Liouvilleova rovnice (teorém)

hustota systémů (× hustota částic = Klimontovičova rovnice)
systém s 1. částicí (6-rozměrný prostor)

$$N(\vec{x}_1, \vec{p}_1, t) = \delta[\vec{x}_1 - \vec{X}_1(t)]\,\delta[\vec{p}_1 - \vec{P}_1(t)]$$

Systém s N_0 částicemi ($6N_0$-rozměrný prostor)

$$N(\vec{x}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{x}_{N_0}, \vec{p}_{N_0}, t) = \prod_{i=1}^{N_0} \delta[\vec{x}_i - \vec{X}_i(t)]\,\delta[\vec{p}_i - \vec{P}_i(t)]$$

Normalizace (1 systém) $\int N(\vec{x}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{x}_{N_0}, \vec{p}_{N_0}, t)\, \mathrm{d}\vec{x}_1\, \mathrm{d}\vec{p}_1 \ldots d\vec{x}_{N_0}\, \mathrm{d}\vec{p}_{N_0} = 1$

Uděláme $\partial N / \partial t$ a využijeme $\frac{\partial}{\partial t}\delta[\vec{x}_i - \vec{X}_i(t)] = -\frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t}\, \nabla_{x_i}\delta[\vec{x}_i - \vec{X}_i(t)]$

a pak je

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\mathrm{d}\vec{X}_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{\vec{x}_i} N + \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\mathrm{d}\vec{P}_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{\vec{p}_i} N = 0$$

a po dosazení dostaneme Liouvilleovu rovnici

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_0} \frac{\vec{\mathrm{p}}_i}{m_i} \nabla_{\vec{x}_i} N + \sum_{i=1}^{N_0} q_i \left[\vec{E}^m\left(\vec{x}_i, t\right) + \frac{\vec{\mathrm{p}}_i}{m_i} \times \vec{B}^m\left(\vec{x}_i, t\right) \right] \nabla_{\vec{p}_i} N = 0$$

Doporučená literatura: Nicholson kap.4 a 5

Levá strana je úplná derivace podle trajektorie systému $\frac{DN}{Dt} = 0$

Zákon zachování počtu systémů

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_0} \nabla_{\vec{x}_i} \left(\frac{\vec{p}_i}{m_i} N \right) + \sum_{i=1}^{N_0} \nabla_{\vec{p}_i} \left(\vec{F}\, N \right) = 0$$

Ansámbl makroskopicky shodných systémů

Hustota pravděpodobnosti

$$\tilde{f}_{N_0} (\vec{x}_1, \vec{p}_1, ..., \vec{x}_{N_0}, \vec{p}_{N_0}) \,\mathrm{d}\,\vec{x}_1 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_1 ... \mathrm{d}\,\vec{x}_{N_0} \,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0} = \frac{N_\Delta}{N_A}$$

poměr počtu systémů v elementu fázového prostoru k počtu v ansámblu

Integrál = 1   systémy v ansámblu se nerodí ani nezanikají

$$\frac{\partial \tilde{f}_{N_0}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_0} \nabla_{\vec{x}_i} \left(\dot{\vec{X}}_i \, \tilde{f}_{N_0} \right) + \sum_{i=1}^{N_0} \nabla_{\vec{p}_i} \left(\dot{\vec{P}}_i \, \tilde{f}_{N_0} \right) = 0$$

Hustota systémů se podle trajektorie systému ve fázovém prostoru nemění $D\,\tilde{f}_{N_0} / Dt = 0$

N_A systémů v ansámblu $$\tilde{f}_{N_0} = \frac{1}{N_A} \sum_{j=1}^{N_\Delta} \prod_{i=1}^{N_0} \delta[\vec{x}_i - \vec{X}_i(t)]\, \delta[\vec{p}_i - \vec{P}_i(t)]$$

Liouvilleova rovnice $$\frac{\partial \tilde{f}_{N_0}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N_0} \vec{\mathrm{v}}_i \nabla_{\vec{x}_i} \tilde{f}_{N_0} + \sum_{i=1}^{N_0} \vec{F}_i \nabla_{\vec{p}_i} \tilde{f}_{N_0} = 0$$

V je normovací objem

$$\int \tilde{f}_{N_0} \, \mathrm{d}\,\vec{p}_1 \, \mathrm{d}\,\vec{p}_2 ... \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0} = V^{-N_0} \Rightarrow f_{N_0} = V^{N_0} \tilde{f}_{N_0}$$

***k*-částicová rozdělovací funkce**

$$f_k(\vec{x}_1, \vec{p}_1, ..., \vec{x}_k, \vec{p}_k) = V^{k-N_0} \int \mathrm{d}\,\vec{x}_{k+1} \, \mathrm{d}\,\vec{p}_{k+1} \, \mathrm{d}\,\vec{x}_{k+2} \, \mathrm{d}\,\vec{p}_{k+2} ... \mathrm{d}\,\vec{x}_{N_0} \, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0} \, f_{N_0}$$

okraje

$$f_{N_0} \to 0 \qquad x_i \vee y_i \vee z_i \to \pm\infty \qquad f_{N_0} \to 0 \qquad p_{xi} \vee p_{yi} \vee p_{zi} \to \pm\infty$$

rozdělovací funkce je symetrická vzhledem k záměně identických částic

$$f_k(..., \vec{x}_m, \vec{p}_m, ..., \vec{x}_n, \vec{p}_n, ...) = f_k(..., \vec{x}_n, \vec{p}_n, ..., \vec{x}_m, \vec{p}_m, ...)$$

uvažujme 1 druh částic pro jednoduchost jen coulombovská interakce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\vec{P}_i = \sum_{j=1}^{N_0} \vec{F}_{ij} \qquad \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{q_s^2}{\left|\vec{x}_i - \vec{x}_j\right|^3}\left(\vec{x}_i - \vec{x}_j\right)$$

z rovnice pro f_{N_0} odvodíme rovnici pro f_{N_0-1} integrací $\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}$

$$\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\,\frac{\partial f_{N_0}}{\partial t} = V\frac{\partial}{\partial t}\,f_{N_0-1}$$

$$\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\sum_{i=1}^{N_0}\vec{\mathrm{v}}_i\,\nabla_{\vec{x}_i} f_{N_0} = V\sum_{i=1}^{N_0-1}\vec{\mathrm{v}}_i\,\nabla_{\vec{x}_i} f_{N_0-1} + \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\left(\mathrm{v}_{xN_0}\frac{\partial}{\partial x_{N_0}} + \mathrm{v}_{yN_0}\frac{\partial}{\partial y_{N_0}} + \mathrm{v}_{zN_0}\frac{\partial}{\partial z_{N_0}}\right) f_{N_0}$$

Druhý integrál = 0 (první člen $\int \mathrm{d}\vec{p}_{N_0}\,\mathrm{d}\,y_{N_0}\,\mathrm{d}\,z_{N_0}\,\mathrm{v}_{xN_0}\,f_{N_0}\Big|_{x_{N_0}=-\infty}^{x_{N_0}=+\infty} = 0$)

$$\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\sum_{i=1}^{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}\vec{F}_{ij}\nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0} = \sum_{i=1}^{N_0-1}\sum_{j=1}^{N_0-1}\vec{g}_{ij} + \sum_{i=1}^{N_0-1}\vec{g}_{iN_0} + \sum_{j=1}^{N_0-1}\vec{g}_{N_0 j} + \vec{g}_{N_0 N_0} = V\sum_{i=1}^{N_0-1}\sum_{j=1}^{N_0-1}\vec{F}_{ij}\nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0-1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{N_0-1}\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\vec{F}_{iN_0}\nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0} + \sum_{j=1}^{N_0-1}\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,p_{yN_0}\,\mathrm{d}\,p_{zN_0}F_{xN_0 j}\,f_{N_0}\Big|_{p_{xN_0}=-\infty}^{p_{xN_0}=+\infty} + 0$$

Rovnice pro f_{N_0-1}

$$\frac{\partial}{\partial t}f_{N_0-1} + \sum_{i=1}^{N_0-1}\vec{\mathrm{v}}_i\,\nabla_{\vec{x}_i} f_{N_0-1} + \sum_{i=1}^{N_0-1}\sum_{j=1}^{N_0-1}\vec{F}_{ij}\nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0-1} = -\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N_0-1}\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\,\mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0}\vec{F}_{iN_0}\nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0}$$

Z rovnice pro f_{N_0-1} odvodíme rovnici pro f_{N_0-2} integrací $\int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0-1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0-1}$

$$\sum_{i=1}^{N_0-1} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0-1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0-1} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0} \vec{F}_{iN_0} \nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0} = \sum_{i=1}^{N_0-2} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0-1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0-1} \vec{F}_{iN_0-1} \nabla_{\vec{p}_i} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0} f_{N_0} = V \sum_{i=1}^{N_0-2} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0-1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0-1} \vec{F}_{iN_0-1} \nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0-1}$$

Rovnice pro f_{N_0-2}

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{N_0-2} + \sum_{i=1}^{N_0-2} \vec{\mathrm{v}}_i \nabla_{\vec{x}_i} f_{N_0-2} + \sum_{i=1}^{N_0-2} \sum_{j=1}^{N_0-2} \vec{F}_{ij} \nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0-2} = -\frac{2}{V} \sum_{i=1}^{N_0-2} \int \mathrm{d}\vec{x}_{N_0-1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{N_0-1} \vec{F}_{iN_0-1} \nabla_{\vec{p}_i} f_{N_0-1}$$

Rovnice pro f_k

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k + \sum_{i=1}^{k} \vec{\mathrm{v}}_i \nabla_{\vec{x}_i} f_k + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \vec{F}_{ij} \nabla_{\vec{p}_i} f_k = -\frac{N_0 - k}{V} \sum_{i=1}^{k} \int \mathrm{d}\vec{x}_{k+1}\, \mathrm{d}\,\vec{p}_{k+1} \vec{F}_{ik+1} \nabla_{\vec{p}_i} f_{k+1}$$

BBGKY *(Bogoljubov, Born, Green, Kirkwood, Yvon)* **hierarchie**

Ekvivalentní Liouvilleovu teorému (obsahuje trajektorie $\forall$ částic), ale lze někde useknout, zajímají nás $k \ll N_0$, pak $\frac{N_0 - k}{V} \simeq n_0$ (n_0 je hustota částic)

pro jednočásticové rozdělení $$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + \vec{\mathrm{v}}_1 \nabla_{\vec{x}_1} f_1 + n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_2\, \mathrm{d}\,\vec{p}_2 \vec{F}_{12} \nabla_{\vec{p}_1} f_2 = 0$$

normalizační podmínka $\int f_1(\vec{p}_1)\,\mathrm{d}\vec{p}_1 = 1$ případně $\int f_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1)\,\mathrm{d}\vec{p}_1 = \frac{n(\vec{x}_1)}{n_0}$

$$f_2(\vec{x}_1,\vec{p}_1,\vec{x}_2,\vec{p}_2,t) = f_1(\vec{x}_1,\vec{p}_1,t)\, f_1(\vec{x}_2,\vec{p}_2,t) + g(\vec{x}_1,\vec{p}_1,\vec{x}_2,\vec{p}_2,t)$$

g - binární korelační funkce, 1. krok v Mayerově klastrovém rozvoji

vnitřní síla působící na částici je $\vec{F} = n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_2 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_2\, \vec{F}_{12}\, f_1(\vec{x}_2,\vec{p}_2,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1 + \vec{\mathrm{v}}_1 \nabla_{\vec{x}_1} f_1 + \vec{F}\,\nabla_{\vec{p}_1} f_1 = -n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_2 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_2 \vec{F}_{12} \nabla_{\vec{p}_1} g(\vec{x}_1,\vec{p}_1,\vec{x}_2,\vec{p}_2,t)$$

Člen napravo – srážkový integrál $\qquad$ g = 0 – Vlasovova rovnice

Potřebuji rovnici pro g $\qquad$ rovnice pro f_2

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2 + \left(\vec{\mathrm{v}}_1 \nabla_{\vec{x}_{1i}} + \vec{\mathrm{v}}_2 \nabla_{\vec{x}_2}\right) f_2 + \left(\vec{F}_{12}\nabla_{\vec{p}_1} + \vec{F}_{21}\nabla_{\vec{p}_2}\right) f_2 = -n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_3 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_3 \left(\vec{F}_{13}\nabla_{\vec{p}_1} + \vec{F}_{23}\nabla_{\vec{p}_2}\right) f_3$$

Klastrový rozvoj

$$f_3\left(1,2,3\right) = f_1(1)\, f_1(2)\, f_1(3) + f_1(1) g(2,3) + f_1(2) g(1,3) + f_1(3) g(1,2) + h(1,2,3)$$

h – tříčásticová korelační funkce $\qquad$ $\sim \Lambda^{-2}$ $\qquad$ - zanedbáme

$$\frac{\partial}{\partial t} g(1,2) + \left(\vec{\mathrm{v}}_1 \nabla_{\vec{x}_{1i}} + \vec{\mathrm{v}}_2 \nabla_{\vec{x}_2}\right) g(1,2) = -\left(\vec{F}_{12}\nabla_{\vec{p}_1} + \vec{F}_{21}\nabla_{\vec{p}_2}\right)\left[f_1(1)\, f_1(2) + g(1,2)\right] -$$

$$-\left\{ n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_3 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_3 \vec{F}_{13} \nabla_{\vec{p}_1} \left[f_1(1) g(2,3)\right] + n_0 \int \mathrm{d}\vec{x}_3 \,\mathrm{d}\,\vec{p}_3 \vec{F}_{23} \nabla_{\vec{p}_2} \left[f_1(2) g(1,3)\right]\right\}$$

Uzavřený systém rovnic pro f_1 a g_{12}

Chceme vyjádřit binární korelační funkci pomocí jednočásticové rozd.fce

Budeme uvažovat homogenní plazmu bez vnějších polí a potenciální binární působení

$$f_1(\vec{x},\vec{p},t) = f_1(\vec{p},t) \qquad \vec{F}(\vec{x},t) = \vec{F}(t) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad g = g(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t)$$

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U_{12}(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)}{\partial \vec{x}_1}$$

odhadneme g z 1.členů rovnice, bereme $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \sim \mathrm{v}_T$

$$g_{12} \sim f_1 f_2 U_{12} / \varepsilon_T \qquad h_{123} \sim f_3 g_{12} U_{23} / \varepsilon_T$$ v integrálním smyslu

Rovnice pro f_1 a g_{12}, více druhů částic

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_a} + \tilde{\vec{F}}_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} \sum_b \int \mathrm{d}\vec{r}_b \, \mathrm{d}\,\vec{p}_b \, g_{ab}(\vec{r}_a, \vec{p}_a, \vec{r}_b, \vec{p}_b, t) \frac{\partial U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)}{\partial \vec{r}_a}$$

síla se skládá z vnější a vnitřní

$$\tilde{\vec{F}}_a = \vec{F}_a - \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} \sum_b \int \mathrm{d}\vec{r}_b \, \mathrm{d}\,\vec{p}_b \, f_b(\vec{r}_b, \vec{p}_b, t) \, U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$$

Chci vyjádřit **srážkový člen**

$$\left[\frac{\partial f_a}{\partial t}\right]_c = \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} \sum_b \int \mathrm{d}\vec{r}_b \mathrm{d}\,\vec{p}_b \; g_{ab}(\vec{r}_a, \vec{p}_a, \vec{r}_b, \vec{p}_b, t) \frac{\partial U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)}{\partial \vec{r}_a}$$

Rovnice pro g_{ab}

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}_a \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} + \vec{\mathrm{v}}_b \frac{\partial}{\partial \vec{r}_b} + \tilde{\vec{F}}_a \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} + \tilde{\vec{F}}_b \frac{\partial}{\partial \vec{p}_b}\right\} g_{ab} - \frac{\partial U_{ab}}{\partial \vec{r}_a}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}_b}\right) g_{ab} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a} f_b - f_a \frac{\partial f_b}{\partial \vec{p}_b}\right) \frac{\partial U_{ab}}{\partial \vec{r}_a} + \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a} \sum_c \int \mathrm{d}\vec{r}_c \,\mathrm{d}\,\vec{p}_c \; g_{bc} \frac{\partial U_{ac}}{\partial \vec{r}_a} + \{a \leftrightarrow b\} +$$

$$+ \sum_c \int \mathrm{d}\vec{r}_c \,\mathrm{d}\,\vec{p}_c \frac{\partial U_{ac}}{\partial \vec{r}_a} \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} h_{abc} + \{a \leftrightarrow b\}$$

Úloha má 2 možné malé parametry

(1) **slabé silové působení mezi částicemi**

$$\alpha = \frac{U_{ab}}{\mathcal{E}} \ll 1$$

$\mathcal{E}$ - střední kinetická energie

$$\Rightarrow \quad g_{ab} \sim f_a f_b \frac{U_{ab}}{\mathcal{E}} \ll f_a f_b$$

zanedbáme poslední člen nalevo proti prvnímu napravo

$$h_{abc} \sim f_a g_{cb} \frac{U_{bc}}{\mathcal{E}} \ll f_a g_{cb}$$

poslední člen napravo << předchozí

(2) **malý dosah sil**

d – dosah sil, n – koncentrace částic

$$\beta = (n\,d^3)\frac{U_{ab}}{\mathcal{E}} \ll 1$$

2. člen napravo zanedbáme proti 1,

3. člen napravo zanedbáme proti 1.

v plynu $U_{ab} \sim \mathcal{E}$ a $n\,d^3 \ll 1$ tedy $\alpha \sim 1, \beta << 1$

v plazmatu $\beta = (n\,r_D^{\;3})\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_D}\dfrac{1}{k_B T} \sim 1$ a $\alpha << 1$

Pokud $\boldsymbol{\alpha} \ll 1 \wedge \boldsymbol{\beta} \ll 1 \Rightarrow$ **Fokker-Planckův** (Landaův) srážkový člen jednoduchý pro řešení, v žádném systému neplatí předpoklady přesně

Pokud $\boldsymbol{\beta} \ll 1$ (α libovolné) – **Boltzmannův** srážkový člen (plyn, nepružné srážky v plazmatu)

Pokud $\boldsymbol{\alpha} \ll 1$ (β libovolné) – (Bogoljubov-)**Lenard-Balescův** srážkový člen (pružné srážky v plazmatu včetně působení na velké vzdál.)

Jak vyjádřit g_{ab} ? Čas τ_g relaxace korelační funkce g (doba trvaní srážky) << čas relaxace τ_f jednočásticového rozdělení (1/srážková frekvence)

Stačí vyjádřit g v limitě $t \rightarrow \infty$

<u>Bogoljubova hypotéza</u> g($t \rightarrow -\infty$) = 0 (částice před srážkou jsou nekorelované, ale po srážce je už korelace nenulová ⇒ **nevratnost**
doba mezi srážkami týchž 2 částic je velká (informace o předchozí srážce se ztratí)

Odvodíme Landaův (Fokker-Planckův) srážkový člen – nejjednodušší

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}_a \frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} + \vec{\mathrm{v}}_b \frac{\partial}{\partial \vec{r}_b}\right) g_{ab} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a} f_b - f_a \frac{\partial f_b}{\partial \vec{p}_b}\right) \frac{\partial U_{ab}\left(\left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|\right)}{\partial \vec{r}_a}$$

Jaké je ***g*** v **rovnováze**? Funkce f maxwellovská a časová derivace = 0

$$f_a = \frac{n_a}{\left(2\pi m_a k_B T\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_a^2}{2m_a k_B T}\right) \Rightarrow \quad g_{ab} = -\frac{1}{k_B T} U_{ab}\left(\left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|\right) f_a f_b$$

(g správně pro $U_{ab} << k_B T$)

Řešení nerovnovážné rovnice

hledáme řešení v t integrací od t_0, charakteristiky rovnice odpovídají rovnoměrnému přímočarému pohybu částic a, b

$$\vec{r}_{a0}{}' = \vec{r}_a - \vec{\mathrm{v}}_a\left(t - t_0\right) \qquad \vec{r}_{at'}{}' = \vec{r}_a - \vec{\mathrm{v}}_a\left(t - t'\right)$$ a obdobně pro částici b

$$g_{ab}(\vec{r}_a, \vec{p}_a, \vec{r}_b, \vec{p}_b, t) = g_{ab}(\vec{r}_{a0}{}', \vec{p}_a, \vec{r}_{b0}{}', \vec{p}_b, t_0) + \int_{t_0}^{t} dt' \left\{\frac{\partial}{\partial \vec{r}_a} U_{ab}\left(\left|\vec{r}_{at'}{}' - \vec{r}_{bt'}{}'\right|\right)\right\} \times$$

$$\times \left\{ f_b(\vec{r}_{bt'}{}', \vec{p}_b, t') \frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} f_a(\vec{r}_{at'}{}', \vec{p}_a, t') - f_a(\vec{r}_{at'}{}', \vec{p}_a, t') \frac{\partial}{\partial \vec{p}_b} f_b(\vec{r}_{bt'}{}', \vec{p}_b, t') \right\}$$

prostorově homogenní f_a, f_b (na dosahu sil) konst. v čase(po dobu srážky)

$$g_{ab}(\vec{r}_a,\vec{p}_a,\vec{r}_b,\vec{p}_b,t)=g_{ab}(\vec{r}_{a0}{}',\vec{p}_a,\vec{r}_{b0}{}',\vec{p}_b,t_0)+\Big\{f_b(\vec{r}_b,\vec{p}_b,t)\frac{\partial}{\partial\vec{p}_a}f_a(\vec{r}_a,\vec{p}_a,t)-$$

$$-f_a(\vec{r}_a,\vec{p}_a,t)\frac{\partial}{\partial\vec{p}_b}f_b(\vec{r}_b,\vec{p}_b,t)\Big\}\int_{t_0}^{t}dt'\frac{\partial}{\partial\vec{r}_a}U_{ab}\left(\left|\vec{r}_{at'}{}'-\vec{r}_{bt'}{}'\right|\right)$$

využijeme Bogoljubovy hypotézy $t_0\to-\infty \quad g_{ab}(t\to-\infty)=0$

a do srážkového integrálu

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c=\frac{\partial}{\partial\vec{p}_a}\sum_b\int \mathrm{d}\vec{r}_b\,\mathrm{d}\,\vec{p}_b\,g_{ab}(\vec{r}_a,\vec{p}_a,\vec{r}_b,\vec{p}_b,t)\frac{\partial U_{ab}(|\vec{r}_a-\vec{r}_b|)}{\partial\vec{r}_a}$$

dosadíme g_{ab} a dostaneme

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c=\frac{\partial}{\partial p_{ai}}\sum_b\int \mathrm{d}\vec{p}_b\,I_{ij}^{ab}\left(\vec{\mathrm{v}}_a-\vec{\mathrm{v}}_b\right)\left(\frac{\partial f_a}{\partial p_{aj}}f_b-f_a\frac{\partial f_b}{\partial p_{bj}}\right)$$

kde $$I_{ij}^{ab}(\vec{\mathrm{v}})=\int \mathrm{d}^3\,r_b\,\frac{\partial U_{ab}(|\vec{r}_a-\vec{r}_b|)}{\partial r_{ai}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\,t\,\frac{\partial}{\partial r_{aj}}U_{ab}(|\vec{r}_a-\vec{r}_b+\vec{\mathrm{v}}\,t|)$$

vyjádříme interakční potenciál pomocí Fourierovy transformace

$U_{ab}(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \Phi_{ab}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r})$, kde $\Phi_{ab}(\vec{k}) = \frac{q_a q_b}{\varepsilon_0 k^2}$ pro Coulombův potenciál (odvození v apendixu)

Integrál logaritmicky diverguje → $k_{\min}=1/r_{\max}=1/r_D$, $k_{\max}=1/r_{\min}$

$$I_{ij}^{ab}(\vec{\mathrm{v}}) = \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{v}^2 \delta_{ij} - \mathrm{v}_i \mathrm{v}_j}{\mathrm{v}^3} \ln \Lambda_{ab},$$

kde **Coulombův logaritmus** $\ln \Lambda_{ab} = \ln(k_{\max} / k_{\min}) = \ln(r_D / r_{\min})$

a $r_{\min} = \max(b_0, \frac{\hbar}{2 m_{ab} \mathrm{v}})$, kde Landauova délka $b_0 = \frac{q_a q_b}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{m_a \mathrm{v}^2}$

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c = \frac{\partial}{\partial p_{ai}} \sum_b \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0^2} \ln \Lambda_{ab} \int \mathrm{d}\vec{p}_b \frac{\mathrm{v}_{ab}^2 \delta_{ij} - \mathrm{v}_{abi} \mathrm{v}_{abj}}{\mathrm{v}_{ab}^3} \left(\frac{\partial f_a}{\partial p_{aj}} f_b - f_a \frac{\partial f_b}{\partial p_{bj}} \right)$$

lze napsat ve tvaru

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial \vec{p}_a} \left[\vec{A}^{(a)} f_a \right] + \frac{\partial}{\partial p_{ai}} \left[D_{ij}^{(a)} \frac{\partial f_a}{\partial p_{aj}} \right]$$

síla dynamického tření (brzdí pohybující se částice)

$$A_i^{(a)}(\vec{p}_a) = \sum_b \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0^2} \ln\Lambda_{ab} \int \mathrm{d}\vec{p}_b \, \frac{\mathrm{v}_{ab}^2\,\delta_{ij} - \mathrm{v}_{abi}\,\mathrm{v}_{abj}}{\mathrm{v}_{ab}^3} \frac{\partial f_b}{\partial p_{bj}}$$

Koeficient difúze v prostoru hybností (rozmazává svazek částic)

$$D_{ij}^{(a)}(\vec{p}_a) = \sum_b \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0^2} \ln\Lambda_{ab} \int \mathrm{d}\vec{p}_b \, \frac{\mathrm{v}_{ab}^2\,\delta_{ij} - \mathrm{v}_{abi}\,\mathrm{v}_{abj}}{\mathrm{v}_{ab}^3} f_b$$

Používá se i jiný tvar

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial}{\partial \vec{p}_a}\left[\vec{\tilde{A}}_{(a)}\, f_a\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial p_{ai}}\frac{\partial}{\partial p_{aj}}\left[B_{ij}^{(a)}\, f_a\right]$$

kde jsou koeficienty dány součty $\quad \vec{\tilde{A}}_{(a)} = \sum_b \vec{\tilde{A}}_{ab} \qquad B_{ij} = \sum_b B_{ij}^{ab}$

a dílčí členy lze vyjádřit pomocí Rosenbluthových potenciálů $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{H}$

$$\vec{\tilde{A}}_{ab} = \Psi^{a,b} \frac{\partial}{\partial \vec{p}} H^{ab}(\vec{p}) \qquad\qquad B_{ij}^{ab} = \Psi^{a,b} \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial p_j} G^{ab}(\vec{p})$$

Lenard-Balescův srážkový člen

při odvození ponechány $\int$ z g_{ac} a g_{bc} – ošetří korelace na dlouhou vzdálenost – zahrnuje **dynamické stínění** srážky plazmatem

téměř totožný tvar jako FP, ale jádro

$$I_{ij}^{ab} = \pi \int \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{q_a q_b}{\varepsilon_0 k^2} \right)^2 \frac{k_i k_j \delta\left[\vec{k}\left(\vec{\mathrm{v}}_a - \vec{\mathrm{v}}_b \right) \right]}{\left| \varepsilon^l \left(\vec{k}\, \vec{\mathrm{v}}_a , \vec{k} \right) \right|^2}$$

ε^l – podélná relativní permitivita, když $\varepsilon^l = 1 \Rightarrow$ Fokker-Planck (Landau)

$$\varepsilon^l \left(\omega, \vec{k} \right) = 1 + \sum_a \frac{q_a^2}{\varepsilon_0 k^2} \int \mathrm{d}\vec{p}_a \, \frac{1}{\omega - \vec{k}\, \vec{\mathrm{v}}_a + i\Delta} \, \vec{k} \, \frac{\partial f_a}{\partial \vec{p}_a}$$

Boltzmannův srážkový člen

při odvození g ponechán poslední člen na pravé straně– charakteristiky neodpovídají rovnoměrnému přímočarému pohybu, ale pohybu v poli

g v rovnováze (f je stacionární homogenní Maxwellovo rozdělení)

$$g_{ab} = \left[\exp\left(-\frac{U_{ab}\left(\left|\vec{r}_a - \vec{r}_b\right|\right)}{k_B T} \right) - 1 \right] f_a f_b$$

pro α<<1 přejde ve výsledek pro Fokker-Planckovu rovnici

Boltzmannův srážkový člen

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c = \sum_b \int \mathrm{d}\vec{p}_b \, \mathrm{v}_{ab} \left[f_a(\vec{p}_a{}') f_b(\vec{p}_b{}') - f_a(\vec{p}_a) f_b(\vec{p}_b) \right] \mathrm{d}\sigma_{ab}(\mathrm{v}_{ab}, \theta, \varphi)$$

pro pružné koule o poloměru a je $\mathrm{d}\sigma = a^2 \, \mathrm{d}\Omega$

pro $\mathrm{U} \sim 1/\mathrm{r}^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\sigma \sim \mathrm{d}\Omega / \mathrm{v}^{4/n}$

pro reálný plyn často používán Lennard-Jonesův potenciál

$$\mathrm{U} = 4\varepsilon\left[\left(a/r \right)^{12} - \left(a/r \right)^{6} \right]$$

pro Coulombův potenciál $\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left[\dfrac{q_a q_b}{8\pi\varepsilon_0 \, m_{ab} \, \mathrm{v}_{ab}^2} \right]^2 \dfrac{1}{\sin^4\left(\theta/2\right)}$

Apendix – Odvození jádra Fokker-Planckova srážkového integrálu

Nejdříve spočteme Fourierovu transformaci Coulombova potenciálu

$$U_{ab}(r) = \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0\, r} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{ab}(\vec{k}) = \int U_{ab}(r)\exp(-i\vec{k}\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{e}^{-i\vec{k}\vec{r}}}{r}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\iiint \frac{\mathrm{e}^{-ikr\cos\theta}}{r} r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\int r\,\mathrm{d}r\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{ikry}\,\mathrm{d}y = \frac{4\pi}{k}\int_0^{\infty}\sin kr\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{k^2}$$

a tedy

$$\Phi_{ab}(\vec{k}) = \frac{q_a q_b}{\varepsilon_0\, k^2}$$

$$U_{ab}(\vec{r}) = \int \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\exp(i\vec{k}\vec{r}) \qquad \frac{\partial U_{ab}(\vec{r})}{\partial r_j} = i\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\exp(i\vec{k}\vec{r})$$

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t\,\frac{\partial}{\partial r_{aj}}U_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b + \vec{\mathrm{v}}\,t|) = \int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t\; i\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}_a-\vec{r}_b)+i\vec{k}\vec{\mathrm{v}}t} =$$

$$= i\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}_a-\vec{r}_b)}\overbrace{\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t\;\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{\mathrm{v}}t}}^{\pi\delta(\vec{k}\vec{\mathrm{v}})} = i\pi\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}_a-\vec{r}_b)}\,\delta(\vec{k}\,\vec{\mathrm{v}})$$

$$\int d\vec{r}_b\; i\int k_i' \frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k}')\,\mathrm{e}^{i\vec{k}'(\vec{r}_a-\vec{r}_b)}\; i\pi\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\vec{k}(\vec{r}_a-\vec{r}_b)}\;\delta\left(\vec{k}\,\vec{\mathrm{v}}\right)=$$

$$=-\int k_j\,\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k})\,\delta\left(\vec{k}\,\vec{\mathrm{v}}\right)\underbrace{\int k_i'\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{(2\pi)^3}\Phi_{ab}(\vec{k}')\;\underbrace{\int d\vec{r}_b\;\mathrm{e}^{i(\vec{k}+\vec{k}')(\vec{r}_a-\vec{r}_b)}}_{=(2\pi)^3\delta(\vec{k}+\vec{k}')}}_{=-k_i\Phi(-\vec{k})}=$$

$$=\pi\int\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{(2\pi)^3}\,k_ik_j\,\Phi^2_{ab}(k)\;\delta\left(\vec{k}\,\vec{\mathrm{v}}\right)\qquad\qquad\left(\Phi(-\vec{k})=\Phi^*(\vec{k})=\Phi(k)\right)$$

bez újmy na obecnosti lze předpokládat $\vec{\mathrm{v}}=\left(\mathrm{v},0,0\right)$, pak platí

$$\int k_x\Phi^2\left(k\right)\delta(k_x\mathrm{v})\,\mathrm{d}k_x=0\quad\wedge\quad\int k_x^2\,\Phi^2\left(k\right)\delta(k_x\mathrm{v})\,\mathrm{d}k_x=0$$

a integrál = 0 pro $i=x\vee j=x$, smíšená *yz* komponenta též = 0

$$I_{zz}=I_{yy}=\pi\iint\frac{\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z}{(2\pi)^3}k_y^2\int\mathrm{d}k_x\Phi^2_{ab}(k)\,\delta\left(k_x\mathrm{v}\right)=\pi\iint\frac{\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z}{(2\pi)^3}\frac{k_y^2}{\mathrm{v}}\Phi^2_{ab}(\sqrt{k_y^2+k_z^2})=$$

$$=\frac{\pi}{\mathrm{v}}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{k\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\varphi}{(2\pi)^3}\left(\frac{q_aq_b}{\varepsilon_0k^2}\right)^2k^2\sin^2\varphi=\frac{q_a^2q_b^2}{8\pi\,\varepsilon_0^2\,\mathrm{v}}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}k}{k}\triangleq\frac{q_a^2q_b^2}{8\pi\,\varepsilon_0^2\,\mathrm{v}}\ln\Lambda_{ab}$$

a teď již jen transformujeme pro libovolný směr rychlosti

protože jediný směr je $\vec{v}$, mám k dispozici tenzory δ_{ij} a $v_i v_j / v^2$

pro $\vec{v} = (v, 0, 0)$ je

$$I_{ij} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} - \frac{v_i\, v_j}{v^2}$$

$$\Rightarrow \quad I_{ij}^{ab}(v) = \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\, \varepsilon_0^2} \frac{v^2\, \delta_{ij} - v_i\, v_j}{v^3} \ln \Lambda_{ab}$$