Fourierova transformace a její užití

Přímá (přechod z časové do frekvenční domény)

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} \mathrm{d}t$$

Zpětná (návrat z frekvenční do časové domény)

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t} \mathrm{d}f$$

Použití frekvence f místo úhlové frekvence ω odstraní normalizační faktor $(2\pi)^{-1}$.

Pozn. Existence transformace zaručena jen u funkcí $\lim_{x\to\pm\infty} h(t) = 0$.

Některé vlastnosti

- Funkce $h(t) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow H(-f) = H^*(f)$
- Funkce $h(t)$ periodická s periodou l, pak

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta\left(\frac{n}{l}\right)$$

Konvoluce

$$g \star h\ (t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t-\tau) \mathrm{d}\tau = h \star g\ (t)$$

Často má funkce g význam odezvy systému na jednotkový δ signál a h je signál na vstupu do systému

Transformace

$$g \star h \longleftrightarrow G(f)H(f)$$

Integrály typu korelační funkce

$$C(g,h)\ (t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + t) h(\tau) \mathrm{d}\tau = C(h,g)\ (t)$$

Transformace

$$C(g,h) \longleftrightarrow G(f)H^\star(f)$$

Pokud $h = g$, pak $C(g,g) \longleftrightarrow |G(f)|^2$

Pozn. Pro výpočet (auto)korelační funkce je třeba doplnit středování přes čas, což upřesníme později.

Celkovou energii lze vypočítat jak v časové, tak ve frekvenční doméně

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Spektrální hustota energie je uvažována jen pro kladné frekvence $f \in \langle 0, \infty)$, pak

$$P(f) = |G(f)|^2 + |G(-f)|^2$$

Pozn. U nekonečných signálu provádíme středování přes čas a mluvíme o **středním výkonu** a **spektrální hustotě výkonu**.

Diskrétní data (vzorkování)

Často jsou data snímána s konečným konstantním krokem Δ, pak mluvíme o vzorkování (vzorkovaném signálu). Jsou tedy známy hodnoty

$$h_n \equiv h(t = n\Delta) = h(n\Delta) \qquad n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Pro $t = n\Delta$ platí pro libovolné k celé

$$\exp\left[2\pi i f t\right] = \exp\left[2\pi i \left(f + \frac{k}{\Delta}\right) t\right]$$

Tedy signály o frekvencích odlišných o násobky Δ^{-1} vedou k přesně stejným vzorkovaným datům. Proto rozsah frekvencí, které lze při vzorkování rozlišit, je omezen na Δ^{-1}.

Základní rozsah frekvencí je

$$f \in (-f_c, f_c\rangle = \left(-\frac{1}{2\Delta}, \frac{1}{2\Delta}\right\rangle$$

kde $f_c = (2\Delta)^{-1}$ je **Nyquistova kritická frekvence**.

Pozn. Vzorkování neumí rozeznat, jestli má signál frekvenci f nebo $f+k/\Delta$. Pokud vím, že signál má pouze vysoké frekvence v nějakém intervalu, mohu si vybrat sjednocení intervalů $(-f_{min}-1/(2\Delta), -f_{min}\rangle$ a $\langle f_{min}, f_{min}+1/(2\Delta))$, kde f_{min} je libovolná vhodná frekvence.

Vzorkovací teorém – Pokud pro $\forall |f| > f_c \quad H(f)=0$, pak $h(t)$ je úplně určena vzorky h_n

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin\left[2\pi f_c (t-n\Delta)\right]}{\pi(t-\Delta)}$$

Falešné zobrazení
Jestliže $H(f) \neq 0$ pro nějaké f, $|f| > f_c$, pak se $H(f)$ superponuje na $H(\tilde{f})$, kde $-f_c < \tilde{f} = f - 2kf_c \leq f_c$. Výsledkem je pak deformovaná $H'(\tilde{f}) = H(\tilde{f}) + H(f)$

Diskrétní Fourierova transformace

Signál je sledován konečný čas $T = N\Delta$. Diskrétních vzorků je konečný počet $h_k \equiv h(t_k)$, kde $t_k = k\Delta$, kde $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Diskrétní Fourierova transformace je vlastně Fourierova řada pro diskrétní data (vzorkovaný signál). Implicitně předpokládá

- Signál periodický s periodou T a tedy interval mezi frekvencemi $\delta_f = 1/T = 1/(N\Delta)$.
- Rozsah frekvencí omezen vzorkováním na interval $(-f_c, f_c\rangle$.

Frekvenční doména obsahuje N frekvencí

$$f_n = \frac{n}{N\Delta} \qquad n = -\frac{N}{2}+1, \ldots, \frac{N}{2}$$

Prvek Fourierovy řady je počítán ze vztahu

$$H(f_n) = \int_0^{T=N\Delta} h(t)\exp(2\pi i f_n t)\mathrm{d}t \simeq \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k}\Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{\frac{2\pi i k n}{N}}$$

Diskrétní Fourierova transformace je dána vztahy

$$
\begin{aligned}
H_n &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right) \\
h_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp\left(-\frac{2\pi i k n}{N}\right)
\end{aligned}
$$

Pozn. Protože $H_{-n} = H_{N-n}$, použití rozsahu $n = 0, \ldots, N-1$ je ekvivalentní rozsahu $n = -N/2+1, \ldots, N/2$. Pro maximální frekvenci $H_{-N/2} = H_{N/2}$.

Parsevalův teorém

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

Označme $w = \exp(2\pi i/N)$, pak

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} w^{nk} h_k \qquad \longrightarrow \qquad \vec{H} = \boldsymbol{W}\vec{h}$$

kde matice $\boldsymbol{W}$ je definována vztahem $W_{jk} = w^{jk}$. Obecně pro násobení maticí je třeba N^2 operací.

Rychlá Fourierova transformace (FFT) – algoritmus řádu $N \log_2 N$ – objevili Danielson a Lanczos (1942), znovuobjevili Cooley a Tukey (1965).

Danielson-Lanczosovo lemma

$$
\begin{aligned}
H_n &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k n/N} h_k = \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i (2k) n/N} h_{2k} + \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i (2k+1) n/N} h_{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k n/(N/2)} h_{2k} + w^k \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{2\pi i k n/(N/2)} h_{2k+1} = H_n^e + w^k H_n^o
\end{aligned}
$$

kde indexy e,o značí sudé a liché body, stačí spočítat H_n^e, H_n^o pro $N/2$ frekvencí.

Lze dělat rekurzivně a tak nejjednodušší algoritmy fungují pro 2^m bodů.

Data v časové zóně – postupně reálné a imaginární části $Re,\ Im(h_0)$, $Re,\ Im(h_1)$, ..., $Re, Im(h_{N-1})$, celkem $2N$ prvků.

Data ve frekvenční zóně – postupně reálné a imaginární části postupně $Re,\ Im[H(0)]$, $Re,\ Im[H((N\Delta)^{-1})]$, $\ldots$, $Re,\ Im[H((2\Delta)^{-1})]$, $Re,\ Im[H(-(2\Delta)^{-1}+(N\Delta)^{-1})]$, $\ldots$, $Re,\ Im[H(-(N\Delta)^{-1})]$, celkem $2N$ prvků.

Pozn. $H((2\Delta)^{-1}) = H(-(2\Delta)^{-1})$. Jestliže $h(t) \in \mathcal{R}$, pak i $H(0) \in \mathcal{R}$ a $H((2\Delta)^{-1}) \in \mathcal{R}$.
Pozn. Při použití procedury na reálnou funkci mají vektory zbytečně dvojnásobnou délku.

Rychlá Fourierova transformace 2 reálných funkcí

$$h_k = f_k + i\,g_k \longleftrightarrow F_n = \frac{1}{2}(H_n + H^{\star}_{N-n}) \ \wedge\ G_n = -\frac{i}{2}(H_n - H^{\star}_{N-n})$$

Pozn. Procedura pro transformaci 1 reálné funkce založena na rozkladu na liché a sudé body. Existují i rychlá sinová a cosinová transformace.

Pozn. Klasické procedury fungují jen pro $N = 2^m$ bodů, ale existují i procedury i libovolné množství bodů.

Konvoluce

Nechť r je odezva systému (přístrojová funkce). Užívá se i název impulsní odezva, neboť jde o reakci systému na jednotkovou δ funkci.

Pokud $r = 0$ pro $\forall |t| > M\Delta/2$, jedná se o **systém s konečnou odezvou** (FIR - finite impulse response), pak je konvoluce

$$(r \star s)_j = \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k$$

Kauzální odezva $k = 0, 1, \ldots, M/2$ (opak odezva akauzální).

Obecně pro periodický signál s a periodickou odezvu r je

$$\sum_{k=-N/2+1}^{N/2} s_{j-k} r_k \qquad \longleftrightarrow S_n\, R_n$$

Neperiodický signál je nutno doplnit M nulami (při konečné odezvě o šířce $M\Delta$) tak, abychom vyloučili vliv implicitní periodičnosti v diskrétní Fourierově transformaci.

Dekonvoluce

Dekonvoluce je velmi často nutnou součástí vyhodnocení měření. Je znám změřený signál $h(t)$ a odezva přístroje $r(t)$, úkolem zjistit experimentální signál $s(t)$

$$h(t) = \int r(\tau)s(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \longleftrightarrow \quad H(f) = R(f)S(f) \quad \Rightarrow \quad S(f) = \frac{H(f)}{R(f)}$$

Problémy

1. Matematicky selže pro $R(f) = 0$
2. Pokud chyba měření $h(t)$ (šum) obsahuje frekvence, kde $R(f)$ je malé, pak se poměr šumu k signálu podstatně zvětší při dekonvoluci.

Optimální filtrování

Místo odezvy $h(t)$ naměříme signál se šumem $c(t) = h(t) + n(t)$, kde $n(t)$ je šum, nekorelovaný s odezvou $h(t)$.
Filtr $\Phi(f)$ je hledán tak, aby

$$\tilde{S}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)}$$

byla aproximací S ve smyslu nejmenších čtverců

$$\min \int \left|\tilde{S}(f) - S(f)\right|^2 \mathrm{d}f = \min \int \left|\tilde{s}(t) - s(t)\right|^2 \mathrm{d}t$$

Pro nekorelované $h(t)$ a $n(t)$ je vhodným filtrem funkce

$$\Phi(f) = \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + |N(f)|^2}$$

Předpokládáme, že šum je širokospektrální a $|N(f)|^2$ jen slabě závisí na $f \in (-f_c, f_c\rangle$ (**Bílý šum** - spektrální hustota výkonu nezávislá na f). Je-li f_{sm} maximální frekvence v signálu (odezvě) $h(t)$ a je-li frekvence vzorkování dostatečná $f_c > 2f_{sm}$, pak lze ze závislosti $\ln|C|^2$ na f odhadnout $|N(f)|^2$.

Dekonvoluce pomocí regrese Pokud znám signál až na určitý počet neznámých parametrů, mohu parametry hledat tak, aby se vypočtená $h(t)$ blížila ke změřené $c(t)$ ve smyslu nejmenších čtverců.

Korelace

Při použití diskrétní Fourierovy transformace je nutno neperiodický signál doplnit nulami tak, aby byl eliminován vliv okrajů (periodicity transformace).

Výkonové spektrum - odhad pomocí diskrétní Fourierovy transformace

Střední výkon

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |h(t)|^2 \,\mathrm{d}t \simeq \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} |h_j|^2$$

Výkonové spektrum

$$\begin{aligned} P(0) &= P(f_0) = \frac{1}{N^2}|H_0|^2 \qquad\qquad P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{N^2}\left|H_{N/2}\right|^2 \\ P(f_k) &= \frac{1}{N^2}\left(|H_k|^2 + |H_{N-k}|^2\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, N/2-1 \end{aligned}$$

Spektrum harmonického signálu

Nechť má signál frekvenci f. Označme

$$s = \frac{f - f_k}{\left(\frac{1}{N\Delta}\right)}$$

Pak

$$P(f_k) = \underbrace{|A|^2}_{P(f)} \cdot W(s) \qquad\qquad W(s) = \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin^2(\pi s)}{\sin^2(\pi s/N)}\right]$$

Pokud $\exists j$ takové, že $f = f_j$, pak s nabývá celočíselných hodnot a $W(0) = 1$ a $W(k \neq 0) = 0$. V tomto případě nedochází k žádné deformaci spektra.

Pokud např. $f = f_j + 1/2\ (N\Delta)^{-1}$, tedy frekvence f leží v polovině mezi frekvencemi diskrétního spektra a $s = k + 1/2$, pak

$$W(s) \simeq \frac{1}{\pi^2 s^2}$$

a harmonický signál se zobrazí do širokého spektra frekvencí (frequency leakage).

Příčinou okraje – signál sledován po dobu $T = N\Delta$, která není násobkem periody signálu. Tedy dochází ke skoku hodnoty a/nebo časové derivace signálu na hranici intervalu T.

Data windowing – ochrana proti rozšíření spektra signálu. Signál se násobí nějakou funkcí $w(t)$, která se nazývá okno (window) a která je malá (nulová) na okraji intervalu a obvykle $w(T/2) = 1$. Provádí se diskrétní Fourierova transformace funkce $h(t)w(t)$

$$D_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_j w_j \exp\left(\frac{2\pi ijk}{N}\right) \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Označíme $w_{ss} = N \sum_{j=0}^{N-1} w_j^2$, pak

$$\begin{aligned} P(0) &= P(f_0) = \frac{1}{w_{ss}} |D_0|^2 \qquad & P(f_c) = P(f_{N/2}) = \frac{1}{w_{ss}} \left|D_{N/2}\right|^2 \\ P(f_k) &= \frac{1}{w_{ss}} \left(|D_k|^2 + |D_{N-k}|^2\right) \qquad & k = 1, 2, \ldots, N/2 - 1 \end{aligned}$$

Příklady oken

$$\begin{aligned} w_j &= 1 - \left|\frac{j - (N-1)/2}{(N+1)/2}\right| && \text{Parzenovo okno} \\ w_j &= \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N-1}\right)\right] && \text{Hanningovo okno} \\ w_j &= 1 - \left[\frac{j - (N-1)/2}{(N+1)/2}\right]^2 && \text{Welchovo okno} \end{aligned}$$

Přesnost stanovení spektrální hustoty výkonu – směrodatná odchylka $\sigma_{Pk} = P_k$ nezávisí na počtu vzorků N. S růstem N roste počet frekvencí.

Možnosti nápravy

1. Spektrální výkon $\widetilde{P_j}$ středovaný přes K sousedních frekvencí a směrodatná odchylka $\sigma_{\widetilde{P_j}} = \widetilde{P_j}/\sqrt{K}$
2. Rozdělit N do K úseků po M bodech, spočítat pro každý úsek s použitím vhodného okna spektrální hustotu výkonu $P^{(i)}(f_j)$ a středováním přes K úseků dostaneme výkon $P(f_j)$ se směrodatnou odchylkou $\sigma_{P_j} = P_j/\sqrt{K}$

Digitální filtrování v časové doméně

Pokud lze, upřednostňujeme filtrování ve frekvenční doméně. V časové doméně filtrování v reálném čase, případně i pro rozsáhlé soubory dat.

I v časové doméně lze realizovat běžné typy filtrů - dolní či horní propust, pásmovou propust či zádrž, filtry kauzální i akauzální

Lineární filtry – vstupní signál x, filtrovaný y

$$y_n = \sum_{K=0}^{M} c_k x_{n-k} + \sum_{j=1}^{N} d_j y_{n-j}$$

Nerekurzivní filtr ($N = 0$) má konečnou odezvu (FIR), zatímco rekurzivní filtr ($N > 0$) může mít nekonečnou odezvu (IIR).

Ve frekvenční doméně

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \qquad H(f) = \frac{\sum_{K=0}^{M} c_k \exp\left(2\pi i k f \Delta\right)}{1 - \sum_{j=1}^{N} d_j \exp\left(2\pi i j f \Delta\right)}$$

Rekurzivní filtr může podstatně lépe aproximovat požadované vlastnosti. Možná nestabilita = amplituda odezvy na impuls narůstá v čase pro $t \to \infty$, nutno konstruovat stabilní filtry.

Označme $z \equiv \exp(-2\pi i f \Delta)$. Podmínkou stability $\forall$ póly (0 jmenovatele) $H(f)$ v oblasti $|z| \leq 1$.

Příklad – Metoda konstrukce filtru

Využijeme bilineární transformaci

$$w = -\mathrm{tg}\left[\pi(f\Delta)\right] = i\left(\frac{1-\exp(-2\pi i f\Delta)}{1+\exp(-2\pi i f\Delta)}\right) = i\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

která transformuje Nyquistův interval $-1/2 < f\Delta < 1/2$ na neohraničený interval $-\infty < w < \infty$. Podmínka $|z| \leq 1$ implikuje $\mathrm{Im}(w) \geq 0$.

Stanovíme $|H(f)|^2$, najdeme jeho póly (jsou vždy komplexně sdružené) a v $H(f)$ ponecháme póly s $\mathrm{Im}(w) \geq 0$.

Pásmová propust od f_1 do f_2. Označme $a = \mathrm{tg}(\pi f_1 \Delta)$, $b = \mathrm{tg}(\pi f_2 \Delta)$. Pak

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{w^2}{w^2+a^2}\right)\left(\frac{b^2}{w^2+b^2}\right)$$

Funkce $|H(f)|^2$ má póly $w = \pm ia$, $w = \pm ib$, ponecháme ty s $+$

$$H(f) \;=\; \left(\frac{w}{w-ia}\right)\left(\frac{ib}{w-ib}\right) = \frac{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)b}{\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)-a\right]\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)-b\right]}$$

$$H(f) \;=\; \frac{\overbrace{-\frac{b}{(1+a)(1+b)}}^{c_0} + \overbrace{\frac{b}{(1+a)(1+b)}}^{c_2}\frac{1}{z^2}}{1 \underbrace{-\frac{(1+a)(1-b)+(1-a)(1+b)}{(1+a)(1+b)}}_{d_1}\frac{1}{z} + \underbrace{\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}}_{d_2}\frac{1}{z^2}}$$

a tedy filtr je definován vztahem

$$y_n = c_0 x_n + c_2 x_{n-2} + d_1 y_{n-1} + d_2 y_{n-2}$$

Pozn. Existují samozřejmě velké množství složitějších filtrů s různými přednostmi.

Pozn. V programu MATLAB je toolbox Signal Processing, který obsahuje celou řadu možností v oblasti diskrétní Fourierovy transformace a digitálních filtrů.