Generátory náhodných čísel

Pozn. Všem metodám, které používají generátory náhodných čísel, se říká **metody Monte Carlo**. Tyto metody se uplatňují při simulaci přírodních jevů, při simulaci funkce přístrojů, tak i při řešení numerických úloh.

Pozn. Podrobněji o generátorech náhodných čísel a aplikacích metody Monte Carlo (D. Karlen, Carleton Univ. Kanada) – viz
http://kfe.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/Monte-vyuka.pdf

1 Systémové generátory (dodávané s překladačem)

Turbo Pascal generuje náhodná čísla funkcí `Random`, případně `Random(n)` (generátor se inicializuje pomocí `RandSeed(I)` a `Randomize`).
Obvykle jsou **lineární kongruenční**:

$$
\begin{aligned}
I_{j+1} &= (a\,I_j + c) \text{ mod } m \\
\texttt{Random} := \frac{I_{j+1}}{m} &\equiv r\,, \quad \text{kde} \qquad r \in \langle 0, 1)
\end{aligned}
$$

Problémy:

- Náhodná čísla jsou generována periodicky s délkou periody $\leq m$, v některých implementacích `m: Integer(*2) <= 32767`.
- Sekvenční korelace (+korelace konců čísel), umisťujeme-li čísla postupně do k-tic, budou v k-dimenzionálním prostoru na $m^{1/k}$ nebo méně nadplochách.

Pozn. Při nevhodné volbě $a,\ c,\ m$ může být cyklus mnohem kratší než m. I pokud je perioda $\simeq m$, k-tice mohou ležet na podstatně menším počtu nadploch než $m^{1/k}$.

Možné vylepšení je: Zrušit sekvenční korelaci - uložit $\approx$ 100 prvků do pole a podle velikosti dalšího náhodného čísla vybrat prvek pole.

2 Přenosné

- Jednoduché `m: LongInt` na příklad $m = 714025$, $a = 4096$ a $c = 150889$.
- Složitější
  - několik generátorů generuje části čísla
  - přenosný kongruenční a výběr z pole (jen m čísel, nekonečná perioda)
  - jiné metody (lze implementovat i v typu `Real`)

3 Generování náhodných čísel s daným rozdělením

Metoda inverze (transformace rozdělení)

Chceme generovat náhodná čísla od x_{min} do x_{max} s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$. Distribuční funkce rozdělení pravděpodobnosti

$$F(x) = \int_{x_{min}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

nabývá hodnot od 0 do 1.
Generujeme y s rovnoměrným rozdělením mezi 0 a 1 a příslušné x získáme ze vztahu $F(x) = y$ a pak

$$1\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tedy x má požadované rozdělení.

Příklad
Chceme generovat x mezi 0 a ∞ s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = \exp(-x)$.
Pak

$$y = \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-x}$$

a odtud

$$x = -\ln(1-y) \tag{1}$$

Generujeme tedy y pomocí generátoru rovnoměrného rozdělení mezi 0 a 1 a x vypočtené podle vztahu (1) má požadované exponenciální rozdělení.

Příklad
Chceme generovat x mezi 0 a 4 s hustotou pravděpodobnosti $f(x) = x^{-1/2}/4$. Pak

$$y = \frac{1}{4}\int_0^x t^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{x}/2$$

a odtud

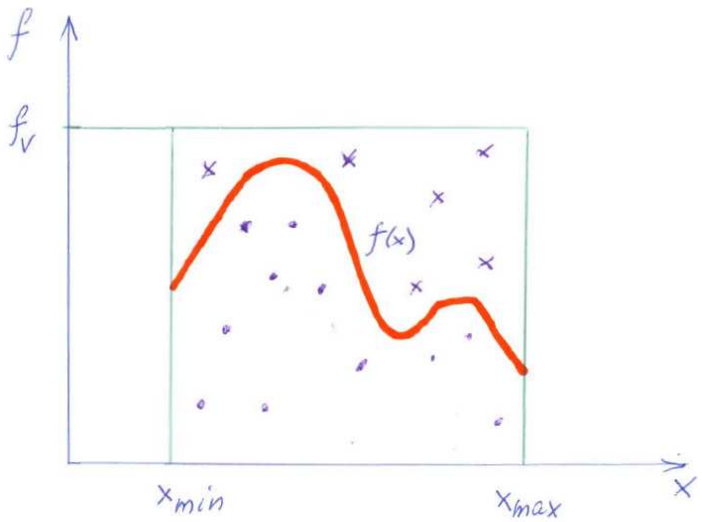
$$x = 4\,y^2 \tag{2}$$

Generujeme tedy y pomocí generátoru rovnoměrného rozdělení mezi 0 a 1 a x vypočtené podle vztahu (2) má požadované rozdělení.

Poznámka Příklady ukazují, že pro metodě inverze nevadí ani nekonečné meze ani integrabilní singularita hustoty pravděpodobnosti. Pro tuto metodu je ale potřebné, aby bylo možno hustotu pravděpodobnosti analyticky integrovat a najít inverzní funkci k integrálu (distribuční funkci).

Metoda odmítnutí

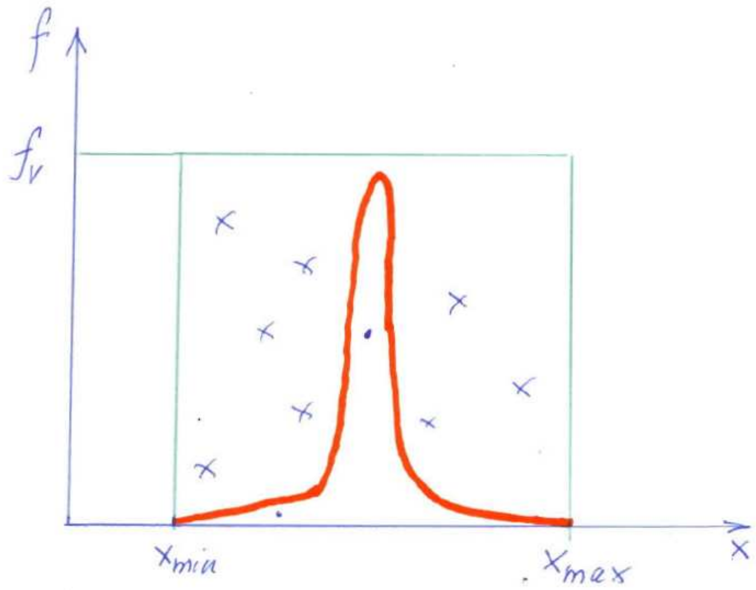
Chceme rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, kde $x_{min} \le x < x_{max}$ a $f_v \ge \max f(x)$. Generujeme dvojice rovnoměrně $(x, y) \in \langle x_{min}, x_{max}) \times \langle 0, f_v)$. Hodnotu x přijmeme, právě když platí $y \le f(x)$. Pravděpodobnost přijetí je tedy úměrná $f(x)$.



Obrázek 1: Princip metody odmítnutí

Poznámka

Metodu odmítnutí lze použít pouze pro rozdělení s omezeným intervalem hodnot x a omezenou distribuční funkcí $f(x)$. Metoda bude neefektivní, pokud hustota pravděpodobnosti obsahuje úzká vysoká maxima.



Obrázek 2: Neefektivnost metody odmítnutí pro úzké maximum