

Difúze

Fickův zákon difúze v plynu

Předpokládejme ideální plyn s konstantní teplotou T a konstantním tlakem p v klidu, ve kterém je nízká nehomogenní hmotnostní koncentrace příměsi α

Pak ve stacionárním stavu musí být celková síla na příměs α nulová

$$0 = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha p} \vec{u}_\alpha - \nabla p_\alpha = -m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha p} \vec{u}_\alpha - k_B T \nabla n_\alpha ,$$

kde $\nu_{\alpha p}$ je srážková frekvence příměsi α s molekulami plynu

Tok částic α je
$$\vec{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \vec{u}_\alpha = -D_\alpha \nabla n_\alpha = -\frac{k_B T}{m_\alpha \nu_{\alpha p}} \nabla n_\alpha \quad \text{Fickův zákon}$$

Po dosazení do rovnice kontinuity

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = \text{div}(D_\alpha \nabla n_\alpha) = D_\alpha \Delta n_\alpha \quad \text{neboť koeficient difúze je zde konstantní}$$

Parabolická parciální diferenciální rovnice $L^2 = D\tau$

Doporučená literatura: Chen kap. 5, 8.2

Difúze ve slabě ionizovaném plynu

$$n_n = > \quad \lambda_f = \frac{1}{n_n \sigma} \quad \nu = n_n \langle \sigma v \rangle = \left\langle \frac{v}{\lambda_f} \right\rangle$$

Pohybové rovnice (bez nebo podél magnetického pole)

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = q_\alpha n_\alpha \vec{E} - m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha n} \vec{u}_\alpha - \nabla p_\alpha$$

α je typ částic, stacionární stav. $\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} = 0$, člen $(\vec{u}_\alpha \nabla) \vec{u}_\alpha$ zanedbáme (kvadratický)

$$\vec{u}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \vec{E} - \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \cdot \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha} \quad \vec{\Gamma}_\alpha = n_\alpha \vec{u}_\alpha = \pm \mu_\alpha n_\alpha \vec{E} - D_\alpha \nabla n_\alpha$$

μ_e, μ_i jsou pohyblivosti $\mu_\alpha = \left| \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}} \right|$ D_e, D_i difúzní koeficienty $D_\alpha = \frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}$

Ambipolární difúze – při difúzi vzniká elektrické pole zajišťující kvazineutralitu

hustota náboje musí zůstat $\approx 0 \Rightarrow q_e \vec{\Gamma}_e + q_i \vec{\Gamma}_i = 0 \quad q_e n_e + q_i n_i \approx 0$

Slabě ionizovaný plyn $Z = 1 \quad q_i = e \quad q_e = -e \quad \Gamma_e = \Gamma_i = \Gamma \quad n_e = n_i = n$

$$\vec{\Gamma} = \mu_i n \vec{E} - D_i \nabla n = -\mu_e n \vec{E} - D_e \nabla n \Rightarrow \vec{E} = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n}$$

Elektrické pole je úměrné gradientu hustoty a koeficient ambipolární difúze D_a je

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \nabla n = -D_a \nabla n$$

v plazmatu bez B je $\mu_e \gg \mu_i$ a

$$D_a \approx D_i + \frac{T_e}{T_i} D_i \quad (\approx 2D_i \text{ při stejné teplotě } e \text{ a } i)$$

Difúze ve směru kolmém na B

Ve slabě ionizovaném plynu je ν srážková frekvence sledovaných částic s neutrály, necht' B je ve směru osy z a gradient hustoty je ve směru osy x , a necht' $\tau = \nu^{-1}$

$$0 = -k_B T \frac{\partial n}{\partial x} + n q u_y B - \nu n m u_x \quad 0 = -n q u_x B - \nu n m u_y$$

Pak

$$u_x = -\frac{k_B T}{n m \nu \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\nu^2}\right)} \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow \Gamma_{\perp} = -\frac{k_B T}{m \nu (1 + \omega_c^2 \tau^2)} \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{D_{\parallel}}{(1 + \omega_c^2 \tau^2)} \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$D_{\perp} = \frac{D_{\parallel}}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad \text{Pokud} \quad \omega_c \tau = \frac{\omega_c}{\nu} = \frac{\lambda_f}{r_L} \gg 1 \quad \text{pak} \quad D_{\perp} = \frac{D}{\omega_c^2 \tau^2} = \frac{k_B T \nu}{m \omega_c^2} = \frac{m k_B T \nu}{q^2 B^2}$$

Difúzní koeficient napříč B je přímo úměrný srážkové frekvenci, bez srážek by k žádné difúzi nemohlo dojít, po srážce se částice posune o maximálně 2 Larmorovy radiusy, čili Larmorův rádius nahrazuje střední volnou dráhu.

Napříč B ionty pohyblivější než elektrony – při ambipolární difúzi vznikající elektrické pole urychlí elektrony a zpomalí ionty (ambipolární pole ale může být zkratováno)

Navíc dostanu tok částic ve směru kolmém na B a ∇n , jde o diamagnetický drift, který jsme při zanedbání srážek ($\omega_c \tau \gg 1$) odvodili už dříve (kapitola 4).

V plně ionizovaném plazmatu bude srážkový člen pro elektrony $\nu_{ei} n_e m_e (\vec{u}_i - \vec{u}_e)$, rychlost difúze elektronů a iontů ve směru gradientu hustoty bude stejná, ambipolární pole nevznikne (navíc pole ve směru gradientu hustoty neovlivní rychlost difúze v tomto směru).

$$D_{\perp} = \frac{k_B (T_e + T_i / Z) \nu_{ei}}{m_e \omega_c^2} = \frac{m_e k_B (T_e + T_i / Z) \nu_{ei}}{e^2 B^2} \sim n T^{-1/2} B^{-2}$$

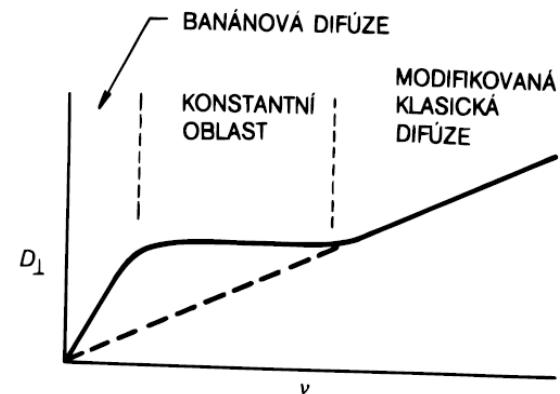
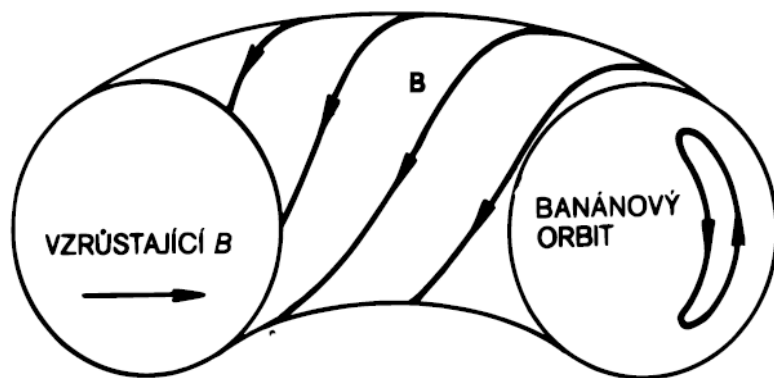
Klasická srážková difúze je úměrná B^{-2} , ale často při magnetickém udržení (v tokamacích apod.) je difúze větší, úměrná B^{-1}

Z experimentálních výsledků dedukován koeficient **Bohmovy difúze** $D_{\perp} \approx \frac{1}{16} \frac{kT_e}{eB}$

- Různá vysvětlení -
- 1) Závady magnetického pole - možnost silokřivky vedoucí na stěnu
 - 2) Nesymetrické elektrické pole – asymetrie vakuové komory či asymetrie tvorby či ohřevu plazmatu $\Rightarrow ExB$ drift - konvektivní cely
 - 3) Nestability vedoucí ke generaci plazmových vln, které vytvářejí oscilující elektrické pole a ExB drifty

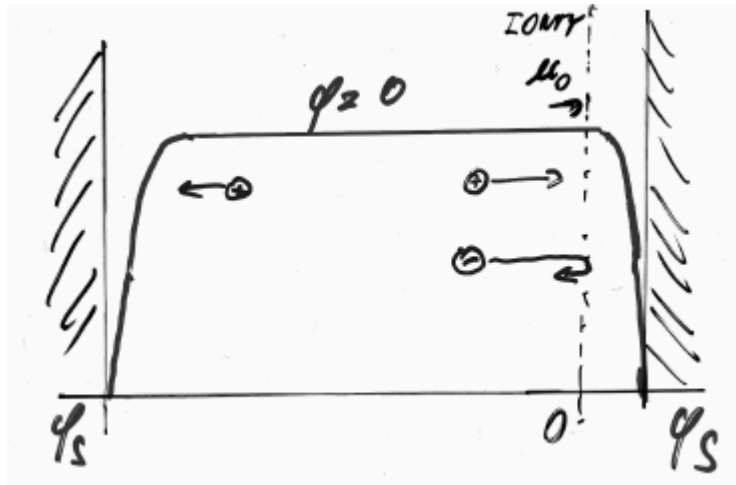
Pečlivou konfigurací pole lze difúzi snížit a přiblížit se ke klasickému srážkovému limitu

V toroidálních magnetických nádobách může být difúze zvýšena v důsledku existence protáhlých uzavřených orbitů („banánový orbit“) a mluvíme o **neoklasické difúzi**.



Oblasti bez kvazineutality

Stěnová vrstva



rekombinace na stěnách

Σ toku náboje na stěny = 0

Ionty – předpokládejme studené s rychlostí u_0
pro $\varphi = 0$

$$u = \sqrt{u_0^2 - \frac{2e\varphi}{m_i}} \quad | \quad \varphi < 0$$

$$n_i(x) = \frac{n_0 u_0}{u(x)} = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{2e\varphi}{m_i u_0^2}}}$$

$$n_e(x) = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right)$$

Elektrony – v rovnováze s polem

Poissonova rovnice

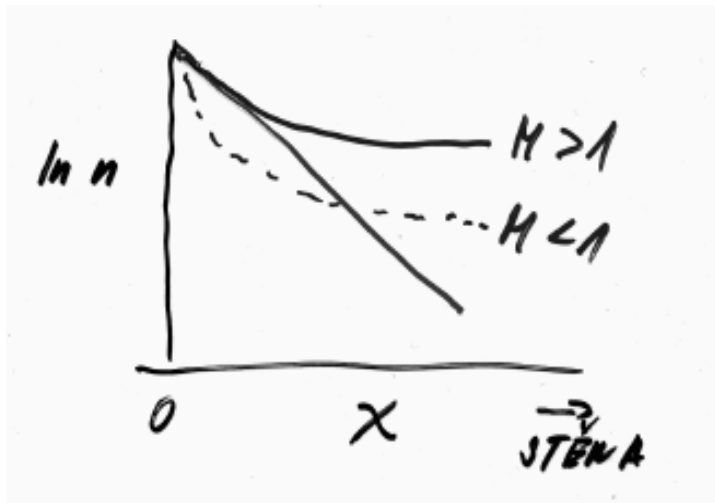
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}(n_e - n_i) = \frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2e\varphi}{m_i u_0^2}}} \right]$$

převédeme do bezrozměrných souřadnic

$$\chi = -\frac{e\varphi}{k_B T_e} \quad \xi = \frac{x}{\lambda_D} \quad M = \frac{u_0}{\sqrt{k_B T_e / m_i}} = \frac{u_0}{c_s}$$

$$\chi'' = \left(1 + \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} - e^{-\chi} \quad \text{rovnici } \times \chi' \text{ a pak integrujeme } \int_0^\xi$$

$$\frac{1}{2}(\chi'^2 - \chi_0'^2) = M^2 \left[\left(1 + \frac{2\chi}{M^2}\right)^{1/2} - 1 \right] + e^{-\chi} - 1 \quad \text{v bodě 0 je } E \approx 0 \text{ a tedy } \chi_0' \approx 0$$



Stěnová vrstva odpuzuje elektrony a přitahuje ionty

$$\Rightarrow n_i > n_e$$

Okolí roviny, kde plazma vstupuje do stěnové vrstvy, odvodíme z Taylorova rozvoje pro $\chi \approx 0$ členy úměrné 1 a χ se vyruší, první nenulové $\sim \chi^2$

$$\frac{1}{2} \chi'^2 \approx \frac{1}{2} \chi^2 \left(-\frac{1}{M^2} + 1 \right) > 0 \quad \text{lze jen pro } M > 1$$

Bohmovo kritérium – stacionární řešení existuje jen pro $u_0 > c_s$

Jak zjistit potenciál stěny φ_s ?

$$\frac{1}{2} v_{T_e} \cdot n_0 \exp\left(\frac{e\varphi_s}{k_B T_e}\right) \approx n_0 u_0 \quad \varphi_s \approx \frac{k_B T_e}{e} \ln \frac{2u_0}{v_{T_e}}$$

V okolí stěny $n_e \ll n_i, 2\chi \gg M^2 \Rightarrow \chi'' = \left(1 + \frac{2\chi}{M^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{M}{\sqrt{2\chi}}$

po integraci (z označuje místo, kde lze už předpokládat $n_e \approx 0$)

$$\frac{1}{2}(\chi'^2 - \chi_z'^2) = \sqrt{2}M(\chi^{1/2} - \chi_z^{1/2})$$

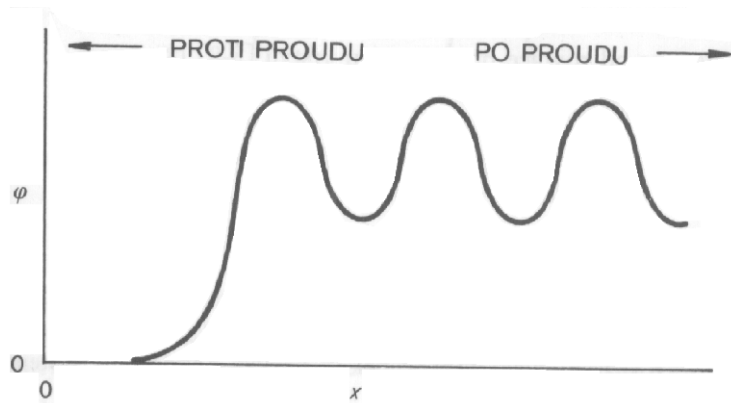
za předpokladu $\chi_z \approx 0, \chi_z' \approx 0$ $\chi' = 2^{3/4} M^{1/2} \chi^{1/4}$

poloha stěny je $\xi_s = \xi_z + \xi_d$ (ξ_d je tloušťka vrstvy $n_e \approx 0$)

pak platí vztah $M = \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{\chi_s^{3/2}}{\xi_d^2} \Rightarrow J = en_0 u_0 = \frac{4}{9} \left(\frac{2e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{\epsilon_0 |\varphi_s|^{3/2}}{d^2}$

Child-Langmuirův zákon

Podobnou stěnovou vrstvou je i



bezesrážková ionto-akustická rázová vlna
(collisionless shock)

Sagděevův potenciál