Jednokapalinové přiblížení (MHD-magnetohydrodynamika)

Zákon zachování hmoty – zákony zachování počtu elektronů a iontů násobeny hmotnostmi a sečteny

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathrm{div}\left(n_e \vec{u}_e\right) = 0 \qquad\qquad \rho_M = m_e n_e + M_i n_i$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathrm{div}\left(n_i \vec{u}_i\right) = 0 \qquad\qquad \vec{u} = \frac{m_e n_e \vec{u}_e + M_i n_i \vec{u}_i}{m_e n_e + M_i n_i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho_M + \mathrm{div}\left(\rho_M \vec{u}\right) = 0 \qquad (1) \qquad\qquad \vec{u} \approx \vec{u}_i\,,\ \rho_M \simeq \rho_i$$

Jestliže vynásobíme obě rovnice nábojem (q_e, q_i) a sečteme, dostane zákon zachování náboje (rovnice pro hustotu náboje ρ_c a hustotu proudu $\vec{j}$)

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \qquad (2)$$

Doporučená literatura: Chen 5.7, 6.2-6.4, 6.7, Nicholson kap. 8

Zákon zachování hybnosti pro elektrony a ionty můžeme zapsat

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha\right)+\operatorname{div}\left(m_\alpha n_\alpha \vec{u}_\alpha \otimes \vec{u}_\alpha\right)=q_\alpha n_\alpha\left(\vec{E}+\vec{u}_\alpha \times \vec{B}\right)-\nabla p_\alpha-\sum_\beta m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta}\left(\vec{u}_\alpha-\vec{u}_\beta\right)$$

kde operátor $\otimes$ je definován $\vec{a}\otimes\vec{b}=a_i\, b_j$

Po sečtení dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_M \vec{u}\right)+\operatorname{div}\left(\rho_M \vec{u}\otimes\vec{u}\right)=\rho_c \vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}-\nabla p \qquad (3)$$

kde $\rho_c = q_e n_e + q_i n_i \qquad \vec{j} = q_e n_e \vec{u}_e + q_i n_i \vec{u}_i \qquad p = p_e + p_i$

(výměna hybnosti mezi elektrony a ionty $A_{ei} = -m_e n_e \nu_{ei}\left(\vec{u}_e - \vec{u}_i\right)$ a $A_{ie} = -M_i n_i \nu_{ie}\left(\vec{u}_i - \vec{u}_e\right)$ se vyruší)

k získání rovnice pro $\vec{j}$ lze sečíst pohybové rovnice vynásobené $\left(\times q_\alpha / m_\alpha\right)$, ale uzavřít systém rovnic bude obtížné bez použití předpokladu $m_e \ll M_i$.

Vyjděme tedy z předpokladu zanedbatelné hmotnosti elektronu a požadujme, aby rozdíl zrychlení elektronů a iontů byl nulový. Zatímco rozdíl zrychlení působeného gravitací je nulový, u ostatních sil je zrychlení iontů zanedbatelné proti elektronům a tedy chceme, aby jejich celková síla, působící na elektrony, byla nulová

$$0 = -\nabla p_e + q_e n_e \left(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B} \right) - m_e n_e \nu_{ei} \left(\vec{u}_e - \vec{u}_i \right)$$

Dále využijeme kvazineutrality pro pomalé pohyby a vyjádříme elektrické pole

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} - \frac{M_i}{e\rho_M Z} \nabla p_e + \frac{M_i}{e\rho_M Z} \vec{j} \times \vec{B} + \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e} \vec{j} \qquad (4)$$

Proud podél magnetického pole – dominují elektrony

$$-\frac{e\vec{E}}{m_e} - \nu_{ei} \cdot \vec{u}_e \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{j} = -e n_e \vec{u}_e = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}} \vec{E} \qquad \sigma_E = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu_{ei}}$$ el. vodivost

a poslední člen rovnice (4) lze tedy upravit do tvaru $\dfrac{\vec{j}}{\sigma_E}$

Z (4) získáme rovnici pro proud

$$\vec{j}+\frac{M_i\sigma_E}{e\rho_M Z}\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)=\sigma_E\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}+\frac{M_i}{e\rho_M Z}\nabla p_e\right) \qquad (5)$$

pro uzavření rovnic vyjádříme $p_e \simeq \alpha p$, kde $\alpha = 1$ pro $Z >> 1$ a $\alpha = 1/2$ pro $Z = 1$, $T_e = T_i$

po přidání Maxwellových rovnic a stavové rovnice pro tlak dostaneme uzavřený systém rovnic, který lze řešit

<u>V MHD se obvykle rovnice zjednoduší pomocí dalších předpokladů:</u>

zanedbá se Hallův proud proti vlivu proudění $\vec{j}\times\vec{B} << \vec{u}\times\vec{B}$.

pro nízké teploty zanedbáme tlak v rovnici pro proud (tlak vede k Biermannovu bateriovému členu – bez něho v MHD nemůže *B* vzniknout z nuly)

pak lze vyjádřit proud

$$\Rightarrow \quad \vec{j}=\sigma_E\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right) \qquad \text{Ohmův zákon} \qquad (6)$$

Ideální MHD $\left(\nu \to 0 \Rightarrow \sigma_E \to \infty\right)$

$$\frac{\partial \rho_M}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_M \vec{u}\right) = 0$$

$$\rho_M \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\vec{t}} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

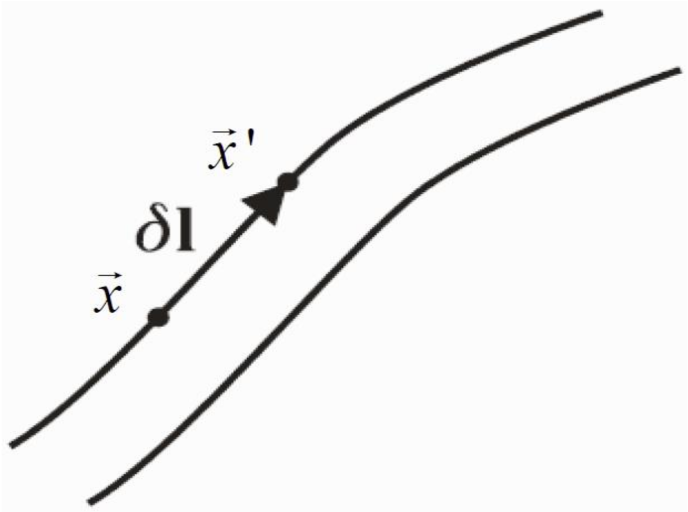
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\vec{u} \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\nabla$$

Zamrzání magnetického pole do plazmatu

plazma se pohybuje podle proudnic, element proudnice je $\delta\vec{l} = \vec{x}' - \vec{x}$



a rychlost $\vec{u}'$ v bodě $\vec{x}'$ je $\vec{u}' = \vec{u} + \left(\delta\vec{l}\,\nabla\right)\vec{u}$, pak časová derivace elementu proudnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\vec{l} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{x}' - \vec{x}\right) = \vec{u}' - \vec{u} = \left(\delta\vec{l}\,\nabla\right)\vec{u} \quad .$$

Upravíme rovnici pro časovou derivaci B s využitím známé vektorové identity

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{u} + \left(\vec{B}\nabla\right)\vec{u} - \left(\vec{u}\nabla\right)\vec{B}$$

Pokud tuto rovnici zkombinujeme s rovnicí kontinuity, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) + \left(\vec{u}\nabla\right)\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{B}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{B}}{\rho}\nabla\right)\vec{u}$$

Změny vektorů $\delta\vec{l}$ a $\vec{B}/\rho$ jsou dány stejnou rovnicí, tudíž magnetické siločáry sledují pohyb plazmatu, jsou do plazmatu jakoby ***vmraženy***.

Pro povrch S pohybující se spolu s plazmatem platí $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$ (Alfvénův teorém)

Hydromagnetická rovnováha

Vyjdeme z rovnic $\rho_M \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$ $\quad\quad$ $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Rovnováha $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \simeq \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{B} \times \nabla \vec{p}\right) = B^2 \vec{j} - \left(\vec{j} \cdot \vec{B}\right)\vec{B}$$

pro složku $\parallel B$ splněno vždy, $\vec{j}_\parallel$ odtud nelze určit $\left(\vec{j}_\parallel = \sigma_E E_\parallel\right)$

$$\vec{j}_\perp = \frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \qquad \left(\mathrm{rot}\,\vec{B}\right) \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = \mu_0 \left(\vec{j}_\perp \times \vec{B}\right) = \mu_0 \left(\frac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2} \times \vec{B}\right) = \mu_0 \nabla p$$

$$\nabla\left(p + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\right) = \underbrace{\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\nabla\right)\vec{B}}_{\text{často} = 0} \quad \Rightarrow \quad p + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2} = \text{const.}$$

diamagnetický efekt

$B^2/2\mu_0$ = **magnetický tlak**

$$\beta = \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}} = \frac{\Sigma n_\alpha k_B T_\alpha}{\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

termokinetický tlak/magnetický tlak

(parametr β zařízení udává poměr maximálního termo-kinetického tlaku k maximálnímu magnetickému tlaku)

Neideální MHD – difúze plazmatu do magnet. pole

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{j} = \sigma_E \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

budeme předpokládat $u \simeq 0$

$$rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 \sigma_E} \nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \frac{1}{\mu_0 \sigma_E} \Delta \vec{B}$$

τ je doba průniku plazmatu do pole

$$\tau = L^2 \mu_0 \sigma_E$$

Jde o dobu disipace $\vec{B}$ - přeměna energie pole v teplo

$$W = \frac{j^2}{\sigma_E} = \frac{1}{\sigma_E}\frac{B^2}{\mu_0{}^2 L^2}$$ kde bylo použito $$\left|\vec{j}\right| = \frac{1}{\mu_0}\left|\mathrm{rot}\,\vec{B}\right| = \frac{B}{\mu_0 L}$$

odtud energie disipovaná $$W\tau = \frac{1}{\sigma_E}\frac{B^2}{\mu_0{}^2 L^2}\cdot L^2\mu_0\sigma_E = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Proudění a zároveň průnik

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\sigma_E}\Delta\vec{B} + \nabla\times\left(\vec{u}\times\vec{B}\right)$$

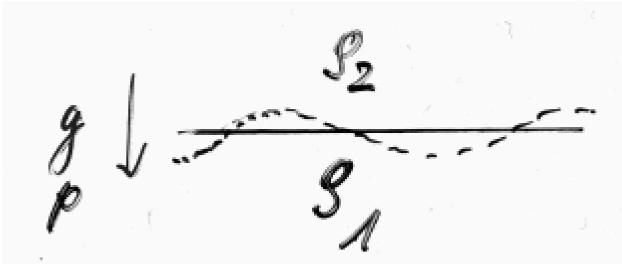
první člen je difúze, druh člen je zamrzání (pole se pohybuje spolu s prouděním)

Magnetické Reynoldsovo číslo $$R_M = \frac{\textit{člen zamrzání}}{\textit{člen difúze}} = \frac{\frac{1}{L}uB}{\frac{1}{\sigma_E\mu_0}\frac{1}{L^2}B} = \sigma_E\mu_0 uL$$

Nestability hnané gradientem tlaku

1. **Rayleigh-Taylorova nestabilita** rozhraní kapalin, pokud

$$\nabla p \cdot \nabla \rho < 0$$



disperzní vztah vln

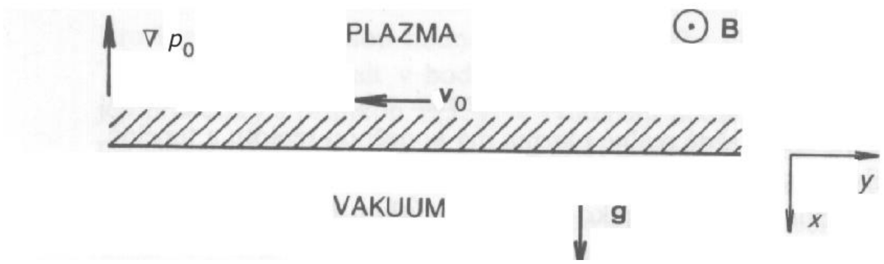
$$\omega^2 = \frac{kg\left(\rho_1 - \rho_2\right)}{\rho_1 + \rho_2}$$

pro $\rho_2 < \rho_1$ vlny na povrchu kapaliny

pro $\rho_2 > \rho_1$ $\omega_1 = i\gamma$ amplituda roste $\Rightarrow$ nestabilita

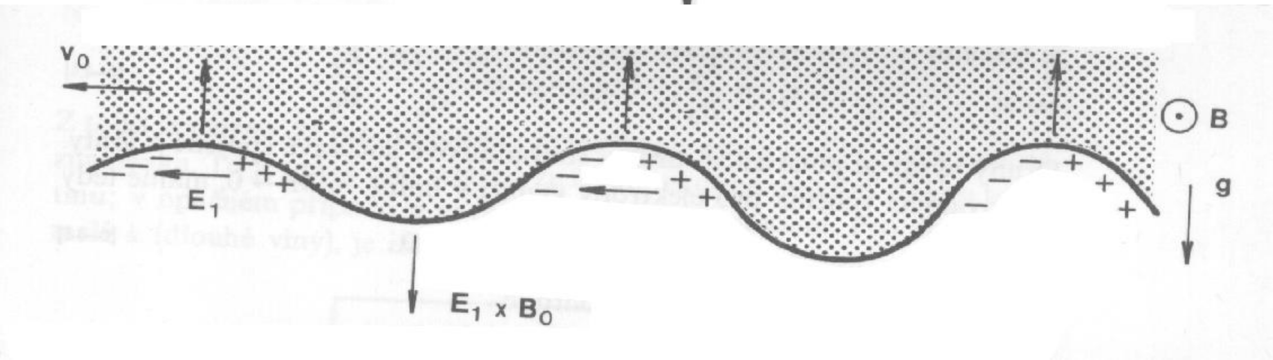
2. Nestabilita plazmatu drženého magnetickým polem (Kruskal-Schwartzschildova)

B lehčí kapalina, plazma těžší kapalina



Drift iontů $\vec{v}_0 = \frac{m_i}{q_i} \frac{\vec{g} \times \vec{B}_0}{{B_0}^2}$,

drift elektronů lze zanedbat



V důsledku pohybu iontů se na zvlněném povrchu vytváří náboj, ten indukuje elektrické pole, a to působí E×B drift iontů a elektronů, který zvětšuje vlny

Odvození z 2 kapalinového modelu (lze též z MHD):

ionty – pohybové rovnice

$$m_i \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \left(\vec{v}_0 \nabla \right) \vec{v}_1 \right] = q_i \left(\vec{E}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{B}_0 \right)$$ neobsahuje *g* (je v rychlosti v_0)

$$\vec{E}_1 = \left(0, E_y, 0\right) \qquad \vec{k} = \left(0, k_y, 0\right) \qquad -i\left(\omega - k_y \mathrm{v}_0\right)\vec{\mathrm{v}}_1 m_i = q_i\left(\vec{E}_1 + \vec{\mathrm{v}}_1 \times \vec{B}_0\right)$$

pro $\left(\omega - k\mathrm{v}_0\right)^2 << \dfrac{q_i^{\,2} B_0^{\,2}}{m_i^{\,2}} = \Omega_c^{\,2} \Rightarrow \mathrm{v}_{1x} = \dfrac{E_{1y}}{B_0} \qquad \mathrm{v}_{1y} = -i\dfrac{\omega - k\mathrm{v}_0}{\Omega_c}\dfrac{E_{1y}}{B_0}$

v_{1x} je $E\times B$ drift (pro ionty i elny), v_{1y} polarizační drift (pro elny zanedbatelný)
rovnice kontinuity pro ionty

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \vec{\mathrm{v}}_0 \cdot \nabla n_1 + n_1 \operatorname{div} \vec{\mathrm{v}}_0 + \vec{\mathrm{v}}_1 \cdot \nabla n_0 + n_0 \operatorname{div} \vec{\mathrm{v}}_1 = 0$$

$$-i\omega n_1 + ik\mathrm{v}_0 n_1 + \mathrm{v}_{1x} \nabla n_0 + ik\mathrm{v}_{1y} n_0 = 0$$

rovnice kontinuity pro elektrony $\quad -i\omega n_1 + \mathrm{v}_{1x} \nabla n_0 = 0$, kde jsme předpokládali Z=1 a kvazineutralitu $n_{i1} = n_{e1}$ po dosazení získáme disperzní vztah

$$\omega = \frac{1}{2} k\mathrm{v}_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} k^2 \mathrm{v}_0^{\,2} + \frac{\vec{g} \cdot \nabla n_0}{n_0}}$$

čili dostatečně dlouhé vlny narůstají, pokud gradient hustoty jde proti tíhovému zrychlení