Náhodné (stochastické) procesy

Definice Nechť $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť množina $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ je neprázdná.
Zobrazení $X: \Omega \times \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ takové, že pro $\forall$ pevné $t \in \mathbf{T}$ je $X(\cdot, t)$ náhodná veličina, se nazývá náhodný (stochastický) proces.

Pozn. Ω je jevový prostor, $\mathcal{M}$ je jevové pole, P je pravděpodobnost (množinová funkce na $\mathcal{M}$), $\mathbf{R}$ je množina reálných čísel.

Realizace (trajektorie) náhodného procesu pro každé pevné $\omega \in \Omega$ je funkce času $X(\omega, \cdot)$. Množinu všech funkcí, které mohou vzniknout jako realizace náhodného procesu budeme označovat $\xi(t)$ a k-tou realizaci budeme značit $\xi^{(k)}(t)$.

Pozn. Signál, který v sobě obsahuje náhodnou složku (šum), je jednou realizací náhodného procesu.

Časová osa

- diskrétní (náhodná posloupnost, náhodný řetězec)
- spojitá

Příklad Náhodná procházka po přímce

Nechť množina $\mathbf{T}$ obsahuje pouze časy $t_k = k\Delta$ (diskrétní osa), kde $k = 0, 1, \ldots, \infty$, Nechť $X(\cdot, 0) = \xi(0) = 0$ pro všechny realizace náhodného procesu. Jestliže $\xi^{(k)}(t_n) = x$, pak $P(\xi^{(k)}(t_{n+1}) = x + \Delta x) = p$ a $P(\xi^{(k)}(t_{n+1}) = x - \Delta x) = 1 - p$ pro $\forall k$ a $\forall n \geq 0$.

Tento náhodný jev může nabývat pouze hodnoty $x_l = l\Delta x$, kde l je celé a v čase t_n je $l \in \langle -n, n\rangle$. Jedná se o **proces s nezávislými přírůstky**. Rozdíly $\xi(s) - \xi(0)$ a $\xi(s+t) - \xi(s)$ jsou na sobě nezávislé. Pravděpodobnostní funkce $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ závisí jen na $t_2 - t_1$.
Rozptyl

$$D\xi(s+t) = D[\xi(s) - \xi(0)] + D[\xi(s+t) - \xi(s)] = D\xi(s) + D\xi(t)$$

Označme $\delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}$. Pak $\xi_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \delta\xi_j$ a náhodné veličiny $\delta\xi_j$ jsou navzájem nezávislé se shodným rozdělením pravděpodobnosti.

Odvodíme rozptyl $\xi(t)$ pro $p = 0.5$

$$D\xi(t) = \sum_{j=1}^{n} D\delta\xi_j = n\left[\frac{1}{2}(-\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\right] = \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}_{\sigma^2} \cdot t$$

Při konstantním σ jde v limitě $\Delta t \to 0$ rozdělení $\xi(t)$ k normálnímu rozdělení v integrálním smyslu

$$P\left(x_1 \le \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}} \le x_2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

Brownův pohyb – Náhodný proces se nazývá Brownovým pohybem, pokud platí následující 3 podmínky

1. $X(\cdot, 0) = 0$
2. Rozdíl $X(\cdot, t) - X(\cdot, s)$ má normální rozdělení $N[0, \sigma^2(t-s)]$
3. Proces má nezávislé přírůstky pro libovolné 2 disjunktní intervaly.

Distribuční funkce (jednorozměrná)

$$F(x_1|t_1) = P(\xi(t_1) \le x_1)$$

Pokud existuje hustota pravděpodobnosti, pak

$$f(x_1|t_1) = \frac{\partial F(x_1|t_1)}{\partial x_1}$$

Dvoudimenzionální distribuční funkce (souvislost 2 časů)

$$F_2(x_1, x_2|t_1, t_2) = P(\xi(t_1) \le x_1 \wedge \xi(t_2) \le x_2)$$

Pokud existuje hustota pravděpodobnosti, pak

$$f_2(x_1, x_2|t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2|t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

n-rozměrná distribuční funkce - obdobně (souvislost n časů)

$$\begin{aligned} F_n(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n) &= P(\xi(t_1) \le x_1 \wedge \ldots \wedge \xi(t_n) \le x_n) \\ f_n(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n) &= \frac{\partial^n F_n(x_1, \ldots, x_n|t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \end{aligned}$$

Momenty náhodných veličin

Střední hodnota obecné funkce g náhodné veličiny je dána vztahem

$$\begin{aligned} E\ &\{g[x_1(t_1), x_2(t_2), \ldots, x_n(t_n)]\} = \\ =\ &\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f_n(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

Obecný počáteční moment

$$\begin{aligned} &\mu'_{k_1 \ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n) = E\left[\xi^{k_1}(t_1) \ldots \xi^{k_n}(t_n)\right] = \\ =\ &\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} f_n(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

Počáteční moment 1. řádu – střední hodnota

$$\mu'_1(t) = E\left[\xi(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \mu(t)$$

Centrovaný náhodný proces má nulovou střední hodnotu $\mu(t) = 0$

Obecný středový (centrální) moment

$$\mu_{k_1 \ldots k_n}(t_1, \ldots, t_n) = E\left\{[\xi(t_1) - \mu(t_1)]^{k_1} \ldots [\xi^{k_n}(t_n) - \mu(t_n)]^{k_n}\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \mu(t_1)]^{k_1} \ldots [x_n - \mu(t_n)]^{k_n} f_n(x_1, \ldots, x_n | t_1, \ldots, t_n)\ \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$$

Momenty 2. řádu

Náhodný proces je **proces druhého řádu**, pokud jsou $\forall$ momenty 2.řádu konečné. K tomu je nutné a stačí, aby

$$\mu'_2(t) = E\left[X^2(\cdot, t)\right] < +\infty$$

Rozptyl

$$\mu_2(t) = DX(\cdot, t) = E\left\{[\xi(t) - \mu(t)]^2\right\} \equiv \sigma^2(t)$$

Autokorelační funkce (odchylek)

$$B_0(s,t) = R_X(s,t) = \int\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-\mu(s))(x_2-\mu(t))f_2(x_1,x_2|s,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

Pozn. Pro pevná $s,\ t$ jde vlastně o kovarianci mezi náhodnými veličinami, odpovídajícími těmto časům.

Vlastnosti

$$\begin{aligned} B_0(t,t) &= DX(\cdot,t) = \sigma^2(t) \\ B_0^2(s,t) &\leq \sigma^2(s)\ \sigma^2(t) \end{aligned}$$

Pozn. Někdy se užívá i autokorelační funkce hodnot $B(s,t) = E[\xi(s)\xi(t)]$

Korelace mezi 2 náhodnými procesy

$$F_{XY}(x,y|t_1,t_2) = P(\xi(t_1) \leq x \wedge \eta(t_2) \leq y)$$

Vzájemná korelační funkce

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\left\{[\xi(t_1)-\mu_X(t_1)][\eta(t_2)-\mu_Y(t_2)]\right\}$$

Korelační matice

$$\mathbf{R}_{XY}(t_1,t_2) = \begin{bmatrix} R_X(t_1,t_2) & R_{XY}(t_1,t_2) \\ R_{YX}(t_1,t_2) & R_Y(t_1,t_2) \end{bmatrix}$$

Charakteristické funkce

$$\Psi(v_1|t_1) = E\left\{\exp[iv_1\xi(t_1)]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|t_1)e^{iv_1x_1}\mathrm{d}x_1$$

$$\Psi_2(v_1,v_2|t_1,t_2) = E\left\{\exp[iv_1\xi(t_1)+iv_2\xi(t_2)]\right\}$$

Charakteristický funkcionál

$$\Psi(v(t)) = E\left\{\exp[i\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\xi(t)\mathrm{d}t]\right\}$$

Limita, spojitost, derivace a integrál

Limita podle středu – Náhodný proces $\xi(t)$ konverguje při $t \to t_0$ podle středu k náhodné veličině η právě tehdy, když

$$\lim_{t\to t_0} E[\xi(t)-\eta]^2 = 0$$

Limita podle středu se často značí $\mathrm{l.i.m.}$

Limita podle pravděpodobnosti – Náhodný proces $\xi(t)$ konverguje při $t \to t_0$ podle pravděpodobnosti k náhodné veličině η, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{t\to t_0} P\left\{|\xi(t)-\eta| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

Pokud $\exists$ limita podle středu, pak tato limita je i limitou podle pravděpodobnosti. Toto tvrzení nelze obrátit.

Příklad Nechť je náhodný proces, kde $P(x = 0, t) = 1 - |t|$ a $P(x = \pm 1/t, t) = |t|/2$, pak pro $t \to 0$ je

$$\lim_{t\to 0} P\left\{|\xi(t) - 0| > \varepsilon\right\} = \lim_{t\to 0} |t| = 0$$

a tedy 0 (náhodný jev, kde 0 je jistý jev) je limitou $\xi(t)$ podle pravděpodobnosti pro $t \to 0$. Limita podle středu pro $t \to 0$ neexistuje, protože

$$\lim_{t\to 0} E\left[\xi(t)\right]^2 = \lim_{t\to 0} \sum_{i=1}^{3} P_i(t)\left[\xi_i(t) - 0\right]^2 = \lim_{t\to 0} 2\frac{1}{2}|t|\left(\frac{1}{t}\right)^2 = +\infty \neq 0$$

Spojitost – Jestliže je $\lim_{t\to t_0} \xi(t) = \xi(t_0)$ podle středu (podle pravděpodobnosti), pak je náhodný proces spojitý v t_0 podle středu (podle pravděpodobnosti).

Věta Centrovaný náhodný proces $\xi(t)$ je spojitý podle středu v bodě t právě tehdy, pokud autokorelační funkce $R_X \equiv B_0 = B$ je spojitá v bodě (t, t).

Věta Je-li autokorelační funkce $R_X(s, t)$ spojitá ve všech diagonálních bodech (tj. pro $s = t \quad \forall t \in \mathbf{T}$), pak autokorelační funkce $R_X(s, t)$ je spojitá všude v $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$.

Derivace (diferencovatelnost)

Náhodný proces $\xi(t)$ je diferencovatelný podle středu v $t \in \mathbf{T}$, pokud $\exists$ náhodná veličina $\xi^{'}$ taková, že

$$\lim_{s \to t} E \left| \frac{\xi(s) - \xi(t)}{s - t} - \xi^{'} \right|^2 = 0$$

a $\xi^{'} \equiv \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$ je derivace náhodného procesu ξ v bodu t.

Věta – Pokud $\exists$ konečné všechny parciální derivace autokorelační funkce $R_X(s,t)$ do druhého řádu včetně pro $s = t$, pak náhodný proces $\xi(t)$ je diferencovatelný v daném $t \in \mathbf{T}$ a autokorelační funkce derivace $\xi^{'}$ náhodného procesu je

$$R_{X'}(s,t) = \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} R_X(s,t)$$

Integrál – Nechť $D_n : c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d \rangle$, nechť norma dělení je $|D_n| = \max\{t_{j+1} - t_j; j = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Nechť $h(t)$ je po částech spojitá funkce. Označíme $I_n = \sum_{j=0}^{n-1} \xi(t_j) h(t_j)(t_{j+1} - t_j)$. Jestliže $\exists$ limita podle středu $\lim_{n \to \infty, |D_n| \to 0} I_n = I$, pak náhodná veličina I je Riemannův integrál náhodného procesu $I = \int_c^d h(t)\xi(t)\mathrm{d}t$.

Věta Jestliže pro centrovaný náhodný proces $\exists$

$$\int_c^d \int_c^d R_X(s,t) h(s) h(t) \mathrm{d}s \mathrm{d}t < \infty$$

pak $\exists$ integrál náhodného procesu $\int_c^d h(t)\xi(t)\mathrm{d}t$.

Markovovský proces je takový proces, kde další vývoj při znalosti současného stavu nezávisí na způsobu, jak se proces do tohoto stavu dostal. Matematicky platí

$$\forall\ t_1 < \ldots < t_n \qquad P[x_n(t_n)|x_1(t_1), \ldots, x_{n-1}(t_{n-1})] = P[x_n(t_n)|x_{n-1}(t_{n-1})]$$

Pozn. Markovovský proces může být stacionární i nestacionární.

Proces se stacionárními přírůstky je takový proces, u něhož pro libovolné τ je $\Delta\xi_\tau(t) = \xi(t) - \xi(t - \tau)$ stacionární.

Příklad Nechť ξ_0, ξ_1 jsou náhodné veličiny, pak náhodný proces $\xi(t) = \xi_0 + \xi_1 t$ je proces se stacionárními přírůstky. Pro $\forall\ \tau$ je $\Delta\xi_\tau(t) = \xi_1 \tau$.