Příklady řešení Fokker-Planckovy rovnice

A) Elektron-iontová relaxace

Jde o proces vyrovnávání teploty mezi elektrony a ionty. V prvním přiblížení lze předpokládat homogenní neutrální plazmu a rozdělovací funkce se tedy mění jen v důsledku srážek

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_{ak}} \sum_b \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0^2} \ln \Lambda_{ab} \int \mathrm{d}\vec{p}_b \, \frac{\mathrm{v}_{ab}^2 \, \delta_{kl} - \mathrm{v}_{abk} \, \mathrm{v}_{abl}}{\mathrm{v}_{ab}^3} \left(\frac{\partial f_a}{\partial p_{al}} f_b - f_a \frac{\partial f_b}{\partial p_{bl}} \right)$$

Protože relaxace hybnosti probíhá rychleji než vyrovnávání teplot, lze předpokládat, že elektrony a ionty mají Maxwellova rozdělení s různými teplotami

$$f_a = \frac{n_a}{\left(2\pi m_a k_B T_a\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_a^2}{2 m_a k_B T_a} \right)$$

Pro Maxwellova rozdělení platí
$$\frac{\partial f_a}{\partial p_{al}} f_b - f_a \frac{\partial f_b}{\partial p_{bl}} = f_a f_b \left(\frac{\mathrm{v}_{bl}}{k_B T_b} - \frac{\mathrm{v}_{al}}{k_B T_a} \right)$$

a pro shodné teploty $T_a = T_b$ je tento výraz složkou vektoru rovnoběžného se vzájemnou rychlostí částic a jádro srážkového integrálu je ortogonální k takovému vektoru a tudíž srážky částic se stejnou teplotou nedají žádný příspěvek.

Vypočteme druhý moment rozdělovací funkce

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3}{2}n_a k_B T_a\right) = -\sum_b \frac{q_a^2 q_b^2}{8\pi\varepsilon_0^2 m_a} \ln\Lambda_{ab} \int\int \mathrm{d}\vec{p}_a\, \mathrm{d}\vec{p}_b \mathrm{v}_{ak}\, \frac{\mathrm{v}_{ab}^2\,\delta_{kl} - \mathrm{v}_{abk}\,\mathrm{v}_{abl}}{\mathrm{v}_{ab}^3} \times$$

$$\times f_a f_b \left(\frac{\mathrm{v}_{bl}}{k_B T_b} - \frac{\mathrm{v}_{bl}}{k_B T_a} - \frac{\mathrm{v}_{abl}}{k_B T_a}\right)$$

Poslední člen v závorce je ortogonální, nedá žádný příspěvek a tedy

$$\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}t} = -\sum_b \nu_{Tab}\left(T_a - T_b\right)$$

kde srážková frekvence pro výměnu energie je

$$\nu_{Tab} = \frac{q_a^2 q_b^2}{12\pi\varepsilon_0^2 k_B T_a k_B T_b} \ln\Lambda_{ab} \frac{n_b}{\left(2\pi k_B\right)^3 \left(m_a T_a m_b T_b\right)^{3/2}} \int\int \mathrm{d}\vec{p}_a\, \mathrm{d}\vec{p}_b \mathrm{v}_{ak} \mathrm{v}_{bl} \times$$

$$\times \frac{\mathrm{v}_{ab}^2\,\delta_{kl} - \mathrm{v}_{abk}\,\mathrm{v}_{abl}}{\mathrm{v}_{ab}^3}\ \exp\left(-\frac{p_a^2}{2m_a k_B T_a} - \frac{p_b^2}{2m_b k_B T_b}\right)$$

Nechť indexem *a* jsou označeny elektrony, indexem *b* ionty. Kvadratický člen v rozvoji podle malé iontové rychlosti je nejnižší, který dá nenulový příspěvek. Pak integrál vyjádříme

$$\iint \mathrm{d}\vec{p}_e\,\mathrm{d}\vec{p}_i \mathrm{v}_{ik}\mathrm{v}_{il}\;\frac{\mathrm{v}_e^2\,\delta_{kl}-\mathrm{v}_{ek}\,\mathrm{v}_{el}}{\mathrm{v}_e^3}\;\exp\left(-\frac{p_e^2}{2m_e k_B T_e}-\frac{p_i^2}{2m_i k_B T_i}\right)=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_e}{\mathrm{v}_e}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{p_e^2}{2m_e k_B T_e}\right)\int \mathrm{d}\vec{p}_i\,\mathrm{v}_i^2\,\exp\left(-\frac{p_i^2}{2m_i k_B T_i}\right)=8\,\pi^{5/2}m_e^2 k_B T_e\left(2m_i k_B T_i\right)^{5/2}$$

a po dosazení je

$$\nu_{Tei}=\frac{2m_e}{m_i}\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2\pi}\,q_e^2\,q_i^2\,n_i}{\sqrt{m_e}\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2\left(k_B T_e\right)^{3/2}}\ln\Lambda_{ei}=\frac{2m_e}{m_i}\,\nu_{ei}$$

kde ν_{ei} je efektivní srážková frekvence pro přenos hybnosti. Zde nelze uvažovat nepohyblivé ionty, protože by k přenosu energie nedocházelo.

B) Symetrizace rozdělovací funkce elektronů

Často se stává, že teplota $T_\parallel$ elektronů podél magnetického pole se liší od teploty $T_\perp$ napříč magnetického pole. Proto budeme uvažovat Maxwellovo rozdělení s různou podélnou a příčnou teplotou

$$f_e(\vec{p},t)=\frac{n_e}{2\pi m_e k_B T_\perp(t)\sqrt{2\pi m_e k_B T_\parallel(t)}}\exp\left(-\frac{p_x^2+p_y^2}{2m_e k_B T_\perp(t)}-\frac{p_z^2}{2m_e k_B T_\parallel(t)}\right)$$

Pro jednoduchost zanedbáme srážky mezi elektrony, což lze, pokud $q_i \gg |q_e|$. Předpokládáme nerelativistické teploty. Pokud není teplota iontů podstatně vyšší než elektronová teplota, můžeme zanedbat rychlosti iontů ve srovnání s elektrony a elektrony budou měnit směr pohybu při rozptylu na nepohyblivých těžkých rozptylových centrech. Srážkový integrál se tím značně zjednoduší, člen s derivací iontového rozdělení po integraci vypadne a

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}=\frac{q_e^2 q_i^2 n_i m_e}{8\pi\varepsilon_0^2}\ln\Lambda_{ei}\frac{\partial}{\partial p_{ek}}\left(\frac{p_e^2\delta_{kl}-p_{ek}p_{el}}{p_e^3}\frac{\partial f_e}{\partial p_{el}}\right)=\frac{q_e^2 q_i^2 n_i m_e}{8\pi\varepsilon_0^2}\ln\Lambda_{ei}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial p_{ek}}\left\{f_e\frac{p_e^2\delta_{kl}-p_{ek}p_{el}}{p_e^3}\left[-\frac{p_x\delta_{xl}+p_y\delta_{yl}+p_z\delta_{zl}}{k_B T_\perp}+p_z\delta_{zl}\left(\frac{1}{k_B T_\perp}-\frac{1}{k_B T_\parallel}\right)\right]\right\}$$

První člen v hranaté závorce po sumaci vypadne (odpovídá symetrickému Maxwellovu rozdělení) a tak

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{T_\parallel - T_\perp}{k_B T_\parallel T_\perp} \frac{q_e^2 q_i^2 n_i}{8\pi\varepsilon_0^2} \ln\Lambda_{ei} \frac{\partial}{\partial p_{ek}} \left(\frac{p_e^2 \delta_{kz} - p_{ek} p_{ez}}{p_e^3} p_{ez} f_e \right)$$

Vynásobíme tuto kinetickou rovnici výrazy $\left(p_x^2 + p_y^2\right)/2\, m_e n_e$ a $p_z^2/2\, m_e n_e$ a integrujeme přes prostor hybností. Dostaneme rovnice pro časový vývoj teplot

$$\frac{\mathrm{d}\, k_B T_\perp}{\mathrm{d}\, t} = -\frac{1}{2} \nu_p \left(k_B T_\perp - k_B T_\parallel\right) \qquad \frac{\mathrm{d}\, k_B T_\parallel}{\mathrm{d}\, t} = \nu_p \left(k_B T_\perp - k_B T_\parallel\right),$$

kde při malém rozdílu příčné a podélné teploty $T_\perp \simeq T_\parallel \simeq T$ je

$$\nu_p \cong \frac{q_e^2 q_i^2 n_i}{8\pi\varepsilon_0^2 m_e \left(k_B T\right)^2} \ln\Lambda_{ei} \int \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\left(2\pi m_e k_B T\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2 m_e k_B T}\right) p_z^2 \frac{3 p_z^2 - p^2}{p^3} = \frac{4}{5} \nu_{ei}$$

Pokud započteme i vzájemné srážky elektronů, pak

$$\nu_p = \frac{4}{5} \nu_{ei} \left(1 + \left| \frac{q_e}{q_i} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_\parallel = -\nu_p \left(T_\parallel - T_\perp\right) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_\perp = -\frac{1}{2} \nu_p \left(T_\perp - T_\parallel\right)$$

C) Vysokofrekvenční vodivost plazmatu a srážková absorpce

Předpokládejme plazmu s konstantní elektronovou hustotou n_e a s neutralizujícím pozadím nehybných iontů. Elektrické pole elektromagnetické vlny budeme popisovat v dipólovém přiblížení $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$. Silové působení magnetického pole lze pro nerelativistické intenzity zanedbat.

Kinetická rovnice pro elektrony je pak

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} - e\vec{E}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = A\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{p^2\delta_{ij} - p_i p_j}{p^3}\frac{\partial f_e}{\partial p_j}\right) + C_{ee}\left(f_e\right) ,$$

kde $q_e = -e$, $q_i = Ze$, $A = Ze^4 m_e n_e \ln\Lambda_{ei} / (8\pi\varepsilon_0^2)$ a člen $C_{ee}(f_e)$ reprezentuje vzájemné srážky elektronů. Vzájemné srážky elektronů ovlivní symetrickou část rozdělovací funkce, ale neovlivní přímo změnu rozdělení vyvolanou elektrickým polem, a proto je nemusíme při výpočtu vodivosti uvažovat. Vlastními úhlovými funkcemi operátoru elektron-iontových srážek jsou sférické harmon6iky, rozdělovací funkci lze rozvést do řady dle sférických harmonik. Nechť elektrické pole je ve směru osy z. Pro slabé pole, kdy je oscilační rychlost << tepelná, stačí uvažovat

$$f_e(\vec{p}) \cong f_0(p) + f_1(p)\cos\theta = f_0(p) + \frac{p_z}{p} f_1(p)$$

Pak linearizovaná kinetická rovnice má tvar

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - eE\frac{\partial f_0}{\partial p} = -\frac{2A}{p^3} f_1 .$$

Zatímco f_0 je pomalu proměnná, E a f_1 oscilují s frekvencí ω.

Využijeme komplexní notace $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ a pak

$$f_1(p) = ieE_0 \frac{\partial f_0}{\partial p}\left(\omega + \frac{i\,2A}{p^3}\right)^{-1} = \frac{eE_0}{\omega}\left(i + \frac{2A}{\omega p^3}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{2A}{\omega p^3}\right)^2}\frac{\partial f_0}{\partial p}$$

Označíme $g(p) = 1/\left[1+\left(2A/\omega p^3\right)^2\right]$; funkce $g(p) \cong 1$ s výjimkou malého okolí bodu p=0. Imaginární část proudu vede k příspěvku $-\omega_p^2/\left(\omega^2+\nu_{ei}^2\right)$ do reálné části permitivity. Reálná část f_1 vede k absorpci elektromagnetické vlny a Joulovu ohřevu. Absorbovaný výkon je pak

$$P_{abs} = \left\langle \vec{j}\vec{E} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_0\left(-e\right)\int \mathrm{v}_z \frac{p_z}{p} f_1\left(p\right)\mathrm{d}^3 p \right] = -\frac{eE_0}{2m_e}\int \frac{p_z^2}{p}\frac{eE_0}{\omega} g\left(p\right)\frac{2A}{\omega p^3}\times$$

$$\times\frac{\partial f_0}{\partial p}\mathrm{d}^3 p = -\frac{e_2 E_0^2 A}{m_e\omega^2}\int_0^\infty \mathrm{d}p\int_0^\pi d\theta\cos^2\theta\frac{g\left(p\right)}{p^2}\frac{\partial f_0}{\partial p}2\pi p^2\sin\theta =$$

$$= -\frac{e_2 E_0^2}{m_e\omega^2}\frac{4\pi A}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}p\, g\left(p\right)\frac{\partial f_0}{\partial p} \cong \frac{4\pi A}{3}\frac{e_2 E_0^2}{m_e\omega^2} f_0\left(p=0\right)$$

Srážková absorpce prakticky neovlivní tvar rozdělovací funkce f_0, pokud jsou dostatečně časté elektron-elektronové srážky $\nu_{ee}\mathrm{v}_{Te}^2 \gg \nu_{ei}\mathrm{v}_{osc}^2$. Tato podmínka je ekvivalentní podmínce $Z\,\mathrm{v}_{osc}^2 \ll \mathrm{v}_{Te}^2$. Pro mnohonásobně ionizované tato podmínka nemusí být splněna, i když platí náš původní předpoklad $\mathrm{v}_{Te}^2 \gg \mathrm{v}_{osc}^2$ a takovém případě vede srážková absorpce k nemaxwellovskému rozdělení elektronů. Pokud platí $Z\,\mathrm{v}_{osc}^2 \gg \mathrm{v}_{Te}^2$, lze elektron-elektronové srážky úplně zanedbat. Označuje-li f_{1R} reálnou část f_1 a $\langle\rangle$ středování přes úhly, pak

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{1}{2}\left\langle eE_0\frac{\partial}{\partial p_z}\left[\frac{p_z}{p}f_{1R}(p)\right]\right\rangle_\theta=\frac{eE_0}{6p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 f_{1R}\right)$$

Po dosazení za f_{1R} v přiblížení $g(p) \cong 1$ rovnice přejde do tvaru

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}=\frac{e^2E_0^2A}{\omega^2}\frac{1}{3p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\frac{\partial f_0}{\partial p}\right).$$

Hledáme řešení, které v čase nemění tvar (samopodobnostní řešení – angl. self-similar). Předpokládáme rozdělení ve tvaru

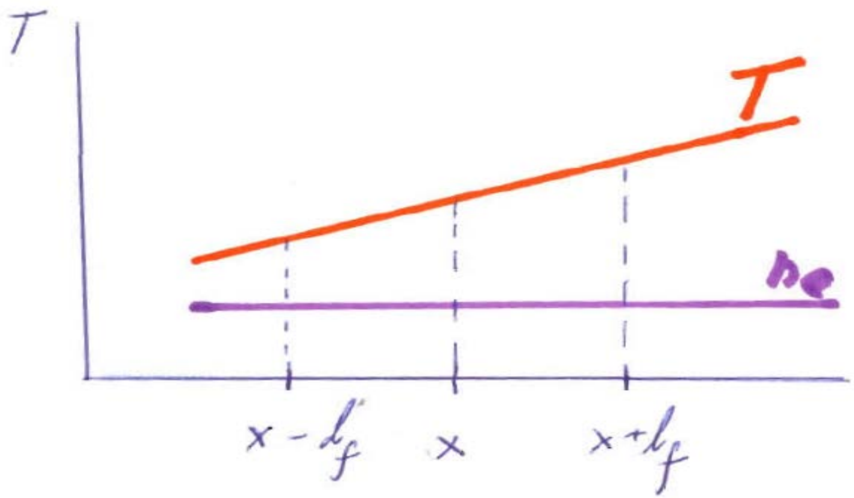
$f_0(p)=\dfrac{C_\alpha}{q^3(t)}\exp\left(-\dfrac{p^\alpha}{\alpha q^\alpha(t)}\right)$. Zjistíme, že $\alpha = 5$ a $C_5=5^{2/5}n_e/\Gamma(7/5)$.

Tepelná hybnost $q(t)$ je pak dána rovnicí

$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^2E_0^2}{\omega^2}\dfrac{A}{3q^4}$ s řešením $q=\left(\dfrac{5e^2E_0^2A}{3\omega^2}t\right)^{1/5}$ a $k_BT_e=\dfrac{4\pi\,5^{4/5}}{3^{7/5}\Gamma(7/5)m_e}\left(\dfrac{e^2E_0^2A}{\omega^2}t\right)^{2/5}$

K tomuto supermaxwellovskému rozdělení řešení rovnice pro f_0 asymptoticky směřuje z libovolného počátečního rozdělení. Této modifikaci rozdělovací funkce se říká Langdonův efekt - A.B. Langdon, Phys. Rev. Lett. **44**, 575 (1980).

D) Elektronová tepelná vodivost plazmatu



Iontový tepelný tok lze vzhledem k malé rychlosti tepelného pohybu iontů zanedbat. Jednoduchý názorný postup umožní určit koeficient elektronové tepelné vodivosti s přesností až na konstantu řádu 1. Předpokládáme plazmu o konstantní hustotě s gradientem teploty. V hrubé představě kladný tok nesou elektrony pohybující z místa o volnou střední dráhu l_f vzdáleného zpátky od daného x a záporný tok nesou elektrony z místa $x+l_f$. Pak

$$Q \cong Q_+\left(x-l_f\right) - Q_-\left(x+l_f\right) \cong \tfrac{1}{6} n \mathrm{v}_T\left(x-l_f\right)\tfrac{3}{2} k_B T_e\left(x-l_f\right) - \tfrac{1}{6} n \mathrm{v}_T\left(x+l_f\right) \times$$

$$\times \tfrac{3}{2} k_B T_e\left(x+l_f\right) \cong -\frac{1}{4} n k_B 2 l_f \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{v}_T T_e\right) = -\frac{3}{4} n \frac{k_B^{3/2} l_f T_e^{1/2}}{m_e^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x} T_e \sim -T_e^{5/2} \frac{\partial}{\partial x} T_e$$

a nezávisí na hustotě, protože střední volná dráha $l_f = \mathrm{v}_T / \nu \sim T_e^2 / n$. Odvození také demonstruje, že obvyklé vyjádření tepelného toku z gradientu teploty je jen prvním členem Taylorova rozvoje, a tudíž platí pouze, když je charakteristická délka L_T profilu teploty >> střední volná dráha l_f.

Nyní odvodíme tepelný tok z Fokker-Planckovy rovnice. Ionty budeme pokládat a nehybné a budeme předpokládat, že k zachování kvazineutrality je nutné, aby proud byl nulový, a tok tepla tedy bude doprovázen vznikem elektrického pole. Předpokládejme gradient teploty ve směru osy x. Pak

$$f \cong f_M(x,p) + \frac{p_x}{p} f_1(x,p) = \frac{n_e}{\left(2\pi m_e k_B T_e(x)\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2 m_e k_B T_e(x)}\right) + \frac{p_x}{p} f_1(x,p)$$

Potom pro f_1 platí rovnice

$$\mathrm{v}_x \frac{\partial f_M}{\partial x} - eE_x \frac{p_x}{p} \frac{\partial f_M}{\partial p} = -\frac{2A}{p^3} \frac{p_x}{p} f_1 + 2C^{ee}\left(f_M, f_1\right)$$

Budeme opět předpokládat Z>>1 a zanedbáme vliv elektron-elektronových srážek. Pak můžeme f_1 psát následovně

$$f_1 = -\frac{p^4}{2Am_e} f_M \left[\frac{p^2}{2m_e k_B T_e} - \frac{3}{2}\right] \frac{1}{T_e} \frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x} - \frac{eE}{2A} \frac{p^4}{m_e k_B T_e} f_M$$

Elektrické pole E získáme z podmínky nulového toku elektronů

$$0=\int \mathrm{v}_x \frac{p_x}{p} f_1 \,\mathrm{d}^3 p=\frac{4\pi}{3m_e}\int_0^\infty p^3 f_1 \,\mathrm{d}p \qquad \Rightarrow \qquad \frac{eE}{m_e k_B T_e}=-\frac{5}{2m_e}\frac{1}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}$$

a funkce f_1 je tedy

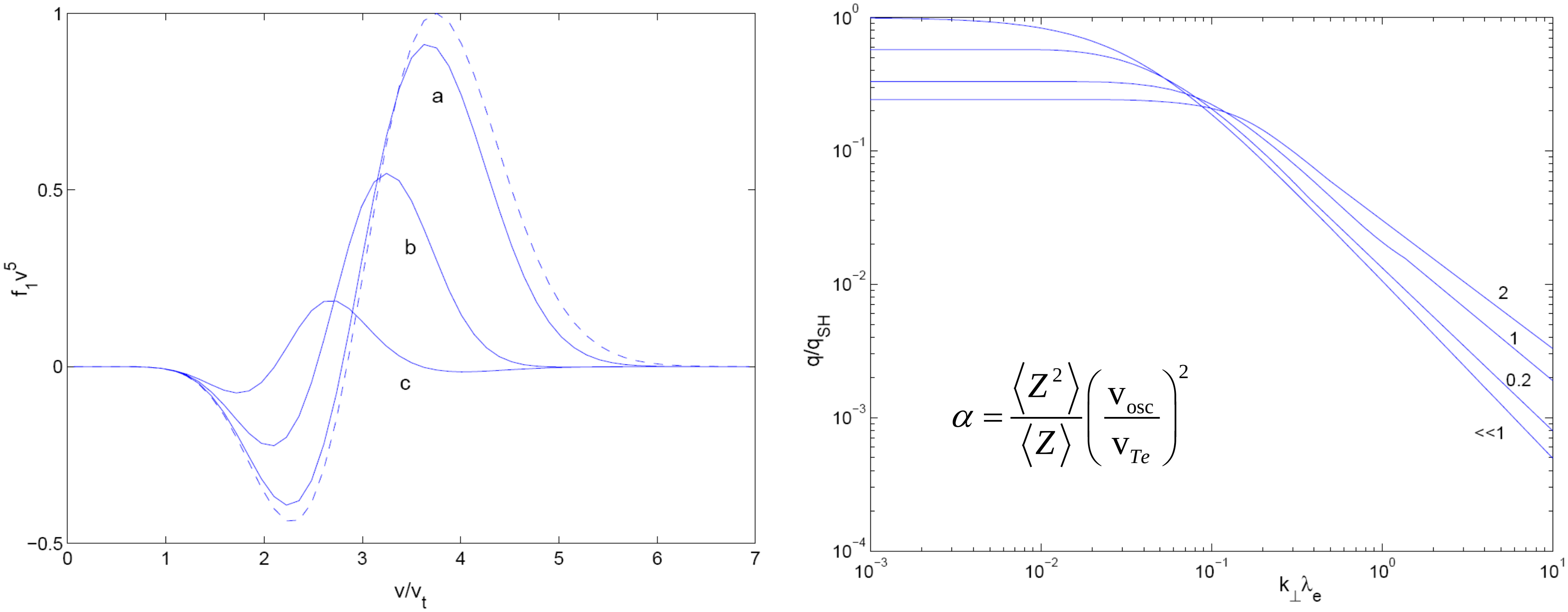
$$f_1=-\frac{p^4}{2Am_e} f_M \left[\frac{p^2}{2m_e k_B T_e}-4\right]\frac{1}{T_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x} \quad .$$

Po integrování získáme tepelný tok Q

$$Q=\int \frac{p^2}{2m_e} \mathrm{v}_x \frac{p_x}{p} f_1 \,\mathrm{d}^3 p=-\frac{4\pi\left(2\pi m_e k_B\right)^{7/2} n_e T_e^{5/2}}{Am_e}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}=$$

$$=-\frac{\left(8\pi\varepsilon_0\right)^2\left(2\pi k_B\right)^{7/2} m_e^{3/2}}{Z\,e^4 \ln\Lambda_{ei}} T_e^{5/2}\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}=-\kappa_0\frac{\mathrm{d}T_e}{\mathrm{d}x}$$

Největší část tepelného toku nesou elektrony s rychlostí $\mathrm{v}\simeq 3\mathrm{v}_{Te}=3\sqrt{k_B T_e/m_e}$. Spitzer a Härm (Phys. Rev. **89** (1953), 977) spočítali numericky koeficient tepelné vodivosti se započtením elektron-elektronových srážek. Numerický výsledek lze s dobrou přesností aproximovat vzorcem $\kappa\cong\kappa_0\left(1+3.3/Z\right)^{-1}$.



Levý panel - Rozdělovací funkce $f_1 v^5$ odpovídající tepelnému toku elektronů s danou rychlostí pro různá $k_\perp \lambda_e$ ($k_\perp = 2\pi/L_T$, kde L_T je charakteristická délka profilu teploty; λ_e je střední volná dráha elektronu s tepelnou rychlostí v_T): $k_\perp \lambda_e = 0$ (čárkovaná čára – Spitzer-Harmův tepelný tok); $k_\perp \lambda_e = 0.01$ (a); $k_\perp \lambda_e = 0.05$ (b); $k_\perp \lambda_e = 0.2$ (c)

Pravý panel – Poměr tepelného toku q ku klasickému Spitzer-Harmovu tepelnému toku q_{SH} v závislosti na $k_\perp \lambda_e$ a na parametru α pro srážkovou absorpci laserového záření. [mocnina u rozdělení $m = 2 + 3/(1+ 1.67/ \alpha^{0.724})$]