end{aligned}$$

Rozptyl (disperze)

$$\begin{aligned}DX = \mu_2 &= \sum_{i=0}^{N} p_i (i - Np)^2 = \sum_{i=0}^{N} i^2 p_i - (Np)^2 = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} i p_i}_{Np} + \underbrace{\sum_{i=2}^{N} i(i-1) p_i}_{N(N-1)p^2} - (Np)^2 = Np(1-p) = Npq\end{aligned}$$

Variační koeficient

$$C_X = \frac{\sigma_X}{EX} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{q}{p}}$$

Charakteristická funkce binomického rozdělení je

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \sum_{k=0}^{N} e^{i\,t\,k} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{(N-k)} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (p\,\exp(it))^k\,(1-p)^{(N-k)} = \\ &= (p\mathrm{e}^{it} + 1 - p)^N\ .\end{aligned}$$

Rozdělení četností (modifikace binomického rozdělení) $x_i = i/N$, kde $x_i = 0, 1/N, 2/N, \ldots, 1$

$$EX = p \qquad DX = \frac{pq}{N} \qquad \sigma_X = \sqrt{\frac{pq}{N}}$$

<u>Hypergeometrické rozdělení</u>

Soubor N výrobků obsahuje a vadných výrobků. Při statistické přejímce je vybráno n. Pak pravděpodobnost, že $x_i = i \quad i = 0, 1, \ldots, n$ výrobků bude vadných je

$$p_i = \frac{\binom{N-a}{n-i}\binom{a}{i}}{\binom{N}{n}}$$

Označme pravděpodobnost, že výrobek je vadný $p = a/N$. Pak

$$EX = np \qquad\qquad DX = npq\,\frac{N-n}{N-1}$$

<u>Poissonovo rozdělení</u>

Počet událostí v daném intervalu τ vyhovuje Poissonovu rozdělení, pokud platí

1. Pravděpodobnost události nezávisí na předchozím vývoji
2. Pravděpodobnost události v intervalu $\tau \to 0$ je úměrná délce intervalu τ
3. Pravděpodobnost P_v vzniku 2 a více událostí za dobu τ jde při zkracování intervalu τ k nule rychleji než lineárně

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{P_v(\tau)}{\tau} = 0$$

Označíme-li P_1 pravděpodobnost události, pak četnost vzniku událostí $\alpha = \lim_{\tau\to 0} P_1/\tau$. Pak Poissonovo rozdělení má jediný parametr $\lambda = \alpha\tau$ a pravděpodobnost i událostí za čas τ je

$$p_i = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!} \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, \infty$$

Lze lehce ukázat, že

$$EX = \lambda \qquad DX = \lambda = EX \qquad \sigma_X = \sqrt{\lambda} \qquad C_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\Psi(t) = \exp[\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)]$$

Poissonovo rozdělení je řešením systému diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P_0}{\mathrm{d}t} &= -\alpha P_0 \\ \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} &= -\alpha P_i + \alpha P_{i-1} \qquad i = 1, 2, \ldots, \infty \end{aligned}$$

v čase τ s počátečními podmínkami $P_0(t = 0) = 1$, $P_i(t = 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$.

Poissonovo rozdělení se často objevuje ve fyzikální praxi - počet částic zaregistrovaných čítačem, počet krvinek v políčku mikroskopu (délkou intervalu je plocha políčka).

Poissonovo rozdělení je limitou binomického rozdělení pro $Np = \text{const.}$ a $N \to \infty$.

2.8 Některá spojitá rozdělení

Stejnoměrné rozdělení

Stejnoměrné rozdělení má konstantní hustotu pravděpodobnosti v nějakém intervalu (a, b) a nulovou hustotu pravděpodobnosti mimo něj

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & x < a \vee x > b \end{cases}$$

Normální (Gaussovo) rozdělení

Hustota pravděpodobnosti je pro normální rozdělení o střední hodnotě $EX = \mu$ a směrodatné odchylce $\sigma_X = \sigma$ dána vztahem

$$f(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Každé normální rozdělení může být lineární transformací $w = (x - \mu)/\sigma$ převedeno na základní normální rozdělení $N(0, 1)$.

Distribuční funkce pro normální rozdělení $N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$$

Distribuční funkce pro normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Většinou není tabelována $\Phi(x)$, ale je tabelována chybová funkce $\mathrm{erf}(x)$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Pak distribuční funkce pro normální rozdělení $N(0, 1)$ je

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Charakteristická funkce normálního rozdělení je

$$\begin{aligned}
\Psi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x \overset{w\equiv(x-\mu)/\sigma}{=} \\
&= \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{w}{\sqrt{2}} - i\frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\right)^2\right] \mathrm{d}w}_{1} = \\
&= \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)
\end{aligned}$$

2.9 Funkce náhodné veličiny

Reálná funkce $y = h(x)$ náhodné veličiny je opět náhodnou veličinou.

Nechť funkce $y = h(x)$ je rostoucí (klesající) funkce. Pak existuje inverzní funkce $x = h^{-1}(y)$. Distribuční funkce $F_Y(y)$ je dána vztahy

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X\left(h^{-1}(y)\right) && h \text{ rostoucí} \\ F_Y(y) &= 1 - F_X\left(h^{-1}(y)\right) && h \text{ klesající} \end{aligned}$$

Pro diskrétní náhodnou veličinu X je pravděpodobnostní funkce veličiny $p_Y(y_i) = p_X\left(h^{-1}(y_i)\right)$. Nechť existuje derivace $(h^{-1})'(y) = \mathrm{d}h^{-1}\mathrm{d}y \equiv \mathrm{d}x/\mathrm{d}y$. Pak náhodná veličina Y je spojitá s hustotou pravděpodobnosti

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right) \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|$$

Pro obecnou funkci $y = h(x)$ je distribuční funkce $F_Y(y)$ náhodné veličiny Y je pro případ diskrétní (resp. spojité) náhodné veličiny X definována následujícími vztahy

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \sum_{i:h(x_i)\leq y} p_i \\ F_Y(y) &= \int_{h(x)\leq y} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pro případ diskrétní náhodné veličiny X je pravděpodobnostní funkce p_y veličiny Y dána vztahem

$$p_Y(y) = \sum_{i:h(x_i)=y} p_X(x_i)$$

Nechť existuje konečný počet x_i takových, že $h(x_i) = y$. Nechť pro $\forall x_i$ $\exists$ derivace $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x \neq 0$. Pak $\exists$ hustota pravděpodobnosti $f_Y(y)$ náhodné veličiny Y

$$f_Y(y) = \sum_{i:h(x_i)=y} f_X(x_i) \left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right|^{-1}_{x=x_i}$$

Příklad 1 Nechť veličina θ má stejnoměrné rozdělení v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Jaké rozdělení má veličina $x = \mathrm{tg}\theta$?

Je tedy

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \qquad \theta = \mathrm{arctg}(x) \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

Hustota pravděpodobnosti veličiny X je tedy

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad\qquad x \in (-\infty, \infty)$$

Uvedené rozdělení se nazývá Cauchyho. Je příkladem rozdělení, které nemá konečný rozptyl

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x = +\infty$$

Příklad 2 Nechť veličina X má normální rozdělení $N(0,1)$. Jaké rozdělení má veličina $y = x^2$?

Inverzní funkce existuje pro nezáporná (nekladná) $x = \pm\sqrt{y}$. Zde $|\mathrm{d}x/\mathrm{d}y| = 1/2\sqrt{y}$. Pak hustota pravděpodobnosti veličiny Y $(y \geq 0)$ je

$$f_Y(y) = \sum_{\pm\sqrt{y}} f_X(\pm\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \qquad\qquad y \in (0, \infty)$$

Toto rozdělení pravděpodobnosti se nazývá χ^2 s jedním stupněm volnosti (χ^2_1).

Přibližné stanovení charakteristik funkce náhodné veličiny

V praxi je někdy k dispozici pouze jediná změřená hodnota veličiny X (odhad její střední hodnoty) a směrodatná odchylka měření σ_X (daná například udanou chybou měřícího přístroje). Pokud je variační koeficient $CX \ll 1$, lze přibližně odhadnout charakteristiky veličiny $y = h(x)$. Předpokládejme, že veličina X je spojitá

$$\begin{aligned} EY &= \int h(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int \Big[h(EX) + h'(EX)(x - EX) + \\ &+ \frac{h''(EX)}{2}(x - EX)^2 + \dots\Big] f_X(x)\,\mathrm{d}x \simeq h(EX) + \frac{h''(EX)}{2} DX \simeq h(EX) \end{aligned}$$

Disperzi DY lze pak vyjádřit přibližně z lineárního členu Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} DY &= \int (h(x) - EY)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x \simeq \int (h(x) - h(EX))^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x \simeq \\ &\simeq \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)^2_{x=EX} DX \end{aligned}$$

3 Náhodný vektor

Jsou situace, kdy je při každém náhodném pokusu získáno několik veličin (např. je změřeno několik vlastností daného vzorku). Soubor těchto veličin nazýváme náhodným vektorem.

Náhodný vektor dovoluje zkoumat vztahy mezi veličinami z náhodného vektoru. Omezíme se zde na studium vztahů mezi 2 veličinami. Proto většinu pojmů budeme demonstrovat na náhodném vektoru o 2 prvcích.

3.1 Rozdělení náhodného vektoru

Sdružená distribuční funkce náhodných veličin $X,\ Y$ je definována předpisem

$$F(x, y) = P(X \le x,\ Y \le y)$$

Sdružená distribuční funkce má obdobné vlastnosti jako distribuční funkce v jedné proměnné. Pravděpodobnost, že náhodný vektor je z obdélníkové oblasti lze vyjádřit pomocí distribuční funkce

$$P(x_1 < X \le x_2,\ y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1)$$

Jestliže existuje nejvýše spočetně mnoho hodnot náhodného vektoru, jde o náhodný vektor s **diskrétním** rozdělením a sdružená distribuční funkce

$$F(x, y) = \sum_{(i,j),\ x_i \le x,\ y_j \le y} p_{ij}$$

Veličina p_{ij} se nazývá **sdružená pravděpodobnostní funkce**.

Distribuční funkce $F(x, y)$ je **absolutně spojitá**, pokud $\exists$ funkce $f(x, y) \ge 0$ (**sdružená hustota pravděpodobnosti**) taková, že

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x', y')\, \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'$$

Pokud $\exists$ druhá smíšená derivace distribuční funkce, pak

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x, y)$$

Distribuční funkce složky X (resp. Y) náhodného vektoru –
marginální distribuční funkce

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) \\ F_Y(y) &= P(Y \le y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) \end{aligned}$$

Podobně lze definovat marginální pravděpodobnostní funkce či marginální hustoty pravděpodobnosti. Jde vlastně o příslušné funkce náhodné veličiny.

Nezávislost Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě tehdy, jestliže

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Pro náhodný vektor s diskrétním (resp. spojitým) rozdělením platí, že náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé právě tehdy, jestliže

$$p_{ij} = q_i \cdot r_j \qquad\qquad f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

kde q_i, r_j jsou marginální pravděpodobnostní funkce diskrétních veličin X, Y (f_X, f_Y jsou marginální hustoty pravděpodobnosti).

Korelační tabulka Pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru s konečným počtem hodnot se často prezentuje pomocí korelační tabulky, kde kromě sdružené pravděpodobnostní funkce jsou v posledním řádku (sloupci) uvedeny marginální distribuční funkce (součty sloupců, resp. řádků).

x \ y	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\sum_j p_{ij}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	q_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	q_n
$\sum_i p_{ij}$	r_1	r_2	$\dots$	r_m	1

Marginální pravděpodobnosti X, Y jsou q_i, r_j.

Podmíněná pravděpodobnost (hustota pravděpodobnosti) je definována pro náhodný vektor s diskrétním (spojitým) rozdělením

$$p(x_i|y_j) = \frac{p_{ij}}{r_j} \qquad\qquad f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

3.2 Charakteristiky náhodného vektoru

Obecné a centrální momenty - Kromě momentů náhodných veličin X, Y jsou ještě definovány smíšené momenty, např. smíšený počáteční moment $\mu'_{kn} = E(X^k \cdot Y^n)$. Z počátečních momentů jsou nejpoužívanější střední hodnoty $\mu_X = EX$ a $\mu_Y = EY$, z centrálních momentů rozptyly DX a DY.

Kovariance - smíšený centrální moment 2. řádu - nejjednodušší charakteristika souvislosti 2 náhodných veličin

$$\mu_{11} = E\left[(X - EX)(Y - EY)\right] \equiv d_{XY} \equiv \mathrm{Cov}(X,Y) \quad .$$

Kovariance kladná - se zvětšením X se pravděpodobně zvětší i Y.
Kovariance záporná - se zvětšením X se pravděpodobně Y zmenší.

Kovarianční matice

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} DX & d_{XY} \\ d_{XY} & DY \end{pmatrix}$$

Matice centrálních momentů 2. řádu - na diagonále rozptyl, mimo kovariance, v této souvislosti se někdy označuje $DX \equiv d_{XX}$.

Lineární korelační koeficient

$$\rho_{XY} = \frac{d_{XY}}{\sqrt{DX \cdot DY}}$$

Je-li $\rho_{XY} = 0$, náhodné veličiny X, Y jsou **nekorelované**. Veličiny nezávislé jsou nekorelované, naopak to platit nemusí.
Platí $|\rho_{XY}| \leq 1$. Dále $|\rho_{XY}| = 1$ právě tehdy, jestliže jsou náhodné veličiny X, Y lineárně závislé, tj. $\exists$ konstanty $a,\ b,\ b \neq 0$ takové, že $Y = a + bX$.

Charakteristická funkce

$$\Psi_{XY}(t_1,t_2) = E\left[\exp(it_1x + it_2y)\right]$$

3.3 Příklady rozdělení náhodného vektoru

Multinomické rozdělení - Nechť náhodný pokus má n možných výsledků s pravděpodobností $p_i,\ i = 1,2,\ldots,n$ $(\sum_{i=1}^n p_i = 1)$. Pak pravděpodobnost, že z N pokusů dojde x_i-krát k i-tému výsledku je dána multinomickým rozdělením

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{N!}{x_1!x_2!\ldots x_n!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_n^{x_n}$$

kde $\sum_{k=1}^n x_k = N$.

2D normální rozdělení - Nechť μ_X, μ_Y, σ_X, σ_Y jsou střední hodnoty a směrodatné odchylky veličin X, Y a nechť ρ je jejich lineární korelační koeficient $(|\rho| < 1)$. Pak sdružená hustota pravděpodobnosti je

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(-\frac{Q(x,y)}{2}\right) \\ Q(x,y) &= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\,\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right] \end{aligned}$$

U tohoto rozdělení plyne z nekorelovanosti nezávislost.

3.4 Funkce náhodného vektoru

Nechť je dána lineární funkce $h(x,y) = aX + bY$ $(a,\ b$ jsou konstanty). Pak

$$\begin{aligned} Eh(X,Y) &= E(aX+bY) = a\,EX + b\,EY \\ Dh(X,Y) &= E(aX+bY-a\,EX-b\,EY)^2 = \\ &= a^2\,E(X-EX)^2 + b^2\,E(Y-EY)^2 + \\ &+ 2ab\,E\left[(X-EX)(Y-EY)\right] = a^2\,DX + b^2\,DY + 2ab\,d_{XY} \end{aligned}$$

Nechť jsou náhodné veličiny X, Y nezávislé, nechť $Z = h(x,y) = aX + bY$. Pak charakteristická funkce

$$\Psi_Z(t) = \Psi_X(at) \cdot \Psi_Y(bt)$$

Pro obecnou funkci $Z = h(x,y)$ je distribuční funkce náhodné veličiny Z dána vztahem

$$F_Z(z) = P((X,Y);\ h(X,Y) \leq z)$$

což je pro diskrétní (resp. spojité) rozdělení

$$F_Z(z) = \sum_{h(x_i,y_j)\leq z} p_{ij} \qquad\qquad F(z) = \int\int_{h(x,y)\leq z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Vzájemně jednoznačné zobrazení z $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je dáno předpisem $Z = h_1(X,Y)$, $W = h_2(X,Y)$. Existuje tedy inverzní zobrazení $X = h_1^{-1}(Z,W)$, $Y = h_2^{-1}(Z,W)$. Pokud pro daný bod (z,w) existuje Jacobián

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1^{-1}}{\partial z} & \dfrac{\partial h_1^{-1}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2^{-1}}{\partial z} & \dfrac{\partial h_2^{-1}}{\partial w} \end{vmatrix}$$

pak lze hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru (Z,W) vyjádřit

$$f_{ZW}(z,w) = f_{XY}(h_1^{-1}(z,w),\ h_2^{-1}(z,w)) \cdot |J|$$

<u>Přibližné stanovení charakteristik funkce náhodného vektoru</u>
Nechť je dána funkce $Z = h(X,Y)$. Nechť jsou známy EX, EY, DX, DY, d_{XY} a nechť $CX \ll 1$, $CY \ll 1$. Pokud nejsou k dispozici žádné jiné informace, pak lze přibližně odhadnout

$$\begin{aligned} EZ &\simeq h(EX,EY) + \frac{DX}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\bigg|_{(EX,EY)} + \frac{DY}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\bigg|_{(EX,EY)} + \\ &+ d_{XY}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\bigg|_{(EX,EY)} \simeq h(EX,EY) \end{aligned}$$

$$DZ \simeq DX\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\bigg|_{(EX,EY)} + DY\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\bigg|_{(EX,EY)} + 2\,d_{XY}\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{(EX,EY)}\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{(EX,EY)}$$

4 Zákony velkých čísel

Bernoulliova věta – Nechť ξ je veličina s alternativním rozdělením (0,1) s pravděpodobností p. Nechť je provedeno N po dvou vzájemně nezávislých pokusů a nechť $s_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$. Pak pro $\forall \varepsilon > 0$ je

$$P\left(\left|\frac{s_N}{N} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{N\varepsilon^2}$$

a v limitě je

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\frac{s_N}{N} - p\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Pravděpodobnost úspěchu lze opakováním pokusů stanovit s libovolnou přesností pomocí relativní četnosti.

Čebyševova věta – Nechť $\{\xi_k\}$ je posloupnost po 2 navzájem nezávislých náhodných veličin se středními hodnotami μ_k a s disperzemi $D\xi_k \leq C$. Pak $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\xi_k - \mu_k)\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{N\varepsilon^2}$$

a v limitě

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(\xi_k - \mu_k)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Centrální limitní teorém – Nechť po 2 navzájem nezávislé náhodné veličiny X_i mají stejná rozdělení se střední hodnotou $EX_i = \mu$ a rozptylem $DX_i = \sigma^2 < +\infty$. Pak pro $n \to \infty$ se rozdělení veličiny $\overline{x}_n = s_n/n$ blíží normálnímu rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$ se střední hodnotou μ a rozptylem $D = \sigma^2/n$.