Iontozvukové vlny (elektrostatické nízkofrekvenční vlny)

jsou podélné vlny podobné klasickému zvuku

v plynu $$c_s = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma k_B T}{M}\right)^{1/2}$$

plazma – zvuk pomalý pro elektrony, rychlý pro ionty

Hustota elektronů je v každém okamžiku v rovnováze s okamžitým potenciálem:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\Phi_1}{k_B T_e}\right) = n_0\left(1 + \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} + \ldots\right)$$

$$n_1 = n_0 \frac{e\Phi_1}{k_B T_e}$$ elektrony jsou izotermální ($\gamma = 1$)

Elektrické pole lze odvodit i z požadavku zachování kvazineutrality–suma sil na elektrony = 0

$$eE_1 = -e\nabla\Phi_1 = -\frac{1}{n_0}\nabla p_{e1} = -\frac{k_B T_e}{n_0}\nabla n_1 = -ikk_B T_e \frac{n_1}{n_0} \qquad \Rightarrow E_1$$

hydrodynamické rovnice pro iontovou tekutinu

$$i\omega n_{i1} = n_{i0} ik \mathrm{v}_{i1} \qquad n_{i0} = \frac{n_0}{Z}$$

$$-i\omega M \mathrm{v}_{i1} = -\frac{\nabla p_{i1}}{n_{i0}} + ZeE_1$$

$$E_1 = -\nabla\Phi = -ik\Phi_1$$

Poissonova rovnice není potřeba

$$\cancel{-\varepsilon_0 \Delta\Phi_1 = Zen_{i0} - en_1} = e\left(Zn_{i1} - n_1\right)$$

pomalý pohyb $\rightarrow$ kvazineutralita $Zn_{i1} = n_1$

vyjádříme $\Phi_1 = \frac{k_B T_e}{en_0} n_1 = \frac{k_B T_e}{en_0} Zn_{i1}$ $\Rightarrow$ pohybová rovnice

---

$$-i\omega M n_{i0} \mathrm{v}_{i1} = -ik\gamma_i k_B T_i n_{i1} - ikk_B T_e Zn_{i1}$$ - pohyb iontů

$$i\omega n_{i1} = n_{i0} ik \mathrm{v}_{i1}$$ rovnice kontinuity

---

$\Rightarrow$disperzní vztah
$$\omega^2 = \underbrace{\left(\frac{\gamma_i k_B T_i + Z k_B T_e}{M} \right)}_{c_s^{\,2}} \cdot k^2$$

obvykle ionty adiabatické $\gamma_i = 5/3$

Pokud je $ZT_e \approx T_i$, pak je silný bezesrážkový útlum na iontech,
fázová rychlost $c_s \approx$ iontová tepelná rychlost

Iontozvukové vlny pro $ZT_e >> T_i$ slabě tlumené

zvuková rychlost $$c_s \simeq \sqrt{\frac{Z k_B T_e}{M}}$$

Použité plazmatické přiblížení neplatí pro velká k srovnatelná s λ_{De}^{-1}. Proto odvodíme disperzní vztah bez plazmatického přiblížení:

$$\nabla \vec{E}_1 = -\Delta\Phi_1 = k^2\Phi_1 = e\left(Zn_{i1} - n_{e1}\right)/\varepsilon_0$$

$$n_{e1} = \frac{e\Phi_1}{k_B T_e} n_0$$

dosadíme do Poissonovy rovnice

$$\Phi_1\left(k^2 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e}\right) = \frac{Zen_{i1}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_1 = \frac{Zen_{i1}}{\varepsilon_0}\frac{\lambda_{De}{}^2}{1 + k^2\lambda_{De}{}^2}$$

dosadíme potenciál Φ_1 do pohybové rovnice iontů

$$\frac{\omega}{k} = \left(\frac{Zk_B T_e}{M} \frac{1}{1 + k^2 {\lambda_{De}}^2} + \frac{\gamma_i k_B T_i}{M} \right)^{1/2}$$

Disperzní vztah iontozvukové vlny se při započtení odchylky od kvazineutrality liší jen členem $k^2 {\lambda_{De}}^2$,

nejjednodušší vztah pro $k >> {\lambda_{De}}^{-1}$ a $T_i = 0$

$$\omega^2 = \frac{n_0 Z e^2}{\varepsilon_0 M} = \frac{n_{i0} Z^2 e^2}{\varepsilon_0 M} = {\omega_{pi}}^2$$

… iontová plazmová frekvence

Elmg. vlny v plazmatu bez vnějšího magnetického pole B_0

Maxwellovy rovnice

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}$$

převedeme na vlnovou rovnici

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Vliv plazmatu dán hustotou vysokofrekvenčního proudu $\vec{j}$ (elektronový dominuje)
Fluidní rovnice pro elektrony – rovnice pro střední rychlost elektronového plynu

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + (\vec{v}_e \nabla)\, \vec{v}_e = -\frac{1}{n_e m_e}\nabla p_e - \frac{e}{m_e}\left(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}\right)$$

Studujeme lineární (tj. slabou) elektromagnetickou vlnu, linearizace

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \quad \vec{B} = \vec{B}_1 \quad \vec{j} = \vec{j}_1 \quad \vec{v}_e = \vec{v}_1 \quad n_e = n_0 + n_1 \quad p_e = p_0 + p_1$$

Magnetická síla $-e\left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_1\right)$ zanedbána (malá 2. řádu)

$$\vec{v}_1 \| \vec{E}_1, \ \mathrm{div}\vec{E}_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\vec{v}_1 = 0, \ n_1 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$$

elektronová hustota se nemění, rovnice pro elektronovou rychlost se zjednoduší

$$\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e}\vec{E}_1$$

proudová hustota

$$\vec{j}_1 = -en_0\vec{v}_1 = -en_e\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = -en_e\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{e^2 n_e}{m_e}\vec{E}_1$$

Pro monochromatickou vlnu s frekvencí ω a časovou závislostí exp(-iωt)

$$\vec{v}_1 = -\frac{ie\vec{E}_1}{m_e\omega} \qquad \vec{j}_1 = \sigma\vec{E}_1 = \frac{ie^2 n_e}{m_e\omega}\vec{E}_1$$

Relativní permitivita pro elektromagnetickou (příčnou) vlnu ε_r^{tr}

$$\varepsilon_r^{tr} = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

(není prostorová dispersze)

Vložíme vztah pro hustotu proudu do vlnové rovnice

$$-\Delta\vec{E}_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}_1}{\partial t^2} = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}_1}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\vec{E}_1$$

Pro vlnu s vlnovým vektorem $\vec{k}$ získáme disperzní vztah

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2$$

Jestliže započteme i iontový proud, pak $\omega_{pe}^2 \to \omega_p^2$

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r^{tr} = \omega^2 (1 - \omega_p^2 / \omega^2) / c^2$$

fázová $\mathrm{v}_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{c^2 + \omega_p^2 / k^2}$ grupová $\mathrm{v}_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c^2 k / \omega = c^2 / \mathrm{v}_\varphi$

pro $\omega < \omega_p \quad \to \quad k^2 < 0$ vlna se nešíří, do plazmatu proniká pouze skin-efektem

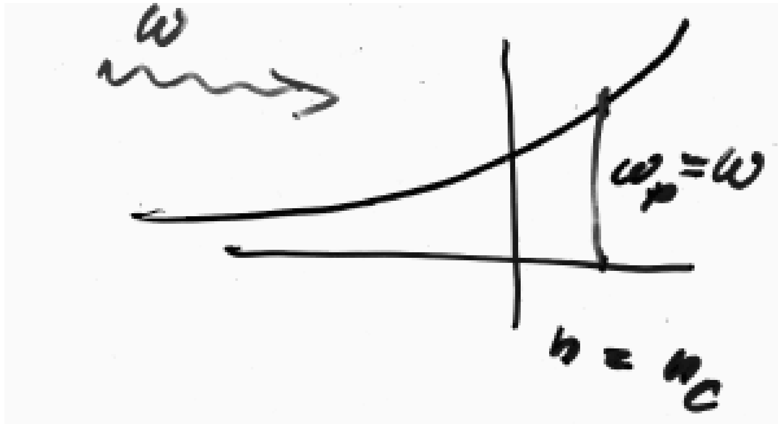
pro $\omega \to \omega_{p+} \qquad k \to 0$ a dochází k úplnému odrazu (mezní frekvence)

!! žádná absorpce v bezesrážkovém přiblížení

$$n_c = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2}$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon_r) = 1 - \frac{n_e}{n_c}$$

n_c - kritická hustota



$n_c = 10^{21}\,\mathrm{cm}^{-3}$ → λ=1,06 μm (Nd-laser)

$n_c = 10^{19}\,\mathrm{cm}^{-3}$ → λ=10,6 μm (CO_2-laser)

$n_c = 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-3}$ → λ=1,06 cm (cm vlny)

Srážková absorpce (také nazývána **inverzní brzdné záření**)

Srážky elektronů s jinými typy částic způsobují absorpci (pro jednoduchost dominance budeme předpokládat dominanci elektron-iontových srážek)
Absorpce fotonu při srážce s iontem je proces, do kterého se při **obrácení času** změní emise brzdného záření.
Odvození absorpčního koeficientu z mikroskopického popisu – zdlouhavé.

Makroskopicky - srážky $\Rightarrow$ tření, které zpomaluje oscilace elektronů
Rovnice pro rychlost elektronového plynu se započtením elektron-iontové srážkové frekvence ν_{ei}

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \nu_{ei}\vec{v}_1 = -\frac{e}{m_e}\vec{E}_1$$

Pro monochromatickou vlnu o frekvenci ω s časovou závislostí exp(-iωt)

$$\vec{v}_1 = -\frac{ie\vec{E}_1}{m_e\left(\omega + i\nu_{ei}\right)}$$

$$\vec{j}_1 = \sigma\vec{E}_1 = \frac{ie^2 n_e}{m_e\left(\omega + i\nu_{ei}\right)}\vec{E}_1 = i\frac{\omega e^2 n_e}{m_e\left(\omega^2 + \nu_{ei}^2\right)}\vec{E}_1 + \frac{\nu_{ei}e^2 n_e}{m_e\left(\omega^2 + \nu_{ei}^2\right)}\vec{E}_1$$

Část proudu ve fázi s elektrickým polem $\Rightarrow$ Joulův ohřev, absorpce
Výkon absorbovaný v jednotce objemu

$$W = \left\langle \vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1 \right\rangle = \frac{1}{2}\Re\left\{\vec{j}_1 \cdot \vec{E}_1^{\star}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\nu_{ei}e^2 n_e}{m_e\left(\omega^2 + \nu_{ei}^2\right)}|\vec{E}_1|^2$$

Relativní permitivita - komplexní s kladnou imaginární částí

$$\varepsilon_r^{tr} = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega\left(\omega + i\nu_{ei}\right)} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} + i\frac{\nu_{ei}}{\omega}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2}$$

Vlnový vektor je pak dán výrazem

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r^{tr} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2} + i\frac{\nu_{ei}}{\omega}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2}\right)$$

Imaginární část – pokles amplitudy elektrického pole ve směru šíření

Absorbovaná energie je transformována do **elektronové tepelné energie**, ionty nejsou přímo ohřívány. Jelikož je výměna energie mezi elektrony a ionty pomalý proces, elektronová teplota v koroně laserových terčů je obvykle vyšší než iontová teplota.

Kolmý dopad elektromagnetické vlny na rovinné plazma

Permitivita závisí jen na souřadnici x ($\varepsilon_r = \varepsilon_r(x)$) a vlnový vektor je ve směru osy x

$$\mathrm{rot}\, E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \Delta$$

$$\mathrm{rot}\, B - \mu_0 \frac{\partial D}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0 = \varepsilon\ \mathrm{div}\,\vec{E} + \underbrace{\vec{E}\nabla\varepsilon}_{0} \qquad \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

pokud charakteristický čas změn hustoty $\tau >> \omega^{-1}$ $\quad \varepsilon_r(x,t) \to \varepsilon_r(x)$

$$\Delta E - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \qquad E \sim e^{-i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r E = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r$$ stacionární vlnová rovnice

pokud $\lambda \left|\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right| << 1 \ \Rightarrow$ ε pomalu proměnné v prostoru

WKB přiblížení

$$E = E_+(x)e^{i\int k\,\mathrm{d}x} + E_-(x)e^{-i\int k\,\mathrm{d}x} \qquad E'' = \left[\underbrace{-k^2 E_+}_{0.\,\text{řád}} + \underbrace{2ik\frac{\partial E_+}{\partial x} + i\frac{\partial k}{\partial x}E_+}_{1.\,\text{řád}} + \underbrace{\frac{\partial^2 E_+}{\partial x^2}}_{2.\,\text{řád}}\right]e^{i\int k\,\mathrm{d}x} + \dots$$

0. řád $\quad -k^2 E_+ = \dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r E_+ \quad$ splněno

1. řád $\quad 2ik\dfrac{\partial E_+}{\partial x} + i\dfrac{\partial k}{\partial x}E_+ = 0 \qquad E \sim k^{-1/2} \sim \varepsilon_r^{-1/4}$

$$E = \frac{E_{0+}}{\sqrt[4]{\varepsilon_r}}e^{i\int k\,dx} + \frac{E_{0-}}{\sqrt[4]{\varepsilon_r}}e^{-i\int k\,dx}$$

WKB řešení (žádný odraz!!)

Existují profily hustoty (permitivity), kde WKB řeší úlohu přesně

Okolí kritického bodu – $\varepsilon \to 0$ - WKB neplatí nalezneme řešení pro lineární profil hustoty n_{e}

relativní permitivita $\varepsilon_r = -ax + iS$ kde $S = \dfrac{\nu_c}{\omega}$ v kritické ploše

Hustota plazmatu tedy roste ve směru osy x – pole musí jít k 0 pro $x \to \infty$

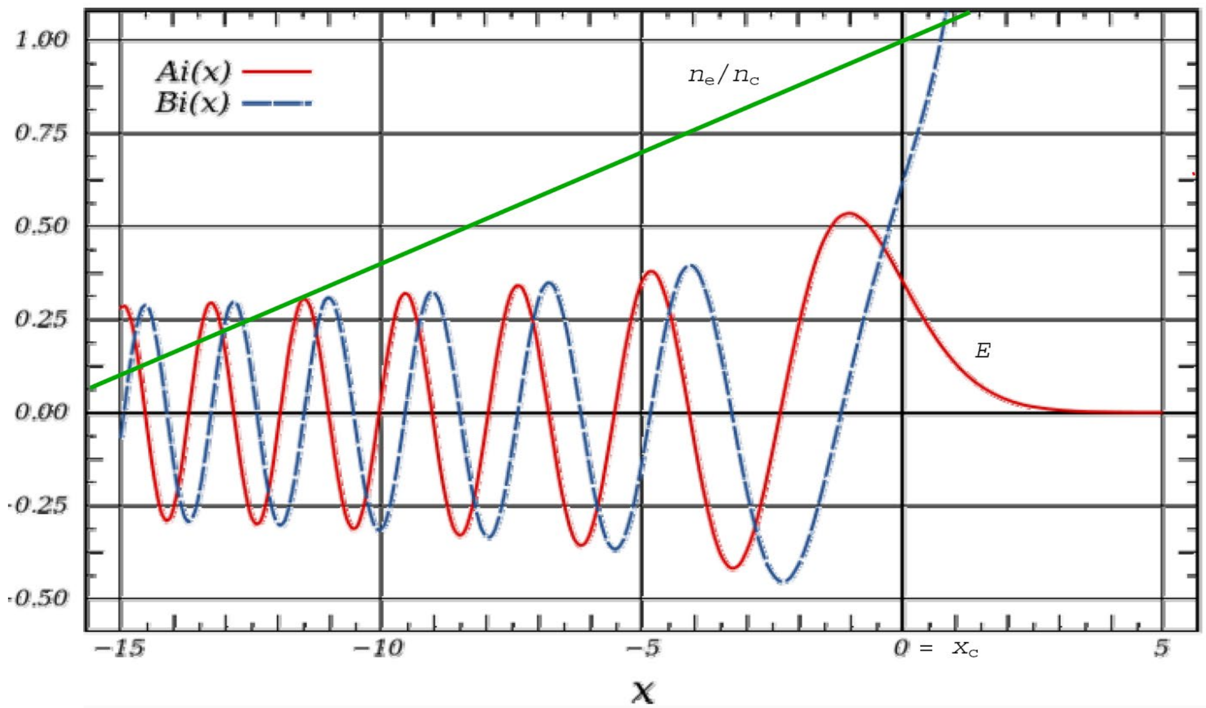
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(-ax + iS\right) E = 0 \qquad \xi = \left(\frac{\omega}{ca}\right)^{2/3}\left(-ax + iS\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0$$

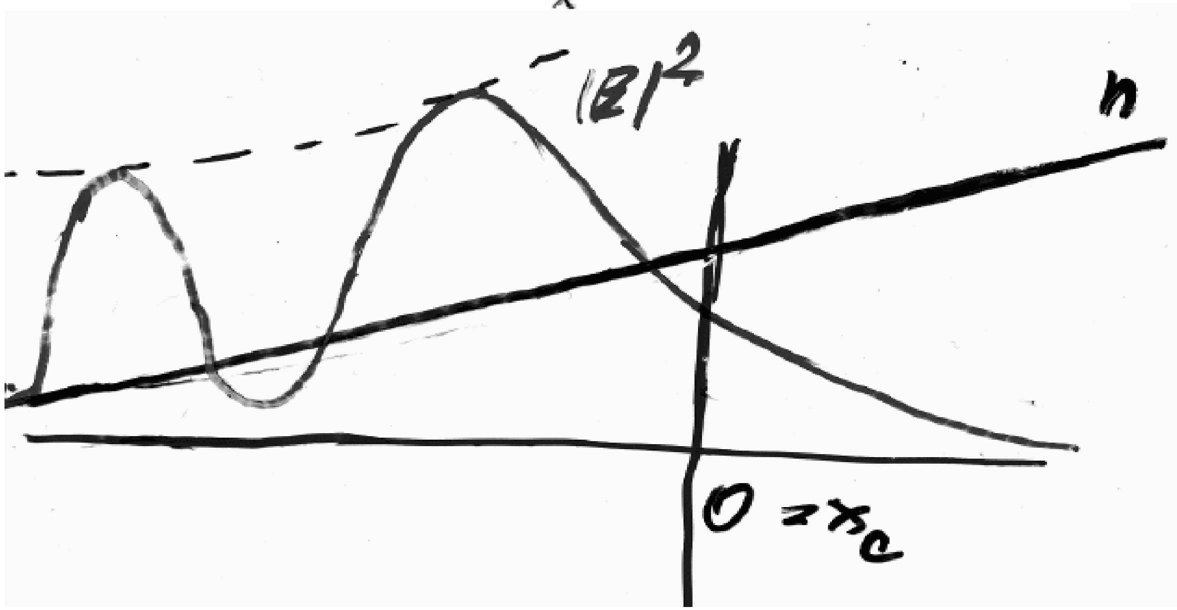
Existuje přesné řešení splňující okrajovou podmínku

Ai = Airyho funkce

$$E = 3\,C\,\mathrm{Ai}\left(-\xi\right)$$

$$= \begin{cases} C\xi^{1/2}\left[\mathrm{J}_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}\xi^{3/2}\right) + \mathrm{J}_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\right] & \mathrm{Re}(\xi) > 0 \\ C\left(-\xi\right)^{1/2}\left[\mathrm{I}_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}\left(-\xi\right)^{3/2}\right) + \mathrm{I}_{-1/3}\left(\dfrac{2}{3}\left(-\xi\right)^{3/2}\right)\right] & \mathrm{Re}(\xi) < 0 \end{cases}$$


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
Ai(x)
Bi(x)
n_e/n_c
E
−15
−10
−5
$0 = x_c$
5
x

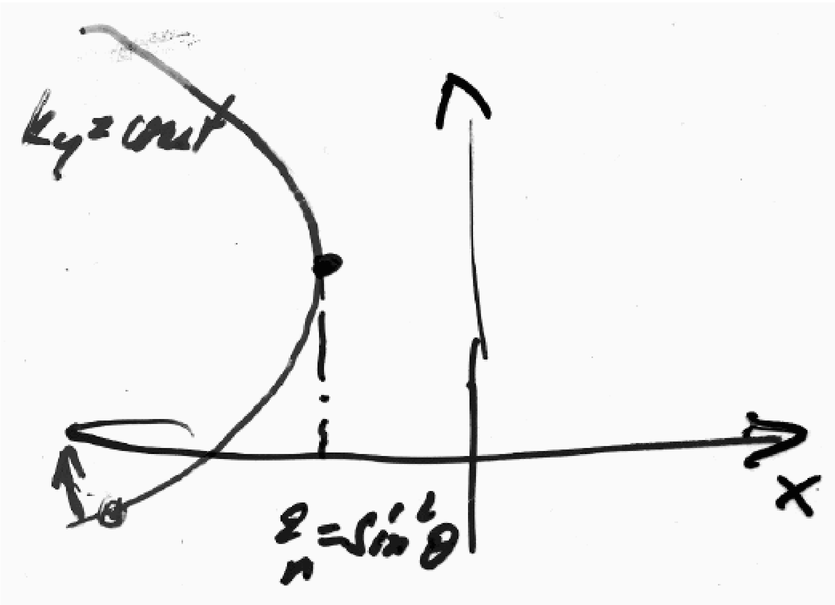

$|E|^2$
n
$0 = x_c$

Šikmý dopad vlny a rezonanční absorpce

Permitivita závisí jen na souřadnici x ($\varepsilon_r = \varepsilon_r(x)$) a vlnový vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$

$$k^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2 = k_x{}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta_0$$

bod odrazu $\mathrm{Re}(\varepsilon_r) = \sin^2\theta_0$



$$\left.\begin{matrix}\odot\, E \\ \nwarrow B\end{matrix}\right\}$$ TE vlna = s-polarizace

$$\left.\begin{matrix}\odot\, B \\ \nwarrow E\end{matrix}\right\}$$ TM vlna = p-polarizace

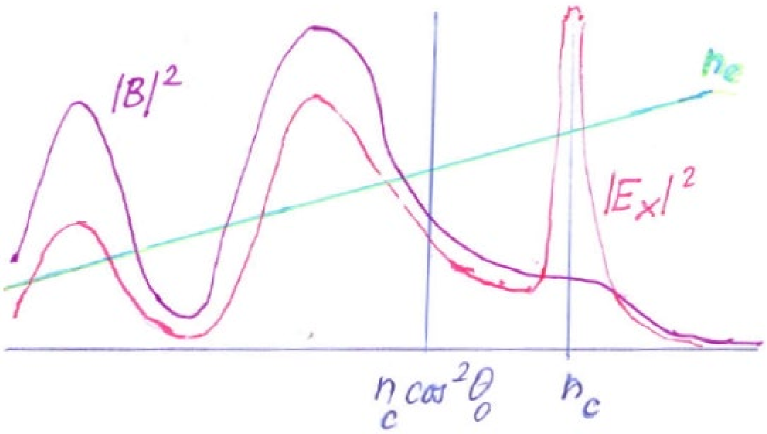
p-polarizace $\quad \vec{E}\cdot\nabla\varepsilon \neq 0 \quad$ div $\vec{E} \neq 0$

$$\frac{d^2B}{dx^2}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx}\frac{dB}{dx}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon_r-\sin^2\theta_0\right)B=0$$

$$E_x=-\frac{k_yB}{\omega\mu_0\varepsilon}=-\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\cdot\frac{B}{\varepsilon_r}$$ v kritické ploše singularita

<u>Rezonanční absorpce</u> $t\to l$ (příčná elmg. vlna se mění v podélnou plazmovou)

- l nemůže z plazmatu uniknout – absorpce srážkami nebo bezesrážkově



v principu lineární jev – existuje i při malých intenzitách I

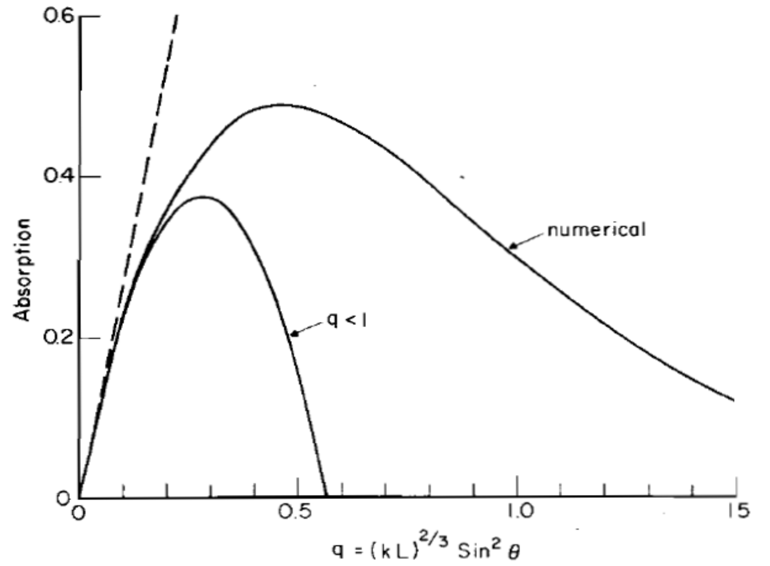
při $\frac{\nu}{\omega}\to 0$ $\quad A=f(q)\quad q=(k_0L)^{2/3}\sin^2\theta_0$

$\theta_0\to 0\quad E_x\big|_{x_c}\to 0$ kolmý dopad – není E_x

$L\to\infty\quad E_x\big|_{x_c}\to 0$ bod odrazu daleko od x_c

K rezonanční absorpci dochází v důsledku skinování pole od bodu odrazu do kritické plochy, kde je pole elmg. vlny v rezonanci s plazmovou vlnou a pro p-polarizaci vytváří poruchy hustoty náboje, které obě vlny vážou navzájem.

$$\frac{B(x_c)}{B_0} \cong \frac{2(\pi\cos\theta_0)^{1/2}}{3^{1/3}\Gamma\left(1/3\right)(k_0 L)^{1/6}}$$ (pro malá q)



$q << 1$ $$A = q\left(1 - \frac{2}{3}q\right)$$

$q >> 1$

$$A = 2\exp\left(-\frac{4}{3}q^{3/2}\right) - \exp\left(-\frac{8}{3}q^{3/2}\right)$$

maximální $A \approx 0.5$ při $q \approx 0.65$

srážky $\varepsilon(x_c) = i\frac{\nu_c}{\omega}$ $$E_z(x_c) = \frac{\sin\theta_0}{\frac{\nu_c}{\omega}} B(x_c) \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Šířka maxima Δ

$$\underbrace{\frac{|n-n_c|}{n_c}}_{\frac{\Delta}{L}} = \frac{\nu_c}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\nu_c}{\omega} L$$

Absorbovaná energie

$$W = \frac{\omega}{c} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{\nu_{ei}}{\omega} |E|^2 \, dz \simeq \frac{\nu_c}{\omega} \frac{\omega}{c} \left| E_z(x_c) \right|^2 \cdot \Delta = \frac{\omega}{c} \frac{\nu_c}{\omega} \frac{\sin^2 \theta_0}{\left(\frac{\nu_c}{\omega} \right)^2} B^2(x_c) c^2 \cdot \left(\frac{\nu_c}{\omega} \right) L$$

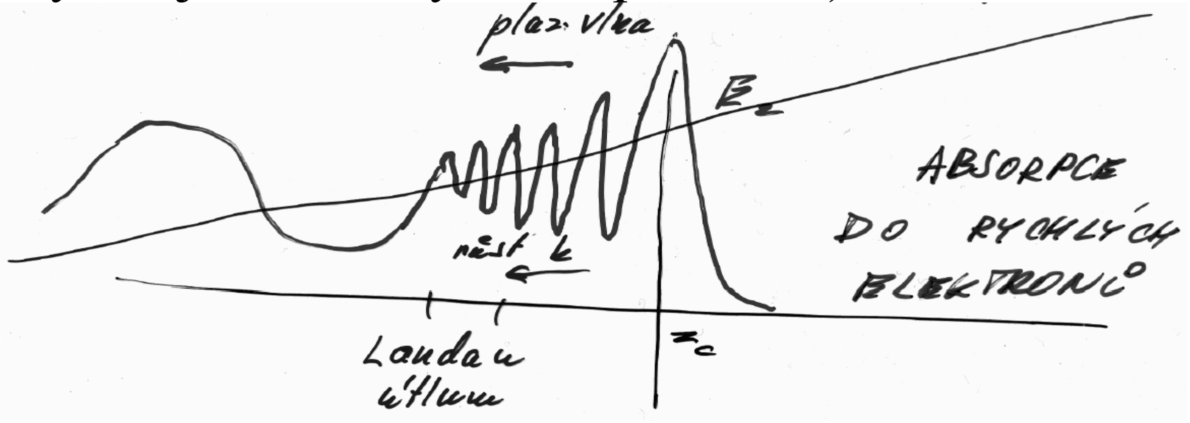
$$W = \omega c B^2(x_c) \times L \sin^2 \theta_0$$

nezávisí na ν_c

Teplé plazma (prostorová disperze podélného pole)

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D} = \varepsilon_r^{tr}\vec{E} + \frac{3 v_{Te}^{2}}{c^2}\left[\text{grad div}\vec{E} - \frac{1}{3}\frac{\nabla \varepsilon_r^{tr}}{\varepsilon_r^{tr} - 1}\text{div}\vec{E}\right]$$

Plazmová vlna se šíří z kritické plochy do řidšího plazmatu, při poklesu hustoty roste vlnové číslo *k*, a tedy klesá v_φ tak, až se stane srovnatelnou s tepelnou rychlostí ⇒ Landaův útlum (urychluje elektrony ven z plazmatu)



Při vyšších intenzitách se plazmová vlna tlumí nelineárním mechanismem lámání vln (wavebreaking) – energie je předána malé skupině tzv. „horkých (rychlých) elektronů“. Elektrony jsou urychlovány jak do terče, tak i k hranici plazmatu s vakuem, kde se ale většina elektronů odrazí v elektrostatickém poli dvojvrstvy („sheath“) zpět do terče.

Nelinearity při šíření elektromagnetických vln v plazmatu

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}$$

A. $\rightarrow m_e$ ***– relativistická nelinearita***

$$m_e = \frac{m_{e0}}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}} \approx \frac{m_{e0}}{\sqrt{1 - \frac{e^2 \left|E_L\right|^2}{2 m_e{}^2 c^2 \omega^2}}}$$

(pro $\mathrm{v}_{osc} >> \mathrm{v}_{Te}$)

pokud $\mathrm{v}_{osc} << c \quad \Rightarrow$

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_{e0} \omega^2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{e^2 \left|E_L\right|^2}{m_{e0}^2 c^2 \omega^2} \right)$$

nelinearita $\delta\varepsilon \sim \left|E_L\right|^2 / \omega^2 \sim I \lambda^2$ - kvadratická nelinearita – permitivita **roste** s kvadrátem pole

B. $\rightarrow n_e$ ***- změnu hustoty způsobí ponderomotorická síla nebo gradient tlaku***

a)ponderomotorická nelinearita

$$F_p = -\frac{\rho}{2\rho_c}\varepsilon_0 \nabla \left\langle E^2 \right\rangle = -\frac{\rho}{4\rho_c}\varepsilon_0 \nabla \left| E_L \right|^2$$

$$F_p - \nabla p = 0$$

Ponderomotorická síla vytlačuje plazma z oblasti intenzivního pole $\Rightarrow$ vznikne grad hustoty $\Rightarrow$ grad tlaku.

V rovnováze grad tlaku vyrovnává ponderomotorickou sílu:

$$-\frac{n_e}{4n_c}\varepsilon_0 \nabla \left| E_L \right|^2 - k_B T_e \nabla n_e = 0 \quad \Rightarrow \quad n_e = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_0 \left| E_L \right|^2}{4 k_B T_e n_c}\right)$$

pro malé I – kladná kvadratická nelinearita $\delta\varepsilon \sim \left| E_L \right|^2 / n_c \sim I \lambda^2$

b) tepelná – v maximu pole se plazma nejvíce zahřeje a hustota se sníží, aby byl tlak konstantní

Projevy nelinearity

A. Vznik filamentů (intenzivních zón uvnitř laserového svazku)

Kvadratické prostředí $\varepsilon_R = \varepsilon_L + \varepsilon_2 \left\langle E^2 \right\rangle$

Vlna $E = E_0 \cos\left(k_0 x - \omega t\right)$ $\qquad E \parallel z \qquad \delta E \parallel z$

Porucha (pro jednoduchost periodická ve směru kolmém k E)

$$\delta E = \left[e_1\left(x\right)\cos\left(k_0 x - \omega t\right) + e_2\left(x\right)\sin\left(k_0 x - \omega t\right)\right]\cdot \cos(k_\perp y)$$

e_1 je složka poruchy ve fázi s hlavní rovinnou vlnou

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \varepsilon_2 \left\langle \left(E + \delta E\right)^2 \right\rangle = \underbrace{\varepsilon_L + \frac{1}{2}\varepsilon_2 {E_0}^2}_{\varepsilon_m} + \varepsilon_2 e_1\left(x\right) E_0 \cos(k_\perp y)$$

porucha pole vyvolává poruchu permitivity periodickou v y

$$k_0{}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_m$$ vlnový vektor v homogenním prostředí

označení $$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + (\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) = \nabla_{\parallel}^2 + \nabla_{\perp}^2$$

$$2ik_0\frac{\partial\delta E}{\partial x} + \nabla_{\perp}^2\delta E + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\varepsilon\, E_0 = 0$$

vlnová rovnice pro poruchu rozepsaná po složkách

$$-2k_0\frac{de_2}{dx} - k_{\perp}{}^2 e_1 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 E_0{}^2 e_1 = 0$$ $\sim\cos\,(k_0x - \omega t)$

$$2k_0\frac{de_1}{dx} - k_{\perp}{}^2 e_2 = 0$$ $\sim\sin\,(k_0x - \omega t)$

Předpoklad: $e_1(x) \sim e^{k_{\parallel}x}$ $$k_{\parallel} = \pm\frac{k_{\perp}}{2k_0}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 E_0{}^2 - k_{\perp}{}^2}$$

Čím větší intenzita záření, tím užší poruchy mohou narůstat max. růst $k_{\parallel} = \dfrac{\omega\,\varepsilon_2\,E_0^{\,2}}{4\,c\sqrt{\varepsilon_m}}$ pro $k_{\perp}^{\,2} = \dfrac{\omega^2}{2c^2}\varepsilon_2 E_0^{\,2}$

Laserový svazek se nakonec rozpadne do několika intenzivních zón - při pozorování z boku se tvoří vlákna (filamenty)

B. Autofokuzace (samofokuzace - self-focusing)

Laserový svazek se fokusuje jako celek – při kvadratické nelinearitě se pro velké *I* dříve vytvoří filamenty

Vlnová rovnice (ε_L je lineární a $\delta\varepsilon$ nelineární část permitivity)

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(\varepsilon_L + \delta\varepsilon\right)E\right] = 0$$

$$\xi = t - \frac{x}{\mathrm{v}_g}$$

$$E = \Psi\left(x, y, z, \xi\right)\exp\left(ikx - i\omega t\right)$$

Ψ je pomalu proměnná komplexní amplituda vlny

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\nabla_{\perp}^{2}\right)\Psi=-k^{2}\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon_{L}}\Psi$$

parabolická rovnice

$k^2 = \omega^2 \varepsilon_L / c^2$

$$\Psi = A\exp(i\varphi)$$

Ψ rozepíšeme na reálnou amplitudu a fázi

Rozepíšeme na rovnici pro amplitudu a fázi

$$k\frac{\partial}{\partial x}A^{2}=-\nabla_{\perp}\left(A^{2}\nabla_{\perp}\varphi\right)\ \ldots$$

popisuje transport energie

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi+\frac{1}{2k}\left(\nabla_{\perp}\varphi\right)^{2}-\frac{k}{2}\left(\frac{\nabla_{\perp}^{2}A}{k^{2}A}+\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}\right)=0$$

tvar vlnoplochy

difrakce refrakce

Pro kolimovaný svazek $\nabla_{\perp}\varphi = 0$

K samofokuzaci kolimovaného svazku dochází, pokud je refrakce větší než difrakce

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} > -\frac{\nabla_{\perp}{}^{2} A}{k^{2} A}$$

Pro Gaussovský svazek $$A = A_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$$

V cylindrické geometrii je $$\nabla_{\perp}^{2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

a podmínka pro samofokuzaci má tvar $$\frac{\varepsilon_2 A_0{}^2}{\varepsilon_L} > \frac{2}{k^2 a^2}$$

Protože $A_0{}^2 a^2 \sim P$, k samofokuzaci dochází, pokud je výkon svazku $P > P_0$ – prahový výkon pro samofokuzaci [pro relativistickou NL je $P_0 \simeq 17.5\left(n_c / n_e\right)$ GW].

V ideální situaci by se podle uvedených rovnic Gaussovský svazek fokusoval do bodového ohniska, ale v okolí ohniska neplatí přiblížení pomalu proměnné amplitudy.

Elmg. vlny v plazmatu s vnějším magnetickým polem B_0

Uvažujeme homogenní stacionární magnetické pole B_0.

Plazma je **anizotropní**, odvodíme **tenzor vodivosti** σ_{ij} a z něj spočteme tenzor **vysokofrekvenční permitivity** ε_{ij}.

Budeme uvažovat vysokofrekvenční vlny, a proto pro jednoduchost zanedbáme iontový proud. Dále budeme pro jednoduchost uvažovat chladné plazma a zanedbáme vliv gradientu vysokofrekvenčního tlaku.

Nechť osa z je ve směru B_0. Nechť slabé vysokofrekvenční pole E_1 (B_1 lineární vodivost neovlivní) má frekvenci ω. Plazma je bezesrážkové. Pak

$$\vec{u}_1 = -i\frac{e}{m_e\omega}\vec{E}_1 - i\frac{\omega_c}{\omega}\vec{u}_1 \times \hat{z}$$

Magnetické pole neovlivní vodivost ve směru z a pro směry x, y získáme

$$u_{1x} = -i\frac{\omega e E_{1x}}{m_e\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)} - \frac{e\omega_c E_{1y}}{m_e\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)}$$

$$u_{1y} = \frac{e\omega_c E_{1x}}{m_e\omega^2\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)} - i\frac{\omega e E_{1y}}{m_e\left(\omega^2 - \omega_c^2\right)}$$

Proud je $\vec{j}_1 = -e\, n_{e0}\, \vec{u}_1 = \overleftrightarrow{\sigma}\, \vec{E}_1$ a permitivita je $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\, \varepsilon_{r,ij} = \varepsilon_0 \left(\delta_{ij} + i \dfrac{\sigma_{ij}}{\omega\, \varepsilon_0} \right)$

$$\overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & i \dfrac{\omega_c}{\omega} \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ -i \dfrac{\omega_c}{\omega} \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

Z Maxwellových rovnic získáme vlnovou rovnici

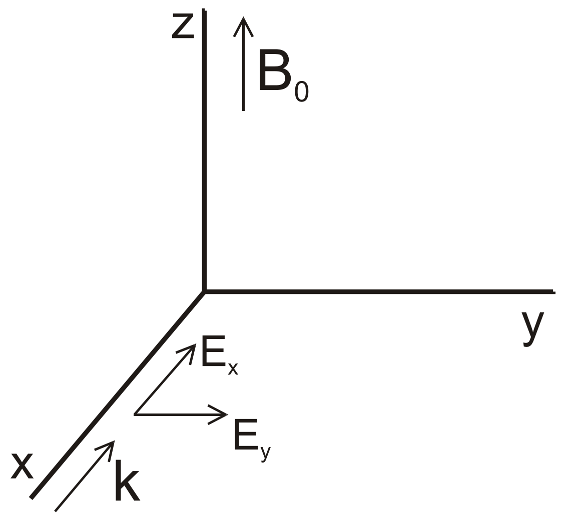
$$i\vec{k} \times \vec{E} - i\omega \vec{B} = 0 \qquad i\vec{k} \times \vec{B} + i\omega\varepsilon_0 \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\vec{k} \times \left(\vec{k} \times \vec{E} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\varepsilon}_r \vec{E} = 0$$

Souřadný systém lze zvolit tak, aby $\vec{k} = \left(k_x, 0, k_z \right)$ a nenulové řešení homogenní rovnice existuje jen, pokud je determinant roven 0.

$$\det\begin{pmatrix} k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,xx} & -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,xy} & -k_xk_z \\ -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,yx} & k_x^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,yy} & 0 \\ -k_xk_z & 0 & k_x^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,zz} \end{pmatrix}=0$$

A. šíření kolmo k magnetickému poli k_z=0

pokud $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ B_0 neovlivní vlnu - **vlna řádná (ordinary)-O**



3. řádek determinantu

$$k_x^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,zz}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega^2=\omega_p^2+c^2k^2$$

$\vec{E} \perp \vec{B}_0$ **vlna mimořádná (extraordinary) - X**

ovlivněna polem B_0 – 1. a 2. řádek a sloupec det.

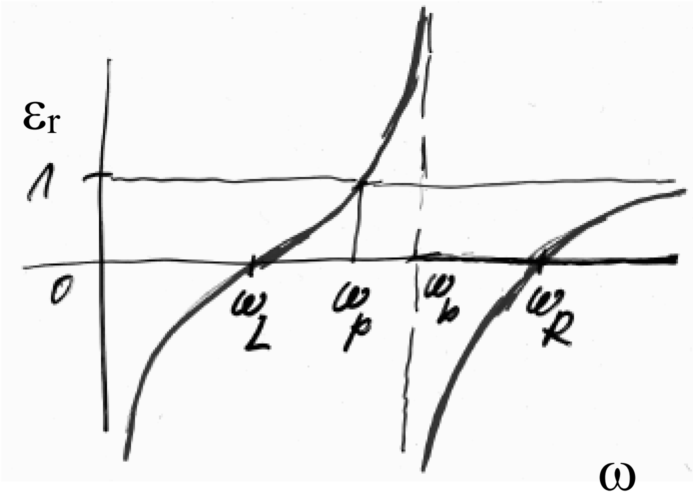
=> $\mathrm{v}_{1y} \Rightarrow F_x \sim \mathrm{v}_{1y}\times B_0 \rightarrow \mathrm{v}_{1x} \Rightarrow j_x \Rightarrow E_x$

Disperzní vztah pro X vlnu je ($\omega_h^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2$)

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2} = \frac{c^2k_x^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$$

Relativní permitivita plazmatu pro vlnu X (kvadrát indexu lomu *n*)

$$\varepsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}\frac{\omega^2 - \omega_p{}^2}{\omega^2 - \omega_h{}^2}$$



permitivita $\varepsilon_r = \pm\infty$ pro $\omega = \omega_h$

permitivita $\varepsilon_r = 0$ pro $\omega_L = \frac{1}{2}\left[-\omega_c + \sqrt{\omega_c{}^2 + 4\omega_p{}^2}\right]$

a pro $\omega_R = \frac{1}{2}\left[\omega_c + \sqrt{\omega_c{}^2 + 4\omega_p{}^2}\right]$

pro $\omega \to \omega_{h-}$ nastává rezonance ($k \to \infty$) $\Rightarrow$ úplná absorpce vlny

bod $\omega \to \omega_{R+}, \omega_{L+}$ jsou mezní frekvence ($k \to 0$)$\Rightarrow$ úplný odraz vlny

B. $k \parallel B_0$ **(šíření podél magnetického pole $k_x = 0$)**

$$\det\begin{pmatrix} k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,xx} & -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,xy} \\ -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,yx} & k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r,yy} \end{pmatrix} = 0$$

Levotočivá (L vlna)

$$\varepsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^{\ 2}}{\omega^2}\frac{1}{1+\frac{\omega_c}{\omega}}$$

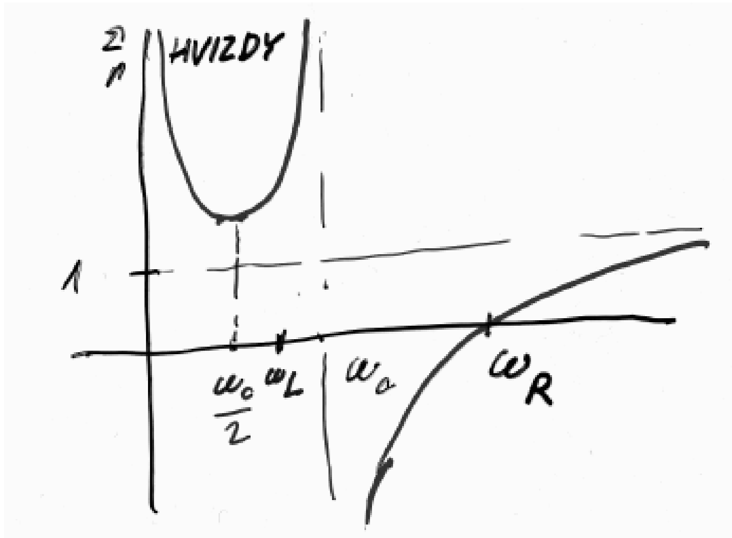
ω_L - mezní frekvence, šíření pro $\omega > \omega_L$

Pravotočivá (R vlna) – cyklotronová rotace elektronů je pravotočivá - rezonance!!

$$\varepsilon_r = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^{\ 2}}{\omega^2}\frac{1}{1-\frac{\omega_c}{\omega}}$$

šíří se pro $\omega > \omega_R$

a pro $\omega < \omega_c$ (hvizdy) – rezonance pro ω_c

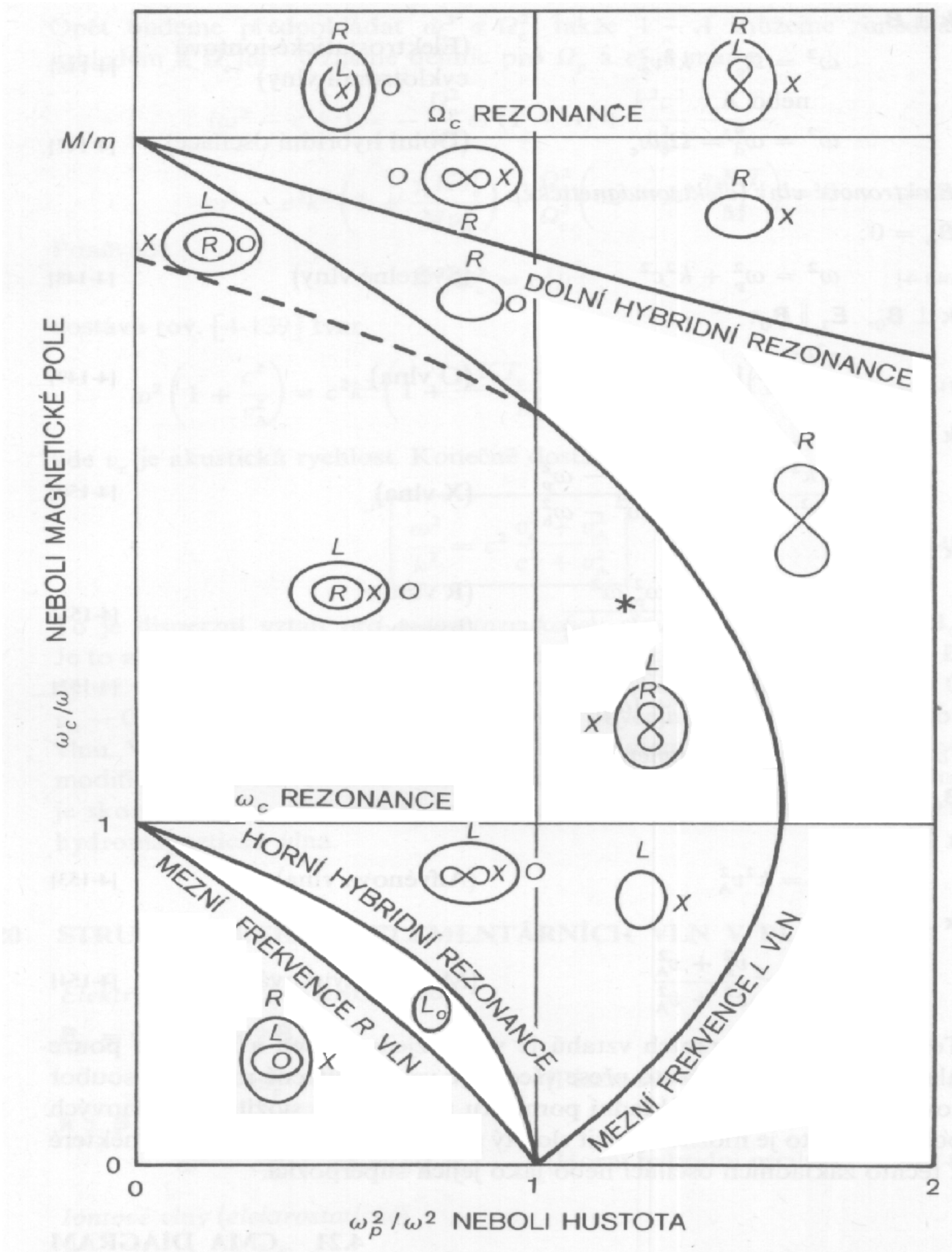


permitivita pro R vlnu

CMA diagram
(pro elektromagnetické vlny)

Obsahuje

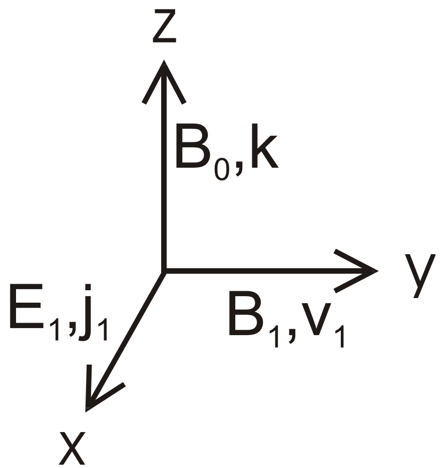
- hranice mezi jednotlivými oblastmi typů šíření
- svisle – šíření podél B, vodorovně – kolmo k B
- závislost fázové rychlosti na směru šíření
- přechod mezi typy vln při změně směru šíření



Iontové elektromagnetické vlny (hydromagnetické vlny)

– existují jen v přítomnosti B_0

a) $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ – **Alfvénova vlna**



elektronová hustota

$$i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1$$

$$\frac{1}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{B}_1 + i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_1 = n_0 e\left(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_e\right)$$

$$0 = -e\vec{E}_1 - e\vec{\mathrm{v}}_e \times \vec{B}_0$$

$$-i\omega M_i \vec{\mathrm{v}}_i = Ze\vec{E}_1 + Ze\vec{\mathrm{v}}_i \times \vec{B}_0$$

pohybové rovnice

$$\mathrm{v}_{ex} = 0 \qquad \mathrm{v}_{ey} = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_0}{B_0{}^2}$$

E×B drift

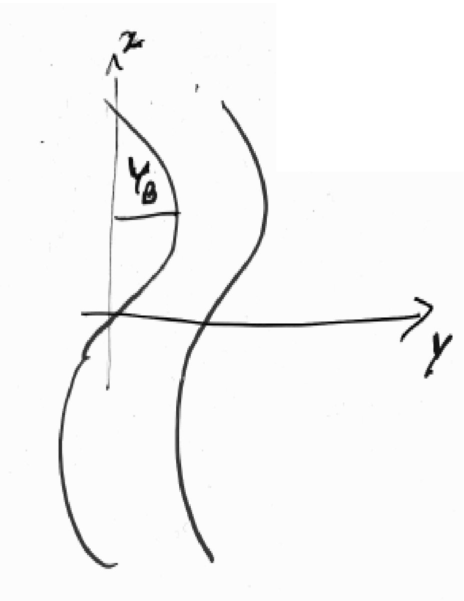
$$\mathrm{v}_{iy} = -i\frac{ZeB_0}{\omega M_i}\mathrm{v}_{ix} = -i\frac{\Omega_c}{\omega}\mathrm{v}_{ix} \qquad \Omega_c = \frac{ZeB_0}{M_i}$$

iontová cyklotronová

$$v_{ix} = i\frac{ZeE_{1x}}{\omega M_i\left(1-\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)} \qquad \omega_{pi}^2 = \frac{Ze^2 n_0}{\varepsilon_0 M_i}$$ iontová plazmová frekvence

dosadíme proud do vlnové rovnice $\Rightarrow$disperzní vztah $$1-\frac{k^2c^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{pi}{}^2}{\Omega_c{}^2-\omega^2}=0$$

pro $\omega^2 << \Omega_c{}^2$ $$\omega^2 = \frac{k^2 v_A{}^2}{1+\left(\frac{v_A}{c}\right)^2}$$ kde $$v_A{}^2 = \frac{c^2\Omega_c{}^2}{\omega_{pi}{}^2} = \frac{c^2 B_0{}^2\varepsilon_0}{\rho_M}$$ Alfvénova rychlost



$$Y_B(z,t) = \int^z \frac{B_y(z',t)}{B_0}dz' \qquad v_B = -i\omega Y_B = -\frac{\omega}{k}\frac{B_y}{B_0} \qquad B_y = \frac{k}{\omega}E_x$$

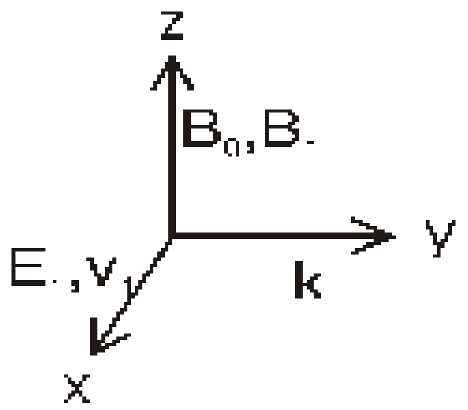
Y_B posun polohy siločáry, v_B rychlost pohybu siločáry

$$\Rightarrow \quad v_B = -\frac{E_x}{B_0} = v_D$$

Plazma se pohybuje stejnou rychlostí jako siločára
Magnetické siločáry jsou „zamrzlé v plazmatu“

Alfvénovy vlny – příčné vlny „na struně“ Struna $\cong$ magnetická siločára
(Hannes Alfvén – Nobelova cena – 1970)

b) $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ – magnetozvuková vlna $\vec{E} \perp \vec{B}_0$



disperzní vztah pro studené plazma

$$\omega^2 = \frac{k^2 \mathrm{v_A}^2}{1 + \frac{\mathrm{v_A}^2}{\mathrm{c}^2}} \approx k^2 \mathrm{v}_A{}^2$$

pro $T_e \neq 0$ působí navíc tlak

$$\omega^2 = k^2 \frac{\mathrm{v_A}^2 + c_s{}^2}{1 + \frac{\mathrm{v_A}^2}{\mathrm{c}^2}} \approx k^2 \left(\mathrm{v}_A{}^2 + c_s{}^2 \right)$$