Základy kinetické teorie – Klimontovičova rovnice

(doručená literatura – D.R. Nicholson, Introduction to plasma theory, kap. 3)

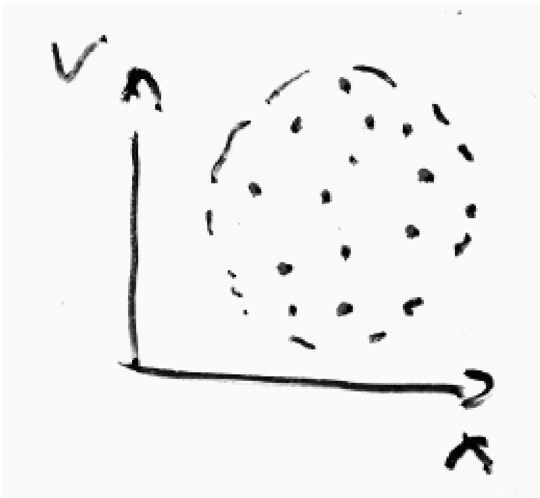
fázový prostor $\left(\vec{x},\vec{\mathrm{v}}\right)$ - 6-ti rozměrný prostor

hustota 1 bodové částice $\vec{x}_1(f),\ \vec{V}_1(t)$ - jediný nenulový bod

$$N(\vec{x},\vec{\mathrm{v}},t)=\delta\left[\vec{x}-\vec{X}_1(t)\right]\delta\left[\vec{\mathrm{v}}-\vec{\mathrm{V}}_1(t)\right]$$

N_{0s} částic druhu „s“ (N_{0s} bodů)

$$N_s(\vec{x},\vec{\mathrm{v}},t)=\sum_{k=1}^{N_{0s}}\delta\left[\vec{x}-\vec{X}_k(t)\right]\delta\left[\vec{\mathrm{v}}-\vec{\mathrm{V}}_k(t)\right]$$



Pohybové rovnice – pro *k*-tou částici

$$\dot{\vec{X}}_k(t)=\vec{V}_k(t)$$

$$m_s\dot{\vec{V}}_k(t)=q_sE^m\left[X_k(t),t\right]+q_s\vec{V}_k(t)\times\vec{B}^m\left[X_k(t),t\right]$$

Rovnice pro pole – index m = mikroskopická pole

$$\operatorname{div} \vec{E}^m = \frac{\rho^m(x,t)}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E}^m + \frac{\partial \vec{B}^m}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B}^m = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{B}^m = \mu_0 \vec{J}^m + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}^m}{\partial t}$$

Mikroskopické hustoty náboje a proudu

$$\rho^m = \sum_{e,i} q_s \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}\, N_s(\vec{x}, \vec{\mathrm{v}}, t) \qquad \vec{J}^m = \sum_{e,i} q_s \int \mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}\, \vec{\mathrm{v}}\, N_s(\vec{x}, \vec{\mathrm{v}}, t)$$

Jak se v čase vyvíjí N_s ?

$$N_s = \sum_{k=1}^{N_{0s}} \delta\left[\vec{x} - \vec{X}_k(t)\right] \delta\left[\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{V}}_k(t)\right]$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{N_{0s}} \dot{\vec{X}}_k \nabla_{\vec{x}} \delta\left[\vec{x} - \vec{X}_k(t)\right] \delta\left[\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{V}}_k(t)\right] \quad -\sum_{k=1}^{N_{0s}} \dot{\vec{\mathrm{V}}}_k \delta\left[\vec{x} - \vec{X}_k(t)\right] \nabla_{\vec{\mathrm{v}}} \delta\left[\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{V}}_k(t)\right]$$

Dosadíme za časové derivace polohy a rychlosti částice

$$\frac{\partial N_s(\vec{x},\vec{\mathrm{v}},t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{N_{0s}} \vec{\mathrm{V}}_k \nabla_x \delta\left[\vec{x}-\vec{X}_k\right]\delta\left[\vec{\mathrm{v}}-\vec{\mathrm{V}}_k\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_{0s}} \left\{ \frac{q_s}{m_s} E^m\left[X_k(t),t\right] + \frac{q_s}{m_s}\vec{\mathrm{V}}_k \times \vec{B}^m\left[X_k(t),t\right] \right\} \times \delta\left[\vec{x}-\vec{X}_k\right] \nabla_{\vec{\mathrm{v}}} \delta\left[\vec{\mathrm{v}}-\vec{\mathrm{V}}_k\right]$$

Využijeme jednoduché relace $a\delta(a-b) = b\delta(a-b)$

$$\frac{\partial N_s}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\nabla_x N_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\vec{E}^m + \vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}^m\right)\nabla_{\mathrm{v}} N_s = 0$$

Klimontovičova rovnice *(kolem roku 1960)*

- nepoužitelná pro popis plazmatu
- hodí se pro odvození dalších rovnic
- obsahuje přesné trajektorie všech částic!

Úplná derivace podle trajektorie částice ve fázovém prostoru – hustota částic se podél trajektorie nemění

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\text{traj}} \nabla_x + \left.\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\right|_{\text{traj}} \nabla_{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} N_s = 0$$

Fluidní interpretace – rychlost a sílu dovnitř do derivací

$$\frac{\partial}{\partial t} N_s + \nabla_x \left(\vec{\mathrm{v}} N_s \right) + \nabla_{\mathrm{v}} \left[\frac{q_s}{m_s} \left(\vec{E}^m + \vec{\mathrm{v}} \times \vec{B}^m \right) N_s \right] = 0$$

analog. ve fázovém prostoru k rovnici kontinuity $\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{\mathrm{v}}) = 0$

Středování přes statistický ansámbl $f_s \left(\vec{x}, \vec{\mathrm{v}}, t \right) \equiv \left\langle N_s \left(\vec{x}, \vec{\mathrm{v}}, t \right) \right\rangle$

Středování polí – hledám střední pole, které vidí částice

$$\vec{E} \equiv \left\langle \vec{E}^m \right\rangle \qquad \vec{B} \equiv \left\langle \vec{B}^m \right\rangle$$

Toto pole může být obecně jiné než pole v makroskopických Maxwellových rovnicích, které je dáno středováním přes prostor (= problém působícího pole – např. v dielektriku se tato pole liší).
V plazmatu střední působící pole = Maxwellovské pole!!

Rozdělíme veličiny na střední hodnoty
a na odchylky od nich (fluktuace)

$$N_s = f_s + \delta N_s$$
$$\vec{E}^m = \vec{E} + \delta \vec{E}$$
$$\vec{B}^m = \vec{B} + \delta \vec{B}$$

Středování Klimontovičovy rovnice

$$\frac{\partial f_s\left(\vec{x},\vec{\mathrm{v}},t\right)}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}\nabla_{\vec{x}} f_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\vec{E} + \vec{\mathrm{v}}\times\vec{B}\right)\nabla_{\vec{\mathrm{v}}} f_s = -\frac{q_s}{m_s}\left\langle\left(\delta\vec{E} + \vec{\mathrm{v}}\times\delta\vec{B}\right)\nabla_{\vec{\mathrm{v}}}\delta N_s\right\rangle$$

levá strana pomalu proměnné
(prostor, čas) => kolektivní jevy

pravá strana - korelace
fluktuací = srážky

Jde v podstatě o zobecněnou Boltzmannovu rovnici
(na levé straně navíc vlastní pole částic, na pravé nejen binární korelace)

Středování Maxwellových rovnic

$$\left\langle \rho^m \right\rangle \equiv \rho = \sum_{e,i} q_s \int d\vec{v}\; f_s(\vec{x},\vec{v},t) \qquad\qquad \left\langle \vec{J}^m \right\rangle \equiv \vec{J} = \sum_{e,i} q_s \int d\vec{v}\,\vec{v}\; f_s(\vec{x},\vec{v},t)$$

středování hustot náboje a proudu

po středování ⇒ **makroskopické** Maxwellovy rovnice

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathrm{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad\qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Pokud zanedbáme všechny korelace, vzniká bezesrážková kinetická rovnice s „vlastním polem“

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathrm{v}\nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)\nabla_{\mathrm{v}} f_s = 0$$

Vlasovova rovnice

Bezesrážkový popis pro rychlé jevy v ideálním plazmatu

Vlasovova rovnice + Maxwellovy rovnice = uzavřený systém

Z úvodu víme

$$\frac{\nu_c}{\omega_{pe}} \approx \frac{\ln \Lambda_e}{\Lambda_e} \approx \frac{\ln N_D}{N_D}$$ v ideálním plazmatu $N_D >> 1$

Myšlený experiment - drobení částic

$n_0 \to \infty$ $\quad m_e \to 0 \quad \Rightarrow \omega_{pe} = konst. \quad e \to 0$

$n_e e = konst. \quad e/m_e = konst. \quad T_e \to 0 \quad \Lambda_e \to \infty \quad \lambda_{De} = konst.$

Velikost fluktuací $\qquad \delta N_s \sim N_0^{1/2} \sim \Lambda_e^{1/2}$

$$\delta E \sim e\delta N_s \sim \frac{1}{N_0} N_0^{1/2} = N_0^{-1/2} \sim \Lambda_e^{-1/2}$$

Kinetická rovnice (středovaná Klimontovičova)

Levá strana $f_s \sim N_0 \sim \Lambda_e$

Pravá strana $(\partial f/\partial t)_c = \delta E \delta N_s \approx konst.$

Pravou stranu tedy můžeme při velkém Λ_e (N_D) zanedbat

Krookův srážkový člen

Někdy potřebujeme srážky započíst alespoň kvalitativně.

Pro rovnovážné (Maxwellovo) rozdělení f_M je $(\partial f/\partial t)_c = 0$, každé jiné rozdělení se srážkami přibližuje k rovnovážnému

$$(\partial f/\partial t)_c = -\nu_c (f - f_M)$$

$\Rightarrow$ Krookův srážkový člen - nejjednodušší možný

Lze zobecnit pro směsi.