Stacionární náhodné procesy

Náhodný proces je **silně (striktně) stacionární**, jestliže $\forall n$ je distribuční funkce n-tého řádu invariantní vůči libovolnému posuvu všech časů o libovolnou konstantní hodnotu τ, tj.

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n | t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n | t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Náhodný proces je **slabě stacionární**, jestliže jsou vůči posuvu času invariantní $\forall$ momenty 1. a 2. řádu, tedy

$$\begin{aligned} E\xi(t) &= \mu = \text{const} \qquad D\xi(t) = \sigma^2 = \text{const} \\ B_0(t_1, t_2) &\equiv R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Korelační teorie náhodných procesů studuje vlastnosti dané momenty 1. a 2. řádu.

Stacionární náhodný proces má autokorelační funkci sudou $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$.

Stacionární náhodný proces je **spojitý** právě tehdy, když $R_X(\tau)$ je spojitá pro $\tau = 0$.

Spojitý stacionární náhodný proces je **diferencovatelný** právě tehdy, když pro $\tau = 0$ $\exists$ 1. a 2. derivace autokorelační funkce. Platí

$$E\xi^{'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} E\xi = 0 \qquad R_{X'}(\tau) = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} R_X(\tau)$$

Ergodické procesy

Ergodičnost procesu vzhledem k některé jeho vlastnosti znamená, že při výpočtu příslušné charakteristiky lze středování přes všechny realizace náhodného procesu nahradit středováním jedné libovolné realizace přes čas. Příslušné charakteristiky lze získat tak, že sledujeme jednu realizaci (signál) po dostatečně dlouhou dobu.

Definice Stacionární náhodný proces je ergodický vzhledem k své střední hodnotě μ právě tehdy, když limita podle středu

$$\mathrm{l.i.m.}_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \mathrm{d}t = \mu$$

Věta Nechť $\xi(t)$ je spojitý stacionární náhodný proces se střední hodnotou μ a autokorelační funkcí $R_X(\tau)$. Jestliže je $\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = 0$, pak ξ je ergodický vzhledem ke střední hodnotě.

Jinou postačující podmínkou pro ergodičnost vzhledem k μ je podmínka

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_X(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$$

Tato podmínka je i podmínkou nutnou.

Definice Stacionární náhodný proces je ergodický vzhledem k autokorelační funkci právě tehdy, když platí

$$\lim_{T\to\infty} E\left|\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[\xi(t+\tau)-\mu][\xi(t)-\mu]\mathrm{d}t - R_X(\tau)\right|^2 = 0$$

Pozn. Pro $\forall\tau$ jde o limitu podle středu pro $T\to\infty$ náhodného procesu daného vztahem $T^{-1}\int_{-T/2}^{T/2}[\xi^{(k)}(t+\tau)-\mu][\xi^{(k)}(t)-\mu]\mathrm{d}t$, kde $\xi^{(k)}(t)$ je k-tá realizace náhodného procesu $\xi(t)$.

Periodický náhodný proces

Nejjednodušší

$$\xi(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$$

kde a, ω pevné, φ náhodné s stejnoměrným rozdělením v intervalu $\langle 0, 2\pi)$. Jde o centrovaný náhodný proces $E\xi(t) = 0$, proces je ergodický vzhledem ke střední hodnotě i k autokorelační funkci

$$R_X(\tau) = B_0(\tau) = E\left\{\xi(t)\xi(t+\tau)\right\} = \frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

Obecný periodický proces s periodou T

$$\xi(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}\, t + \varphi_n\right)$$

kde střední hodnota $\mu = c_0/\sqrt{2}$ a autokorelační funkce

$$R_X(\tau) = B_0(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{2} \cos\frac{2\pi n}{T}\,\tau$$

Pokud $\xi(t)$ neobsahuje periodické složky, pak $\xi(t)$ a $\xi(t+\tau)$ jsou nezávislé pro $\tau \to \infty$ a tedy

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} B_0(\tau) = 0$$

Korelační koeficient Jelikož $R_X(0) = DX = \sigma^2$ a platí

$$E\left\{[(\xi(t)-\mu) \pm (\xi(t+\tau)-\mu)]^2\right\} = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$$

zavádíme korelační koeficient

$$r(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)} = \frac{R_X(\tau)}{\sigma^2}$$

a platí $|r(\tau)| \leq 1$.

Doba korelace se zavádí buď jako τ_0 takové, že

$$\forall \tau > \tau_0 \qquad\qquad |r(\tau)| < \varepsilon$$

nebo pomocí integrálního vztahu

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |r(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} |R_X(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

Detekce periodického signálu v šumu

Šum X (označený též indexem n = noise) je ergodický neperiodický centrovaný stacionární náhodný proces, signál $S(t)$ je periodický v čase. Na základě jedné realizace šumu $\xi(t)$ spočteme autokorelační funkci zašuměného signálu

$$\begin{aligned} B_0(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\xi(t)+S(t)][\xi(t+\tau)+S(t+\tau)]\,\mathrm{d}t \\ &= B_{0n}(\tau) + B_{0s}(\tau) + B_{ns}(\tau) + B_{sn}(\tau) \end{aligned}$$

Signál a šum nejsou korelovány $B_{ns} = B_{sn} = 0$, doba korelace šumu je konečná a proto pro $\tau \gg \tau_{0n}$ (doba korelace šumu) je $B_0(\tau) \simeq B_{0s}(\tau)$. Korelační měření podstatně potlačuje šum.

Metoda koherentního příjmu – známý tvar signálu, měří se korelace se signálem

$$B(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [\xi(t)+S(t)]S(t+\tau)\,\mathrm{d}t = B_s(\tau)$$

Energetické spektrum stacionárního náhodného procesu

Pro jednoduchost budeme uvažovat <u>centrovaný</u> náhodný proces.

Fourierova analýza, k-tá realizace $\xi^{(k)}(t)$, zavedeme časově ohraničenou funkci

$$
\begin{aligned}
\xi_T^{(k)}(t) &= \begin{cases} \xi^{(k)}(t) & \text{pro} \quad |t| \le T/2 \\ 0 & \text{pro} \quad |t| > T/2 \end{cases} \\
Z_T^{(k)}(\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} \xi_T^{(k)}(t)\, e^{i\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

<u>*Srovnání s Fourierovou řadou*</u> Kdybychom předpokládali periodičnost místo časového omezení, pak by

$$\widetilde{\xi_T}^{(k)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(k)} \exp\left\{-\frac{2\pi i n}{T} t\right\} \quad \rightarrow \quad a_n^{(k)} = \frac{1}{T}\, Z_T^{(k)}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$$

Pro libovolnou frekvenci lze vyjádřit

$$Z_T^{(k)}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_T^{(k)}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \frac{\sin(\omega T/2 - n\pi)}{\omega T/2 - n\pi}$$

<u>Hustota spektrálního výkonu signálu</u>

$$
\begin{aligned}
G_T^{(k)}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) &= \frac{1}{\Delta f}\left|a_n^{(k)}\right|^2 = \frac{1}{T}\left|Z_T^{(k)}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)\right|^2 \\
\Rightarrow G^{(k)}(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|Z_T^{(k)}(\omega)\right|^2
\end{aligned}
$$

<u>Autokorelační funkce signálu</u> (realizace náhodného procesu)

$$
\begin{aligned}
B^{(k)}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} B_T^{(k)}(\tau) \\
B_T^{(k)}(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \xi_T^{(k)}(t)\xi_T^{(k)}(t+\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

Hustota spektrálního výkonu $G^{(k)}(\omega)$ je Fourierovým obrazem autokorelační funkce $B^{(k)}(\tau)$ signálu $\xi^{(k)}(t)$.
Odvození

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(B_T^{(k)}(\tau)\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau\; e^{i\omega\tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_T^{(k)}(t)\; \xi^{(k)}(t+\tau)\; \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi_T^{(k)}(t)\; e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{(k)}(t+\tau)\; e^{i\omega(t+\tau)} \mathrm{d}\tau = \\
&= \frac{1}{T}\, Z_T^{(k)}(-\omega)\; Z_T^{(k)}(\omega) = \frac{1}{T} \left| Z_T^{(k)}(\omega) \right|^2
\end{aligned}$$

<u>Střední hustota spektrálního výkonu</u>

$$f(\omega) = E\left\{G^{(k)}(\omega)\right\}$$

<u>Autokorelační funkce náhodného procesu</u>

$$B(\tau) = E\left\{B^{(k)}(\tau)\right\}$$

<u>Věta</u> – Pro procesy ergodické vzhledem k autokorelační funkci platí pro $\forall$ realizaci k

$$f(\omega) = G^{(k)}(\omega) \qquad\qquad B(\tau) = B^{(k)}(\tau)$$

<u>Wiener-Chinčinův teorém</u> - Spektrální hustota výkonu stacionárního náhodného procesu je Fourierovým obrazem autokorelační funkce.
Pro reálný náhodný proces je

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)\; e^{-i\omega\tau} \mathrm{d}\tau = 2\int_0^{\infty} B(\tau) \cos\omega\tau\; \mathrm{d}\tau \\
B(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\; e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega = 2\int_0^{\infty} f(\omega) \cos\omega\tau\; \mathrm{d}\omega \\
\tilde{f}(\omega) &= f(\omega) + f(-\omega) = 2f(\omega)
\end{aligned}$$

Náhodný proces s diskrétními frekvencemi

$$\xi(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)$$

kde ω_j pevné a $a_j,\ \varphi_j$ náhodné.
Komplexní vyjádření

$$\xi(t) = \sum_{j=-n}^{n} \gamma_j\, e^{-i\omega_j t} \qquad \gamma_j = \frac{a_j}{2}\, e^{-i\varphi_j} \qquad \gamma_{-j} = \gamma_j^\star$$

Pak

$$G_T^{(k)}(\omega) \simeq \begin{cases} 0 & \omega \neq \omega_j \\ |\gamma_j^{(k)}|^2\, T & \omega = \omega_j \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad G^{(k)}(\omega) = 2\pi \sum_{j=-n}^{n} |\gamma_j|^2 \delta(\omega - \omega_j)$$

$$E\left\{|\gamma_j|^2\right\} = |E\gamma_j|^2 + D\gamma_j = c_j^2 \qquad \Longrightarrow \quad f(\omega) = 2\pi \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \delta(\omega - \omega_j)$$

Je možno definovat integrální spektrální hustotu (analog distribuční funkce)

$$F(\omega) = \sum_{j;\ \omega_j \leq \omega} c_j^2 \qquad B(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\, \mathrm{d}F(\omega)$$

Stacionární náhodné procesy - **úzkopásmové**, **širokopásmové**, **bílý šum**

Příklad – *Zobecněný telegrafní signál*

Jde o proces, který má 2 hladiny $h,\ -h$ a pravděpodobnost přepnutí mezi nimi za jednotku času je ν. Pokud v některém čase je $P(-h) = P(h)$, pak je proces stacionární a centrovaný.
Pravděpodobnost k změn za časový interval τ je

$$P(k) = \frac{(\nu\tau)^k}{k!}\, e^{-\nu\tau} = \frac{\lambda^k\, e^{-\lambda}}{k!}$$

a autokorelační funkce

$$\begin{aligned} B_0(\tau) &= h^2\, P\left\{\xi(t+\tau) = \xi(t)\right\} - h^2\, P\left\{\xi(t+\tau) = -\xi(t)\right\} = \\ &= h^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(2k) - \sum_{k=0}^{\infty} P(2k+1) \right) = h^2\, e^{-\lambda} (\cosh\lambda - \sinh\lambda) = \\ &= h^2\, e^{-2\lambda} = h^2\, e^{-2\nu|\tau|} \end{aligned}$$

Pak spektrální hustota výkonu je

$$f(\omega) = 2\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau \,\mathrm{d}\tau = \frac{4h^2\nu}{\omega^2 + 4\nu^2}$$

Gaussovy (Normální) náhodné procesy

Pro hustotu pravděpodobnosti n-tého řádu Gaussova náhodného procesu platí

$$f_n(x_1,\dots,x_n|t_1,\dots,t_n) = \frac{\sqrt{\det(\sigma^{ij})}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}Q(x_1,\dots,x_n)\Big)$$

kde Q je pozitivně definitní kvadratická forma

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(x_i-\mu_i)(x_j-\mu_j)$$

Střední hodnota $E\left[x(t_i)\right] = E(x_i) = \mu_i$.
Autokorelační funkce $R_X(t_i,t_j) = \sigma_{ij}$, kde σ_{ij} je prvek inverzní matice k matici kvadratické formy $(\sigma_{ij}) = (\sigma^{ij})^{-1}$.

Gaussovský náhodný proces je jednoznačně určen momenty 1. a 2. řádu $\big(\mu(t),\, R_X(s,t)\big)$.

Stacionární normální (Gaussův) náhodný proces je plně popsán dvourozměrnou hustotou pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\tau) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2(\tau)}} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{(x_1-a)^2 - 2r(\tau)(x_1-a)(x_2-a) + (x_2-a)^2}{2\sigma^2(1-r^2(\tau))}\right] \end{aligned}$$

kde střední hodnota náhodného procesu $Ex = a$ a autokorelační funkce $B_0(\tau) = R_X(\tau) = \sigma^2 r(\tau)$ ($r(\tau)$ je korelační koeficient).

Pozn. Gaussův slabě stacionární proces je automaticky i silně stacionární.

Proces, kde $r(\tau) = 1$ pro $\tau = 0$ a $r(\tau) = 0$ pro $\tau \neq 0$, se nazývá "**normální bílý šum**".

Příklad Nechť ξ, η jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0,1)$, pak náhodný proces

$$x(t) = \xi \cos t + \eta \sin t$$

je Gaussovský náhodný proces s nulovou střední hodnotou a autokorelační funkcí $B_0(\tau) = \cos\tau$.

Věta Stacionární spojitý Gaussův náhodný proces X se střední hodnotou $EX = 0$ a rozptylem $DX = 1$ je ergodický vzhledem k autokorelační funkci $B_0(\tau)$ právě tehdy, když pro $\forall s \in \mathcal{R}$ je

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \left(B_0^2(\tau) + B_0(\tau+s)B_0(\tau-s)\right) \mathrm{d}\tau = 0$$

Věta Jestliže pro autokorelační funkci stacionárního spojitého Gaussova procesu X se střední hodnotou $EX = 0$ a disperzí $DX = 1$ je $\lim_{T\to\infty} B_0(\tau) = 0$, pak proces X je ergodický vzhledem k autokorelační funkci.

Transformace náhodných procesů

Popisuje průchod náhodného signálu $x(t)$ systémem (zařízením)

Lineární systémy

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

kde přístrojová funkce $h(t)$ je odezva na impuls $\delta(t)$. Pro kauzální systémy je $h(t) = 0$ pro $t < 0$.
Místo přístrojové funkce se často udává frekvenční charakteristika

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \exp(-i\omega t)\, \mathrm{d}t$$

Autokorelační funkce a energetické spektrum na výstupu z lineárního systému

Nechť $R_X(t_1,t_2)$ je autokorelační funkce vstupního náhodného procesu $X(t)$ a nechť $R_Y(t_1,t_2)$ je autokorelační funkce výstupního náhodného procesu $Y(t)$. Pak

$$R_Y(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau'\, \mathrm{d}\tau''\, R_X(t_1-\tau', t_2-\tau'')\, h(\tau')\, h(\tau'')$$

Pro stacionární náhodné procesy je

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau'\,\mathrm{d}\tau''\, R_X(\tau+\tau'-\tau'')\,h(\tau')\,h(\tau'')$$

Spektrum výstupního signálu je

$$\begin{aligned} f_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau)\,\exp(-i\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,h(u)\,h(v)\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-v+u)\,\exp(-i\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u\,h(u)\,\mathrm{e}^{i\omega u}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v\,h(v)\,\mathrm{e}^{-i\omega v}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z\,R_X(z)\,\mathrm{e}^{-i\omega z} \end{aligned}$$

a tedy

$$f_Y(\omega) = |H(\omega)|^2\, f_X(\omega)$$

Autokorelační funkci výstupního signálu získáme Fourierovou transformací

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2\, f_X(\omega)\,\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega$$

<u>Přenos bílého šumu</u>

Pro bílý šum $f_X(\omega) = N_0 = \text{const.}$ Pak $f_Y(\omega) = N_0\,|H(\omega)|^2$.
Autokorelační funkce výstupního signálu je

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0}{\pi}\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2\,\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau = N_0\int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,h(\tau-u)\,\mathrm{d}u$$

Pro úzkopásmový filtr je frekvenční charakteristika $H(\omega)$ nenulová jen v okolí $\pm\omega_0$. Filtr je obvykle symetrický v okolí ω_0 a tak platí

$$C_1^2(\delta) = |H(\omega+\delta)|^2 = |H(\omega-\delta)|^2$$

Pak autokorelační funkce výstupního signálu je

$$R_Y(\tau) = a(\tau)\,\cos\omega_0\tau = \left[\frac{2N_0}{\pi}\int_0^{\infty} C_1^2(\delta)\,\cos\delta\tau\,\mathrm{d}\delta\right]\cos\omega_0\tau$$

Šířka spektra výstupního signálu je

$$\Delta f = \frac{\int_0^{\infty} f_Y(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{2\pi G(\omega_0)} = \frac{\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega}{2\pi\,|H(\omega_0)|^2} = \frac{R_Y(0)}{2N_0\,|H(\omega_0)|^2}$$

Doba korelace je pak

$$\tau_0 = \frac{\int_0^\infty a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{R_Y(0)} = \frac{N_0 C_1^2(0)}{R_Y(0)} = \frac{1}{2\Delta f}$$

Ideální filtr

$$|H(\omega)| = \begin{cases} C_0 & |\omega-\omega_0| < \Delta/2 \\ 0 & |\omega-\omega_0| > \Delta/2 \end{cases} \;\Rightarrow\; a(\tau) = \frac{2N_0C_0^2}{\pi\tau}\sin\frac{\tau\Delta}{2}$$

vede ke oscilacím amplitudy autokorelační funkce.

Lepší vlastnosti má Gaussův filtr

$$|H(\omega)| = C_0 \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\beta^2}\right] \;\Rightarrow\; a(\tau) = \frac{N_0C_0^2}{\sqrt{\pi}}\beta \exp\left(-\frac{\beta^2\tau^2}{4}\right)$$

Nelineární systémy

Jsou dostupné metody analýzy nelineárních systémů bez setrvačnosti $y(t) = f(x(t))$. Mnohé nelineární systémy se setrvačností jsou rozložitelné na systém lineární se setrvačností $H_1(\omega)$, nelineární bez setrvačnosti $f(x)$ a lineární se setrvačností $H_2(\omega)$.